

Momentumok módszere

Tegyük fel, hogy a ξ háttérváltozó eloszlásfüggvénye k paramétertől függ, legyenek ezek $\theta_1, \dots, \theta_k$. A $\theta_1, \dots, \theta_k$ paramétereket együttesen becsüljük. Legyen

$$m_i = E_\theta(\xi^i),$$

a ξ véletlen változó i -edik *momentuma*, ahol $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$. A becsléshez az első k momentumot használjuk. Az m_i momentum függvénye θ -nak:

$$m_i = g_i(\theta_1, \dots, \theta_k), \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (1)$$

Feltesszük, hogy a $(g_1(\theta), \dots, g_k(\theta)) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ leképezésnek létezik inverze, legyen ez $(h_1, \dots, h_k)$. Az inverz leképezést úgy kapjuk meg, hogy az (1) egyenletekből kifejezzük a θ_i értékeket:

$$\theta_i = h_i(m_1, \dots, m_k), \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Figyeljük meg a ξ változó értékét n -szer függetlenül, és a kapott mintát jelölje $x_1, \dots, x_n$. Legyen

$$\widehat{m}_i = \frac{x_1^i + \dots + x_n^i}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

A θ_i paraméter momentum becslése a minta alapján

$$\widehat{\theta}_i = h_i(\widehat{m}_1, \dots, \widehat{m}_k), \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Egyparaméteres eset ($k = 1$):

A ξ háttérváltozó eloszlásfüggvénye függ egy ismeretlen θ paramétertől, melyet becsülni szeretnénk.

Az első momentum (m_1) függ a θ paramétertől; ezt a függést egy $g(\theta)$ függvénnyel adjuk meg:

$$m_1 = E_\theta(\xi) = g(\theta).$$

Ebből kifejezzük a θ paramétert:

$$\theta = h(m_1).$$

A θ paraméter momentum becslése

$$\widehat{\theta}_n = h(\widehat{m}_1).$$

Példa. A geometriai eloszlás paraméterének momentum becslése.

$$P(\xi = k) = (1 - p)^{k-1}p, \quad k = 1, 2, \dots$$

$\theta = p$ a becsülendő paraméter.

$$m_1 = E_p(\xi) = g(p) = \frac{1}{p}$$

Kifejezzük a p paraméter m_1 -el:

$$p = h(m_1) = \frac{1}{m_1}.$$

A p paraméter momentum becslése

$$\hat{p}_n = h(\hat{m}_1) = \frac{1}{\hat{m}_1} = \frac{n}{x_1 + \dots + x_n}.$$

Példa. A Poisson-eloszlás paraméterének momentum becslése.

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (\lambda > 0)$$

A λ paraméter becsüljük. Most

$$m_1 = E_\lambda(\xi) = g(\lambda) = \lambda.$$

Kifejezzük a λ paraméter m_1 -el:

$$\lambda = h(m_1) = m_1.$$

A λ paraméter momentum becslése

$$\hat{\lambda} = \hat{m}_1 = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}.$$

Példa. A hipergeometrikus eloszlás N paraméterének momentum becslése. A problémát egy példán keresztül ismertetjük. A szegedi repülőtér környékén élő ürgék számát jelölje N . A környezetvédők megjelölnek M számú ürgét, ezután elfognak n egyedet. Jelölje ξ azt, hogy az elfogottak között hány ürge van megjelölve. A ξ változó hipergeometrikus eloszlású:

$$P(\xi = k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad k = \max(0, n - N + M), \dots, \min(n, M).$$

Most

$$m_1 = E_N(\xi) = g(N) = n \frac{M}{N}.$$

Kifejezzük N -et m_1 segítségével:

$$N = h(m_1) = \frac{Mn}{m_1}.$$

Egyetlen megfigyelés áll rendelkezésünkre: x , azaz az elfogott ürgék között x számú van megjelölve. Így $\widehat{m}_1 = x$, tehát a N paraméter momentum becslése

$$\widehat{N} = \left\lceil \frac{Mn}{x} \right\rceil.$$

Példa. Az exponenciális eloszlás paraméterének momentum becslése. Az eloszlás sűrűségfüggvénye

$$f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad \text{ha } x > 0.$$

Most

$$m_1 = E_\lambda(\xi) = g(\lambda) = \frac{1}{\lambda},$$

tehát

$$\lambda = h(m_1) = \frac{1}{m_1}.$$

A λ paraméter momentum becslése

$$\widehat{\lambda} = h(\widehat{m}_1) = \frac{1}{\widehat{m}_1} = \frac{n}{x_1 + \dots + x_n}.$$

Példa. A $(0, \theta)$ intervallumon egyenletes eloszlás paraméterének momentum becslése. Legyen ξ egyenletes eloszlású egy $(0, \theta)$ intervallumon, ahol $\theta > 0$ ismeretlen paraméter. A θ paramétert becsüljük a momentum módszerrel.

A ξ változó sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & \text{ha } 0 < x < \theta, \\ 0, & \text{különb.} \end{cases}$$

A ξ változó első momentuma:

$$m_1 = E_\theta(\xi) = \frac{\theta}{2}.$$

Kifejezzük a θ paramétert m_1 -el:

$$\theta = 2m_1.$$

A θ paraméter momentum becslése

$$\hat{\theta}_n = 2\hat{m}_1 = 2 \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

Kétparaméteres eset ($k = 2$):

A ξ háttérváltozó eloszlásfüggvénye függ az ismeretlen θ_1 és θ_2 paraméterektől, melyeket becsülni szeretnénk.

Az első két momentum (m_1, m_2) függ a θ_1 és θ_2 paraméterektől. Ezeket a függéseket $g_1(\theta_1, \theta_2)$, $g_2(\theta_1, \theta_2)$ függvényekkel adjuk meg:

$$\begin{aligned} m_1 &= E_{(\theta_1, \theta_2)}(\xi) = g_1(\theta_1, \theta_2), \\ m_2 &= E_{(\theta_1, \theta_2)}(\xi^2) = g_2(\theta_1, \theta_2). \end{aligned}$$

Ezekből fejezzük ki a θ_1 és θ_2 paramétereket:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= h_1(m_1, m_2), \\ \theta_2 &= h_2(m_1, m_2). \end{aligned}$$

A θ_1 és θ_2 paraméterek momentum becslése

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{1,n} &= h_1(\hat{m}_1, \hat{m}_2), \\ \hat{\theta}_{2,n} &= h_2(\hat{m}_1, \hat{m}_2). \end{aligned}$$

Példa. A normális eloszlás paramétereinek momentum becslése.

$$P(\xi < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$

$\theta_1 = \mu$ és $\theta_2 = \sigma$ a becsülendő paraméterek.

$$\begin{aligned} m_1 &= E_{(\mu, \sigma^2)}(\xi) = g_1(\mu, \sigma) = \mu \\ m_2 &= E_{(\mu, \sigma^2)}(\xi^2) = g_2(\mu, \sigma) = D_{(\mu, \sigma^2)}^2(\xi) + E_{(\mu, \sigma^2)}^2(\xi) = \sigma^2 + \mu^2 \end{aligned}$$

Kifejezzük μ -t és σ -t m_1 -el és m_2 -vel:

$$\begin{aligned} \mu &= h_1(m_1, m_2) = m_1, \\ \sigma &= h_2(m_1, m_2) = \sqrt{m_2 - m_1^2}. \end{aligned}$$

A következő becsléseket kapjuk μ -re és σ -ra:

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_n &= \hat{m}_1, \\ \hat{\sigma}_n &= \sqrt{\hat{m}_2 - \hat{m}_1^2}. \end{aligned}$$

Példa. Az (a, b) intervallumon egyenletes eloszlás paramétereinek momentum becslése. Legyen ξ egyenletes eloszlású egy (a, b) intervallumon, ahol $a < b$ ismeretlen paraméterek.

A ξ változó sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{ha } a < x < b, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Momentumai:

$$\begin{aligned} E_{(a,b)}(\xi^j) &= \int_{-\infty}^{\infty} y^j f(y) dy \\ &= \int_a^b y^j \frac{1}{b-a} dy \\ &= \frac{b^{j+1} - a^{j+1}}{(j+1)(b-a)}. \end{aligned}$$

Speciálisan

$$\begin{aligned}m_1 &= E_{(a,b)}(\xi) = \frac{a+b}{2}, \\m_2 &= E_{(a,b)}(\xi^2) = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{(b-a)(a^2 + ab + b^2)}{3(b-a)} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}.\end{aligned}$$

Kifejezzük az a és b paramétereket m_1 -el és m_2 -vel:

$$\begin{aligned}a &= m_1 - \sqrt{3(m_2 - m_1^2)}, \\b &= m_1 + \sqrt{3(m_2 - m_1^2)}.\end{aligned}$$

A következő becsléseket kapjuk az a és b paraméterekre:

$$\begin{aligned}\hat{a} &= \hat{m}_1 - \sqrt{3(\hat{m}_2 - \hat{m}_1^2)}, \\ \hat{b} &= \hat{m}_1 + \sqrt{3(\hat{m}_2 - \hat{m}_1^2)}.\end{aligned}$$