

Geometriák karakterizálása projektív-metrikus terekben

Ph.D. értekezés tézisei

Kozma József

Szegedi Tudományegyetem, Bolyai Intézet

Témavezető:

dr. habil Kurusa Árpád egyetemi docens



Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
Szegedi Tudományegyetem, Bolyai Intézet

Szeged
2017

1. A kutatás előzményei

A 20. század első matematikai konferenciáján David Hilbert a század matematikáját szerinte meghatározó problémák sorát vetette fel. Negyedik helyen említette a klasszikus nemeuklideszi geometriák [14] közös általánosításaként felmerülő azon geometriák meghatározását, amelyekben az egyenes rendelkezik a „*legrövidebb út*” tulajdonságával.

Tanítványai, P. Funk [6] és G. Hamel [8] munkájával kezdve, majd sok más matematikus, mint W. Blaschke [2], A. V. Pogoderov [18] és Szabó Zoltán [19] munkájának köszönhetően mára az összes „*projektív-metrikus*” geometriát elő tudjuk állítani. Ezekből olyan sok van, hogy nem vizsgálhatók egyenként, de Busemann rámutatott [4], hogy a közülük kiválasztható két legfontosabb típus a Minkowski- és a Hilbert-féle, mert ezekben az egyenesek közti izometriák projektivitások (Minkowski-esetben konkrétan affinitások).

A Minkowski-geometriákat alaposan ismerhetjük, hiszen a matematikusok jelentős része ezeket normált vektortérként ismeri, és igen bőséges irodalom veszi számba jellemzőiket és tulajdonságaikat [1, 20], mint például azt, hogy egy Minkowski-sík akkor és csak akkor euklideszi, ha az *egységkör bármely \mathbf{x} és \mathbf{y} vektorára $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \perp_{\mathcal{B}} (\mathbf{x} - \mathbf{y})$* , ahol a \mathcal{B} index a Birkhoff-merőlegességre utal [10].

A Hilbert-geometriák kevésbé ismertek¹, de kutatásuk napjainkban egyre újabb és változatosabb eredményekkel zárkózik fel [17]. Például a hiperbolikus geometriát karakterizálja a Hilbert-geometriák között az, hogy

- a merőlegesség szimmetrikus, magasabb dimenzióban is [11], [3];
- a metrika lokálisan euklideszi [10];
- minden egyenesre vonatkozóan létezik tengelyes tükrözés [3];
- a geometria minden pontjában a görbület nempozitív [15];
- a geometriában az aszimptotikus háromszögek területe konstans [5].

Kutatásunk célja ezen ismeretek bővítése volt olyan karakterizációkkal, amelyekben geometriai konfigurációk játsszák a főszerepet.

2. Alkalmazott módszerek, felhasznált ismeretek

Az értekezésben felhasználjuk, és ezért be is mutatjuk a *Minkowski-geometriákat* (amelyek az euklideszi geometria általánosításai), a *metrikus osztóviszonyt* és a Birkhoff-merőlegességet. Ugyancsak felhasználjuk és be is mutatjuk a Hilbert-geometriákat és a *hiperbolikus osztóviszonyt*, továbbá a hiperbolikus geometria néhány alapvető konfigurációjának tulajdonságait is.

¹Elsősorban ezért mutatjuk be a Hilbert-geometriákat kicsit részletesebben.

Ezeket túl felhasználjuk és bemutatjuk a *nyalábok* fogalmát, illetve háromszögekben a *biszektorális* és az *ortocentrum* fogalmát, valamint a *Menelaosz-, illetve Ceva-tripletek és -számhármások* fogalmát.

Mivel a hiperbolikus esetben nem általánosan ismertek, külön be is bizonyítjuk a következő szükséges tételeket elsősorban a jól ismert Cayley–Klein-, illetve a Pincaré-modellben.

2.1. Tétel. (Hiperbolikus Menelaosz-tétel [16, 467–468. o.]) *A hiperbolikus térben az $ABC\triangle$ trigon egy (C', A', B') -tripletje akkor és csak akkor Menelaosz típusú, ha az $(\langle A, B; C' \rangle, \langle B, C; A' \rangle, \langle C, A; B' \rangle)$ számhármás Menelaosz típusú.*

2.2. Tétel. (Hiperbolikus Ceva-tétel [16, 467–468. o.]) *A hiperbolikus térben az $ABC\triangle$ trigon egy (C', A', B') -tripletje akkor és csak akkor Ceva típusú, ha az $(\langle A, B; C' \rangle, \langle B, C; A' \rangle, \langle C, A; B' \rangle)$ számhármás Ceva típusú.*

2.3. Tétel. (Hiperbolikus biszektorális centrum tétele [16, p. 350]) *Hiperbolikus térben bármely trigon oldalfelező merőlegesei egy nyalábhöz tartoznak.*

2.4. Tétel. (Hiperbolikus magasságpont tétele [9, Theorem 3]) *Hiperbolikus térben bármely trigon magasságvonalai egy nyalábhöz tartoznak.*

A *Hilbert-geometriák* legfontosabb jellemzőinek bemutatása során a kettősviszony logaritmusáról megmutatjuk, hogy teljesíti a háromszög-egyenlőtlenséget, és valóban egy metrikát határoz meg a definiáló tartományon. Rámutatunk, hogy minden pontban egy lokális Minkowski-geometria adódik a metrikából, amellyel a Hilbert-geometria egy Finsler-sokaság. Definiáljuk a *merőlegesség* fogalmát a metrikával, amely megfelel a Birkhoff-merőlegességnek. Megmutatjuk, hogy egy *egyenes pontosan akkor merőleges egy másikra, ha konkurens az annak végpontjaiban vett érintőkkel*. Megállapítjuk, hogy minden olyan kollineáció, mely invariánsan hagyja az alaptartományt, a Hilbert-geometria izometriája, továbbá *a Hilbert-geometria minden egyes izometriája a projektív síknak az alaptartományt invariánsan hagyó valamely kollineációjának megszorítása az alaptartományra.* (Lásd [3, (22.10)].)

3. Az elért főbb eredmények bemutatása

Az értekezésben bemutatott főbb eredmények három tanulmányban jelentek meg [KKc, KKh, Km], de utalunk még egy kapcsolódó publikációra [KKp], továbbá a kutatás folytatásaként elért további eredményekre [KKq]. Ezek kivétel nélkül a klasszikus euklideszi, illetve hiperbolikus geometriák Minkowski-, illetve Hilbert-geometriák közti karakterizációját adják.

Előkészületeink során az első technikai eredmény a hiperbolikus osztóviszony szigorú monotonitását adja.

3.1. Lemma. [KKc, Lemma 2.3] *Legyenek a \mathcal{H} -val adott Hilbert-geometriában A, B és C kollineáris pontok, és legyen $AB \cap \partial\mathcal{H} = \{P, Q\}$ úgy, hogy A a P és B között van. Tekintsük az AB egyenesnek egy olyan euklideszi koordináta-rendszerét, hogy P koordinátája 0, és A koordinátája 1. Legyenek ebben a koordináta-rendszerben q , b és c a Q , B és C pontok koordinátái a $q > b > 1$ és $0 < c < q$ feltételekkel. Ekkor a hiperbolikus metrikus osztóviszonyra*

$$\langle A, B; C \rangle = \frac{c-b}{(c-1)\sqrt{b}} \sqrt{1 + \frac{b-1}{q-b}}.$$

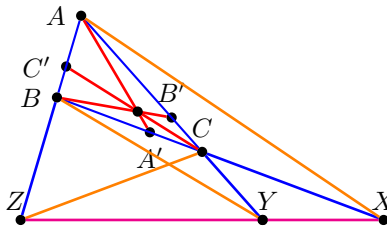
A kettősviszony alkalmazása lehetővé teszi a klasszikus Ceva- és Menelaosz-tétel egyesített projektív tárgyalását (lásd [KKp, 2.2. tétel]). Ehhez az eredeti Ceva-konfigurációt kiegészítjük egyenesekkel és pontokkal a bővítéssel származtatott projektív síkon (lásd a 3.1. Ábrát).

3.2. Tétel. ([KKp, 2.2. Tétel]) *Legyen f_A, f_B és f_C az $ABC\triangle$ trigon csúcsain átmenő egy-egy egyenes, és legyen X, Y és Z rendre az $ABC\triangle$ oldalegyenesein egy-egy pont. Az A', B' és C' pont legyen rendre az f_A, f_B és f_C egyenes metszete a szemközti oldal egyenesével.*

(1) *Ha f_A, f_B és f_C konkurensak, és az X, Y, Z pontok kollineárisak, akkor*

$$(A, B; C', Z)(B, C; A', X)(C, A; B', Y) = -1. \quad (3.1)$$

(2) *Ha (3.1) teljesül, akkor az X, Y, Z pontok pontosan akkor kollineárisak, ha az f_A, f_B és f_C egyenesek konkurensak.*



3.1. Ábra. Projektív Ceva-konfiguráció

Az euklideszi, illetve a hiperbolikus geometriát a Minkowski-, illetve a Hilbert-geometriák között karakterizáló tételekhez sima görbék ellipszisekkel való összevetésén keresztül jutottunk el. Ennek során fontos szerephez jutnak a szigorúan konvex tartományok *John-Löwner-ellipszisei*, ezért a körülírt (minimális területű) John-Löwner-ellipszisek érintési pontjaira vonatkozó alapvető állításokat is áttekintjük,

és két lemmát igazolunk ezen érintési pontok elhelyezkedéséről, illetve általuk meghatározott háromszögekről. Az alábbi lemmák egyes állításait tételesen alkalmazzuk későbbi bizonyításainkban.

3.3. Lemma. ([KKc] Lemma 2.2) *A síkban minden olyan nem üres, nyílt, konvex \mathcal{H} halmazhoz, amely nem ellipszis, létezik egy olyan, \mathcal{H} -t tartalmazó \mathcal{E} ellipszis, amelyre a $\partial\mathcal{E} \setminus \mathcal{H}$ halmaznak legalább hat különböző pontja van, és $\mathcal{E} \setminus \mathcal{H}$ nem üres.*

3.4. Lemma. ([KKh, Lemma 3.3]) *Legyen \mathcal{H} egy konvex tartomány a síkban. Ekkor*

- (1) *létezik a \mathcal{H} -nak egy \mathcal{E} köréírt ellipszise legalább három különböző E_1, E_2, E_3 érintési ponttal a $\partial\mathcal{H} \cap \partial\mathcal{E}$ halmazban úgy, hogy a zárt $E_1E_2E_3\Delta$ tartalmazza a \mathcal{E} ellipszis C centrumát, és*
- (2) *ha $\mathcal{H} \neq \mathcal{E}$, akkor ezek az érintési pontok választhatók úgy, hogy közülük az egyiknek minden környezetében teljesül a $\partial\mathcal{H} \setminus \partial\mathcal{E} \neq \emptyset$ feltétel.*

Legyenek t_1, t_2 és t_3 a két alakzat közös érintői az E_1, E_2 , illetve E_3 pontban. Ekkor

- (3) *ha $E_1E_2E_3\Delta$ a belsejében tartalmazza a C pontot, akkor t_1, t_2, t_3 egy trigont alkot az $M_1 = t_2 \cap t_3$, $M_2 = t_3 \cap t_1$ és $M_3 = t_1 \cap t_2$ csúcsokkal úgy, hogy e trigon az E_1, E_2, E_3 érintési pontok kivételével a belsejében tartalmazza az \mathcal{E} ellipszist;*
- (4) *ha az $E_1E_2E_3\Delta$ háromszög valamelyik oldala tartalmazza C -t, mondjuk, $C \in \overline{E_2E_3}$, akkor a három érintő a síknak egy párhuzamosok közötti olyan félsávját határozza meg, amelynek (esetleg ideális) csúcsai $M_2 = t_1 \cap t_3$, $M_3 = t_2 \cap t_1$, és ez a belsejében tartalmazza a \mathcal{E} ellipszist, kivéve az E_1, E_2, E_3 érintési pontokat.*

Ha B_1, B_2, B_3 rendre az $\overline{E_2E_3}$, $\overline{E_3E_1}$ és $\overline{E_1E_2}$ szakaszok felezőponja, akkor

- (5) *az M_iB_i ($i = 1, 2, 3$) egyenesek a C pontban találkoznak.*

Tételeink igazolása során össze kell hasonlítanunk olyan síkbeli sima, konvex görbéket, amelyeknek egy pontban közös az érintőjük, a görbületük előjele, és az egyik a másik belsejében halad. Erre vonatkozó eredményeinket a differenciálgeometria szokásos apparátusát [13] használva értük el.

3.5. Lemma. ([KKh, Lemma 3.4]) *Legyenek $\mathbf{r}, \mathbf{p}: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$ kétszer folytonosan differenciálható görbék kis $\varepsilon > 0$ értékekre úgy, hogy $\mathbf{p}(\tau) = p(\tau)\mathbf{u}_\tau$, és $\mathbf{r}(\tau) = r(\tau)\mathbf{u}_\tau$, ahol $p, r: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}_+$, továbbá az $r(\tau)/p(\tau)$ az 1 minimumértéket kizárólag a $\tau = 0$ helyen veszi fel.*

Ekkor az \mathbf{r} , illetve \mathbf{p} görbék $\mathbf{r}(\tau)$, illetve $\mathbf{p}(\tau)$ pontbeli érintő egyenesei egy olyan $\mathbf{m}(\tau)$ pontban metszik egymást, amely a $\mathbf{p}(0)$ ponthoz tart, amint $\tau \rightarrow 0$, mégpedig úgy, hogy ez az $\mathbf{Op}(\tau)$ egyenesnek ugyanazon az oldalán van, mint a $\mathbf{p}(0)$.

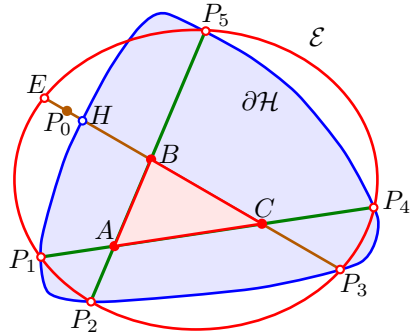
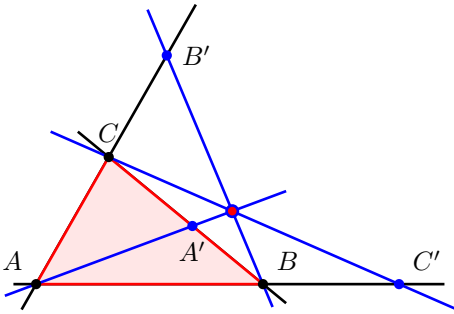
3.6. Lemma. ([Km, Lemma 2.4]) *Legyenek $\mathbf{r}, \mathbf{p}: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ folytonosan differenciálható görbék, melyek deriváltja nem tűnik el.*

- (1) *Ha (i) $\mathbf{r} \parallel \mathbf{p}$, (ii) $\dot{\mathbf{r}} \parallel \dot{\mathbf{p}}$, és ezek a görbék metszik egymást, akkor $\mathbf{r} = \mathbf{p}$.*
- (2) *Ha $\dot{\mathbf{r}}(0) \parallel \dot{\mathbf{p}}(0)$, és $\dot{\mathbf{r}}(1) \parallel \dot{\mathbf{p}}(1)$, akkor létezik egy olyan $t_0 \in (0, 1)$ érték, amelyre $\dot{\mathbf{r}}(t_0) \parallel \dot{\mathbf{p}}(t_0)$.*

3.1. A hiperbolikus geometria karakterizációi a Hilbert-geometriák között

A kérdés az volt, hogy a Ceva-számhármakkal és Ceva-ponthármakkal megfogalmazható állítás teljesülése Hilbert-geometriában milyen következménnyel jár.

3.7. Tétel. (Ceva típusú karakterizáció) [KKc, Theorem 3.1] *Egy Hilbert-geometriában akkor és csak akkor létezik minden $ABC\Delta$ trigonhoz olyan (C', A', B') Ceva-triplet, hogy az $(\langle A, B; C' \rangle, \langle B, C; A' \rangle, \langle C, A; B' \rangle)$ számhármass Ceva típusú, ha a geometria hiperbolikus.*

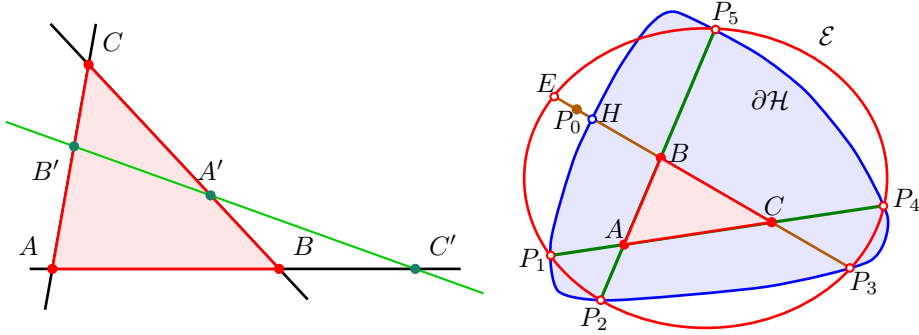


3.2. Ábra. Ceva-konfiguráció és egy háromszög az ellenpéldához

A [7, Lemma 12.1, 226. o.] által biztosított lehetőségnek megfelelően a bizonyítás közben a síkra szorítkozhatunk. A bizonyítás kulcsa a John–Löwner-ellipszisre vonatkozó 3.3. Lemma alkalmazásával hat olyan pont felvétele a Hilbert-geometriát megadó $\partial\mathcal{H}$ görbén — az indirekt $\partial\mathcal{H}$ nem ellipszis feltétel mellett —, melyek közül öt egy ellipszisre illeszkedik, a hatodik pedig annak belső pontja. Megfelelő párosításukkal egy olyan nem elfajuló háromszöget kapunk, amelynek két oldalegyenese egyszerre hiperbolikus és Hilbert-egyenes, míg a harmadik oldal hiperbolikus egyenese tartalmazza a Hilbert-félét (lásd a 3.2. Ábrát). A 3.1. Lemma szerint a hiperbolikus osztóviszonyok az első két egyenesen megegyeznek, míg a harmadikon különbözőek. Ezért egy Ceva-ponthármashoz a hiperbolikus Ceva-tétel szerint Ceva-számhármass tartozik +1 osztóviszonyszorzattal, míg a Hilbert-geometria szerinti osztóviszonyok szorzata nem lehet 1, és így a számhármass sem lehet Ceva-féle a Hilbert-geometriában.

Analóg gondolatmenet igazolja a Menelaosz-tétel karakterizáló tulajdonságát is.

3.8. Tétel. (Menelaosz típusú karakterizáció) [KKc, Theorem 3.2] *Egy Hilbert-geometriában akkor és csak akkor létezik minden $ABC\triangle$ trigonhoz olyan (C', A', B') Menelaosz-triplet, amelyre az $(\langle A, B; C'\rangle, \langle B, C; A'\rangle, \langle C, A; B'\rangle)$ számhármás Menelaosz típusú, ha a geometria hiperbolikus.*



3.3. Ábra. Menelaosz-konfiguráció és egy háromszög az ellenpéldához

Emlékeztetünk, hogy hasonló probléma Minkowski-geometriában érdemben nem vetődik fel, hiszen azokban a metrikus osztóviszony megegyezik az affin osztóviszonnyal, és ezért a Ceva-tétel és a Menelaosz-tétel pontosan ugyanúgy teljesül, mint az Euklideszi (affin) geometriában.

A továbblépést annak a természetes kérdésnek a vizsgálata jelenti, hogy vajon lehetséges-e hasonló karakterizálás oldalfelező merőlegessékekkel, illetve magasságvonalakkal?

A válasz megfogalmazása előtt utalnunk kell arra, hogy a Hilbert-geometriák esetén a Birkhoff-féle merőlegesség inverzét, a \mathcal{H} -merőlegességet használjuk az oldalfelező merőleges egyenesek és később a magasságvonalak esetében is, mert a Birkhoff-merőlegesség esetében nem jutottunk eredményre, és az irodalomban sem találtunk akár csak hasonló eredményt sem.

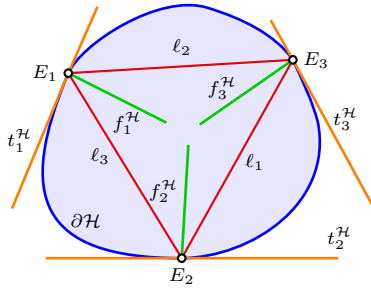
Míg az euklideszi geometriában az oldalfelező merőlegések a körülírt kör középpontjára illeszkednek, addig a hiperbolikus síkon egy trigonnak nincs is feltétlenül körülírt köre — ám az oldalfelező merőlegések ugyanúgy nyalábot alkotnak, ezért beszélünk *biszektorális centrum* létezéséről. Ugyanez a helyzet a magasságvonalak egyenesesével — ezek is nyalábot alkotnak az euklideszi és hiperbolikus geometriában is, ezért beszélünk ilyenkor *ortocentrumról* (2.4. Tétel).

Felvetődik a kérdés, hogy *milyen feltétellel teljesül a nyaláb-tulajdonság, és ha teljesül, akkor mit mondhatunk a geometriáról?*

A válaszhoz két, önmagukban is érdekes tételünkön keresztül vezetett az út.

Közülük elsőként egy ellipsziskarakterizációs eredményünket említjük. Ez² ellipsziseknek egy harmonikus elválasztásra építő geometriai jellemzése, és a következő konfigurációra vonatkozik.

3.9. Konfiguráció. Az $\partial\mathcal{H}$ oválison különböző E_i ($i = 1, 2, 3$) pontokra jelölje ℓ_i az E_jE_k egyenest (i, j, k különbözők), $t_i^{\mathcal{H}}$ pedig a \mathcal{H} érintőjét az E_i ponton keresztül. Végül jelölje $f_i^{\mathcal{H}}$ azt az egyenest, amelyet az $\ell_j = E_kE_i$ és $\ell_k = E_iE_j$ egyenesek ($j, k = 1, 2, 3$) harmonikus választanak el $t_i^{\mathcal{H}}$ -től. ▲

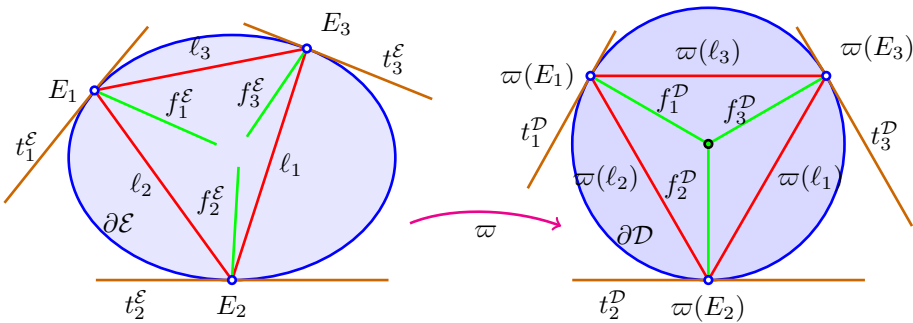


3.4. Ábra. Konfiguráció ellipsziskarakterizációhoz

3.10. Tétel. [KKh, Theorem 4.2] *Tekintsünk egy 3.9. Konfigurációt.*

- (i) *Ha \mathcal{H} egy ellipszis, akkor az $f_1^{\mathcal{H}}, f_2^{\mathcal{H}}, f_3^{\mathcal{H}}$ egyenesek konkurenssek.*
- (ii) *Ha az $f_1^{\mathcal{H}}, f_2^{\mathcal{H}}, f_3^{\mathcal{H}}$ egy nyaláb egyenesei az $E_1, E_2, E_3 \in \partial\mathcal{H}$ pontok tetszőleges választása esetén, akkor \mathcal{H} egy ellipszis.*

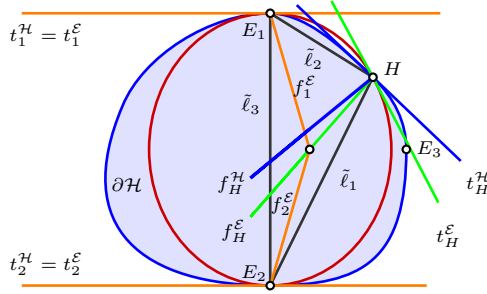
Az (i) rész bizonyításának lényege kiolvasható az 3.5. Ábrából.



3.5. Ábra. A ϖ az \mathcal{E} ellipszistartományt a \mathcal{D} körlemezbe, a $E_1E_2E_3\Delta$ háromszöget szabályos háromszögbe transzformálja.

²Utóbb kiderült, hogy a duális — a Ceva- és a Menelaosz-tétel révén — ekvivalens Segre egy korábbi eredményével, amely véges geometriákra vonatkozott.

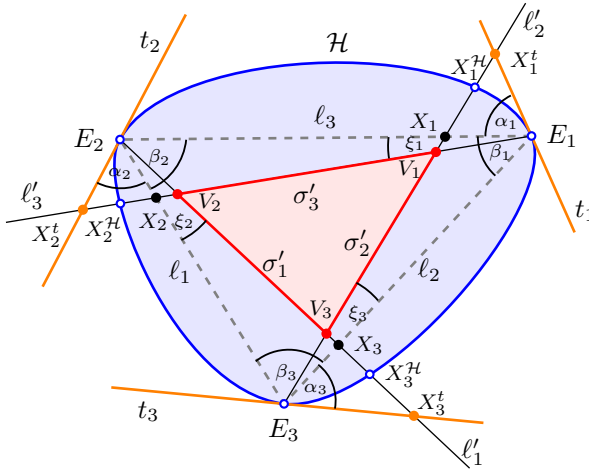
Az (ii) igazolásához a konfigurációt úgy transzformáljuk, hogy a három kitüntetett pont közül kettő origóra átellenes legyen, helyvektorukra merőleges érintőkkel. Majd olyan ellipszist veszünk fel, amelynek e két pontban közös érintője van a görbével, és a harmadik kitüntetett pont is közös (lásd a 3.6. Ábrát).



3.6. Ábra. Harmonikus sugárnyalábok bevezetése

Ezután bebizonyítjuk, hogy a harmadik pontban is közös az érintő, végül belátjuk, hogy a görbénk egy origó centrumú ellipszis.

A másik fontos eredményünk egy Ceva típusú tétel oválisba írt háromszögekre, melyet a 3.9. konfiguráció (3.11) bővítményére igazolunk.



3.7. Ábra. Kibővített 3.9. Konfiguráció

3.11. Konfiguráció. A 3.9. Konfigurációt az alábbiakkal bővítjük.

Legyen az X_i pont a $\sigma_i = \overline{E_j E_k}$ nyílt szakaszon közel az E_i ponthoz minden $i = 1, 2, 3$ esetén, ahol $\{j, k\} = \{1, 2, 3\} \setminus \{i\}$, és jelölje rendre az $E_2 X_3$, $E_3 X_1$ és $E_1 X_2$ egyeneseket ℓ'_1 , ℓ'_2 és ℓ'_3 .

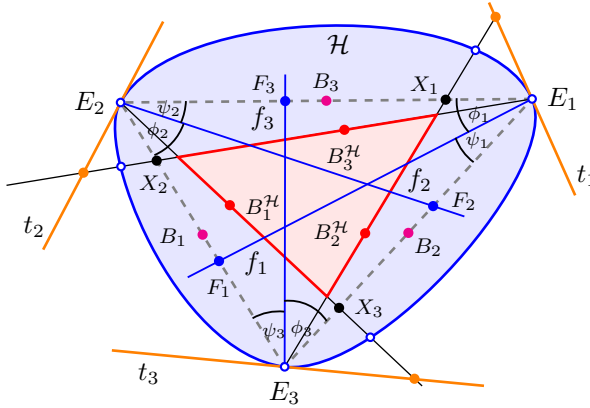
Vegyük a következő metszéspontokat: $V_1 = \ell'_2 \cap \ell'_3$, $V_2 = \ell'_3 \cap \ell'_1$, $V_3 = \ell'_1 \cap \ell'_2$ metszéspontok által alkotott nyílt szakaszokra vezessük be a $\sigma'_1 = \overline{V_2 V_3}$, $\sigma'_2 = \overline{V_3 V_1}$ és $\sigma'_3 = \overline{V_1 V_2}$ jelöléseket.

Vegyük továbbá az $X_1^t = t_1 \cap \ell'_3$, $X_2^t = t_2 \cap \ell'_1$, $X_3^t = t_3 \cap \ell'_2$ és az $X_1^{\mathcal{H}} = \partial\mathcal{H} \cap (\ell'_2 \setminus \{E_3\})$, $X_2^{\mathcal{H}} = \partial\mathcal{H} \cap (\ell'_3 \setminus \{E_1\})$, $X_3^{\mathcal{H}} = \partial\mathcal{H} \cap (\ell'_1 \setminus \{E_2\})$ metszéspontokat is az érintőkön, illetve a $\partial\mathcal{H}$ görbén. Ezek a metszéspontok létrejönnek, amennyiben az X_i pontokat elegendően közel választjuk ki az E_i ($i = 1, 2, 3$) pontokhoz.

Végezetül legyen az $X_2 E_1 E_2 \triangleleft$, $X_3 E_2 E_3 \triangleleft$, $X_1 E_3 E_1 \triangleleft$ szögek nagysága rendre ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 , míg a $X_1^t E_1 E_2 \triangleleft$, $X_2^t E_2 E_3 \triangleleft$, $X_3^t E_3 E_1 \triangleleft$ szögeké rendre α_1 , α_2 , α_3 , és a $E_3 E_1 E_2 \triangleleft$, $E_1 E_2 E_3 \triangleleft$, $E_2 E_3 E_1 \triangleleft$ szögeké rendre β_1 , β_2 , β_3 . ▲

3.12. Tétel. [KKh, Theorem 4.4] *Tekintsünk egy 3.11-konfigurációt. Minden $i = 1, 2, 3$ esetén jelölje B_i a σ_i szakasz euklideszi felezőpontját, és $B_i^{\mathcal{H}}$ a nyílt σ'_i szakasz \mathcal{H} -felezőpontját. Az f_1, f_2, f_3 egyenesek akkor és csak akkor tartoznak egy nyalábhoz, ha az X_1, X_2 és X_3 pontok választhatók úgy bármely $\varepsilon, \delta > 0$ esetén, hogy*

$$\begin{aligned} |B_1^{\mathcal{H}} - B_1| + |B_2^{\mathcal{H}} - B_2| + |B_3^{\mathcal{H}} - B_3| &< \varepsilon, \\ |X_1 - E_1| + |X_2 - E_2| + |X_3 - E_3| &< \delta. \end{aligned}$$

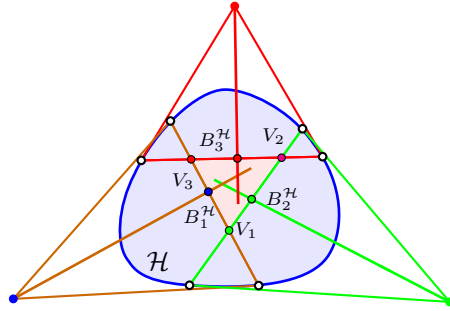


3.8. Ábra. Konstrukció a felezőpontokkal

A tétel igazolásához szükséges számítások a 3.8. Ábrán jelzett szögek és hosszúságok segítségével kiszámított kettősviszonyok felhasználásával végezhetők el.

A biszektoralis centrumra feltett kérdésre a Hilbert-geometria esetén az alábbi tétel adja meg a választ.

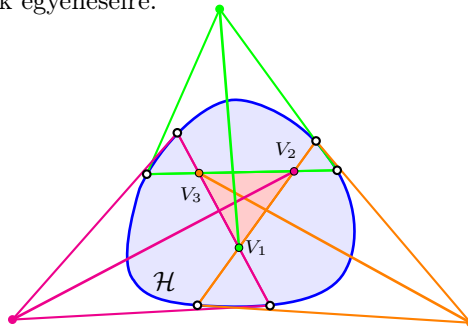
3.13. Tétel. ([KKh, Theorem 5.1]) *Egy Hilbert-geometriában akkor és csak akkor létezik minden háromszögnek biszektoralis centruma, ha a geometria hiperbolikus.*



3.9. Ábra. Trigon oldalfelező merőlegesei Hilbert-geometriában

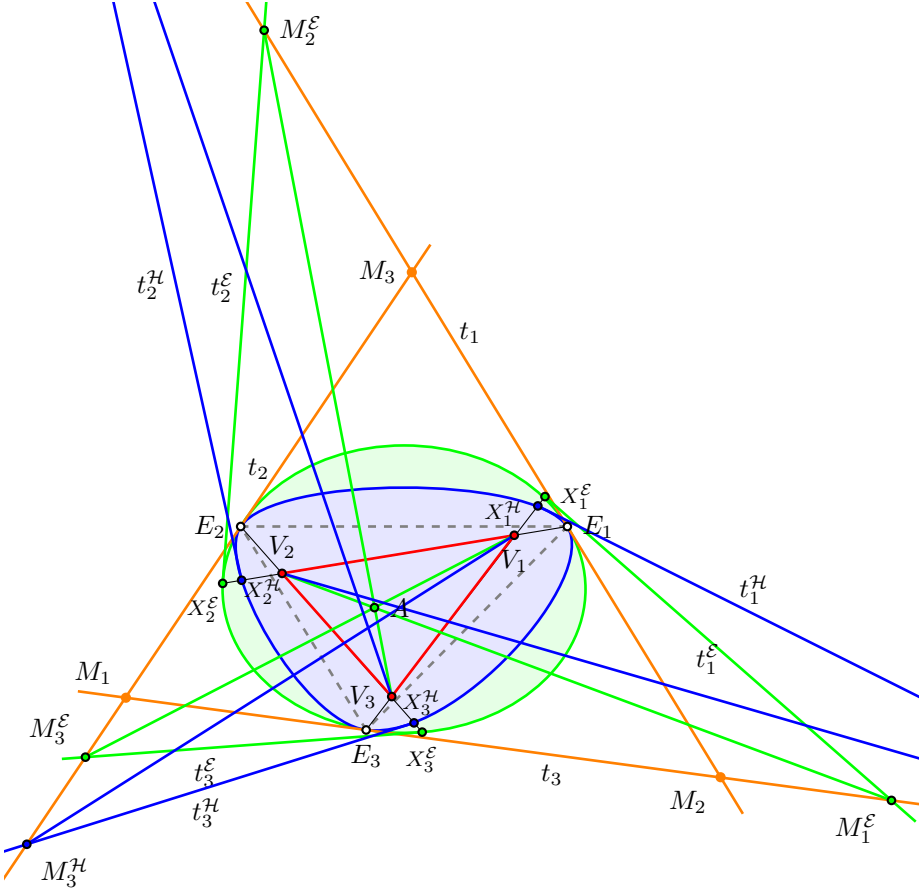
A tétel bizonyításakor indirekt feltevésünk, hogy a geometriát definiáló \mathcal{H} nem ellipszoid. A [3, Lemma 12.1, 226. o.] állításra tekintettel elegendő a síkban dogoznunk. A 3.4. Lemma (1) része szerint van egy minimális területű \mathcal{E} ellipszis a \mathcal{H} köré írva, a $\partial\mathcal{H} \cap \partial\mathcal{E}$ -ban lévő legalább három különböző E_1, E_2, E_3 érintkezési ponttal, továbbá azzal a tulajdonsággal, hogy a zárt $E_1E_2E_3\Delta$ trigon tartalmazza az origót. Így tekinthetjük a 3.4. Lemma (4) részében leírt konfigurációt, melyet ugyanezen lemma (3) részében leírt vetítéssel nyerhetünk. A szükséges pontok és egyenesek felvételével alkalmazhatjuk a 3.1. Lemmát, majd az így igazoltan létrejövő metszéspontokra a 3.5. Lemma szerint eljárva jutunk olyan konfigurációhoz, melyre a 3.10. Tétel és a 3.12. Tétel biztosít megfelelő konvergenciát euklideszi, illetve Hilbert-féle szakaszfelező pontokra. Végül egy olyan trigon létezésének igazolásához jutunk el, amelynek oldalfelező merőlegesei által meghatározott egyes felsíkok metszete üres, miközben egy megkonstruált pontot mindháromnak tartalmaznia kellene. Így jutunk ellentmondásra a kiinduló feltevésével.

Miután az oldalfelező merőlegesek vizsgálatával a biszektorális centrum létezésének karakterizáló tulajdonságát láttuk, hasonló eredményt vártunk és kaptunk is a magasságvonalak egyenesesire.



3.10. Ábra. Trigon magasságvonalainak egyenesei Hilbert-geometriában

3.14. Tétel. ([KKh, Theorem 5.2]) *Ha egy Hilbert-geometriában minden trigonnak van ortocentruma, akkor az hiperbolikus geometria.*



3.11. Ábra. Háromszög, melynek magasságai belső pontokban találkoznak

Az előző tételünkben alkalmazott konstrukcióhoz hasonlóan vizsgálva jutunk ellentmondásra azzal az indirekt feltevessel, hogy \mathcal{H} nem ellipszoid (lásd a 3.11. Ábrát). Az ott hivatkozott lemmákra tekintettel elég két dimenzióban végezni a bizonyítást, illetve korlátozhatjuk azt egy alkalmasan kialakított konfigurációra. Az egyes lépésekkel nyert (létező) euklideszi metszéspontok vezetnek el egy olyan ponthoz, amelynek három Hilbert-féle szakaszfelező merőleges egyenes adott félsíkjainak metszetében kellene lennie, amely viszont bizonyíthatóan üres.

3.2. Az euklideszi geometria karakterizációi a Minkowski-geometriák között

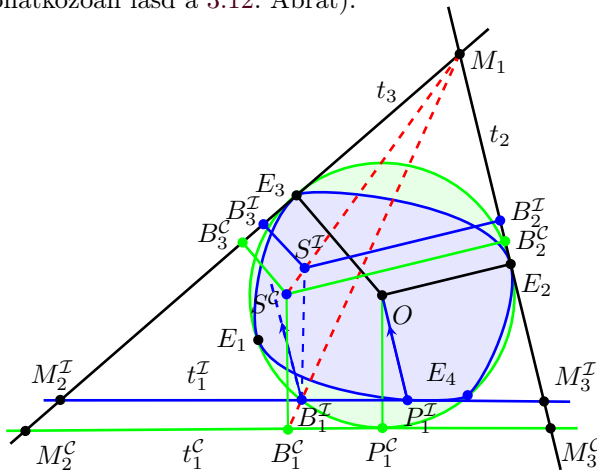
Ezután a Hilbert-geometriákban nyert karakterizációs eredményeink közül a biszektoralis centrumokra és a magasságvonalakra vonatkozókkal analóg tételeket kerestünk Minkowski-geometriákban. Ezúttal a Birkhoff-merőlegességnek és inverzének, vagyis a bal-, illetve jobb-merőlegességnek az esetében is eredményre jutottunk.

A biszektoralis centrum kérdésével kezdjük. Először azt mutatjuk meg, hogy a jobb-merőleges oldalfelező merőleges egyenesek akkor és csak akkor mennek át egy ponton (jobb-biszektoralis centrum) minden egyes háromszög esetén, ha annak induktrixa egy ellipszoid, vagyis a geometria euklideszi. Ezt követően azt is megmutatjuk, hogy a jobb-merőleges magasságvonalak pontosan akkor mennek át egy ponton (jobb-ortocentrum) egy Minkowski-geometriában, ha a geometria euklideszi.

3.15. Tétel. ([Km, Theorem 3.1]) *Egy Minkowski-geometriában a jobb-merőleges oldalfelezők akkor és csak akkor konkurenssek minden háromszögre, ha a geometria euklideszi.*

A [3, Lemma 12.1, 226. o.] alapján elegendő síkban bizonyítani.

Indirekt feltevésünk, hogy van olyan kétdimenziós síkmetszete az induktrixnak, mely nem ellipszis. A 3.4. Lemmának megfelelően létezik három különböző pont az ellipszis és az induktrix határának metszetében. A középpontos szimmetriára tekintettel a két görbe metszéspontjai a centrumra szimmetrikus párokban fordulnak elő, ezért van legalább négy közös pontunk. A közös pontok száma, illetve a párok elhelyezkedése (egyenesek merőlegessége) szerint megkülönböztetett esetekben alkalmasan megkonstruált trigon vizsgálatával jutunk ellentmondásra (az egyik esetre vonatkozóan lásd a 3.12. Ábrát).



3.12. Ábra. Jobb-merőleges oldalfelezők, ha $S^C \neq P_1^C$

Eközben felhasználjuk a korábban már igazolt 3.6. Lemmát, amely igazolja, hogy az egyik oldalfelező merőleges egyenest a trigon másik két oldalfelező merőleges közös kezdőpontú komplementer félegyenesek pontjaiban metszi.

A jobb-merőleges magasságvonalak konkurenciája is karakterizáló tulajdonság.

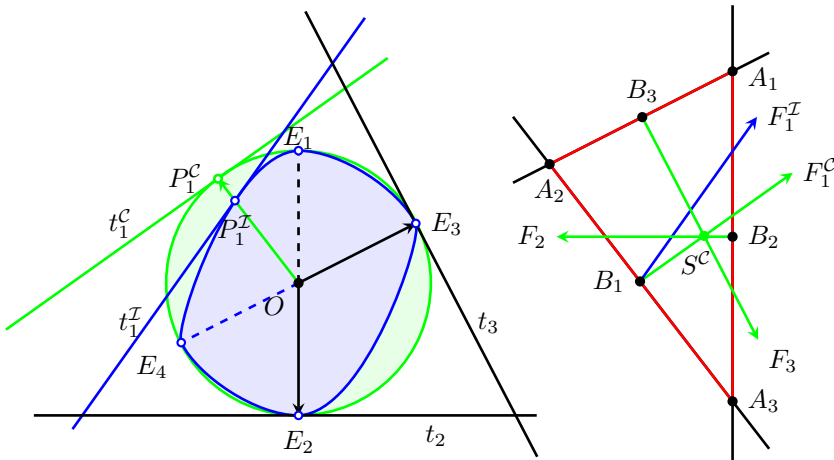
3.16. Tétel. ([Km, Theorem 3.2]) *Egy Minkowski-geometriában akkor és csak akkor konkurenssek bármely trigon jobb-merőleges magasságvonalai, ha a geometria euklideszi.*

A bizonyítás az előző tétel bizonyításának 11 fő lépéséből az első kettő alapján egy alkalmas kétdimenziós konfiguráció vizsgálatára szűkíti az eljárást. Ezután bontjuk esetekre az igazolást az indikátrix és a John–Löwner-ellipszis közös pontjainak száma, valamint a párok elhelyezkedése szerint.

Ezúttal is azt mutatjuk meg, hogy egy trigon két magasságának egyenesei a harmadikat különböző pontokban metszik. Ehhez az indikátrix és az ellipszis érintőinek szögét vizsgáljuk. A 3.5. Lemma következményeként a megfelelő szögek nagyságát összehasonlítva juthatunk ezen ellentmondáshoz.

A bal-biszektorális centrum és bal-ortocentrum esetén a karakterizációs tételek indirekt igazolásához az alkalmas trigont nem lehet közvetlenül az indikátrix, illetve a John–Löwner-ellipszis érintőinek megfelelő választásával előállítani, de ki tudjuk azokat úgy jelölni, hogy velük azonos irányú egyenesekből megkonstruálhassunk egy ellentmondáshoz elvezető háromszöget (lásd a 3.13. Ábra jobb oldalát).

3.17. Tétel. ([Km, Theorem 4.1]) *Egy Minkowski-geometriában a bal-merőleges oldalfelezők akkor és csak akkor konkurenssek minden háromszögre, ha a geometria euklideszi.*

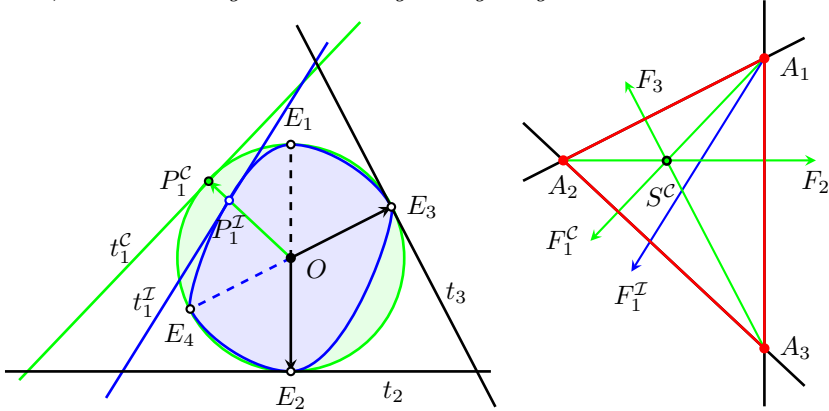


3.13. Ábra. Bal-merőleges oldalfelezők, ha $S^C \neq B_1$.

A bizonyítás az előző megjegyzésünk szerint a jobb-merőlegességre vonatkozó tétel bizonyításának lépéseivel indulhat. Az indukátrix és a Löwner–John-ellipszis közös pontjainak száma és elhelyezkedése szerint megkülönböztetett esetekben az előző tétel bizonyításának egyes lépéseivel analóg (esetenként azonos) következtetéseket tehetünk. Az indirekt bizonyításban ezúttal is az vezet ellenmondásra, hogy bizonyos metszéspontok különbözőségét állapíthatjuk meg.

Végül a bal-merőleges magasságvonalak esetével zárunk, amelynek bizonyítása ezúttal is esetek szétválasztásával és olyan konfiguráció konstruálásával történik, amelyben egy háromszög magasságvonalainak egyenesei nem mehetnek át egy ponton (lásd a 3.14. Ábrát).

3.18. Tétel. ([Km, Theorem 4.2]) *Egy Minkowski-geometria akkor és csak akkor euklideszi, ha minden trigon bal-merőleges magasságvonalai konkurenssek.*



3.14. Ábra. Bal-merőlegesség és magasságok, amikor $s^c \neq A_2$

4. Összefoglaló és kitekintés

A disszertációban a klasszikus euklideszi és hiperbolikus geometriák közvetlen általánosításaként ismert két legfontosabb projektív-metrikus geometriában, a Minkowski- és Hilbert-geometriákban végzett kutatási eredményeinket mutatjuk be, melyek háromszögek metrikus és affín tulajdonságainak egybevetésével karakterizálják az egyes klasszikus geometriákat projektív-metrikus általánosításaik között.

A kutatásokat folytatva vizsgáltuk azt is, hogy egy projektív metrika klasszikus-e, ha benne egy hiperbola kvadratikus görbe, de a válaszok bemutatása túlmutat jelen értekezés témáján, ezért csak megjegyezzük, hogy a Minkowski- és a Hilbert-geometria esetében is sikerült igazolni [KKq], hogy egy hiperbola akkor és csak akkor kvadratikus, ha a geometria euklideszi, illetve Bolyai-féle hiperbolikus.

A szerző hivatkozott munkái

- [K_m] J. KOZMA, Characterization of Euclidean geometry by existence of circumcenter or orthocenter, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **81:3-4** (2015), 685–698; doi: [10.14232/actasm-015-518-0](https://doi.org/10.14232/actasm-015-518-0). ⟨2, 5, 12, 13, 14⟩
- [K_{Kc}] J. KOZMA and Á. KURUSA, Ceva's and Menelaus' Theorems Characterize Hyperbolic Geometry Among Hilbert Geometries, *Journal of Geometry*, **106** (2014), 465–470; doi: [10.1007/s00022-014-0258-7](https://doi.org/10.1007/s00022-014-0258-7). ⟨2, 3, 4, 5, 6⟩
- [K_{Kh}] J. KOZMA and Á. KURUSA, Hyperbolic is the only Hilbert geometry having circumcenter or orthocenter generally, *Beiträge zur Algebra und Geometrie*, **57:1** (2016), 243–258; doi: [10.1007/s13366-014-0233-3](https://doi.org/10.1007/s13366-014-0233-3). ⟨2, 4, 7, 9, 11⟩
- [K_{Kp}] KURUSA Á. és KOZMA J., Egymásba írt háromszögek perspektivitása, *Polygon*, **24:1** (2016), 1–11; url: <http://www.math.u-szeged.hu/polygon/polyxxiv1.pdf>. ⟨2, 3⟩
- [K_{Kq}] Á. KURUSA and J. KOZMA, Projective metrics with quadratic hyperbolas, *kézirat*, (2017), pp. 21. ⟨2, 14⟩

A Tézisekben szereplő további hivatkozások

- [1] D. AMIR, *Characterizations of Inner Product Spaces*, Birkhäuser Verlag, Basel – Boston – Stuttgart, 1986; doi: [10.1007/978-3-0348-5487-0](https://doi.org/10.1007/978-3-0348-5487-0). ⟨1⟩
- [2] W. BLASCHKE, *Integralgeometrie 11: Zur Variationsrechnung*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 11:1(1935), 359–366; doi: [10.1007/BF02940732](https://doi.org/10.1007/BF02940732). ⟨1⟩
- [3] H. BUSEMANN AND P. J. KELLY, *Projective Geometries and Projective Metrics*, Academic Press, New York, 1953; url: <http://store.doverpublications.com/0486445828.html>. ⟨1, 2, 10, 12⟩
- [4] H. BUSEMANN, *Recent Synthetic Differential Geometry*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1970; doi: [10.1007/978-3-642-88057-5](https://doi.org/10.1007/978-3-642-88057-5). ⟨1⟩
- [5] B. COLBOIS and C. VERNICOS and P. VEROVIC, L'aire des triangles idéaux en géométrie de Hilbert, *Enseign. Math.*, (2) **50** (2004), 203–237; doi: [10.5169/seals-2649](https://doi.org/10.5169/seals-2649). ⟨1⟩
- [6] P. FUNK, Über Flächen mit lauter geschlossenen geodätischen Linien, *Mathematische Annalen*, **74** (1913), 278–300; doi: [10.1007/BF01456044](https://doi.org/10.1007/BF01456044). ⟨1⟩
- [7] P. M. GRUBER, *Convex and Discrete Geometry*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 2007; doi: [10.1007/978-3-540-71133-9](https://doi.org/10.1007/978-3-540-71133-9). ⟨5⟩
- [8] G. HAMEL, Über die Geometrien, in denen die Geraden die Kürzesten sind, *Mathematische Annalen*, **57** (1903), 231–264; url: <http://gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/load/img/?PID=GDZPPN002259230>. ⟨1⟩
- [9] N. IVANOV, V. Arnol'd, the Jacobi identity, and orthocenters, *Amer. Math. Monthly*, **118** (2011), 41–65; doi: [10.4169/amer.math.monthly.118.01.041](https://doi.org/10.4169/amer.math.monthly.118.01.041). ⟨2⟩

- [10] D. C. KAY, The Ptolemaic Inequality in Hilbert Geometries, *Pacific. J. Math.*, **21** (1967), 293–301; url: <https://projecteuclid.org/euclid.pjm/1102992501>. (1)
- [11] P. J. KELLY and L. J. PAIGE, Symmetric Perpendicularity in Hilbert Geometries, *Pacific J. Math.*, **2** (1952), 319–322; url: <https://msp.org/pjm/1952/2-3/pjm-v2-n3-p05-s.pdf>. (1)
- [12] KURUSA Á., *Bevezetés a differenciálgeometriába*, Polygon Jegyzettár **11**, Polygon Kiadó, Szeged, 1999. (4)
- [13] KURUSA Á., *Bevezetés a differenciálgeometriába*, Polygon Jegyzettár **11**, Polygon Kiadó, Szeged, 1999. (4)
- [14] KURUSA Á., *Nemeuklidészi geometriák*, Polygon Jegyzettár **47**, Polygon Kiadó, Szeged, 2009. (1)
- [15] Á. KURUSA, Curvature in Hilbert-geometries, *submitted* (2017). (1)
- [16] G. E. MARTIN, *The Foundations of Geometry and the Non-Euclidean Plane*, Springer Verlag, New York, 1975; doi: [10.1007/978-1-4612-5725-7](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5725-7). (2)
- [17] A. PAPADOPULOS and V. TROYANOV, *Handbook of Hilbert geometry*, European Mathematical Society, Zürich (2014), ; doi: [10.4171/147](https://doi.org/10.4171/147). (1)
- [18] A. V. POGORELOV, *Hilbert's fourth problem*, Winston & Sons, Washington DC (1979), ; url: <https://catalogue.nla.gov.au/Record/2596811>. (1)
- [19] Z. I. SZABÓ, Hilbert's fourth problem I., *Adv. Math.*, **59** (1986), 185–301; doi: [10.1016/0001-8708\(86\)90056-3](https://doi.org/10.1016/0001-8708(86)90056-3). (1)
- [20] A. C. THOMPSON, *Minkowski Geometry*, Encyclopedia of Math. and its Appl., Vol. 63, Cambridge Univ. Press, 1996; doi: [10.1017/CB09781107325845](https://doi.org/10.1017/CB09781107325845). (1)

Köszönetnyilvánítás

A szerző köszönetét fejezi ki azon hazai és olaszországi kollégáinak, akik lehetővé tették, hogy a kutatás folyamatában az eredményekről beszámolhasson a BME Geometria szemináriumán, a Kerékkjártó Szemináriumon és a Basilicatai Egyetem Matematikai és Informatikai Tanszékének szemináriumain. A köszönet kiemelten illeti dr. Kurusa Árpádot, aki a dolgozatban felölelt kutatási témát felvetette, a kutatások során kiváló partner és segítőkész doktori témavezető volt.

*Kozma József
Szeged, 2018. január. 7.*