

HABILITÁCIÓS TUDOMÁNYOS TÉZISEK
GEOMETRIAI SZÉLSŐÉRTÉK-PROBLÉMÁK

Lángi Zsolt
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Geometria Tanszék
és
ELKH-BME Szilárd Testek Morfodinamikája
Kutatócsoport

1. BEVEZETÉS

1.1. Áttekintés. Geometriai szélsőérték-problémán egy olyan problémát értünk, melynek célja geometriai objektumok adott családján belül az elemek valamely geometriai jellemzője szélsőértékeinek meghatározása. Jelen dolgozat célja a jelölt ezen területen az elmúlt években elért eredményeinek részleges ismertetése. A dolgozatban hat cikk anyagát mutatjuk be, melyeket hat fejezetre bontva tárgyalunk az alábbi formában.

Az első fejezet témája egy konvex test pozitív homotetikus képei-
nek egy speciális tulajdonságú családjaira, úgynevezett *nemszeparálha-
tó* családjaira vonatkozó sejtés, melyet Goodman és Goodman tett egy
1945-ös cikkében [14]. Bezdek Károllyal közös munkánk [4] eredmé-
nyeként megmutatjuk, hogy a sejtés nem igaz teljes általánosságban,
azaz minden nemszeparálható családra, de több feltétel adható, melyek
bármelyikének teljesülése esetén a sejtés igaz.

A második fejezetben 3-dimenziós konvex paralleloédereket, azaz
olyan konvex poliédereket vizsgálunk, melyek eltoltjai átfedés nélkül
és hézagmentesen kitöltik a teret. Ezen poliéder-család tagjai közt
tudhat több igen ismert poliédert; elemei közt szerepel pl. a kocka, a
szabályos rombikus dodekaéder és a szabályos csonkolt oktaéder, ahol
a két utóbbi poliéder rendre a lapcentrált köbös, valamint a tércent-
rált köbös kockarács Voronoi cellája. A geometriában ismert szerepük
ellenére a szakirodalomban lényegében nem szerepel (Hales híres bi-
zonyításától eltekintve, melyben belátta a Kepler sejtést) paralleloé-
derekre vonatkozó geometriai szélsőérték-probléma megoldása. A [21]
cikkben végzett munkát ismertetve ebben a fejezetben bemutatjuk egy
3-dimenziós paralleloéderekre vonatkozó geometriai szélsőérték-feladat
megoldását, és ismertetjük ennek kapcsolatát Lord Kelvin minimális
felszínű térbeli mozaikokra vonatkozó 1887-es sejtésével [17].

A harmadik, negyedik és ötödik fejezet konvex testek egyensúlyi
pontjaival foglalkozik. Ezen fogalom, mely már Arkhimédész kutató-
sának is tárgya volt [15], az ókor óta fontos szerepet játszik mind alkal-
mazott, mint elméleti tudományokban. Konvex testek súlypontjának
vizsgálata a modern elméleti matematikában Conway és Guy [6, 13],
valamint és Shephard [31] monostabil poliéderekre vonatkozó kérdése-
ivel kezdődött az 1960-as évek második felében. Az általuk felvetett
egyik probléma azt kérdezi, hogy mennyi a monostabil poliéderek, azaz
azon konvex poliéderek minimális lapszáma, melyek csak egy lapjukon
állíthatóak meg vízszintes síkon.

A harmadik fejezet témája ezen probléma egy általánosítása, mely-
ben azt vizsgáljuk, hogy adott $S, U \geq 1$ értékek esetén mennyi azon

konvex poliéderek minimális lap-, él- és csúcsszáma, melyek S stabil és U instabil egyensúlyi ponttal rendelkeznek, azaz melyek S lapjukon és U csúcsukban állíthatók meg vízszintes síkon. A fejezetben Domo-kos Gáborral, Kovács Flóriánnal, Regős Krisztinával és Varga Péterrel közös eredményeket [9] mutatunk be. Látni fogjuk, hogy ezen probléma vizsgálata természetes módon elvezet minket Koebe poliéderek centrálásának problémájához, azaz azon kérdéshez, hogy konvex poliéderek milyen kombinatorikus osztályai reprezentálhatóak olyan, adott gömböt éleiben érintő konvex poliéderrel, melynek súlypontja éppen a gömb középpontja. Az erre vonatkozó, [20] cikkben megjelent eredményeket a negyedik fejezetben ismertetjük. Az ötödik fejezet monostabil poliéderek tulajdonságaival foglalkozik, és választ ad Conway és Guy fent már említett, [6] cikkben szereplő három kérdése közül kettőre. A megoldáshoz vezető módszert alkalmazzuk egy harmadik fejezetben felvetett probléma megközelítésére is.

Rogers és Shephard az 1950-es évek végén kezdett foglalkozni konvex testekhez rendelt különböző konvex testek térfogatainak vizsgálatával. A témában három, ma klasszikusnak számító cikket írtak [26, 27, 28]; az ezekben szereplő eredményeknek még az utóbbi években is számos általánosítása és variánsa született. A hatodik fejezetben egy [28] cikkben megoldott problémának normált terekre vonatkozó változatával foglalkozunk, és ismertetjük a [19] cikk fő eredményeit.

1.2. Jelölések és alapfogalmak. A dolgozatban $\mathbb{R}^d$ jelöli a d -dimenziós euklideszi teret, melyet egy d -dimenziós valós vektortérnek tekintünk, ellátva egy pozitív definit $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ belső szorzással. A belső szorzás által indukált euklideszi normát $\|\cdot\|$ jelöli, míg az $\mathbb{R}^d$ vektortér nullvektorát o , melyet origónak hívunk. Az *origó középpontú zárt egységgömbre* a $\mathbf{B}^d$, míg ennek határára az $\mathbb{S}^{d-1}$ jelölést alkalmazzuk.

Ha $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ nemüres halmazok, akkor A és B *Minkowski összege* vagy *vektorösszege*

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\},$$

míg tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$\lambda A = \{\lambda a : a \in A\}.$$

Tetszőleges nemüres $S \subseteq \mathbb{R}^d$ és $x \in \mathbb{R}^d$ esetén az $\{x\} + S$ halmazt S x vektorral vett *eltoltjának* nevezzük, és az egyszerűség kedvéért $x + S$ módon jelöljük. Általánosabban, ha $\lambda > 0$, akkor az $x + \lambda S$ halmazt S egy λ arányú *pozitív homotetikus képének* hívjuk. A tér lineáris altereinek egy $\mathbb{R}^d$ -beli vektorral vett eltoltjait *affin altereknek* nevezzük. Az 1, 2, illetve $(d - 1)$ -dimenziós affin alterek neve rendre *egyenesek*,

síkok és hipersíkok. A nemdegenerált lineáris transzformációk és az eltolások kompozícióit *affin transzformációknak* nevezzük, egy halmaz affin transzformációval kapott képét pedig röviden a halmaz egy *affin képe*nek hívjuk.

Ha $p, q \in \mathbb{R}^d$, akkor a p, q végpontú *zárt szakasz*

$$[p, q] = \{(1 - t)p + tq : t \in [0, 1]\}.$$

Egy halmaz *konvex*, ha bármely két pontját összekötő zárt szakaszt tartalmazza. Egy nemüres halmaz *konvex burka* az őt tartalmazó konvex halmazok metszete; ez a halmaz maga is konvex. Az $S \subset \mathbb{R}^d$ halmaz belsejét, határát és konvex burkát rendre $\text{int}(S)$, $\text{bd}(S)$ és $\text{conv}(S)$ jelöli. Egy $K \subset \mathbb{R}^d$ halmaz egy *konvex test*, ha kompakt, konvex és a belseje nem üres. Egy konvex test minden határpontjához található ezen pontot tartalmazó hipersík, mely a test belsejét nem metszi. Ezen hipersíkokat a test *támaszhipersíkjainak* nevezzük. Közismert, hogy tetszőleges K konvex testre és $u \in \mathbb{S}^{d-1}$ vektorra a testnek pontosan kettő, u -ra merőleges támaszhipersíkja van. Ha K -nak minden p határpontjára pontosan egy p -t tartalmazó támaszhipersíkja van, akkor azt mondjuk, hogy K *sim*a. Ha K határa nem tartalmaz szakaszt, akkor azt mondjuk, hogy K *szigorúan konvex*.

Ha egy konvex test előáll véges sok pont konvex burkaként, akkor a testet *konvex politóp*nak, illetve $d = 2$ és $d = 3$ esetén rendre *konvex sokszög*nek és *konvex poliéder*nek hívjuk. Egy konvex test, speciálisan egy konvex politóp *lapjai* a testnek a támaszhipersíkjaival vett metszetei. Közismert, hogy egy konvex politóp lapjai, illetve $\emptyset$ és maga a politóp, a tartalmazásra nézve egy algebrai hálót alkotnak, melyet a politóp *laphálójának* nevezünk. Két konvex politóp *kombinatorikusan ekvivalensek*, ha laphálójuk izomorfak. Némileg következetlenül (de az irodalomban megszokott módon), konvex poliéderek 0-, 1- és 2-dimenziós lapjait rendszerint a poliéder *csúcsainak*, *éleinek* és *lapjainak* nevezük.

Egy konvex test térfogatát (Lebesgue mértékét) $\text{vol}(\cdot)$ fogja jelölni. Steiner egy eredménye szerint tetszőleges K d -dimenziós konvex testre a $\text{vol}(K + \lambda \mathbf{B}^d)$ térfogat előáll, mint λ egy d -edfokú polinomja:

$$(1) \quad \text{vol}(K + \lambda \mathbf{B}^d) = \sum_{i=0}^d V_i(K) \kappa_{d-i} t^{d-i},$$

ahol κ_{d-i} jelöli $\mathbf{B}^{d-i}$ térfogatát. A $V_i(K)$ mennyiséget K i -edik *belső térfogatának* nevezzük. Érdemes meggondolni, hogy $V_0(K) = 1$ és $V_d(K) = \text{vol}(K)$ tetszőleges K d -dimenziós konvex test esetén.

Legyenek K, L kompakt, konvex halmazok $\mathbb{R}^d$ -ben. Ekkor K és L Hausdorff távolsága a

$$(2) \quad d_H(K, L) = \inf\{\lambda > 0 : K \subseteq L + \lambda \mathbf{B}^d \text{ és } L \subseteq K + \lambda \mathbf{B}^d\}$$

mennyiség. Érdeemes megjegyezni, hogy az $\mathbb{R}^d$ -beli kompakt, konvex halmazok családja a Hausdorff-távolságra nézve egy teljes metrikus teret alkot.

Végül, de nem utolsósorban, tetszőleges $X \subseteq \mathbb{R}^d$ halmaz esetén X polárisa az

$$(3) \quad X^\circ = \{y \in \mathbb{R}^d : \langle x, y \rangle \leq 1\}$$

halmaz. Könnyen látható, hogy bármely halmaz polárisa egy o -t tartalmazó zárt, konvex halmaz, és $(X^\circ)^\circ = X$ pontosan akkor teljesül, ha X is rendelkezik ezen tulajdonságokkal. Ha K egy o -szimmetrikus konvex test, azaz teljesíti a $-K = K$ feltételt, akkor a

$$\text{vol}(K) \text{vol}(K^\circ)$$

mennyiséget K térfogatszorzatának vagy Mahler térfogatának nevezzük. A Blaschke-Santaló egyenlőtlenség szerint ezen mennyiség az o -szimmetrikus konvex testek családján belül a maximumát ellipszoidok esetén veszi fel. A térfogatszorzat minimumát nem ismerjük. A konvex geometria egyik híres megoldatlan sejtése, az úgynevezett Mahler-sejtés szerint a fenti mennyiség minimális pl. az o középpontú kockák esetén.

2. NEMSEPARÁLHATÓ CSALÁDOK VIZSGÁLATA

A fejezet fő fogalma az alábbi.

2.1. definíció. Legyen $d, n \geq 2$. Legyen $K \subset \mathbb{R}^d$ egy konvex test, és legyen

$$\mathcal{K} = \{x_i + \tau_i K \mid x_i \in \mathbb{R}^d, \tau_i > 0, i = 1, 2, \dots, n\}$$

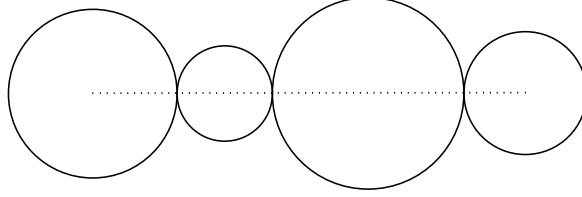
K pozitív homotetikus képeinek egy véges családja. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{K}$ egy nemszeparálható család, vagy NS-család, ha tetszőleges H hipersíkra, ha H metszi a $\text{conv}(\bigcup \mathcal{K})$ halmazt, akkor metszi $\mathcal{K}$ valamelyik elemét is, azaz nincs olyan hipersík, amely $\mathcal{K}$ elemeinek egy részét szigorúan elválasztja a többitől. Ha $\mathcal{K}$ egy NS-család, jelölje $\lambda(\mathcal{K})$ a legkisebb pozitív λ számot, melyre igaz, hogy $\lambda(\sum_i^n \tau_i) K$ egy eltoltja fedi az $\bigcup \mathcal{K}$ halmazt.

Erdős egy sejtése szerint körlemezeken tetszőleges $\mathcal{K}$ nemszeparálható családjára $\mathbb{R}^2$ -ben

$$\lambda(\mathcal{K}) \leq 1$$

teljesül. Ezt a sejtést A.W. Goodman és R.E. Goodman igazolta 1945-ben [14]. Megjegyezzük, hogy ha $\mathcal{K}$ elemei sorozatba rendezhetőek úgy,

hogy a szomszédos elemek egymást érintik, és a körlemezek középpontjai egy egyenesen vannak, akkor $\mathcal{K}$ körlemezek egy olyan NS-családja, melyre $\lambda(\mathcal{K}) = 1$ (ld. 1. ábra), így az 1 érték Goodman és Goodman eredményében optimális. A fenti [14] cikkben a szerzők megfogalmazták az alábbi sejtést.



1. ábra. Példa körlemezek olyan $\mathcal{K}$ NS-családjára, melyre $\lambda(\mathcal{K}) = 1$.

2.2. sejtés (Goodman-Goodman, 1945). *Legyen $n, d \geq 2$. Ekkor tetszőleges K konvex testre $\mathbb{R}^d$ -ben, és ezen test pozitív homotetikus képeinek tetszőleges*

$$\mathcal{K} = \{x_i + \tau_i K \mid x_i \in \mathbb{R}^d, \tau_i > 0, i = 1, 2, \dots, n\}$$

NS-családjára a

$$\lambda(\mathcal{K}) \leq 1$$

egyenlőség teljesül.

Ezen sejtést illetően az első eredményünk az alábbi.

2.3. tétel (Bezdek-Lángi, 2016). *Legyen $d \geq 2$ és $n \geq 3$ tetszőleges, és legyen K egy simplex $\mathbb{R}^d$ -ben. Ekkor létezik olyan $\mathcal{K}$ NS-család, mely K n darab eltoltját tartalmazza, és melyre*

$$\lambda(K) \geq \frac{n-1 + \frac{2}{\sqrt{3}}}{n} > 1$$

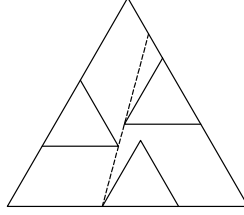
(ld. 2. ábra).

Ha $d = 2$ és $n = 3$, az előző tételben szereplő becslés optimális:

2.4. tétel (Bezdek-Lángi, 2016). *Ha $\mathcal{K}$ egy K konvex síkidom 3 pozitív homotetikus képét tartalmazó NS-család, akkor*

$$\lambda(\mathcal{K}) \leq \frac{2}{3} + \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Az általános esetre az alábbi becslés adható.



2. ábra. Egy ellenpélda a Goodman-Goodman sejtésre $n = 3$ és $d = 2$ esetén. A fenti $\mathcal{K}$ elrendezésre $\lambda(\mathcal{K}) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3\sqrt{3}}$.

2.5. tétel (Bezdek-Lángi, 2016). *Legyen $d \geq 2$. Ha K egy konvex test $\mathbb{R}^d$ -ben, és $\mathcal{K}$ K pozitív homotetikus képeinek egy NS-családja, akkor*

$$(4) \quad \lambda(\mathcal{K}) \leq d.$$

A következő eredmény előtt idézzük fel, hogy egy $S \subset \mathbb{R}^d$ halmaz *o-szimmetrikus*, ha $-S = S$.

2.6. tétel (Bezdek-Lángi, 2016). *Legyen $d, n \geq 2$. Ha K egy o-szimmetrikus konvex test $\mathbb{R}^d$ -ben, és $\mathcal{K}$ K pozitív homotetikus képeinek egy NS-családja, akkor*

$$\lambda(\mathcal{K}) \leq 1.$$

Utolsó eredményünk előtt általánosítjuk az NS-család fogalmát.

2.7. definíció. *Legyen $\mathcal{K} = \{x_i + \tau_i K : x_i \in \mathbb{R}^d, \tau_i > 0, i = 1, 2, \dots, n\}$ a K $\mathbb{R}^d$ -beli konvex test pozitív homotetikus képeinek egy családja, és legyen $0 \leq k \leq d-1$. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{K}$ egy k -áthatolhatatlan elrendezés, röviden egy k -ÁH-család, ha az $\mathbb{R}^d$ tér tetszőleges k -dimenziós L affin alterére, mely metszi a $\text{conv}(\bigcup \mathcal{K})$ halmazt, L metszi $\mathcal{K}$ egy elemét. Emellett, ha $\mathcal{K}$ egy k -ÁH elrendezés, akkor jelölje $\lambda_k(\mathcal{K}) > 0$ azt a legkisebb λ pozitív valós számot, melyre teljesül, hogy $\lambda \left(\sum_{i=1}^n \tau_i \right) K$ egy eltöltja fedi az $\bigcup \mathcal{K}$ halmazt.*

Vegyük észre, hogy az előző definícióban, ha $k < l$, akkor egy k -ÁH család szükségképpen egy l -ÁH család is, valamint egy $(d-1)$ -ÁH-család valójában egy NS-család, és ebben az esetben $\lambda_{d-1}(\mathcal{K}) = \lambda(\mathcal{K})$. Ahhoz, hogy a Goodman-Goodman sejtés ÁH-családokra vonatkozó esetének egy erősebb változatát kimondjuk, néhány konvex geometriai fogalmat idézünk fel.

2.8. definíció. Legyen L és M két konvex test $\mathbb{R}^d$ -ben, ahol $d \geq 2$. Azt mondjuk, hogy L M egy összeadandója, ha létezik olyan N konvex test $\mathbb{R}^d$ -ben, melyre

$$L + N = M.$$

2.9. definíció. Legyen L és M két konvex test $\mathbb{R}^d$ -ben, ahol $d \geq 2$. Azt mondjuk, hogy L szabadon gördül M -ben, ha M minden x határpontjához létezik egy olyan $y \in \mathbb{R}^d$ eltolásvektor, melyre $y + L$ belülről érinti M -et x -ben, azaz

$$x \in y + L \subseteq M.$$

Jól ismert (ld. [29, Section 3.2]), hogy tetszőleges L, M konvex testekre $\mathbb{R}^d$ -ben L pontosan akkor M egy összeadandója, ha szabadon gördül M -ben. Vegyük észre, hogy ebben az esetben M nyilván tartalmazza L egy eltoltját.

Mi az alábbi formában igazoltuk a 2.2. sejtést k -ÁH-családokra ($0 \leq k \leq d - 2$).

2.10. tétel (Bezdek-Lángi, 2016). Legyen K egy konvex test $\mathbb{R}^d$ -ben, és legyen $\mathcal{K} = \{K_i = x_i + \tau_i K : x_i \in \mathbb{R}^d, \tau_i > 0, i = 1, 2, \dots, n\}$ K pozitív homotetikus képeinek egy k -ÁH-családja valamilyen $0 \leq k \leq d - 2$ egészre. Ekkor $\text{conv} \bigcup \mathcal{K}$ szabadon gördül a $(\sum_{i=1}^n \tau_i) K$ konvex testben, azaz $\lambda_k(\mathcal{K}) \leq 1$.

Szigorúan konvex testekre az előző tétel egy erősebb változata is teljesül.

2.11. tétel (Bezdek-Lángi, 2016). Legyen $d \geq 2$ és $0 \leq k \leq d - 2$, valamint legyen K egy szigorúan konvex test $\mathbb{R}^d$ -ben. Ha $\mathcal{K} = \{K_i = x_i + \tau_i K : x_i \in \mathbb{R}^d, \tau_i > 0, i = 1, 2, \dots, n\}$ K pozitív homotetikus képeinek egy k -ÁH-családja, akkor alkalmas $x_{i^*} \in \mathbb{R}^d$ esetén

$$\bigcup \mathcal{K} = x_{i^*} + \tau_{i^*} K = K_{i^*},$$

ahol $\tau_{i^*} = \max\{\tau_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}$.

Ezt a fejezetet a Goodman-Goodman sejtés két módosított verziójával zárjuk.

2.12. probléma (Bezdek-Lángi, 2016). Igazoljuk vagy cáfoljuk, hogy ha K egy konvex síkidom, és $\mathcal{K}$ K pozitív homotetikus képeinek egy NS-családja, akkor

$$\lambda(\mathcal{K}) \leq \frac{2}{3} + \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

2.13. probléma (Bezdek-Lángi, 2016). Keressük meg a $\sup_{\mathcal{K}} \lambda(\mathcal{K})$ mennyiséget minden rögzített $d \geq 2$ értékre, ahol $\mathcal{K}$ végigfut az összes

$\mathbb{R}^d$ -beli konvex test összes NS-családján. Speciálisan, létezik olyan c abszolút (dimenziótól független) konstans, melyre

$$\sup_{\mathcal{K}} \lambda(\mathcal{K}) \leq c$$

teljesül minden $d \geq 2$ esetén?

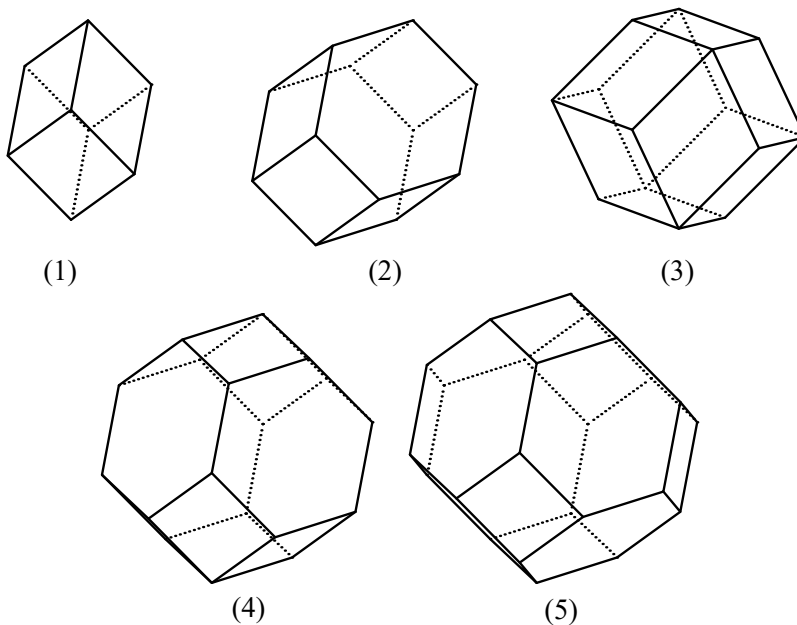
Megjegyezzük, hogy a közelmúltban Akopyan et al. [1] megjavította a 2.5. tételben szereplő felső korlátot d -ről $\frac{d+1}{2}$ -re, míg Polyanskii [24] igazolta Fejes Tóth László híres zóna sejtésének egy erősítéseként Goodman és Goodman euklideszi körrendszerekre vonatkozó eredményének egy gömbi geometriai változatát.

3. HÁROM-DIMENZIÓS PARALLELOÉDEREK

Néhány definícióval kezdjük. Ha $\mathcal{K} = \{K_1, K_2, \dots, K_n, \dots\}$ halmazok egy megszámlálható családja, melyre $\bigcup_{K_i \in \mathcal{K}} K_i = \mathbb{R}^d$, és $\mathcal{K}$ elemeinek belsejei páronként diszjunktak, akkor azt mondjuk, hogy $\mathcal{K}$ egy *kitöltés* vagy *mozaik*, és $\mathcal{K}$ elemei a mozaik *cellái*. A mozaik *konvex*, ha $\mathcal{K}$ elemei konvexek. Közismert, hogy egy konvex mozaik cellái *konvex politópok*, azaz előállnak véges sok pont konvex burkaként.

A 3-dimenziós *paralleloéderek*, azaz azon 3-dimenziós konvex poliéderek, melyek eltoltjaival az $\mathbb{R}^3$ euklideszi tér kitölthető, a legismertebb konvex poliéderek közé tartoznak. A 3-dimenziós paralleloéderek szorosan kapcsolódnak rácsok Voronoi celláihoz. Voronoi egy híres sejtése szerint, melyet $\mathbb{R}^3$ -re igazoltak, minden paralleloéder előáll, mint egy rács egy Voronoi cellájának affin képe. Közismert 3-dimenziós paralleloéder a kocka, a szabályos rombikus dodekaéder és a szabályos csonkolt oktaéder, melyek rendre a kockarács, a lapcentrált köbös, illetve a tércentrált köbös kockarács Voronoi cellái. Érdemes megjegyezni, hogy Hales híres bizonyításától eltekintve, melyben belátta a Kepler sejtést, és amely mellékesen azt is igazolja, hogy adott térfogatú 3-dimenziós paralleloéderek között a szabályos rombikus dodekaéder beírható gömbjének sugara maximális, nincs ismert izoperimetrikus típusú egyenlőtlenség 3-dimenziós paralleloéderekre. Speciálisan rombikus dodekaéderekre Bezdek Károly igazolta az alábbi izoperimetrikus egyenlőtlenséget [3]. A tétel kimondása előtt idézzük fel, hogy egy $\mathbb{R}^d$ -beli konvex test egy *rombikus dodekaéder*, ha előáll legfeljebb $d + 1$ szakasz Minkowski összegeként, és egy rombikus dodekaéder szabályos, ha a szakaszok előállíthatók, mint egy szabályos szimplex középpontját a csúcsokkal összekötő szakaszok.

3.1. tétel (Bezdek, 2000). *Legyen $d \geq 2$ és $0 < i < d$. Ekkor az egységnyi beírható sugarú d -dimenziós rombikus dodekaéderek között a szabályos rombikus dodekaéderek i -edik belső térfogata minimális.*



3. ábra. A 3-dimenziós paralleloéderek kombinatorikus típusai. (1) Parallelepipedon. (2) Középpontosan szimmetrikus hatszög alapú hasáb. (3) Rombikus dodekaéder. (4) Hosszított rombikus dodekaéder. (5) Csonkolt oktaéder.

A [21] cikk fő célja a 3-dimenziós paralleloéderek egy új reprezentációjának az ismertetése, melyet alkalmazva igazolja a 3.2. tételt. A tétel ismertetése előtt idézzük fel, hogy egy $\mathbb{R}^d$ -beli K konvex test $u \in \mathbb{S}^{d-1}$ irányú $w_u(K)$ szélessége az u -ra merőleges két támaszhipersíkjának távolsága, míg *átlagszélessége*

$$w(K) = \frac{1}{\omega_d} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} w_u(K) du,$$

ahol ω_d jelöli $\mathbb{S}^{d-1}$ gömbi térfogatát. Ezen mennyiséggel kapcsolatban érdemes megjegyezni, hogy egy 3-dimenziós K konvex test esetén a Steiner polinomban (ld. (1)) megjelenő $V_1(K)$ és $V_2(K)$ belső térfogatokra

$$\text{surf}(K) = 2V_2(K) \text{ és } w(K) = \frac{1}{2}V_1(K)$$

teljesül, ahol $\text{surf}(K)$ jelöli K felszínét.

3.2. tétel (Lángi, 2022). *Az egységnyi térfogatú 3-dimenziós paralleloéderek közt a szabályos csonkolt oktaéder átlagszélessége minimális.*

A bizonyítás két lépésből áll. Az első lépésben belátjuk, hogy ha egy fenti P paralleloéder átlagszélessége nem csökkenhet egy egy determinánsú lineáris transzformáció alkalmazásakor, akkor a hat generáló vektor úgynevezett *felszíni izotropikus helyzetben* van. A második lépésben pedig az ezen feltételt kielégítő paralleloéderek között meghatározzuk a minimális átlagszélességű elemeket.

A fenti eredményhez kapcsolódóan megemlíti Lord Kelvin híres 1887-es sejtését [17], mely szerint egységnyi térfogatú cellákból álló mozaikok között minimális felszínű mozaikot kaphatunk, ha egy szabályos csonkolt oktaéder cellákból álló rács celláit alkalmas módon enyhén deformáljuk. Habár a sejtést Weaire és Phelan 1994-ben cáfolta [34], a probléma azóta is intenzív kutatás tárgya. Ennek ellenére a szerző tudomása szerint nincs a mozaikoknak olyan részcsaládja, melyben Kelvin problémáját megoldották volna. Ez a motivációja az alábbi sejtésnek:

3.3. sejtés (Lángi, 2022). *Az egységnyi térfogatú 3-dimenziós paralleloéderek közt a szabályos csonkolt oktaéder felszíne minimális. Ekvivalens módon, azon $\mathbb{R}^3$ -beli mozaikok között, melyek cellái egy adott egységnyi térfogatú konvex test eltoltjai, azon mozaikok felszíne minimális, melyek cellái szabályos csonkolt oktaéderek.*

Megjegyezzük, hogy a 3.2. tétel bizonyításának módszere részben alkalmazható a cikkben megfogalmazott sejtés vizsgálatára is, de technikai nehézségek miatt a sejtés teljes megoldása egyelőre még várat magára.

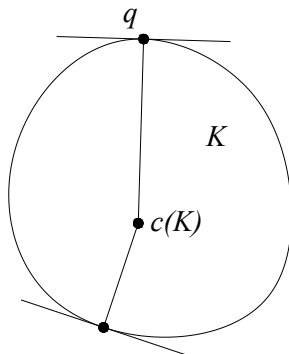
4. KONVEX POLIÉDEREK KOMPLEXITÁSA

Legyen $K \subset \mathbb{R}^3$ egy konvex test. Definiáljuk K *súlypontját*, mint a

$$c(K) = \frac{1}{\text{vol}(K)} \int_{x \in K} x \, dv$$

pontot, ahol v a 3-dimenziós Lebesgue mérték. Ekkor $c(K) \in \text{int}(K)$ nyilván teljesül minden K konvex testre. Ha a $q \in \text{bd}(K)$ ponton áthaladó és $q - c(K)$ normálvektorú sík K egy támaszsíkja, akkor azt mondjuk, hogy q a K test egy *egyensúlyi pontja* (ld. 4. ábra). Megjegyezzük, hogy ha K sima, akkor K egyensúlyi pontjai egybeesnek az

$$x \mapsto \|x - c(K)\|$$



4. ábra. Egy konvex test egyensúlyi pontjai

módon definiált $c(K)$ -tól mért euklideszi távolságfüggvény $\text{bd}(K)$ -ra vett megszorításának kritikus pontjaival.

Most definiáljuk a nemdegenerált egyensúlyi pont fogalmát két speciális test-osztályra. Ha K sima, a $q \in \text{bd}(K)$ pontnak van egy C^2 -osztályú környezete K határában, és az $x \mapsto \|x - c(K)\|$ euklideszi távolságfüggvény Hesse mátrixa q -ban nemdegenerált, akkor azt mondjuk, hogy q egy *nemdegenerált egyensúlyi pont*. Ebben az esetben a q pontot *stabil*, *nyereg-típusú* vagy *instabil* pontnak hívjuk attól függően, hogy a Hesse mátrix negatív sajátértékeinek száma rendre 0, 1 vagy 2. Legyen most P egy konvex poliéder $\mathbb{R}^3$ -ban, és legyen $q \in \text{bd}(P)$ egy egyensúlyi pontja P -nek. Ekkor egyértelműen létezik P -nek egy csúcsa, éle vagy lapja, mely q -t a relatív belsejében tartalmazza. Jelölje F ezt a lapot, élet vagy csúcsot, és legyen L P azon támaszsíkja, mely tartalmazza q -t és egyik normálvektora $q - c(P)$. Nyilván $F \subset P \cap L$. Ekkor, ha $F = P \cap L$, akkor azt mondjuk, hogy q P -nek egy *nemdegenerált* egyensúlyi pontja, és attól függően, hogy F egy lap, egy él vagy egy csúcs, a q pontot rendre *stabil*, *nyereg-típusú*, illetve *instabil* pontnak hívjuk. Végül, mind a sima, mind a poliedrikus esetben, ha K -nak (P -nek) véges sok egyensúlyi pontja van, melyek mindegyike nemdegenerált, akkor azt mondjuk, hogy K (P) *nemdegenerált*. Érdekes meggondolni, hogy egy nemdegenerált testnek legalább egy stabil és legalább egy instabil pontja van, például azokban a pontokban, ahol a fenti euklideszi távolságfüggvény felveszi globális minimumát és maximumát. Emellett az is igaz, hogy ha P egy nemdegenerált konvex poliéder, akkor minden lapja, éle vagy csúcsa legfeljebb egy egyensúlyi pontot tartalmaz, és ezen belül egy lap csak stabil, egy él csak nyereg típusú pontot tartalmazhat, és egy csúcs csak instabil pont lehet.

Megmutatható [22], hogy mind a sima, mind a poliedrikus esetben, ha a test nemdegenerált és a stabil, nyereg-típusú és instabil egyensúlyi pontjainak számát rendre S , H és U jelöli, akkor a Poincaré-Hopf tétel egy következményeként

$$S - H + U = 2.$$

Ezen megfigyelés alapján, ha $S, U \geq 1$, akkor az S stabil és U instabil ponttal rendelkező nemdegenerált sima testek családját $(S, U)^s$ -sel fogjuk jelölni, és hasonlóan definiáljuk az $(S, U)^p$ családot, mint az S stabil és U instabil ponttal rendelkező nemdegenerált konvex poliéderek családját.

Legyen most $S, U \geq 1$, és $P \in (S, U)^p$ egy nemdegenerált konvex poliéder. Jelölje $n(P)$ P csúcsai, élei és lapjai számának összegét, és $N(P)$ az egyensúlyi pontjainak számát. A $C(P) = n(P) - N(P)$ mennyiséget a poliéder, míg a

$$C(S, U) = \inf \{C(P) : P \in (S, U)^p\}$$

mennyiséget $(S, U)^p$ (*mechanikai komplexitásának* nevezzük [9]. Mint-hogy egy nemdegenerált konvex poliéder minden lapja, éle vagy csúcsa legfeljebb egy egyensúlyi pontot tartalmaz, így igaz a $C(P) \geq 0$ egyenlőtlenség, és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha minden lap, él tartalmaz egyensúlyi pontot és minden csúcs is egyensúlyi pont. Ezen poliédereket hívjuk *minimálpoliédereknek*, és egy $(S, U)^p$ osztály komplexitása pontosan akkor nulla, ha tartalmaz minimálpoliédert. Steinitz egy jól ismert eredménye szerint pontosan akkor van egy f lapszámú és v csúcscsámú konvex poliéder, ha

$$v \geq 4 \text{ és } \frac{v}{2} + 2 \leq f \leq 2v - 4,$$

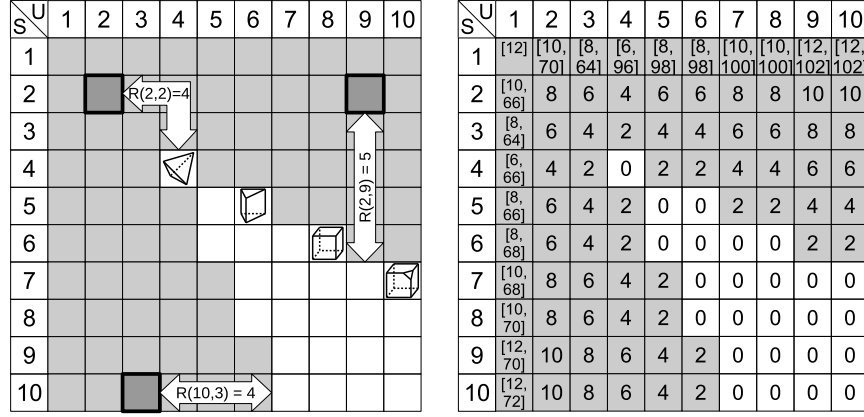
mely alapján az (f, v) számpárt *poliedrikus párnak* hívjuk, ha teljesíti ezen két feltételt. Így minden $S, U \geq 1$ esetén $C(S, U) \geq 0$, és ha (S, U) nem egy poliedrikus pár, akkor $C(S, U) > 0$. A [9] cikkünkben igazolt eredmények ennél többet mutatnak, melyhez bevezetjük $S, U \geq 1$ esetén az

$$R(S, U) = \min \{f + v - S - U : (f, v) \text{ egy poliedrikus pár, melyre } f \geq S, v \geq U\}$$

mennyiséget.

4.1. tétel (Domokos et al., 2020). *Legyen $S, U \geq 2$. Ekkor*

$$C(S, U) = 2R(S, U).$$



5. ábra. Az eredmények összefoglalása $S, U \leq 10$ esetén. Bal oldali ábra: az (S, U) rács néhány poliéderrel illusztrálva. A poliedrikus párok cellái fehér színnel látszanak. Az $R(S, U)$ függvényt a $(2, 2)^p, (2, 9)^p, (10, 3)^p$ cellák esetében tüntettük fel. Jobb oldali ábra: az $(S, U)^p$ osztályok komplexitása. A poliedrikus párok cellái fehér színben látszanak. A $C(S, U)$ mennyiség pontos értékei zárójel nélkül feltüntetett egész számokként látszódnak. Az $U = 1$ oszlopban és az $S = 1$ sorban csak korlátokat mutatunk. Ha egy $(S, U)^p$ cellában kettő zárójelbe tett számot látunk, akkor ezek a $C(S, U)$ mennyiségre igazolt alsó és felső korlátok. Amennyiben egy cellában csak egy zárójeles számot látunk, akkor az egy alsó korlát, és felső korlát $C(S, U)$ értékére nem ismert.

4.2. tétel (Domokos et al., 2020). *Ha $S \geq 4$, akkor*

$$C(S, 1) \leq 59 + (-1)^S + 2R(S, 1);$$

ha $U \geq 4$, akkor

$$C(1, U) \leq 90 + 2R(1, U).$$

A monostabil ($S = 1$) és mono-instabil ($U = 1$) osztályokban a komplexitásra a triviális alsó becslést is erősítjük azzal, hogy általánosítjuk Conway tetraéderek stabil pontjaira vonatkozó eredményét (ld. [8]).

4.3. tétel (Domokos et al., 2020). *Tetszőleges tetraédernek $S \geq 2$ stabil és $U \geq 2$ instabil pontja van.*

A 5. ábra mutatja az egyensúlyi osztályok komplexitására ismert becsléseket és eredményeket. Látható, hogy az $(1, 1)^p$ osztály kivételével minden osztály komplexitására ismert egy felső becslés. Az a cikk

írása idején nem volt ismert, hogy az $(1, 1)^p$ osztálynak van-e eleme, azaz létezik-e ‘poliedrikus Gömböc’, ez a tény egy 6. fejezetben ismertett eredmény következménye. A Gömböc-típusú, mono-monostatikus (1 stabil és 1 instabil ponttal rendelkező) poliéderek komplexitására irányuló kutatás motiválására a [9] cikk szerzői egy díjat tűztek ki a $C(1, 1)$ mennyiség meghatározásáért, melynek értéke

$$\frac{10^6}{C(1, 1)} \text{ USD.}$$

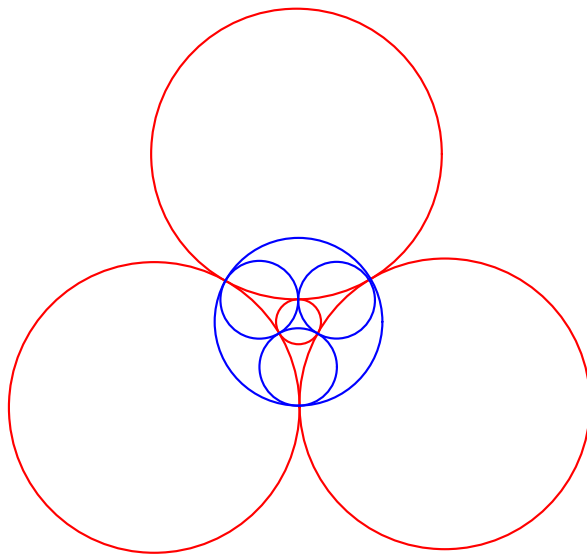
5. KOEBE POLIÉDEREK CENTRÁLÁSA

Az előző részben említettük, hogy ha (f, v) egy poliedrikus pár, akkor létezik f lapú és v csúcsú minimálpoliéder, azaz olyan poliéder, melynek minden lapján, élén és csúcsában van egyensúlyi pont. Ezen eredmény felveti azt a kérdést, hogy konvex poliéderek tetszőleges kombinatorikus osztálya tartalmaz-e minimálpoliédert. Érdeemes megjegyezni, hogy Steinitz egy híres tétele szerint a konvex poliéderek élgráfjai éppen az egyszerű, 3-összefüggő síkgráfok, melyből könnyen látható, hogy az $\mathbb{S}^2$ gömbre rajzolt egyszerű, 3-összefüggő síkgráfok izomorfia erejéig megfeleltethetők a konvex poliéderek kombinatorikus osztályainak. Ezeket a gráfokat a továbbiakban poliedrikus gráfoknak nevezzük.

Ha megengedjük, hogy a testnek inhomogén sűrűségeloszlása legyen (más szóval mi választjuk a c viszonyítási pontot, mely a súlyponttól különböző is lehet), akkor pozitív válasz adható a kérdésünkre. Ehhez azonban előbb ismertetnünk kell a Koebe poliéderek fogalmát.

A híres Koebe-Andreev-Thurston-féle körpakolási tétel (ld. pl. [18]) szerint minden egyszerű, összefüggő G síkgráf előáll egy körpakolás érintkezési grájaként az euklideszi síkon, vagy ekvivalens módon az $\mathbb{S}^2$ gömbön, azaz létezik olyan páronként nem-átfedő körlemezeket tartalmazó rendszer, melyre igaz, hogy G az a gráf, melynek csúcsai a körlemezek, és két csúcs pontosan akkor van éllel összekötve, ha a megfelelő körök érintik egymást. Ezt a tételt a matematika számos ágában alkalmazták, és sok irányban általánosították. Az egyik legismertett általánosítása Brightwell és Scheinerman [5] nevéhez fűződik, akik megmutatták, hogy tetszőleges poliedrikus gráf a duálisával együtt előáll, mint két gömbi körrendszer érintési gráfja, melyek rendelkeznek azzal a tulajdonsággal, hogy mindegyik érintési pont mindkét körrendszerben előáll, mint egy körpár érintési pontja, és ezen körpárok a közös érintési pontban egymást merőlegesen metszik. Ez a két körrendszer természetes módon indukál egy olyan P konvex poliédert, melynek minden éle érinti a kört: a poliéder lapjainak beírható körei az első körrendszer

elemei, melyeket *lapköröknek* hívunk, és a másik körrendszer *csúcs-köröknek* hívott elemei metszik P egy adott csúcsából kiinduló összes élet. Steinitz előbb említett tétele szerint Brightwell és Scheinerman eredménye az alábbi formában is megfogalmazható.



6. ábra. Tetraéder élgráfjának és duálisának realizálása két körrendszer érintési gráfjaként.

5.1. tétel (Brightwell-Scheinerman, 1993). *Tetszőleges konvex poliéder kombinatorikus osztályának van olyan reprezentánsa, melynek minden éle érinti az origó körüli egységgömböt.*

Az 5.1. tételben szereplő reprezentánsok, melyeket Koebe poliédereknek nevezünk, Mostow merevségi tétele értelmében Möbius-transzformációk erejéig egyértelműek, ahol a Koebe poliéder Möbius-transzformáltján, némileg pontatlanul, az öt generáló körrendszer-pár Möbius-transzformáltja által definiált Koebe-poliédert értjük.

A teljesség kedvéért említjük, hogy Steiner egy 130 éves sejtését megoldva, Steinitz igazolta 1928-ban, hogy konvex poliédereknek vannak olyan kombinatorikus osztályai, melyek nem tartalmazznak gömbbe írható reprezentánst, melyből, polaritást alkalmazva, ugyanezen eredmény következik gömb köré írható reprezentánsokra is. A gömbbe írható konvex poliéderek karakterizációja Rivin [25] egy 1996-os cikkében található. Általánosabban, Schulte [30] igazolta, hogy tetszőleges $3 \leq d$ és $0 \leq k \leq d - 1$ esetén az egyetlen (d, k) pár, melyre igaz, hogy

d -dimenziós konvex politópok tetszőleges kombinatorikus osztálya tartalmaz olyan reprezentánst, melynek minden k -dimenziós lapja érint egy gömböt, csak az előző tételben szereplő $(d, k) = (3, 1)$.

Érdemes meggondolni (ld. pl. [9]), hogy egy Koebe poliédernek minden lapján, élén és csúcsában van egyensúlyi pontja *az origóra nézve*. Így adódik a kérdés, hogy az 5.1. tétel igaz marad-e, ha a keresett reprezentánsról megköveteljük azt az extra feltételt is, hogy a súlypontja az origó legyen. Egy hasonló állítást igazolt Springborn a [32] cikkben, ahol belátta az alábbi tételt.

5.2. tétel (Springborn, 2005). *Tetszőleges konvex poliéder kombinatorikus osztályának, egybevágóság erejéig, egyértelműen létezik olyan reprezentánsa, melynek minden éle érinti az origó körüli egységgömböt, és ahol az érintő pontok súlypontja o .*

Érdemes megjegyezni, hogy a tétel az alábbi, általánosabb állítás egyenes következménye.

5.3. tétel (Springborn, 2005). *Tetszőleges $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{S}^d$ páronként különböző pontokhoz, ahol $n \geq 3$ és $d \geq 2$, egybevágóság erejéig egyértelműen létezik olyan T Möbius-transzformáció, melyre*

$$\sum_{i=1}^n T(v_i) = o.$$

A mi [20] cikkbeli eredményeink kimondásához az alábbi jelöléseket vezetjük be. Tetszőleges $P \subset \mathbb{R}^3$ konvex poliéderre jelölje rendre $cc(P)$, $IC(P)$ és $k = 0, 1, 2, 3$ esetén $cm_k(P)$ az (egyértelműen létező) P -t tartalmazó legkisebb gömb középpontját, a P -beli legnagyobb gömbök középpontjainak halmazát, és P k -dimenziós vázának súlypontját. A fenti, ismert ‘középpont’ fogalmak mellett háromszöglapú poliéderekre egy kevésbé ismert fogalmat is bevezetünk.

Legyen Q egy háromszöglapú konvex poliéder, melynek felülete irányított. Legyen q egy adott referenciapont, mely nincs benne egyik lap síkjában sem. Bontsuk fel Q -t tetraéderekre, melyek alapjai Q lapjai, és csúcsuk q . Jelölje rendre q_i és m_i az i -edik tetraéder köré írható gömb középpontját és térfogatát, és legyen

$$ccm(Q) = \frac{\sum_i m_i q_i}{\sum_i m_i}.$$

Ezen mennyiséget a szakirodalomban ‘circumcenter of mass’ néven ismerik, mely elnevezést mi a *köréírható súlypont* néven ültetünk át magyarra. Ismert [33], hogy $ccm(Q)$

- független q választásától,

- invariáns Q háromszögelései alatt, ha nem választunk új csúcsot Q határáról,
- kielégíti Archimédész lemmáját: ha Q -t felbontjuk a Q_1 és Q_2 háromszöglapú poliéderekre, akkor $\text{ccm}(Q) \leq \text{ccm}(Q_1) + \text{ccm}(Q_2)$ súlyozott átlaga, ahol a súlyok rendre Q_1 és Q_2 térfogata,
- ha Q egy gömbbe írt politóp, akkor $\text{ccm}(Q) = \text{cc}(Q)$.

A [33] cikk szerzői a köréírható gömb középpontjának ezen általánosítását többek között arra is használták, hogy általánosítsák az Euler-egyenest fogalmát tetszőleges háromszöglapú poliéderekre, és megvizsgálják ennek tulajdonságait.

5.4. tétel (Lángi, 2021). *Legyen P egy Koebe poliéder, és legyen $g(\cdot) \in \{\text{cc}(\cdot), \text{cm}_0(\cdot), \text{cm}_1(\cdot), \text{cm}_2(\cdot)\}$. Ekkor létezik olyan T_g Möbius-transzformáció, melyre $g(T_g(P)) = o$. Továbbá van olyan T_{ic} Möbius-transzformáció, melyre $o \in \text{IC}(T_{\text{ic}}(P))$, és ha P háromszöglapú és $\lambda \in [0, 1]$ tetszőleges, akkor létezik olyan T_λ Möbius-transzformáció, melyre*

$$\lambda \text{cm}_3(T_\lambda(P)) + (1 - \lambda) \text{ccm}(T_\lambda(P)) = o.$$

Az 5.3. tétel egy általánosításaként értelmezhető az alábbi tétel, melyben gömbsapka alatt egy $0 < \rho < \frac{\pi}{2}$ sugarú $\mathbb{S}^d$ -beli gömböt értünk, és minden $T : \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ Möbius transzformációra rendre $\rho_T(C)$ és $c_T(C)$ jelöli a $T(C)$ gömbsapka sugarát és középpontját.

5.5. tétel (Lángi, 2021). *Legyenek $C_1, C_2, \dots, C_n \subset \mathbb{S}^d$ olyan gömbsapkák, melyek belsejeinek uniója nem összefüggő. Minden $i = 1, 2, \dots, n$ esetén legyen $w_i : (0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow (0, \infty)$ egy C^∞ -osztályú függvény, melyre $\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} w_i(t) = \infty$. Tetszőleges $q \in \mathbb{S}^d$ pontra jelölje $I(q)$ azon C_i gömbsapkák indexeinek halmazát, melyek határa tartalmazza q -t, és tegyük fel, hogy bármely $q \in \mathbb{S}^d$ esetén*

$$(5) \quad \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \sum_{i \in I(q)} w_i(t) \cos t < \lim_{t \rightarrow 0+0} \sum_{i \notin I(q)} w_i(t)$$

teljesül. Ekkor létezik olyan $T : \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ Möbius-transzformáció, melyre

$$(6) \quad \sum_{i=1}^n w_i(\rho_T(C_i)) c_T(C_i) = o.$$

Talán érdemes megjegyezni, hogy konvex politópok köréírható súlypontjának és a tér Möbius-transzformációjának egy más szempontból vizsgált kapcsolatával foglalkozik a megjelenés alatt álló [16] cikk.

6. MONOSTABIL POLIÉDEREK VIZSGÁLATA

A monostabil, azaz egy stabil egyensúlyi ponttal rendelkező konvex poliéderek tanulmányozása Conway és Guy két 1966-ban felvetett sejtésével kezdődött, melyek szerint tetszőleges (homogén sűrűségű) tetraédernek legalább két stabil pontja van, de van olyan (homogén sűrűségű) konvex poliéder, melynek csak egy. Ezen sejtéseket rendre Goldberg és Guy [13] válaszolta meg 1969-ben, melyben többek között megadták egy 19 lapú monostabil poliéder konstrukcióját. Ez utóbbi cikk több monostabil poliéderekre vonatkozó problémát ismertet, többek között az alábbi három, Conway által felvetett problémát, melyek Croft, Falconer és Guy [7] megoldatlan geometriai problémákról szóló könyvében Problem B12 név alatt is megtalálhatóak.

6.1. probléma (Conway-Guy, 1969). *Lehet-e egy $\mathbb{R}^3$ -beli monostabil poliédernek n -edrendű forgásszimmetriája valamely $n > 2$ értékre?*

A következő probléma előtt idézzük fel, hogy egy 3-dimenziós konvex test *körmérete* a síkokra vett merőleges vetületeinek minimális kerülete.

6.2. probléma (Conway-Guy, 1969). *Mi az infimuma a egységnyi körméretű monostabil poliéderek átmérőjének?*

6.3. probléma (Conway-Guy, 1969). *Mi azon konvex testek halmaza, melyek tetszőleges pontossággal egyenletesen megközelíthetők monostabil poliéderekkel? Speciálisan a gömb eleme ezen halmaznak?*

Érdemes megjegyezni, hogy a [13] cikk szerint Conway belátta, hogy forgástest nem lehet monostabil, valamint azt, hogy a cikkben konstruált monostabil poliéder másodrendű forgásszimmetriával rendelkezik. A 6.2. probléma megtalálható Shephard egy 1968-as problémagyűjteményében is [31].

Fő eredményünk az alábbi tétel, ahol a $d_H(\cdot, \cdot)$ szimbólum Hausdorff távolságot jelöl.

6.4. tétel (Lángi, 2022). *Tetszőleges $n \geq 3$, $n \in \mathbb{Z}$ és $\varepsilon > 0$ esetén létezik egy olyan P monostabil poliéder, mely n -edrendben forgásszimmetrikus, és melyre $d_H(P, \mathbf{B}^3) < \varepsilon$ teljesül.*

Vegyük észre, hogy a 6.4. tétel választ ad a 6.1. problémára, és megoldja a 6.3. probléma gömbre vonatkozó részét is. Emellett könnyen levezethető belőle a 6.5. következmény, mely megválaszolja a 6.2. problémát. A következményben a $K \subset \mathbb{R}^3$ konvex test átmérőjét és körméretét rendre $\text{diam}(K)$ és $\text{girth}(K)$ jelöli. Az értelmezéséhez felidézzük, miszerint könnyen látható, hogy az egységnyi körméretű konvex testek családján belül az átmérő az $\frac{1}{\pi}$ átmérőjű gömb esetén minimális.

6.5. következmény (Lángi, 2022). *A $\frac{\text{diam}(P)}{\text{girth}(P)}$ hányados infimuma a monostabil poliéderek családján $\frac{1}{\pi}$.*

A 6.4. tétel igazolása egy általános approximációs tétel, mely a saját jogán is érdekes lehet. Ennek kimondásához idézzük fel, hogy az S stabil és U instabil egyensúlyi ponttal rendelkező sima testek családját $(S, U)^s$ jelöli. A továbbiakban az $(S, U)^s$ család azon részcsaládját, melynek elemeire igaz, hogy bármely egyensúlyi pontjukban a határfelületük Gauss-görbülete szigorúan pozitív, $(S, U)_+^s$ -szal fogjuk jelölni. Ha egy test súlypontja az origó, akkor a testet *centrált* testnek fogjuk hívni.

6.6. tétel (Lángi, 2022). *Legyen $\varepsilon > 0$, $S, U \geq 1$ tetszőlegesek, és legyen G az $\mathcal{O}(3)$ ortogonális csoport egy tetszőleges részcsoportha. Ekkor tetszőleges $K \in (S, U)_+^s$ centrált, G -invariáns konvex test esetén létezik egy $P \in (S, U)^p$ centrált, G -invariáns konvex poliéder, melyre $d_H(K, P) < \varepsilon$.*

A fenti tétel kapcsán megjegyezzük, hogy az a tény, hogy egy nemdegenerált konvex poliéder tetszőleges pontossággal közelíthető egy ugyanannyi egyensúlyi ponttal rendelkező nemdegenerált sima testtel, folklór formájában jelenik meg a szakirodalomban. Másrészt viszont a [10] cikkbeli eredmény mutatja, hogy az állítás megfordítása nem triviális: egy konvex test határát tetszőleges paraméterezés mellett ekvidisztáns felosztást használva közelítve egy poliedrikus felülettel, a kapott felületnek általában szigorúan több egyensúlyi pontja van, mint az eredeti konvex testnek.

Végül, habár az eredeti Gömböc nem C^2 -osztályú az egyensúlyi pontjaiban, a [11] cikkben beláttuk, hogy az $(1, 1)_+^s$ osztály nem üres. Így a 6.6. tételt felhasználva egyből megkapjuk az alábbi, a 4. részben felvetett díjhoz kapcsolódó eredményt.

6.7. következmény (Lángi, 2022). *Van olyan nemdegenerált konvex poliéder, melynek pontosan egy stabil és egy instabil pontja van.*

7. EGY NORMÁLT TEREKRE VONATKOZÓ ROGERS-SHEPHARD JELLEGŰ KÉRDÉS

Két $\mathbb{R}^d$ -beli konvex test konvex burkának a térfogata az 1950-es évek óta kutatott mennyiség a geometriában. Ezen területen az első eredmények közt mindenképpen megemlítendő Rogers és Shephard három szorosan összefüggő cikke, amelyekben felvetett problémáknak számos változata és általánosítása jelent meg a szakirodalomban. Ebben a fejezetben egy ilyen általánosítást ismertetünk.

Legyen $K \subset \mathbb{R}^d$ egy konvex test. Ekkor, ha valamely $x \in \mathbb{R}^d$ esetén $K \cap (x + K)$ nem üres, akkor a $\text{conv}(K \cup (x + K))$ konvex testet K egy *eltolási testjének* hívjuk. Rogers és Shephard [28] egy 1958-as eredménye meghatározta a

$$c_{tr}(K) = \frac{1}{\text{vol}(K)} \max\{\text{vol}(\text{conv}(K \cup (x + K))) : (x + K) \cap K \neq \emptyset, x \in \mathbb{R}^d\}$$

mennyiség minimumát és maximumát az $\mathbb{R}^d$ -beli konvex testek családján. Sejtésüket azon konvex testekre vonatkozóan, melyre ezen két mennyiség valamelyike felvétel, csak 2006-ban oldotta meg Martini és Mustafaev [23] (ld. még a [12] cikket egy egyszerűbb bizonyításért).

Ebben a fejezetben a fenti probléma egy normált változatát mutatjuk be, melynél a d -dimenziós egységgömb térfogatát κ_d -vel jelöljük. Jól ismert, hogy egy normált tér egységgömbje egy origóra szimmetrikus konvex test, és minden origóra szimmetrikus konvex test $\mathbb{R}^d$ -ben természetes módon indukál egy $\mathbb{R}^d$ -beli normát. Az M origóra szimmetrikus normált test által $\mathbb{R}^d$ -n definiált normált teret $\mathcal{M}$ -mel fogjuk jelölni. Az is jól ismert, hogy minden véges dimenziós normált tér felruházható egy Haar mértékkel, és ezen mérték konstans szorzó erejéig megegyezik a szokásos Lebesgue mértékkel. Attól függően, hogy a konstans szorzót a normált térben hogyan választjuk, a szakirodalomban négy különböző értelemben is beszélünk a normált téren definiált térfogatról [2]. Azon Haar mértéket, melynél a norma M egységgömbjének térfogata κ_d , *Busemann térfogatnak* nevezzük. A *Holmes-Thompson térfogat* esetében az M egységgömb M° polárisának térfogata κ_d . Gromov-féle tömegről beszélünk, ha az M -be beírható legnagyobb térfogatú keresztpolitóp térfogata $\frac{2^d}{d!}$, és Gromov-féle tömeg*-ról (vagy Benson-féle térfogatról) ha az M köré írható minimális térfogatú paralelotóp térfogata 2^d . Ha a normált tér egységgömbje M , ezen négy térfogatot rendre a $\text{vol}_M^{Bus}(\cdot)$, $\text{vol}_M^{HT}(\cdot)$, $\text{vol}_M^m(\cdot)$ és $\text{vol}_M^{m*}(\cdot)$ szimbólumokkal jelöljük. Ha $K \subset \mathbb{R}^d$ egy konvex test, akkor azt mondjuk, hogy K *relatív normája* az $\frac{1}{2}(K - K)$ o -szimmetrikus konvex test által generált norma. Ez a norma azon konstans szorzó erejéig egyértelműen létező norma, melyben K egy állandó szélességű test, azaz melyben K tetszőleges párhuzamos támaszhipersík-párja közti normált távolság független a hipersík választásától.

Vezessük be az alábbi mennyiségeket.

7.1. definíció. *Legyen K egy konvex test $\mathbb{R}^d$ -ben, és legyen $\mathcal{M}$ azon normált tér, mely normája K relatív normája. Ekkor tetszőleges $\tau \in$*

$\{Bus, HT, m, m*\}$ esetén legyen

$$(7) \quad c_{tr}^\tau(K) = \max\{\text{vol}_M^\tau(\text{conv}(K \cup (x + K))) : (x + K) \cap K \neq \emptyset, x \in \mathbb{R}^d\}.$$

Megemlítjük, hogy a fenti mennyiségek affin invariáns mennyiségek, azaz az értékük nem változik, amennyiben a testre egy affin transzformációt alkalmazunk.

A fő eredményünk kimondásához definiálunk egy konvex síkidomot. Tekintsük azon S_0 négyzetet, melynek csúcsai $(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}})$ a szokásos bázisban mérve. Cseréljük ki S_0 vízszintes éleit az

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

egyenletű ellipszis megfelelő íveivel, ahol $a = 1.61803\dots$ és $b = \frac{a}{\sqrt{2a^2-1}}$, ahol megjegyezzük, hogy a és b ezen választása esetén S_0 csúcsai az ellipszis pontjai. Cseréljük ki S_0 függőleges éleit a fenti két ellipszis ív o középpontú, $\frac{\pi}{2}$ szögű elforgatottjával, és jelöljük az így kapott konvex síkidomot M_0 -l.

Az a mennyiségnek a fenti definícióban szereplő értéke egy transzcendens egyenlet gyöke, és azon tulajdonsággal rendelkezik, hogy a $\text{vol}(M_0^\circ) (\text{vol}(M_0) + 4)$ kifejezés, ahol M_0° jelöli M_0 polárisát, maximális minden $a > 1$ esetén.

A fő eredményünk az alábbi.

7.2. tétel (Lángi, 2016). *Legyen K egy konvex síkidom. Ekkor*

- 7.2.1. $2\pi \leq c_{tr}^{Bus}(K) \leq 3\pi$, ahol a bal oldalon pontosan akkor van egyenlőség, ha K egy háromszög, és a jobb oldalon, ha K egy parallelogramma;
- 7.2.2. $\frac{18}{\pi} \leq c_{tr}^{HT}(K) \leq 7.81111\dots$, ahol a bal oldalon pontosan akkor van egyenlőség, ha K egy háromszög, és a jobb oldalon egyenlőség van, ha K M_0 egy affin képe,
- 7.2.3. $6 \leq c_{tr}^m(K) \leq \pi + 4$, ahol a bal oldalon pontosan akkor van egyenlőség, ha K egy (esetleg elfajuló) konvex négyszög, és a jobb oldalon, ha K egy ellipszis;
- 7.2.4. $6 \leq c_{tr}^{m*}(K) \leq 12$, ahol a bal oldalon pontosan akkor van egyenlőség, ha K egy háromszög, és a jobb oldalon, ha K egy parallelogramma.

Természetes kérdés a fenti mennyiségnek a középpontosan szimmetrikus konvex síkidomok halmazán is megkeresni a szélsőértékeit.

7.3. tétel (Lángi, 2016). *Legyen M egy o -szimmetrikus konvex síkidom. Ekkor*

- 7.3.1. $\pi + 4 \leq c_{tr}^{Bus}(M) \leq 3\pi$, ahol a bal oldalon pontosan akkor van egyenlőség, ha M egy ellipszis, és a jobb oldalon, ha M egy parallelogramma;
- 7.3.2. $\frac{21}{\pi} \leq c_{tr}^{HT}(M) \leq 7.81111\dots$, ahol a bal oldalon pontosan akkor van egyenlőség, ha M egy affin szabályos hatszög, és a jobb oldalon egyenlőség van, ha M az M_0 affin képe;
- 7.3.3. $6 \leq c_{tr}^m(M) \leq \pi + 4$, ahol a bal oldalon pontosan akkor van egyenlőség, ha M egy parallelogramma, és a jobb oldalon, ha M egy ellipszis;
- 7.3.4. $7 \leq c_{tr}^{m*}(M) \leq 12$, ahol a bal oldalon pontosan akkor van egyenlőség, ha M egy affin szabályos hatszög, és a jobb oldalon, ha M egy parallelogramma.

Legyen most $d \geq 3$. A konvex testekre vonatkozó Brunn-Minkowski egyenlőtlenség szerint

$$\text{vol} \left(\frac{1}{2}(K - K) \right)^{1/d} \geq \frac{1}{2} \text{vol}(K)^{1/d} + \frac{1}{2} \text{vol}(-K)^{1/d} = \text{vol}(K),$$

és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha K és $-K$ egymás pozitív homotetikus képei. Ez utóbbi feltétel pontosan akkor teljesül, ha K o -szimmetrikus, tehát a $c_{tr}(K)$ mennyiség a maximumát a d -dimenziós konvex testek halmazán középpontosan szimmetrikus konvex testnél veheti fel. Innen, és a [28] és [12] cikkbeli eredmények alapján adódik az alábbi állítás.

7.4. megjegyzés (Lángi, 2016). *Ha $K \subset \mathbb{R}^d$ egy konvex test, akkor*

$$c_{tr}^{Bus}(K) \leq d + 1,$$

ahol egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha K egy centrálszimmetrikus pszeudo dupla piramis, a [28] cikkben definiált értelemben. Hasonlóan, ha $M \subset \mathbb{R}^d$ egy o -szimmetrikus konvex test, akkor

$$c_{tr}^{Bus}(K) \geq 1 + \frac{2\kappa_{d-1}}{\kappa_d},$$

ahol egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha K egy ellipszoid.

7.5. probléma (Lángi, 2016). *Keressük meg a $c_{tr}^\tau(K)$ mennyiség maximumát a d -dimenziós konvex testek halmazán tetszőleges $d \geq 3$ és $\tau \in \{HT, m, m*\}$ esetén.*

7.6. probléma (Lángi, 2016). *Keressük meg a $c_{tr}^\tau(K)$ mennyiség minimumát a d -dimenziós konvex testek halmazán tetszőleges $d \geq 3$ és $\tau \in \{Bus, HT, m, m*\}$ esetén.*

Érdemes megjegyezni, hogy a $c_{tr}^{HT}(K)$ mennyiség minimumának meghatározása ekvivalens az α -szimmetrikus konvex testek térfogatszorzata minimumának meghatározásával, azaz a bevezetőben is említett Mahler-sejtéssel.

HIVATKOZÁSOK

- [1] A. Akopyan, A. Balitskiy and M. Grigorev, *On the Circle Covering Theorem by A.W. Goodman and R.E. Goodman*, Discrete Comput. Geom. **59** (2018), 1001-1009.
- [2] J.C. Álvarez Paiva and A.C. Thompson, *Volumes on normed and Finsler spaces*, In: A Sampler of Riemann-Finsler Geometry, MSRI Publ. **49** (2004).
- [3] K. Bezdek, *On rhombic dodecahedra*, Beiträge Algebra Geom. **41** (2000), 411-416.
- [4] K. Bezdek and Z. Lángi, *On non-separable families of positive homothetic convex bodies*, Discrete Comput. Geom. **56** (2016), 802-813.
- [5] , G.R. Brightwell and E.R. Scheinerman, *Representations of planar graphs*, SIAM J. Discrete Math. **6** (1993), 214-229.
- [6] J.H. Conway and R.K. Guy, *Stability of polyhedra*, SIAM Rev. **8**(3) (1966), 381.
- [7] H.T. Croft, K. Falconer and R.K. Guy, *Unsolved Problems in Geometry*, Springer, New York, NY, 1991.
- [8] R. Dawson, *Monostatic simplexes*, Amer. Math. Monthly **92** (1985), 541-546.
- [9] G. Domokos, F. Kovács, Z. Lángi, K. Regős and P.T. Varga, *Balancing polyhedra*, Ars Math. Contemp. **19** (2020), 95-124.
- [10] G. Domokos, Z. Lángi and T. Szabó, *On the equilibria of finely discretized curves and surfaces*, Monatsh. Math. **168** (2012) 321-345.
- [11] G. Domokos, Z. Lángi and T. Szabó, *A topological classification of convex bodies*, Geom. Dedicata **182** (2016), 95-116.
- [12] Á. G. Horváth and Z. Lángi, *On the volume of the convex hull of two convex bodies*, Monatsh. Math., **174** (2014), 219-229.
- [13] M. Goldberg and R.K. Guy, *Stability of polyhedra (J.H. Conway and R.K. Guy)*, SIAM Rev. **11** (1969), 78-82.
- [14] A. W. Goodman and R. E. Goodman, *A circle covering theorem*, Amer. Math. Monthly **52** (1945), 494-498.
- [15] Heath, T. I. (Ed.), *The Works of Archimedes*, Cambridge University Press, 1897.
- [16] A. Izosimov, *Change of polytope volumes under Möbius transformations and the circumcenter of mass*, Discrete Comput. Geom., DOI: 10.1007/s00454-022-00481-x
- [17] Lord Kelvin (Sir William Thomson), *LXIII. On the division of space with minimum partitional area*, The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science **24** (1887), 503-514.
- [18] P. Koebe, *Kontaktprobleme der konformen Abbildung*, Abh. Sächs Akad. Wiss. Leipzig Math.-Natur. Kl. **88** (1936), 141-146.
- [19] Z. Lángi, *On a normed version of a Rogers-Shephard type problem*, Israel J. Math. **202** (2016), 203-217.

- [20] Z. Lángi, *Centering Koebe polyhedra via Möbius transformations*, Groups Geom. Dyn. **15** (2021), 197–221.
- [21] Z. Lángi, *An isoperimetric problem for three-dimensional parallelohedra*, Pacific J. Math. **316** (2022), 169–181.
- [22] Z. Lángi, *A solution to some problems of Conway and Guy on monostable polyhedra*, Bull. Lond. Math. Soc. **54** (2022), 501–516.
- [23] H. Martini and Z. Mustafaev, *Some applications of cross-section measures in Minkowski spaces*, Period. Math. Hungar. **53**(1-2) (2006), 185–197.
- [24] A. Polyanskii, *A cap covering theorem*, Combinatorica 41(5) (2021), 695–702.
- [25] I. Rivin, *A characterization of ideal polyhedra in hyperbolic 3-space*, Ann. Math. (2) **143**(1) (1996), 51–70.
- [26] C.A. Rogers and G.C. Shephard, *The difference body of a convex body*, Arch. Math. (Basel) **8** (1957), 220–233.
- [27] C.A. Rogers and G.C. Shephard, *Convex bodies associated with a given convex body*, J. London Math. Soc. **33** (1958), 270–281.
- [28] C.A. Rogers and G.C. Shephard, *Some extremal problems for convex bodies*, Mathematika **5** (1958), 93–102.
- [29] R. Schneider, *Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications **44**, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [30] E. Schulte, *Analogues of Steinitz’s theorem about non-inscribable polytopes*. In: Proceedings of „Intuitive Geometry” (Siófok, 1985). Colloq. Math. Soc. János Bolyai, vol. 48, pp. 503–516. North-Holland, Amsterdam (1987).
- [31] G.C. Shephard, *Twenty problems on convex polyhedra part II*, Math. Gaz. **52** (1968), 359–367.
- [32] B.A. Springborn, *A unique representation of polyhedral types. Centering via Möbius transformations*, Math. Z. **249** (2005), 513–517.
- [33] S. Tabachnikov and E. Tsukerman, *Circumcenter of mass and generalized Euler line*, Discrete Comput. Geom. **51** (2014), 815–836.
- [34] D. Weaire and R. Phelan, *A counter-example to Kelvin’s conjecture on minimal surfaces*, Phil. Mag. Lett. **69**(2) (1994), 107–110.