Véges geometriák, gráfok, csoportok és kapcsolataik

Doktori értekezés tézisei

Ruff János

Témavezető: Dr. Kiss György

Matematika és Számítástudományok Doktori Iskola
Szegedi Tudományegyetem, TTIK
Bolyai Intézet

2010

1. Szemioválisok

A disszertáció a szerző négy cikkén alapul [32, 9, 31, 34]. Az első két fejezetben *szemikvadratikus halmazok* egy speciális típusára, az ún. *szemioválisokra*, vonatkozó eredményeinket tárgyaljuk. A szemikvadratikus halmazok fogalmát Buekenhout vezette be 1973-ban. Azóta sok próbálkozás történt az osztályozásukra, de az általános probléma még nem megoldott. A klasszikus példák szemioválisokra polaritásokból (oválisok és unitálok), továbbá a blokkoló halmazok köréből (csúcsnélküli háromszög) származtathatók. A szemioválisok tanulmányozását a kriptográfiai alkalmazásaik is motiválják.

1.1. Definíció. *Legyen Π egy q-ad rendű projektív sík. Egy S nem-üres ponthalmazt a síkon szemioválisnak nevezünk, ha minden P pontján keresztül pontosan egy olyan t_P egyenes létezik, amire $S \cap t_P = \{P\}$. Ezt az egyenest az S P-beli érintőjének nevezzük.*

Kis rendű síkok esetén a méretek teljes spektruma és a projektíven nem izomorf szemioválisok száma egyaránt ismert.

Thas és Hubaut egy több mint 35 éves eredménye szerint $q + 1 \leq |S| \leq q\sqrt{q} + 1$, ahol mindkét korlát éles [46], [28].

Bemutatunk néhány régebbi, hosszú szelőkkel rendelkező szemioválisokra vonatkozó eredményt is, továbbá megmutatjuk, hogy ha a szemioválist három egyenes egyesítése tartalmazza, akkor a méretére sokkal jobb korlátok adhatók:

1.2. Állítás. [32] *Legyen S egy szemiovális a Π, q-ad rendű projektív síkon. Ha S-et a sík valamely három egyenesének egyesítése tartalmazza, akkor*

$$\frac{3(q-1)}{2} \leq |S| \leq 3(q-1).$$

Az értekezés első két fejezetének fő célja, hogy karakterizáljuk az olyan szemioválisokat, amik benne vannak a sík három vagy kevesebb egyenesének egyesítésében.

Az az eset, amikor a szemiovális háromnál kevesebb egyenes egyesítésében is benne van, egyszerűen kezelhető. Ha három egyenes egyesítése tartalmazza, akkor két különböző esetet kell megkülönböztetnünk. $\mathrm{PG}(2,q)$-ban teljes karakterizációt adunk abban az esetben, amikor a három egyenes nem egy pontra illeszkedik. Egyszerű additív csoportelméleti eszközöket, differenciahalmazokra vonatkozó eredményeket és kombinatorikus állításokat használva a következőt bizonyítjuk:

1.3. Tétel. [32] *Legyen S egy olyan szemiovális a $PG(2,q)$ síkon, amit három, nem egy pontra illeszkedő egyenes egyesítése tartalmaz. Tegyük fel, hogy*

S-et nem tartalmazza két egyenes egyesítése, azaz $L_i \setminus \{P_j, P_k\} \neq \emptyset$, ahol $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Ekkor S az alábbi három osztály valamelyikéhez tartozik:

1. *S-nek van egy $(q-2)$-szelője és két $(t+1)$-szelője valamely alkalmas t-re. Ilyen szemioválisok csak $q = 4$ és $t = 1$, $q = 8$ és $t = 4$ vagy $q = 32$ és $t = 26$ esetekben léteznek.*

2. *S-nek két $(q-1)$-szelője és egy k-szelője van. Ilyen szemiovális minden $1 < k < q$ esetén létezik.*

3. *S-nek három $(q-1-d)$-szelője van. Ilyen szemioválisok pontosan akkor léteznek, ha $d|(q-1)$.*

A szemiovális fogalmának egy lehetséges általánosítását is bevezetjük és néhány, Csajbók és Kiss nevéhez fűződő, erre az általánosításra vonatkozó tételt ismertetünk [15].

Az első fejezet második felében az olyan szemioválisokat tanulmányozzuk, amelyeket három, egy ponton átmenő egyenes egyesítése tartalmaz. Ez az eset jóval bonyolultabb, mint az előző. Bebizonyítjuk a következőt:

1.4. Tétel. [9] *Ha S egy szemiovális a Π_q, $(q > 3)$ síkon, amit három, egy ponton átmenő egyenes egyesítése tartalmaz, akkor $|S| \leq 3\lceil q - \sqrt{q}\rceil$.*

Azt is megmutatjuk, hogy a korlát éles:

1.5. Példa. [9] *Legyen $q = s^2$ és legyenek ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 egy pontra illeszkedő egyenesek $PG(2, q)$-ban. Válasszuk $\overline{\ell}_1 \subset \ell_1$, $\overline{\ell}_2 \subset \ell_2$, és $\overline{\ell}_3 \subset \ell_3$ Baer részegyeneseket úgy, hogy bármely páronként különböző $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ esetén a $\mathcal{B}_{j,k} = \langle \overline{\ell_j}, \overline{\ell_k} \rangle$ Baer részsík ℓ_i egyenest csak a közös C pontban metszi. Ekkor $S = (\ell_1 \setminus \overline{\ell}_1) \cup (\ell_2 \setminus \overline{\ell}_2) \cup (\ell_3 \setminus \overline{\ell}_3)$ szemiovális $3(q - \sqrt{q})$ számú ponttal.*

A példában szereplő szemioválisok rendelkeznek egy olyan extra tulajdonsággal, ami miatt bevezetjük a *szabályos szemiovális* fogalmát. Megadjuk a $\mathrm{PG}(2, q)$-beli szemioválisok egy algebrai leírását és ezt használva a szabályos szemioválisokat tanulmányozzuk. A következőt bizonyítjuk:

1.6. Tétel. [9] *Ha p páratlan prím, akkor nincs szabályos szemiovális a $PG(2, p)$ síkon.*

Klasszikus csoportfaktorizációs eredményeket felhasználva a szabályos szemioválisok teljes karakterizációját adjuk a $\mathrm{PG}(2, p^2)$ síkon, ahol p páratlan prím:

1.7. Tétel. [9] *Legyen p páratlan prím. Ha S szabályos szemiovális a $PG(2, p^2)$ síkon és S-et az ℓ_1, ℓ_2 és ℓ_3 egyenesek egyesítése tartalmazza, akkor $\mathcal{L} \setminus S$ ponthalmaz leírható az alábbi módon:*

$$\{\, (-1, a, 1), (0, b, 1), (1, i, ci + f(c)) \colon\ a, b, c \in GF(p) \,\} \cup \{\, C \},$$

ahol $C = (0, 1, 0)$, $i^2 = \varepsilon$ *valamely* ε, $GF(p)$*-beli nem-négyzet elemre,* $GF(p^2)$ *a* $GF(p)$ *test* i*-vel vett bővítése és* f *a* $GF(p)$ *egy permutációja.*

Vizsgáljuk az $|S| < 3(q - \sqrt{q})$ feltételt teljesítő szabályos szemioválisokat. Az ilyen szemioválisok létezésére az alábbi oszthatósági feltételeket kapjuk:

1.8. Tétel. [9] *Legyen* $q = p^m$ *páratlan. Ha* S *szabályos szemiovális, amire* $|S| = 3(p^m - p^l)$, $m/2 < l < m$ *a* $PG(2, q)$ *síkon, akkor*

$$(p-1)(p^{2l-m} - 1)^2 \mid (p^{m-l} - 1).$$

Egy másik, szabályos szemioválisokra vonatkozó eredményünk új szükséges feltételt ad a létezésükre:

1.9. Tétel. [9] *Legyen* p *páratlan prím. Ha* S *szabályos szemiovális a* $PG(2, p^m)$ *síkon és*

$$m \leq \begin{cases} (p-1)^2 & p \equiv -1 \pmod{4} \\ 2(p-1)^2 & p \equiv 1 \pmod{4}, \end{cases}$$

akkor $|S| = 3(q - \sqrt{q})$.

Ezek az eredmények alapozzák meg a végső sejtésünket, ami szerint nem léteznek a fenti típustól különböző szabályos szemioválisok.

2. Adott fokszámú és átmérőjű nagy Cayley gráfok

A (Δ, D)*-probléma* (vagy *fokszám/átmérő probléma*) egy gráf legnagyobb lehetséges csúcsszámának meghatározása, ha a gráf maximális foka Δ, átmérője pedig D.

Emlékeztetünk Moore régi eredményére:

2.1. Tétel. [27] *Legyen* Γ *véges, egyszerű gráf. Jelölje* $n(\Delta, D)$ *a legnagyobb lehetséges csúcsszámát, ha a maximális fok* Δ *az átmérő pedig legfeljebb* D. *Ha* $\Delta > 2$, *akkor:*

$$n(\Delta, D) = \sum_{i=0}^{D} n_i \leq \frac{\Delta(\Delta-1)^D - 2}{\Delta - 2}.$$

Vizsgálatainkban a *lineáris Cayley gráfok* esetére szorítkozunk. Mutatunk néhány konstrukciót, ahol a kapott gráfok javítanak a korábban ismert általános, csúcstranzitív gráfokra vonatkozó alsó korláton. Kis számú csúcs esetén összehasonlítjuk ezeket az ismert legnagyobb csúcstranzitív, azonos paraméterekkel rendelkező gráfokkal. Kiderül, hogy a probléma az általunk tárgyalt esetben tulajdonképpen a véges projektív terek bizonyos speciális tulajdonságú ponthalmazainak, az ún. *szaturáló halmazoknak* a keresésére redukálódik. A konstrukcióinkban szereplő gráfok *teljes ívekből, süvegekből* és egyéb, a véges projektív terekben definiált objektumokból kaphatók meg. A már korábban is ismert, csúcstranzitív gráfokra vonatkozó általános alsó korlát:

2.2. Tétel. *Csúcstranzitív gráfok esetén:*

$$n(\Delta, 2) \geq \left\lfloor \frac{\Delta + 2}{2} \right\rfloor \cdot \left\lceil \frac{\Delta + 2}{2} \right\rceil.$$

Ezt bizonyos fokszámok esetén megjavítjuk:

2.3. Tétel. [31] *Legyen* $\Delta = 27 \cdot 2^{m-4} - 1$, $m > 7$. *Ekkor*

$$n(\Delta, 2) \geq \frac{256}{729}(\Delta + 1)^2.$$

Ha $q > 3$ *prímhatvány és* $\Delta = 2q^2 - q - 1$, *akkor:*

$$n(\Delta, 2) > \frac{1}{4}\left(\Delta + \sqrt{\frac{\Delta}{2}} + \frac{5}{4}\right)^2.$$

3. Rózsaablak gráfok

A *rózsaablak gráf* fogalmának bevezetése Wilson nevéhez fűződik [41, 47].

3.1. Definíció. *Legyenek* $n \geq 3$ *és* $1 \leq a, r \leq n - 1$, *természetes számok. Az* $R_n(a, r)$ *rózsaablak gráf csúcshalmaza:* $\{x_i \mid i \in \mathbb{Z}_n\} \cup \{y_i \mid i \in \mathbb{Z}_n\}$ *az élek pedig:*

$$\{\{x_i, x_{i+1}\} \mid i \in \mathbb{Z}_n\} \cup \{\{y_i, y_{i+r}\} \mid i \in \mathbb{Z}_n\} \cup \{\{x_i, y_i\} \mid i \in \mathbb{Z}_n\} \cup \{\{x_{i+a}, y_i\} \mid i \in \mathbb{Z}_n\}.$$

Wilsont először az $R_n(a, r)$ gráfok zárt felületekbe történő, *forgásszimmetrikus térképként* (*rotary map*) történő beágyazásai érdekelték. Számos példát adott ilyen forgásszimmetrikus térképekre. Felsorolta azokat az n, a, r paramétereket, amelyekre $R_n(a, r)$ rózsaablakgráfok forgásszimmetrikus térképként beágyazhatók és megfogalmazta azt a sejtést, miszerint ez a lista teljes. Egy $\mathcal{M}$ *térkép* (*map*) a Γ véges, összefüggő gráf egy felületre történő beágyazása olyan módon, hogy az a felületet egyszeresen összefüggő tartományokra ossza, mely tartományokat $\mathcal{M}$ *lapjainak* nevezzük. Minden f laphoz tartozik egy zárt séta Γ-ban, ahol az élek f határán vannak, ezekre is $\mathcal{M}$

lapjaiként hivatkozhatunk. $\mathcal{M}$ egy *automorfizmusa* alatt Γ egy olyan automorfizmusát értjük, ami megőrzi a lapokat. A [48] terminológiáját követve $\mathcal{M}$-et *forgásszimmetrikus térképnek* (*rotary map*) nevezzük, ha vannak olyan R és S gráf automorfizmusok, ahol R ciklikusan permutálja valamely f lap egymást követő éleit és S ciklikusan permutálja az f lap valamely v csúcsából kiinduló éleket. Ekkor $\mathcal{M}$ automorfizmusainak csoportja $\mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ tranzitíven hat a csúcsok, az élek és a lapok halmazán is. Megjegyezzük, hogy R létezése biztosítja, hogy f határoló köre egy ún. *konzisztens köre* Γ gráfnak, részletekért lásd [6, 14, 38]. Ha a forgásszimmetrikus térképhez tartozik egy olyan T automorfizmus is, ami 'megfordítja' az f lap egy e élét, de megőrzi a lapot, akkor azt mondjuk, hogy $\mathcal{M}$ *reflexibilis.* Másrészt ha ilyen automorfizmus nem létezik, akkor $\mathcal{M}$-et *királisnak* nevezzük. Az egyik, térképekre vonatkozó központi kérdés, hogy mely gráfoknak van forgásszimmetrikus térképként történő beágyazása egy zárt felületre [7].

Wilson az alábbi három, rózsaablak gráfokra vonatkozó kérdést fogalmazta meg [47]-ben:

3.2. Kérdés. [47] *Legyenek $n \geq 3$ és $1 \leq a, r \leq n-1$ természetes számok,*

- *(i) Milyen n, a és r paraméterek esetén éltranzitív az $R_n(a, r)$ gráf?*
- *(ii) Ha $R_n(a, r)$ éltranzitív, mi az automorfizmus-csoportjának a rendje?*
- *(iii) Milyen n, a és r paraméterek esetén lesz $R_n(a, r)$ beágyazható forgásszimmetrikus térképként?*

Wilson az első kérdés megválaszolásán dolgozva négy olyan rózsaablak gráf osztályt talált, amelynek tagjai mind éltranzitívek és azt sejtette, hogy a lista teljes, azaz nincs ezeken kívül más éltranzitív rózsaablak gráf [47]. Ezek a gráf-osztályok az alábbiak:

- **(a)** $R_n(2, 1)$;
- **(b)** $R_{2m}(m-2, m-1)$;
- **(c)** $R_{12m}(3m+2, 3m-1)$ és $R_{12m}(3m-2, 3m+1)$;
- **(d)** $R_{2m}(2b, r)$, ahol $b^2 = \pm 1 \pmod{m}$, $2 \leq 2b \leq m$, és $r \in \{1, m-1\}$ páratlan.

Ezt a sejtést Kovács, Kutnar és Marušič igazolták [33].

A második és a harmadik kérdést is megválaszoljuk [34]. Munkánk során gráfok *fedéseire* és *beágyazásokra* vonatkozó jól ismert eredményeket használunk fel. Egy $\widetilde{\Gamma}$ gráfot a Γ gráf egy $p \colon \widetilde{\Gamma} \to \Gamma$ *vetítéssel* való *fedésének* nevezzük, ha p a $V(\widetilde{\Gamma})$-ből $V(\Gamma)$-ra képező lokálisan bijektív ráképezés, azaz ha $p|_{N(\widetilde{v})} \to N(v)$ minden $v \in V(\Gamma)$ és $\widetilde{v} \in p^{-1}(v)$ esetén bijekció. A $\widetilde{\Gamma}$ gráfot a Γ *alap gráf* egy *fedő gráfjának* nevezzük. A Γ gráf egy p vetítéssel történő $\widetilde{\Gamma}$ fedése *reguláris* (vagy *K-fedés*), ha van egy olyan K szemireguláris részcsoportja az $\mathrm{Aut}(\widetilde{\Gamma})$ automorfizmus-csoportnak, amire Γ izomorf $\widetilde{\Gamma}/K$-val egy h izomorfizmus mellet és a $\widetilde{\Gamma} \to \widetilde{\Gamma}/K$ kvóciens leképezés éppen p és h kompozíciója. Ha $\widetilde{\Gamma}$ összefüggő, akkor K-t *fedő transzformáció csoportnak* nevezzük, továbbá ha K ciklikus, akkor $\widetilde{\Gamma}$-t a Γ gráf *ciklikus fedésének* nevezzük. A reguláris fedések kombinatorikus leírását Gross és Tucker adták meg a feszültség gráfok fogalmát felhasználva [25]. Legyen Γ egy gráf és K egy véges csoport. Ha $x \in A(\Gamma)$ egy ív, az inverzét x^{-1}-vel jelöljük. Γ egy *feszültség kiosztása* (*voltage assignment*) vagy más néven *K-feszültség kiosztása* alatt egy olyan $\zeta\colon A(\Gamma) \to K$ leképezést értünk, amire teljesül, hogy $\zeta(x^{-1}) = \zeta(x)^{-1}$ bármely $x \in A(\Gamma)$ ív esetén. A ζ értékeit *feszültségeknek*, K-t pedig *feszültség-csoportnak* nevezzük. A $\zeta\colon A(\Gamma) \to K$ feszültség kiosztáshoz tartozó ún. *feszültség gráf* $\Gamma \times_\zeta K$ az a gráf, aminek csúcshalmaza $V(\Gamma) \times K$, élei pedig $(u,g)(v,\zeta(x)g)$ alakúak, ahol $x = (u,v) \in A(\Gamma)$. Nyilván $\Gamma \times_\zeta K$ a Γ gráf egy fedése az első koordinátára való vetítés mellett. Tekintve a K csoport azon természetes hatását $V(\Gamma \times_\zeta K)$-n, amelyikre $(u,g)^{g'} = (u,gg')$, $(u,g) \in V(\Gamma \times_\zeta K)$, $g' \in K$ egy szemireguláris automorfizmus csoportját kapjuk a $\Gamma \times_\zeta K$ gráfnak, ami azt mutatja, hogy a $\Gamma \times_\zeta K$ tulajdonképpen egy K-fedés. Legyen T a Γ gráf egy feszítőfája, a ζ feszültség kiosztást *T-redukáltnak* nevezzük, ha a fa íveihez tartozó feszültségek mind a csoport egységelemével egyenlők. Bizonyítható, hogy Γ gráf minden $\tilde{\Gamma}$ reguláris fedése, tetszőlegesen rögzített T feszítőfa esetén előáll valamely T-redukált ζ feszültség kiosztásból származtatva [25].

Legyen Γ gráf egy K-fedése $\tilde{\Gamma}$ a p projekcióval. Ha $\alpha \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ és $\widetilde{\alpha} \in \mathrm{Aut}(\widetilde{\Gamma})$ telejesítik, hogy $\widetilde{\alpha}p = p\alpha$, akkor az $\widetilde{\alpha}$-t az α egy *felemelésének*, az α-t pedig $\widetilde{\alpha}$ egy *vetületének* nevezzük. Ha a $\widetilde{X}$ fedő gráf összefüggő, akkor a K fedő transzformáció csoport az $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ triviális részcsoportjának felemelése. Jegyezzük meg, hogy a $G \le \mathrm{Aut}(\widetilde{\Gamma})$ részcsoport pontosan akkor vetíthető le, ha a $V(\Gamma)$ halmaz K pályáira történő partíciója G-invariáns.

Az a kérdés, hogy a Γ gráf egy α automorfizmusa felemelődik vagy sem kifejezhető a feszültségek segítségével. Figyeljük meg, hogy az íveken definiált feszültség kiosztás természetes módon kiterjeszthető a séták egy feszültség kiosztásává. Definiálunk egy $\bar{\alpha}$ függvényt, ami leképezi egy rögzített $v \in V(\Gamma)$ csúcsra alapuló fundamentális körök feszültségeinek halmazát a K csoportra a következőképpen: $\bar{\alpha}(\zeta(C)) = \zeta(C^\alpha)$, ahol C végigfut a v csúcsra alapuló fundamentális körök halmazán, $\zeta(C)$ és $\zeta(C^\alpha)$ pedig rendre a C illetve C^α feszültségei. Az alábbi két állítás hasznosnak bizonyul a munkánk során:

3.3. Állítás. [35] *Legyen $\Gamma \times_\zeta K$ egy K-fedés. Ekkor a Γ gráf egy α automorfizmusa pontosan akkor emelődik fel ha $\bar{\alpha}$ kiterjeszthető K egy automorfizmusává.*

3.4. Állítás. [36] *Legyen* $\tilde{\Gamma}_1 = \Gamma \times_\zeta K$ *és* $\tilde{\Gamma}_2 = \Gamma \times_{\zeta'} K$ *a* Γ *gráf két összefüggő* K*-fedése, ahol* ζ *és* ζ' *két* T*-redukált feszültség kiosztás. Ekkor* $\tilde{\Gamma}_1$ *és* $\tilde{\Gamma}_2$ *pontosan akkor izomorfak, ha vannak olyan* $\gamma \in \mathrm{Aut}(K)$ *és* $g \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ *automorfizmusok, amikre* $\gamma(\zeta(C)) = \zeta'(C^g)$ *teljesül minden, a* T *feszítőfához tartozó* C *fundamentális kör esetén.*

A következő állítás a gráf automorfizmus-csoportjára vonatkozó feltételek segítségével ad kritériumot arra, hogy egy gráf mikor ágyazható be irányítható, zárt felületre forgásszimmetrikus térképként.

3.5. Állítás. [21] *Egy összefüggő* Γ *gráf, aminek minden foka legalább* 3 *pontosan akkor ágyazható be egy irányítható felületre forgásszimmetrikus térképként, ha van olyan* $K \leq \mathrm{Aut}(\Gamma)$, *amire teljesülnek az alábbiak:*

1. K *tranzitív a* Γ *gráf íveinek halmazán.*
2. *A* Γ *egy* v *csúcsához tartozó* K_v *stabilizátor ciklikus.*

A fő eredményünk Wilson harmadik kérdésére ad választ:

3.6. Tétel. [34] *Legyen* $\Gamma = R_n(a, r)$ *egy rózsaablak gráf és* $\mathcal{M}$ *a hozzá tartozó forgásszimmetrikus térkép,* $1 \leq a, r \leq n/2$. *Az alábbiak valamelyike teljesül:*

1. $\mathcal{M}$ *reflexibilis és*
   (a) $\Gamma = R_n(2, 1)$, $\gcd(n, 12) > 2$,
   (b) $\Gamma = R_{2m}(m-2, m-1)$, $\gcd(m, 60) > 3$,
   (c) $\Gamma = R_{12m}(3m+2, 3m-1)$ *or* $R_{12m}(3m-2, 3m+1)$, $m \equiv 2 \pmod 4$.
2. $\mathcal{M}$ *királis és* $\Gamma = R_{2m}(2b, r)$, $m > 2$, $2 \leq 2b \leq m$, $b^2 \equiv -1 \pmod m$, *és* $r = 1$, *vagy* $r = m - 1$ *és* m *páros.*

Hivatkozások

[1] Alperin, J. L. and Bell, R. B.: *Groups and Representations,* volume 162 of Graduate Texts in Mathematics, Springer Verlag, 1995.

[2] Araujo, G., Noy, M. and Serra, O.: *A geometric construction of large vertex transitive graphs of diameter two,* J. Combin. Math. Combin. Comput. **57** (2006), 97–102.

[3] Bannai, E. and Ito, T.: *On finite Moore graphs,* J. Fac. Sci. Tokyo Univ. **20** (1973), 191–208.

[4] Batten, L. M.:*Determining sets,* Australas. J. Combin. **22** (2000), 167–176.

[5] Baumert, L. D.: *Cyclic difference sets,* Lecture notes in Mathematics 182, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1971.

[6] Biggs, N. L.: *Aspects of symmetry in graphs,* Algebraic methods in graph theory Vol. I, II (Szeged, 1978), pp. 27–35, *Colloq. Math. Soc. János Bolyai* **25** North-Holland, Amsterdam-New York, 1981.

[7] Biggs, N. L. and White, A. T.: *Permutation groups and combinatorial structures,* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1979.

[8] Blokhuis, A.: *Characterization of seminuclear sets in a finite projective plane,* J. Geom. **40** (1991), 15–19.

[9] Blokhuis, A., Malnič, A., Marušič, D., Kiss, Gy., Kovács, I., Ruff, J.: *Semiovals contained in the union of three concurrent lines,* J. of Comb. Designes. **15** (2007) 491–501.

[10] Blokhuis, A. and Szőnyi, T.: *Note on the structure of semiovals in finite projective planes,* Discrete Math. **106/107** (1992), 61–65.

[11] Bosma, W., Cannon, J., Playoust, C.: *The* MAGMA *Algebra System I: The User Language,* J. Symbolic Comput. **24** (1997), 235–265.

[12] Buekenhout, F.: *Characterizations of semi quadrics. A survey,* Colloquio Internazionale sulle Teorie Combinatorie (Roma, 1973), Tomo I, pp. 393–421. Atti dei Convegni Lincei, No. 17, Accad. Naz. Lincei, Rome, 1976.

[13] Cameron, P. J.: *Four lectures on Projective Geometries,* in: Finite Geom. (ed.: Baker, C.A. and Batten, L.M.) Lecture Notes in pure and applied math. **103**, Marcel Dekker (1985), 27–63.

[14] Conway,J. H. Talk given at the Second British Combinatorial Conference at Royal Holloway College, 1971.

[15] Csajbók, B. and Kiss, Gy.: *Notes on semiarcs,* Mediterranean J. Math, submitted

[16] Davydov, A. A.: *Constructions and families of covering codes and saturating sets of points in projective geometry,* IEEE Transactions on Information Theory **41** (1995), 2071–2080.

[17] Davydov, A. A. and Drozhzhina-Labinskaya, A. Yu.: *Constructions, families and tables of binary linear covering codes,* IEEE **40** (1994), 1270–1279.

[18] Davydov, A. A., Faina, G., Marcugini, S. and Pambianco, F.: *Computer search in projective planes for the sizes of complete arcs,* J. Geom. **82** (2005), 50–62.

[19] Dixon, J. D. and Mortimer, B.: *Permutation groups,* Springer-Verlag, New York, 1996.

[20] Dover,J. M.: *Semiovals with large collinear subsets,* J. Geom. **69** (2000), 58–67.

[21] Gardiner, A., Nedela, R., Širáň, J. and Škoviera, M.: *Characterisation of graphs which underlie regular maps on closed surfaces,* J. London Math. Soc. (2) **59** (1999), 100-108

[22] Gács, A.: *On regular semiovals,* J. Algebraic Combin., **23** (2006), 71-77.

[23] Godsil, C. D.: *Algebraic Combinatorics,* Chapman & Hall, New York 1993.

[24] Gordon, D. M.: *The prime power conjecture is true for* $n < 2,000,000$, Electronic J. Combin. 1 R6 (1994).

[25] Gross, J. L., Tucker,T. W.: *Generating all graph coverings by permutation voltage assignment,* Discrete Math. **18** (1977), 273-283.

[26] Hirschfeld, J. W. P. and Storme, L.: *The packing problem in statistics, coding theory and finite projective spaces,* in: Finite Geometries, Development of Mathematics, Kluwer, 2001, 201–246.

[27] Hoffman, A. J. and Singleton,R. R.: *On Moore graphs with diameter* 2 *and* 3*,* IBM J. Res. Develop. **4** (1960), 497–504.

[28] Hubaut, X.: *Limitation du nombre de points d'un* (k, n)*-arc régulier d'un plan projectif fini,* Atti Accad. Naz. Lincei Rend. **8** (1970), 490–493.

[29] Johnson, P. M.: *Semiquadratic sets and embedded polar spaces,* J. Geom. **64** (1999), 102–127.

[30] Kiss, Gy.: *Small semiovals in* $PG(2, q)$*,* J. Geom., **88** (2008), 110-115.

[31] Kiss, Gy., Kovács, I., Kutnar, K., Ruff, J., Šparl, P.: *A note on a geometric construction of large Cayley graphs of given degree and diameter,* Studia Univ. „Babes-Bolyai", Mathematica LIV **3** (2009), 77-84.

[32] Kiss, Gy. and Ruff, J.: *Notes on small semiovals,* Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. **47** (2004), 97–105.

[33] Kovács, I., Kutnar, K. and Marušič, D.: *Classification of edge-transitive rose window graphs,* to apper in J. Graph Theory, 2009, 1-16, doi: 10.1002/jgt.20475.

[34] Kovács, I., Kutnar, K. and Ruff, J.: *Rose window graphs underlying rotary maps,* Discrete Math. **12** 310 (2010), 1802-1811.

[35] Malnič, A.: *Group actions, coverings and lifts of automorphisms,* Discrete Math. **182** (1998), 203-218.

[36] Malnič, A., Marušič, D. and Potočnik,P.: *Elementary abelian covers of graphs,* J. Algebraic Combin. **20** (2004), 71-97.

[37] Mann, H.B.: *Addition Theorems,* John Wiley, 1965.

[38] M̌iklavič, S., Potočnik, P. and Wilson, S.: *Consistent cycles in graphs and digraphs,* Graphs and Combin. **23** (2007), 205–216.

[39] Miller, M. and Širaň, J.: *Moore graphs and beyond: A survey of the degree/diameter problem,* Electron. J. Combin., DS14 (2005) 61 pp.

[40] Nagell, T.: *The diophantine equation* $x^2 + 7 = 2^n$*,* Ark. Mat. **4** (1961), 185–187.

[41] Potočnik, P. and Wilson, S.: *A Census of edge-transitive tetravalent graphs,*
`http://jan.ucc.nau.edu/~swilson/C4Site/index.html`

[42] Rédei, L.: *Die neue Theorie der endlichen abelschen Gruppen und Verallgemeinerung des Hauptsatzes von Hajós,* Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **16** (1965), 329–373.

[43] Suetake, C.: *Two families of blocking semiovals,* European J. Combin. **21** (2000), 973–980.

[44] Szabó, S.: *Topics in Factorizations of Abelian Groups,* Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin 2004.

[45] Szőnyi, T.: *Combinatorial problems for abelian groups arising from geometry,* Period. Polytech. Transportation Engrg. **19** (1991), no. 1-2, 91–100.

[46] Thas, J. A.: *On semiovals and semiovoids,* Geom. Dedicata 3 (1974), 229–231.

[47] Wilson, S.: *Rose Window Graphs,* Ars Math. Contemp. **1** (2008), 7–19. `http://amc.imfm.si/index.php/amc/issue/view/5`

[48] Wilson, S.: *Operators over regular maps,* Pacific J. Math. **81** (1979), 559-568.

[49] *The (Degree,Diameter) Problem for Graphs,* A World Combinatorics Exhange resource at
`http://www-mat.upc.es/grup\_de\_grafs/oldpage.html`.