A 2023. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny feladatainak (nem hivatalos) megoldásai

1. feladat. *Igazoljuk, hogy ha X egy végtelen, κ számosságú halmaz, akkor van X részhalmazainak olyan $\mathcal{F}$ rendszere, hogy*

(i) X minden κ számosságú A részhalmazához van olyan $F \in \mathcal{F}$, amelyre $A \cap F$ számossága κ, és

(ii) X nem áll elő κ-nál kevesebb $\mathcal{F}$-beli, és egy κ-nál kisebb számosságú halmaz uniójaként.

Megoldás. (Több versenyző dolgozata alapján.)

Jelölje $|\cdot|$ a számosságot. Az állítást abban az erősebb formában igazoljuk, hogy olyan $\mathcal{F}$ is létezik, amelyre (ii) mellett az alábbi állítás is teljesül:

(i'). Minden $A \subseteq X$-hez van olyan $F \in \mathcal{F}$, amelyre $A \cap F$ számossága megegyezik A számosságával.

I. Először legyen κ reguláris számosság. Legyen $X = \cup_{\xi<\kappa} X_\xi$ az X egy felbontása κ darab κ számosságú páronkent diszjunkt halmaz uniójára, és legyen $\mathcal{F}^*$ az X_ξ halmazok, és azon $H \subset X$ halmazok összessége, amelyek minden X_ξ-t pontosan egy elemben metszenek. Ha $A \subseteq X$ számossága κ, akkor vagy

a) azon ξ-k halmaza, amelyekre $X_\xi \cap A$ nem üres, κ számossagú, és akkor minden ilyen metszetből kiválasztva egy-egy elemet (plusz még egy-egy tetszőlegeset a többi X_η-ból), kapunk egy $H \in \mathcal{F}^*$ halmazt amelyre $|H \cap A| = \kappa$, vagy pedig

b) a κ regularitása miatt van olyan ξ, hogy $|A \cap X_\xi| = \kappa$, és ekkor is készen vagyunk (i)-vel.

Ez a rendszer tehát teljesíti az (i) feltételt. Ugyanakkor, ha tekintünk $F_\eta \in \mathcal{F}^*$, $\eta < \lambda < \kappa$, κ-nál kevesebb $\mathcal{F}^*$-beli halmazokat, akkor van olyan $\xi < \kappa$, hogy X_ξ ezek egyikével sem egyezik meg, ezért $X_\xi \cap \cup_{\eta<\lambda} F_\eta$ legfeljebb λ számosságú. Így $X_\xi \setminus \cup_{\eta<\lambda} F_\eta$ számossága, és így méginkább $X \setminus \cup_{\eta<\lambda} F_\eta$ számossága κ. Ez azt jelenti, hogy X nem áll elő az $F_\eta \in \mathcal{F}^*$, $\eta < \lambda$, halmazok és egy κ-nál kisebb számosságú halmaz uniójaként, azaz (ii) is teljesül.

Hogy az erősebb (i')-t kielégítő $\mathcal{F}$ rendszert kapjunk nem kell mást tennünk, mint $\mathcal{F}^*$-hoz hozzávenni az X összes, κ-nál kisebb számosssságú részhalmazát. Világos, hogy ekkor (i') fennáll, és a regularitás miatt (ii) is érvényben marad.

II. Ezek után legyen κ szinguláris. Ekkor $\kappa = \sum_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_\xi$, ahol $\mathrm{cf}(\kappa)$ a κ kofinalitása, és minden κ_ξ számosság kisebb κ-nál. A κ_ξ számosságok helyett a rákövetkező κ_ξ^+ számosságokat tekintve feltehető, hogy mindegyik κ_ξ reguláris. Legyen $X = \cup_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)} X_\xi$ az X felbontása páronként diszjunkt κ_ξ számosságú halmazok uniójára, és legyen $\mathcal{F}_\xi$ egy, az I. részben igazolt rendszer az X_ξ halmazra. Állítjuk, hogy ha $\mathcal{F}$ az $F = \cup_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)} F_\xi$, $F_\xi \in \mathcal{F}_\xi$, alakú halmazokból áll, akkor $\mathcal{F}$ teljesíti az (i') és (ii) feltételeket.

Valóban, ha $A \subset X$, akkor minden ξ-re van olyan $F_\xi \in \mathcal{F}_\xi$ hogy

$$|(A \cap X_\xi) \cap F_\xi| = |A \cap X_\xi|,$$

amiből azonnal adódik, hogy az $F = \cup_\xi F_\xi \in \mathcal{F}$ halmazra

$$|A \cap F| = \sum_\xi |(A \cap F) \cap X_\xi| = \sum_\xi |(A \cap X_\xi) \cap F_\xi| = \sum_\xi |(A \cap X_\xi)| = |A|.$$

Másrészről ha $\lambda, \lambda' < \kappa$ és $F^\eta \in \mathcal{F}$, $\eta < \lambda$ és $|H| \le \lambda'$, akkor van olyan $\xi < \mathrm{cf}(\kappa)$ hogy $\lambda, \lambda' < \kappa_\xi$, ezért az $\mathcal{F}_\xi$ rendszer választása miatt az $(F^\eta)_\xi$, $\eta < \lambda$ és H halmazok uniója nem fedheti le X_ξ-t, és így az F^η, $\eta < \lambda$ és H halmazok uniója nem fedheti le X-et, ami igazolja a (ii) tulajdonságot.

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Érkezett 15 dolgozat. Helyesen oldotta meg Gáspár Attila, Imolay András és Kocsis Anett, továbbá lényegében jó Füredi Erik és Földesi András megoldása. Részeredményt ért el Lovas Márton, Ocsovszki Ákos, Raikovich Levente és Sztranyák Gabriella.

2. feladat. *Legyenek $G_0, G_1, \dots$ egy Hausdorff-tér végtelen nyílt részhalmazai. Bizonyítandó, hogy vannak olyan $V_0, V_1, \dots$ páronként diszjunkt végtelen nyílt halmazok és $n_0 < n_1 < \cdots$ indexek, amelyekre $V_j \subseteq G_{n_j}$ teljesül minden $j = 0{,}1, \dots$ esetén.*

Megoldás. (A kitűző megoldása.)

1. eset. Tegyük fel, hogy minden x pontnak van olyan U_x környezete, hogy $U_x \setminus \{x\}$ csak véges sok G_j-t metsz. Ekkor legyen $n_0 = 0$, $x_0 \in G_0$ tetszőleges, és $U_{x_0} \subset G_0$ a fenti tulajdonságú környezet, amelyre $(U_{x_0} \setminus \{x_0\}) \cap G_j = \emptyset$ minden $j \ge n_1$-re, végül pedig legyen $V_0 := U_{x_0} \setminus \{x_0\}$. Ezután hasonlóan legyen $x_1 \in G_{n_1}$, $U_{x_1} \subset G_{n_1}$ a fenti tulajdonságú környezet, amelyre $(U_{x_1} \setminus \setminus \{x_1\}) \cap G_j = \emptyset$ minden $j \ge n_2 > n_1$-re, és legyen $V_1 = U_{x_1} \setminus \{x_1\}$. Az

eljárást folytatva világos, hogy egy kívánt tulajdonságú $V_0, V_1, \ldots$ rendszert kapunk.

2. eset. Most tegyük fel, hogy van olyan x pont, hogy annak bármely U környezetére $U \setminus \{x\}$ végtelen sok G_j-t metsz. Legyen U_0 az x egy környezete, $G_{n_0} \cap (U_0 \setminus \{x\}) \neq \emptyset$, $x_0 \in G_{n_0} \cap (U_0 \setminus \{x\})$, és válasszuk el az x es x_0 pontokat egy-egy $U_1 \subset U_0$ és $V_0 \subset G_{n_0} \cap U_0$ környezettel (azaz U_1 es V_0 diszjunktak). Legyen $n_1 > n_0$ olyan, hogy $G_{n_1} \cap (U_1 \setminus \{x\}) \neq \emptyset$, $x_1 \in G_{n_1} \cap (U_1 \setminus \{x\})$ és válasszuk el az x es x_1 pontokat az $U_2 \subset U_1$ es $V_1 \subset G_{n_1} \cap U_1$ környezetekkel. Az eljárást folytatva ismét világos, hogy egy kívánt tulajdonságú $V_0, V_1, \ldots$ rendszert kapunk.

Érkezett 19 dolgozat. Helyesen oldotta meg Fleiner Zsigmond, Földesi András, Gáspár Attila, Hegedűs Dániel, Imolay András, Kalocsai Zoltán, Kocsis Anett, Lovas Márton, Seres-Szabó Márton és Zólomy Kristóf, továbbá lényegében jó Kökényesi Márk, Raikovich Levente és Szabó Eszter megoldása. Részeredményt ért el Németh Márton Tamás és Somogyi Dalma.

3. feladat. *Legyen $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ egy véges metrikus tér alaphalmaza, ahol a pontokat induktíven úgy soroljuk fel, hogy minden $1 \leq k \leq n$-re x_k maximalizálja az $\{x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}\}$ pontoktól vett távolságok szorzatát. Igazoljuk, hogy ha egy $x \in X$-re Π_x az x pontnak a tér többi pontjától vett távolságainak szorzata, akkor $\Pi_{x_n} \leq 2^{n-1}\Pi_x$ minden x-re.*

Megoldás. (Több versenyző dolgozata alapján.)

Legyen $x = x_k$, es jelöljük a kérdéses szorzatot $\Pi_{x,n+1}$-gyel, feltüntetve, hogy hány pontú térről is beszélünk. Az n szerinti indukcióval okoskodunk.

Az állítás világos ha $n = 1$ vagy $k = n$, és tegyük fel, hogy igaz már az állítás n-nél kisebb természetes számokra. Legyen $k < n$, és legyen m a legnagyobb $j < n$, amelyre $d(x_j, x_k) < d(x_n, x_k)$. Ekkor $k \leq m < n$.

Ha $m = 0$, akkor persze $k = 0$, és minden $0 < j < n$-re $d(x_n, x_0) \leq$ $\leq d(x_j, x_0)$,

$$d(x_n, x_j) \leq d(x_n, x_0) + d(x_0, x_j) \leq 2d(x_0, x_j),$$

amiből kapjuk, hogy

$$\Pi_{x_n} = d(x_n, x_0) \prod_{j=1}^{n-1} d(x_n, x_j) \leq d(x_n, x_0) \prod_{j=1}^{n-1} 2d(x_0, x_j) = 2^{n-1}\Pi_{x_0}.$$

Ha $m > 0$, akkor a felsorolás tulajdonságából

$$\Pi_{x_n,n+1} = \prod_{j<m} d(x_n, x_j) \prod_{j=m}^{n-1} d(x_n, x_j) \leq \Pi_{x_m,m+1} \prod_{j=m}^{n-1} d(x_n, x_j), \tag{1}$$

és ugyanakkor

$$(2)\quad \Pi_{x_k,n+1} = \prod_{j\le m,\ j\ne k} d(x_k,x_j) \prod_{j=m+1}^{n} d(x_k,x_j) = \Pi_{x_k,m+1} \prod_{j=m+1}^{n} d(x_k,x_j).$$

Az indukciós feltevés szerint

$$\Pi_{x_m,m+1} \le 2^{m-1}\Pi_{x_k,m+1}.$$

Ha $j = m+1,\dots,n-1$, akkor

$$d(x_n,x_j) \le d(x_n,x_k) + d(x_k,x_j) \le d(x_k,x_j) + d(x_k,x_j) = 2d(x_k,x_j),$$

továbbá

$$d(x_n,x_m) \le d(x_n,x_k) + d(x_k,x_m) \le d(x_n,x_k) + d(x_n,x_k) = 2d(x_n,x_k),$$

ami azt mutatja, hogy az (1)-ben szereplő $n-m$ tényezős szorzat legfeljebb akkora, mint a (2)-ben szereplő $n-m$ tényezős szorzat 2^{n-m}-szerese, amivel az állítás adódik (1)-ből es (2)-ből n-re is.

Megjegyzések:

1. A 2^{n-1} konstans pontos. Valóban, legyen az $\{x_0,\dots,x_n\}$ pontokon a metrika az, amelynél x_0 távolsága minden más ponttól 1, és minden más tavolság 2. Ekkor a feladat feltételei teljesülnek, es $\Pi_{x_n} = 2^{n-1} = 2^{n-1}\Pi_{x_0}$.

2. Több versenyző igazolta az erősebb $\Pi_{x_n} \le 2^{n-k-1}\Pi_{x_k}$, $k<n$, egyenlőtlenséget (hogy ezt megkapjuk, a fenti megoldásban tekintsük külön a $k<m$ és $k=m$ eseteket, és az elsőnél alkalmazzuk az erősebb állítás indukciós feltevését).

3. A feladatbeli felsorolás/konstrukció Leja lengyel matematikustól ered az 1950-es évekből, aki a sík egy X kompakt halmazának valamely x_0 pontjából kiindulva úgy definiálta az $x_1,x_2,\ldots \in K$ sorozatot, hogy minden k-ra x_k maximalizálja a $d(x,x_0)\cdots d(x,x_{k-1})$ szorzatot az $x\in X$ elemeire.

4. A feladat V. V. Andrievskii és F. Nazarov egy eredményéhez is kapcsolódik a sík kompakt halmazain vett Leja pontokra vonatkozó Lebesgue-konstansokkal kapcsolatban (ld. V. Andrievskii and F. Nazarov, A simple upper bound for Lebesgue constants associated with Leja points on the real line, *J. Approx. Theory*, **275** (2022)).

Megoldást adott be Földesi András, Füredi Erik, Gáspár Attila, Hegedűs Dániel, Imolay András, Ivanyos János, Kalocsai Zoltán, Kempf Alex, Kocsis Anett, Kökényesi Márk, Lovas Márton, Németh Márton Tamás, Somogyi Dalma, Szabó Eszter és Zólomy Kristóf; összesen 15 dolgozat. Minden beérkezett megoldás helyes.

4. feladat. *Határozzuk meg azokat az $X, Y \subset \mathbb{R}$ halmazpárokat, amelyekre igaz a következő: ha $f(x,y)$ olyan függvény az $X \times Y$ halmazon, amely minden $x \in X$-re az y egy polinomjával egyezik meg Y-on, és minden $y \in Y$-ra az x egy polinomjával egyezik meg X-en, akkor f kétváltozós polinom az $X \times Y$ halmazon.*

Megoldás. (A kitűzők megoldása.)

Megmutatjuk, hogy az X, Y halmazpár pontosak akkor megfelelő, ha X és Y közül valamelyik véges vagy nem megszámlálható. Először az elegendőséget igazoljuk.

Ha valamelyik halmaz véges, pl. $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$, és minden j-re $f(x, y_j) = p_j(x)$ az X halmazon valamilyen p_j polinommal, akkor nyilvan

$$f(x,y) = \sum_{j=1}^{m} p_j(x) \frac{\prod_{k \neq j}(y - y_k)}{\prod_{k \neq j}(y_j - y_k)}$$

az $X \times Y$ halmazon, és a jobb oldal egy kétváltozós polinom.

Feltehetjük tehát, hogy mindkét halmaz végtelen, és pl. X nem megszámlálható. Ekkor van olyan N, és olyan nem megszámlálható $X_1 \subset X$, hogy minden $x \in X_1$-re $f(x,y)$ legfeljebb N-edfokú

$$q_x(y) = \sum_{j=0}^{N} a_{x,j} y^j$$

polinom y-ban az Y halmazon. Válasszunk $N+1$ különböző $y_0, y_1, \ldots, y_N$ pontot Y-ban. Az $a_{x,j}$ együtthatók az $f(x, y_k)$, $k = 0, \ldots, N$, értékekből meghatározhatók a Cramer-szabállyal, azaz $a_{x,j}$ az $f(x, y_k)$, $k = 0, \ldots, N$ értékek egy olyan lineáris kombinációja, amelyben a lineáris együtthatók csak az y_k számoktól függenek (azaz x-től nem). Mivel itt minden k-ra $f(x, y_k)$ mint x függvénye polinom, azt kapjuk, hogy $a_{x,j}$ x-ben polinom. Tehát

$$f(x,y) = q_x(y) = \sum_{j=0}^{N} a_{x,j} y^j$$

minden $y \in Y$-ra és minden $x \in X_1$-re, de ekkor minden $x \in X$-re is, hiszen mindkét oldal x-nek polinomja rögzített y esetén.

Ez igazolja a feltétel elegendőségét.

A szükségességhez tegyük fel, hogy X és Y megszámlálhatóan végtelenek: $X = \{x_j\}_{j=0}^{\infty}$, $Y = \{y_j\}_{j=0}^{\infty}$. Az $f(x_j, y_k))_{j,k=0}^{\infty}$ táblázat diagonálisába írjuk be rendre az $e^{j(|x_j|+|y_j|+2)}$, $j = 0,1,\ldots$, számokat, és a táblázat többi részét töltsük ki sorba véve az első sort, majd az első oszlopot, majd a második sort és a második oszlopot, sít., oly módon, hogy minden sorban es oszlopban egy polinom értékei álljanak (pl. a j-edik sorban az $f(x_j, y_k)$ számok egy polinom értékei legyenek rendre az $y_0, y_1, \dots$ helyeken). Mivel véges sok helyen megadott számok mindig megegyeznek valamely polinomnak az adott helyeken felvett értékeivel, ez a rekurzív kitöltés megtehető. Ugyanakkor bármely kétváltozós $p(x, y)$ polinomra van olyan N, hogy $|p(x, y)| \leq (|x| + |y| + 2)^N$ minden x-re es y-ra, ami a diagonális választása miatt azt adja, hogy az $f(x_j, y_j)$, $j = 0{,}1, \dots$ értékek nem egyezhetnek mind meg a $p(x_j, y_j)$ értékekkel valamilyen p polinommal.

Érkezett 15 dolgozat. Helyesen oldotta meg Fleiner Zsigmond, Füredi Erik, Gáspár Attila, Hegedűs Dániel, Imolay András, Kalocsai Zoltán, Kocsis Anett, Németh Márton Tamás és Zólomy Kristóf; lényegében jó Földesi András, Kökényesi Márk és Sztranyák Gabriella megoldása. Értékes részeredményeket ért el Kempf Alex, Lovas Márton és Somogyi Dalma.

5. feladat. *Legyen G egy tetszőleges véges csoport, és jelölje $t_n(G)$ az*

$$f\colon G^n \to G, \quad f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_0 x_1 a_1 \cdots x_n a_n \qquad (a_0, \dots, a_n \in G)$$

alakú függvények számát. Határozzuk meg $\sqrt[n]{t_n(G)}$ határértékét, ha $n \to \infty$.

Megoldás. (A kitűző megoldása.) Jelölje az $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ vektorhoz tartozó függvényt $f_{\mathbf{a}}$.

Lemma. *Legyen G egy csoport, és jelölje Z a centrumát. Tetszőleges $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in$ $\in G^{n+1}$ esetén ekvivalensek a következők:*

(i) $f_{\mathbf{a}} = f_{\mathbf{b}}$*;*

(ii) $a_0 \cdots a_n = b_0 \cdots b_n$ *és* $a_i^{-1} b_i \in Z$ $(i = 0, \dots, n)$.

Bizonyítás. Vezessük be a $c_i = a_i^{-1} b_i$ jelölést.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Tfh. $a_0 \cdots a_n = b_0 \cdots b_n$ és $c_i \in Z$ $(i = 1, \dots, n)$. Ekkor

$$a_0 \cdots a_n = b_0 \cdots b_n = (a_0 c_0) \cdots (a_n c_n) = c_0 \cdots c_n \cdot a_0 \cdots a_n,$$

amiből az következik, hogy $c_0 \cdots c_n = 1$. Ezt felhasználva megkapjuk, hogy $f_{\mathbf{a}} = f_{\mathbf{b}}$:

$$f_{\mathbf{b}}(\mathbf{x}) = (a_0 c_0) x_1 (a_1 c_1) \cdots x_n (a_n c_n) = c_0 c_1 \cdots c_n \cdot a_0 x_1 a_1 \cdots x_n a_n = f_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}).$$

(i) $\Longrightarrow$ (ii): Tegyük fel, hogy $f_{\mathbf{a}} = f_{\mathbf{b}}$. Ekkor $a_0 \cdots a_n = f_{\mathbf{a}}(1, \dots, 1) =$ $= f_{\mathbf{b}}(1, \dots, 1) = b_0 \cdots b_n$. A $c_i \in Z$ állítást n szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk.

– Az $n=1$ esetben $f_{a_0,a_1}(x_1)=a_0x_1a_1=b_0x_1b_1=f_{b_0,b_1}(x_1)$ minden $x_1\in$ $\in G$-re, következésképp $x_1\cdot a_1b_1^{-1}=a_0^{-1}b_0\cdot x_1$. Ebből következik, hogy $c_0=a_0^{-1}b_0\in Z$, hiszen $a_0^{-1}b_0=a_1b_1^{-1}$ (a fent bizonyított $a_0a_1=b_0b_1$ egyenlőség miatt). Mivel $c_1=a_1^{-1}b_1$ konjugáltja $c_0=a_1b_1^{-1}$ inverzének, $c_1\in Z$ is teljesül.

– Tegyük fel, hogy $n\geq 2$, és hogy $(n-1)$-re igaz az állítás. Tetszőleges $\mathbf{a}\in G^{n+1}$ esetén

$$f_{\mathbf{a}}(x_1,\dots,x_{n-1},1)=f_{\mathbf{a}'}(x_1,\dots,x_{n-1}),\ \text{ahol } \mathbf{a}'=(a_0,\dots,a_{n-2},a_{n-1}a_n).$$

Ugyanilyen átalakítást alkalmazva az $f_{\mathbf{b}}$ függvényre is, az $f_{\mathbf{a}}=f_{\mathbf{b}}$ egyenlőségből az indukciós hipotézis alapján következik, hogy

$$c_0,c_1,\dots,c_{n-2}\in Z,\ (a_{n-1}a_n)^{-1}b_{n-1}b_n=a_n^{-1}c_{n-1}b_n=a_n^{-1}c_{n-1}a_nc_n\in Z.$$

Az $f_{\mathbf{a}}(1,x_2,\dots,x_n)$ függvényt hasonló módon átalakítva kapjuk, hogy

$$a_1^{-1}c_0a_1c_1\in Z,\ c_2\in Z,\ \dots,\ c_{n-1}\in Z,\ c_n\in Z.$$

A fentiek igazolják, hogy $c_i\in Z$ $(i=0,\dots,n)$, kivéve az $n=2$ esetet, mert ott csak $c_0\in Z$ és $c_2\in Z$ jön ki a fentiekből, de $c_1\in Z$ nem. Ezt az esetet így kezelhetjük:

$$(a_1^{-1}c_0a_1c_1\in Z \text{ és } c_0\in Z)\implies c_0c_1\in Z\implies c_1\in Z. \qquad \square$$

A lemma állítását így is megfogalmazhatjuk:

$$f_{\mathbf{a}}=f_{\mathbf{b}}\iff \exists c_0,\dots,c_n\in Z\colon b_i=a_ic_i\ (i=0,\dots,n) \text{ és } c_0\cdots c_n=1.$$

Ebből következik, hogy rögzített $\mathbf{a}\in G^{n+1}$ esetén $|Z|^n$ darab olyan $\mathbf{b}\in$ $\in G^{n+1}$ együtthatóvektor létezik, amelyre $f_{\mathbf{a}}=f_{\mathbf{b}}$ (hiszen pl. a $c_0,\dots,c_{n-1}$ elemeket tetszőlegesen választhatjuk a centrumból, és ezek már egyértelműen meghatározzák c_n értékét). Így $t_n(G)=\frac{|G|^{n+1}}{|Z|^n}$, a keresett határérték pedig

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|G|^{n+1}}{|Z|^n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|G|}\cdot\frac{|G|}{|Z|}=[G:Z]$$

Érkezett 15 dolgozat. Helyesen oldotta meg Földesi András, Füredi Erik, Gáspár Attila, Hegedűs Dániel, Imolay András, Kempf Alex, Kocsis Anett, Seres-Szabó Márton és Zólomy Kristóf, továbbá lényegében jó Fleiner Zsigmond megoldása. Részeredményt ért el Budai Ádám és Kökényesi Márk.

6. feladat. *Igazoljuk, hogy minden elég nagy n természetes szám és $0 < k \leq$ $\leq n$ esetén van olyan m természetes szám, hogy m-nek pontosan k osztója van az $\{1,2,....,n\}$ halmazból.*

Megoldás. (Több versenyző dolgozata alapján.)

Feltesszük, hogy n elegendően nagy, így az x-nél nem nagyobb prímszámok $\pi(x)$ számára ($x = n$ és $x = n/2$) teljesül a prímszámtétel, azaz hogy

$$\frac{x}{\ln x}\left(1+\frac{1}{\ln x}\right) < \pi(x) < \frac{x}{\ln x - 4}. \tag{1}$$

Legyen $n^* = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ az $1, 2, \ldots, n$ számok legkisebb közös többszöröse, ahol $p_1 < p_2 < \ldots < p_r$ prímek. Legyen x az n^* osztója, és jelölje $d_n(x)$ az x szám n-nél nem nagyobb osztóinak számát. Ha x és p_i olyanok, hogy $p_i x | n^*$, akkor

$$d_n(x) + 1 \leq d_n(p_i x) \leq d_n(x) + \left\lfloor \frac{n}{p_i} \right\rfloor. \tag{2}$$

Speciálisan, ha $p_i > n/2$, akkor $\alpha_i = 1$, és $d_n(p_i x) = d_n(x) + 1$.

Lemma. *Ha n elegendően nagy, és $\ln n < p_i \leq n/2$, akkor $r - i > \left\lfloor \frac{n}{p_i} \right\rfloor$.*

Bizonyítás. Mivel $n/2$ és n közé legalább 2 prím esik, ha n elég nagy, így $r - i \geq 2$.

Ha $n/(2\ln n) \leq p_i < n/2$, akkor (1)-t használva

$$\begin{aligned} r - i = \pi(n) - \pi(p_i) > \pi(n) - \pi\left(\frac{n}{2}\right) &> \frac{n}{\ln n}\left(1+\frac{1}{\ln n}\right) - \frac{n}{2(\ln(n/2)-4)} \\ &> \frac{n}{\ln n} - \frac{n}{2\ln n - 10} > \frac{n}{3\ln n} > 2\ln n \geq \frac{n}{p_i}. \end{aligned}$$

Másrészt ha $n/(2\ln n) > p_i > \ln n$, akkor használjuk (1)-t és a triviális $\pi(x) \leq x$ becslést:

$$r - i = \pi(n) - \pi(p_i) > \frac{n}{\ln n}\left(1+\frac{1}{\ln n}\right) - p_i.$$

Itt a jobb oldal nagyobb, mint n/p_i pontosan akkor, ha

$$p_i^2 - \frac{n}{\ln n}\left(1+\frac{1}{\ln n}\right) p_i + n \leq 0.$$

A bal oldal a vizsgált intervallumon monoton fogyó, és $p_i = \ln n$ helyen teljesül az egyenlőtlenség (elegendően nagy n-re). Ezzel a lemmát beláttuk. $\square$

Vegyük észre, hogy van legalább $R = n/\ln n - \ln n$ olyan n-nél kisebb prím, ami nagyobb $\ln n$-nél, azaz vagy teljesíti a lemma feltételét, vagy $n/2$-nél nagyobb.

Ha $k \leq R$, akkor a keresett m számot megkonstruálhatjuk mohó módon. Vegyük sorban az $\ln n$-nél nagyobb p_i prímeket α_i-szer. Kezdetben $m = 1$, és a listánkon legalább k különböző prím van. Minden lépésben megszorozzuk m-et a listánkon következő p elemmel: $m' = mp$. Ha a kapott m'-re $d_n(m') <$ $< k$, akkor folytatjuk az eljárást az új $m = m'$-vel, ha $d_n(m') = k$, akkor készen vagyunk. Ha $d_n(m') > k$, akkor viszont $p \leq n/2$ kell legyen és így a lemma és (2) szerint még több különböző prím van hátra listánkon, mint $k - d_n(m)$. Ezért p-t nem vesszük be a szorzatba, és folytatjuk az eljárást m-mel. Mivel $n/2$ után már minden új prím csak eggyel növeli d_n értékét, így az algoritmus sikeresen véget fog érni.

A $k > R$ esetben legyen A azon n-nél kisebb számok halmaza, amelyeknek csak $\ln n$-nél kisebb prímosztóik vannak. Megmutatjuk, hogy A számossága kisebb, mint R. Az $\ln n$-nél kisebb prímek száma legfeljebb $s = 2\ln n/\ln\ln n$, így ha B azon számok halmaza, amelyek néhány *különböző* $\ln n$-nél kisebb prím szorzataként előállnak, akkor $|B| \leq 2^s$. Másrészt legyen C az n-nél nem nagyobb négyzetszámok halmaza, ekkor nyilván $|C| \leq \sqrt{n}$. Vegyük észre, hogy minden A-beli x előáll egy B-beli és egy C-beli elem szorzataként, azaz kellően nagy n-re

$$|A| \leq |B| \cdot |C| \leq 2^s\sqrt{n} \leq 2^{\ln n/4}\sqrt{n} < n^{3/4} < R.$$

Ebből következik, hogy ha n^*-ból összeszorozzuk az összes $\ln n$-nél kisebb alapú prímhatványt, akkor a kapott számnak k-nál kevesebb n-nél nem nagyobb osztója lesz, ha n elég nagy. Innen viszont a fentiek szerint járhatunk el ismét, csak most m kezdeti érték nem 1, hanem a $\ln n$-nél kisebb alapú prímhatványok szorzata. Ezzel a feladat állítását beláttuk.

Megjegyzések:

1. Az állítás minden n-re igaz, ezt Füredi Erik dolgozatában helyesen megsejtette. Erről hamarosan Makay Géza cikkeiben olvashatunk bővebben, amelyek az Érintőben és KöMaLban fognak megjelenni (várhatóan 2023. decemberében és 2024. januárjában).

2. Több versenyző bevezette a $\Psi(n, r)$ függvényt, amely azon n-nél nem nagyobb pozitív egészek számát jelöli, amelyeknek nincs r-nél nagyobb prímosztójuk. A $k > R$ eset Granville alábbi eredménye segítségével is kezelhető:

$$\Psi(n, \ln n) = n^{\frac{2\ln 2}{\ln\ln n}\cdot(1+O(1/\ln\ln n))},$$

ahogy n tart végtelenbe. Részletesen itt olvashatunk a témáról: A. Granville, On positive integers $\leq x$ with prime factors $\leq t\log x$, pp. 403–422 in Number theory and applications (Banff, AB, 1988), edited by R. A. Mollin, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci. 265, Kluwer, Dordrecht, 1989.

Érkezett 9 dolgozat. Helyesen oldotta meg Füredi Erik, Gáspár Attila, Kocsis Anett, Németh Márton Tamás és Zólomy Kristóf. Értékes részeredményekre jutott Imolay András és Kökényesi Márk.

7. feladat. *Bizonyítsuk be, hogy léteznek olyan* $D, K \subseteq \mathbb{N}^2$ *halmazok, hogy tetszőleges* 4 *elemű* A_1 *és* A_2 *halmazok esetén* $|A_1 \cap A_2| = 1$ *akkor és csak akkor teljesül, ha léteznek olyan* 4 *elemű* $A_3,\ A_4, \dots$ *halmazok, amelyekre* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *minden* $(i,j) \in D$*-re, és* $|A_i \cap A_j| = 2$ *minden* $(i,j) \in K$*-ra.*

Megoldás. A megoldáshoz használjuk az alábbi lemmát.

Lemma. *Legyen* $m \le n$ *természetes számok, és* $N := (n-1)\binom{n}{m} + 2$. *Ekkor tetszőleges* $U_1, \dots, U_N$ n *elemű halmazokra, amennyiben* $|U_i \cap U_j| = m$ *teljesül minden* $1 \le i < j \le N$*-re, akkor* $|\bigcap_{i=1}^{N} U_j| = m$.

Legyenek $U_1, \dots, U_N$ halmazok a lemmában előírt feltétellel. A skatulyelv szerint létezik egy olyan n elemű $I \subset \{2, \dots, N\}$, hogy az $U_i \cap U_1$ metszet ugyanaz az m elemű R halmaz minden $i \in I$-re. Elegendő igazolni, hogy $R \subseteq U_s$ minden más U_s (azaz $s \notin I \cup \{1\}$) esetén is. Ehhez tekintsük a páronként diszjunkt $X_i = U_i \setminus R$ ($i \in I \cup \{1\}$) halmazokat. Ha valamely U_s nem tartalmazza R-t, akkor szükségképpen belemetsz mind az $n+1$ darab X_i halmazba, ezért legalább $n+1$ elemű, ami ellentmondás. Ezzel a lemmát beláttuk.

A továbbiakban legyen $n = 4, m = 2$, s így a lemma szerint $N = 20$.

A feladat állítása azonnal következik az alábbi állításból (az A_*, B_* és C halmazok megfelelő átnevezése után).

Állítás. *Legyenek* C *és* A_{45} *tetszőleges* 4 *elemű halmazok. Ekkor* $|C \cap A_{45}| = 1$ *pontosan akkor teljesül, ha léteznek olyan szintén* 4 *elemű* $A_{ij} : 1 \le i < j \le$ $\le 5, (i,j) \neq (4{,}5)$ *és* $B_{ik} : i \in \{1, \dots, 5\}, k \in \{1, \dots, N\}$ *halmazok, hogy*

(a) minden $1 \le i \le 5$ *és* $1 \le k < \ell \le N$ *esetén* $|B_{ik} \cap B_{i\ell}| = 2$,

(b) minden $1 \le i < j \le 5$ *és* $1 \le k, \ell \le N$ *esetén* $B_{ik} \cap B_{j\ell} = \emptyset$,

(c) minden $1 \le i < j \le 5$ *és* $1 \le k \le N$ *esetén* $|A_{ij} \cap B_{ik}| = |A_{ij} \cap B_{jk}| = 2$, *és*

(d) minden $1 \le i < j \le 4$ *esetén* $|C \cap A_{ij}| = 2$.

Először is tegyük fel, hogy $|C \cap A_{45}| = 1$. Ebben az esetben léteznek olyan $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$ páronként különböző elemek, hogy $C = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ és $A_{45} = \{a_4, b_4, a_5, b_5\}$. Tekintsünk továbbá $c_{ik}, d_{ik} : 1 \leq i \leq 5, 1 \leq k \leq N$ elemeket úgy, hogy minden különböző módon jelölt elem különböző. Definiáljuk ekkor az $A_{ij} : 1 \leq i < j \leq 5, (i,j) \neq (4{,}5)$ és $B_{ik} : i \in \{1, \ldots, 5\}, k \in \{1, \ldots, N\}$ halmazokat a következőképpen.

(i) $A_{ij} := \{a_i, b_i, a_j, b_j\}$

(ii) $B_{ik} := \{a_i, b_i, c_{ik}, d_{ik}\}$.

(Vegyük észre, hogy $(i,j) = (4{,}5)$ esetén is teljesül (i).) Könnyen ellenőrizhető, hogy a fenti halmazok kielégítik a fenti (a)–(d) feltételeket.

A másik irányhoz tegyük fel, hogy léteznek olyan $A_{ij} : 1 \leq i < j \leq 5, (i,j) \neq (4{,}5)$ és $B_{ik} : i \in \{1, \ldots, 5\}, k \in \{1, \ldots, N\}$ halmazok, amelyek teljesítik az (a)–(d) feltételeket. Belátjuk, hogy ekkor $|C \cap A_{45}| = 1$.

Legyen $1 \leq i \leq 5$ tetszőleges. Ekkor az (a) feltételből következik, a lemmát használva, hogy létezik olyan X_i két elemű halmaz, amelyre a B_{ik} halmazok páronkénti metszete megegyezik X_i-vel. A (b) feltételből következik, hogy az X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 halmazoknak páronként diszjunktaknak kell lenniük. Válasszunk most tetszőleges $1 \leq i < j \leq 5$ indexeket. Ekkor az (a) és (c) feltételek szerint az A_{ij} és $B_{ik} : 1 \leq k \leq N$ halmazokra együtt is igaz, hogy a páronkénti metszetük 2 elemű. Ez a Lemma szerint csak úgy lehetséges, ha ez a metszet pontosan X_i. Speciálisan $X_i \subseteq A_{ij}$. Hasonlóképpen következik, hogy $X_j \subseteq A_{ij}$. Mivel $|A_{ij}| = 4, |X_i| = |X_j| = 2$, és az X_i és X_j halmazokról tudjuk, hogy diszjunktak, így tudjuk, hogy valójában $A_{ij} = X_i \cup X_j$ $(*)$.

Azt állítjuk, hogy $|C \cap X_i| = 1$ minden $i \in \{1{,}2{,}3{,}4\}$ esetén. Valóban legyen $s_i := |C \cap X_i|$. Ekkor a $(*)$ észrevételt használva a (d) feltétel az $s_i + s_j = 2 : 1 \leq i < j \leq 4$ egyenletrendszerhez vezet. Az $s_1 + s_2 = s_1 + s_3 = s_1 + s_4$ egyenletekből azonnal következik, hogy $s_2 = s_3 = s_4$ és hasonlóan $s_1 = s_2$ is. Így a fenti egyenletrendszer egyetlen megoldása $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 1$. Mivel $|C| = 4$, ezért ebből adódik az is, hogy $C \subseteq X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4$. Újra használva a $(*)$ feltételt, és hogy az X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 halmazok páronként diszjunktak következik, hogy $C \cap A_{45} = C \cap X_4$, amiről a fentiek szerint tudjuk, hogy pontosan egy elemű.

Érkezett 14 dolgozat. Helyesen oldotta meg Füredi Erik, Gáspár Attila, Hegedűs Dániel, Imolay András, Kökényesi Márk, Lovas Márton, Seres-Szabó Márton, Sztranyák Gabriella és Zólomy Kristóf, továbbá lényegében jó Kocsis Anett megoldása. Megfelelő konstrukciót adott Fleiner Zsigmond, Ivanyos János és Kempf Alex.

8. feladat. *Legyen q egy tetszőleges nem azonosan 0 komplex együtthatós polinom, és $\Gamma_q = \{z : |q(z)| = 1\}$ a szintvonala. Igazoljuk, hogy minden $z_0 \in \Gamma_q$ pontra van olyan p polinom, amelyre $|p(z_0)| = 1$, de minden z_0-tól különböző $z \in \Gamma_q$-ra $|p(z)| < 1$ teljesül.*

Megoldás. (Gáspár Attila megoldása.) Ha q konstans és 1 abszolút értékű, akkor az állítás hamis, mert $\Gamma_q = \mathbb{C}$, így p-nek korlátosnak kellene lennie, de akkor csak konstans lehet, ami nem teljesíti a feltételt. Ha q konstans, de nem 1 abszolút értékű, akkor az állítás triviális, mert $\Gamma_q = \emptyset$. A továbbiakban feltesszük, hogy q nem konstans.

Rögzitsünk egy $z_0 \in \Gamma_q$-t. Világos, hogy ha $|\zeta| = 1$, akkor $\Gamma_{\zeta q} = \Gamma_q$. Emiatt feltehető, hogy $q(z_0) = 1$.

Legyen
$$p_0(z) = q(z) + \frac{(q(z)-1)^2}{5}.$$

Ha $|q(z)| = 1$, akkor

$$p_0(z) = q(z) + \frac{(q(z)-1)(q(z) - q(z)\overline{q(z)})}{5} = \\ = q(z)\left(1 - \frac{(q(z)-1)(\overline{q(z)}-1)}{5}\right) = q(z)\left(1 - \frac{|q(z)-1|^2}{5}\right).$$

Mivel $|q(z) - 1| \le |q(z)| + 1 = 2$, ebből következik, hogy

$$|p_0(z)| = \left|1 - \frac{|q(z)-1|^2}{5}\right| = 1 - \frac{|q(z)-1|^2}{5}$$

Ebből látható, hogy ha $q(z) \neq 1$, akkor $|p_0(z)| < 1$.

A q-1-nek a z_0-ban valamilyen $k \ge 1$-re k-szoros gyöke van. Legyen r olyan interpolációs polinom, aminek a z_0-ban legalább $2k$-szoros gyöke van, és a $q - 1$ minden z_0-tól különbözö z gyökére $r(z) = -1$. Ilyen van, mert a q-1-nek véges sok gyöke van.

Legyen $p = p_0 + \varepsilon r$ alakú, ahol $\varepsilon > 0$ valós. Mivel $q(z_0) = 1$ és $r(z_0) = 0$, ellenőrizhető, hogy $p(z_0) = 1$. Megmutatjuk, hogy ha ε elég kicsi, akkor minden $z \in \Gamma_q \setminus \{z_0\}$-ra $|p(z)| < 1$. A q nem konstans, ezért $\lim_{z\to\infty} q(z) = \infty$, tehát a Γ_q kompakt. Így elég azt megmutatni, hogy minden $z \in \Gamma_q$-nak van olyan U környezete, hogy ha ε elég kicsi, akkor minden $w \in U \cap (\Gamma_q \setminus \{z_0\})$-ra $|p(w)| < 1$.

Legyen $z \in \Gamma_q$. Elöször tegyük fel, hogy $q(z) \neq 1$. Ekkor $|p_0(z)| < 1$. A p_0 folytonossága miatt a z-nek van olyan korlátos U környezete, ahol $|p_0(z)| < 1 - \delta$ valamilyen $\delta > 0$-ra. Az r korlátos az U-n, ezért ha az ε elég kicsi, akkor $\varepsilon|r| < \delta$ az U-n. Ekkor az U-n $|p| \le |p_0| + \varepsilon|r| < (1-\delta) + \delta = 1$.

Most tegyük fel, hogy $q(z) = 1$ és $z \neq z_0$. Ellenőrizhető, hogy

$$|p(w)|^2 = |p_0(w)|^2 + 2\varepsilon \operatorname{Re}\left(r(w)\overline{p_0(w)}\right) + \varepsilon^2 |r(w)|^2.$$

Mivel $|p_0(w)| \leq 1$ minden $w \in \Gamma_q$-ra, elég azt megmutatni, hogy

$$2\varepsilon \operatorname{Re}\left(r(w)\overline{p_0(w)}\right) + \varepsilon^2 |r(w)|^2 < 0$$

a z-nek egy környezetében. Látható, hogy $r(z)\overline{p_0(z)} = -1$, így a folytonosság miatt van olyan korlátos $U \ni z$ környezet, ahol $2 \operatorname{Re}(r\overline{p_0}) < -1$. Az r korlátos az U-n, ezért ha ε elég kicsi, akkor $\varepsilon |r|^2 < 1$ az U-n. Ekkor teljesül, hogy

$$2\varepsilon \operatorname{Re}\left(r(w)\overline{p_0(w)}\right) + \varepsilon^2 |r(w)|^2 < \varepsilon(-1 + 1) = 0$$

minden $w \in U$-ra, tehát $|p(w)| < 1$ minden $w \in U \cap \Gamma_q$-ra.

Végül tegyük fel, hogy $z = z_0$. Tudjuk, hogy a $(q(w) - 1)^2$-nek $2k$-szoros, az r-nek legalább $2k$-szoros gyöke van a z_0-ban, ezért az

$$\frac{r}{(q-1)^2}$$

a z_0-nak egy környezetében korlátos. Legyen U egy ilyen környezet, és legyen ε olyan kicsi, hogy $\varepsilon |r| \leq |q - 1|^2/10$ az U-n. Az is feltehető, hogy U-n a z_0 a $q - 1$ egyetlen gyöke. Ha $w \in U \cap \Gamma_q$ és $w \neq z_0$, akkor

$$|p(w)| \leq |p_0(w)| + \varepsilon |r(w)| = 1 - \frac{|q(w) - 1|^2}{5} + \varepsilon |r(w)| \leq 1 - \frac{|q(w) - 1|^2}{10} < 1.$$

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Megjegyzés: A feladat sajnos pontatlanul lett kitűzve, a versenybizottság teljes értékű megoldásként csak azt fogadta el, ha a versenyző a triviális ellenpélda észrevétele után az általános esetre igazolta az állítást.

Érkezett 10 dolgozat. Helyesen oldotta meg Gáspár Attila, Kocsis Anett és Zólomy Kristóf, továbbá lényegében jó Füredi Erik megoldása. Értékes eredményt ért el Kökényesi Márk és Gárgyán Barnabás.

9. feladat. *Legyen* $C[-1{,}1]$ *a* $[-1{,}1]$ *intervallumon folytonos valós függvények tere a szokásos szuprémum normával, és legyen* V *egy zárt, véges kodimenziós altere* $C[-1{,}1]$*-nek. Igazolandó, hogy valamely legfeljebb* 1 *normájú* $p \in V$ *polinomra* $p'(0) > 2023$.

Megoldás.

Legyen $X = C[-1,1]$, $\|\cdot\|$ a szuprémum norma, $\kappa : X \to X/V$ a hányados leképezés. A $V = X$ eset triviális, ezért feltesszük, hogy X/V dimenziója $d \geq \geq 1$. Legyen $\{e_1, \ldots, e_d\}$ az X/V egy bázisa. Válasszunk $f_j \in X$ elemeket úgy, hogy $\kappa(f_j) = e_j$, $j = 1, \ldots, d$, és legyen Y az $f_1, \ldots, f_d$ által kifeszített altere X-nek. Ekkor $X = V \oplus Y$. Legyen $\Pi : X \to X$ a $V \oplus Y$ felbontás által definiált projekció Y-ra. Mivel V és Y zártak, a zárt gráf tétel alkalmazásával Π folytonos.

Jelölje P a polinomok alterét X-ben. Legyen (q_k) olyan polinomsorozat P-ben, amelyre $q_k'(0) = 1$ és $\|q_k\| \to 0$, ha $k \to \infty$. Pl. $q_k(x) = x(1 - x^2)^k$.

A p polinom megadására három konstrukciót mutatunk.

1. (Gáspár Attila megoldása alapján.) Legyen $l : Y \ni \sum_{j=1}^{d} c_j f_j \mapsto (c_1, \ldots, c_d) \in \mathbb{R}^d$ és $L = l \circ \Pi$. Ekkor $L : X \to \mathbb{R}^d$ folytonos szürjektív lineáris operátor, amelynek a magja V. Legyen $\xi \in \{\pm 1\}^d$ és

$$U_\xi = \{g \in X : \operatorname{sgn} L_i(g) = \xi_i, i = 1, \ldots, d\}.$$

Világos, hogy $U_\xi \neq \emptyset$ és nyílt. $\overline{P} = X$ alapján létezik $s_\xi \in P \cap U_\xi$. Feltehető $\|s_\xi\| \leq 1/2$. Az $r_k = q_k/\sqrt{\|q_k\|}$ polinomokra $\|r_k\| \to 0$ és $r_k'(0) \to \infty$, $k \to \infty$. Válasszuk k-t olyan nagyra, hogy $\|r_k\| \leq 1/2$, $r_k'(0) > 2023 - s_\xi'(0)$ és $r_k + + s_\xi \in U_\xi$ minden $\xi \in \{\pm 1\}^d$ esetén. Ekkor a $p_\xi = r_k + s_\xi \in U_\xi$ polinomra $\|p_\xi\| \leq 1$ és $p_\xi'(0) > 2023$, $\xi \in \{\pm 1\}^d$.

Tegyük fel, hogy az origó nincs benne az $L(p_\xi)$-k konvex burkában. Ekkor a Farkas-lemma szerint van olyan $v \in \mathbb{R}^d$, hogy $\sum_{i=1}^{d} v_i L_i(p_\xi) > 0$ minden ξ-re. Ez ellentmondás arra a ξ-re, amelyre $\xi_i = -\operatorname{sgn}(v_i)$, ha $v_i \neq 0$, a $v_i = 0$ esetben pedig ξ_i tetszőleges.

Így van olyan $a_\xi \geq 0$, hogy $\sum_\xi a_\xi = 1$ és $\sum_\xi a_\xi L(p_\xi) = 0$. A $p = \sum_\xi a_\xi p_\xi$ polinomra az L linearitása matt $L(p) = 0$, azaz $p \in V$, továbbá könnyen látható hogy $p'(0) > 2023$, $\|p\| \leq 1$.

2. (Zólomy Kristóf megoldása alapján.) A $h_k = q_k/\|q_k\|$ polinomokra $\|h_k\| = 1$, $k = 1,2,\ldots$, és $h_k'(0) \to \infty$ $(k \to \infty)$. A $\{\Pi h_1, \Pi h_2, \ldots\} \subset Y$ halmazból válasszunk egy maximálisan független részhalmazt úgy, hogy Πh_i-t akkor vesszük hozzá, ha nincs benne a kisebb indexű Πh_l-ek által kifeszített altérben. Legyenek ezek $\Pi h_{k_1}, \ldots, \Pi h_{k_m}$, $m \leq d$.

Ekkor minden $k > k_m$-re

$$\sum_{j=1}^{m} c_j \Pi h_{k_j} + c_k \Pi h_k = 0$$

valamely $c_1, \ldots, c_m, c_k \in \mathbb{R}$ esetén, ahol feltehető $c_k > 0$ és $\sum_{j=1}^{m} |c_j| + c_k = 1$.

Az $(a_1,\dots,a_m)\mapsto \|\sum_{j=1}^m a_j\Pi h_{k_j}\|$ folytonos függvény a kompakt $\{(a_1,\dots,a_m)\in$ $\in\mathbb{R}^m : 1/2\le\sum_{i=j}^m |a_j|\le 1\}$ halmazon felveszi az α minimumát, ami pozitív, mert $\Pi h_{k_1},\dots,\Pi h_{k_m}$ függetlenek.

Nyilván $\|\Pi h_k\|\le\|\Pi\|\|h_k\|=\|\Pi\|$. Ha $\Pi h_k=0$, akkor $c_k=1$ választható. Ha $c_k<1/2$, akkor $\sum_{i=j}^m |c_j|\ge 1/2$ és

$$c_k=\frac{\|\sum_{j=1}^m c_j\Pi h_{k_j}\|}{\|\Pi h_k\|}\ge\frac{\alpha}{\|\Pi\|}.$$

Tehát $k>k_m$ esetén $c_k\ge c=\min\{1/2,\alpha/\|\Pi|\}>0$.

Minden $k>k_m$-re legyen $p_k=\sum_{j=1}^m c_jh_{k_j}+c_kh_k\in P$. Ekkor a $c_1,\dots,c_m,c_k$ váaksztása és Π linearitása miatt $\Pi p_k=0$, és így $p_k=(\mathrm{id}-\Pi)p_k\in V\cap P$. Továbbá $\|p_k\|\le\sum_{j=1}^m|c_j|+c_k=1$ és

$$p_k'(0)\ge ch_k'(0)-\sum_{j=1}^m|h_{k_j}'(0)|\to\infty\quad(i\to\infty)$$

teljesül. Tehát elég nagy k-ra p_k teljesíti a feltételeket.

3. $\Pi(X)=\Pi(\overline{P})$, mert $\overline{P}=X$. $\Pi(\overline{P})\subset\overline{\Pi(P)}$, mert Π folytonos. Mivel $\Pi(P)\subset Y$, Y véges dimenziós, ezért $\overline{\Pi(P)}=\Pi(P)$. Így $\Pi(X)=\Pi(\overline{P})\subset$ $\subset\overline{\Pi(P)}=\Pi(P)\subset\Pi(X)$. Innen $\Pi(P)=\Pi(X)$ következik, és létezik $p_j\in$ $\in P$ úgy, hogy $\Pi(p_j)=f_j$, azaz $p_j-f_j\in V$ és $\kappa(p_j)=\kappa(f_j)=e_j$, $j=$ $=1,\dots,d$. Tehát $f_1,\dots,f_d$ helyett vehetjük a $p_1,\dots,p_d$ polinomokat a V egy komplementer alterének a megadásához, azaz feltehető, hogy $Y\subset P$.

Mivel $q_k\in P$, $\Pi q_k\in Y\subset P$, ezért $(\mathrm{id}-\Pi)q_k\in V\cap P$, továbbá

$$((\mathrm{id}-\Pi)q_k)'(0)=q_k'(0)-(\Pi q_k)'(0)=1-(\Pi q_k)'(0).$$

A véges dimenziós $Y\subset P$ altéren bármely két norma ekvivalens, tehát van $c>0$ úgy, hogy minden k indexre $|(\Pi q_k)'(0)|\le\|(\Pi q_k)'\|+\|\Pi q_k\|\le c\|\Pi q_k\|\le$ $\le c\|\Pi\|\|q_k\|$. Mivel $\|q_k\|\to 0$, $k\to\infty$, kapjuk, hogy $((\mathrm{id}-\Pi)q_k)'(0)\to 1$, $k\to\infty$. Nyilván $\|(\mathrm{id}-\Pi)q_k\|\le(1+\|\Pi\|)\|q_k\|\to 0$, $k\to\infty$. Tehát elég nagy k-ra a

$$p_k=\frac{(\mathrm{id}-\Pi)q_k}{\|(\mathrm{id}-\Pi)q_k\|}$$

polinom V-beli, $\|p_k\|=1$ és $p_k'(0)>2023$.

Érkezett 7 dolgozat. Helyesen oldotta meg Gáspár Attila, Kocsis Anett és Zólomy Kristóf.

10. feladat. *Legyen $n\ge 2$ adott természetes szám. Mutassuk meg, hogy nem létezik olyan c valós szám, amelyre*

$$\exp\left(\frac{T+S}{2}\right)\le c\frac{\exp(T)+\exp(S)}{2}$$

teljesül minden T, S önadjungált $n \times n$-es komplex mátrixra.

(Ha A, B önadjungált $n\times n$-es komplex mátrixok, akkor $A \leq B$ azt jelenti, hogy a $B - A$ mátrix pozitív szemidefinit.)

Gáspár Attila megoldása: Rögzítsünk egy pozitív valós x-et. Legyen

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Az S diagonális, ezért

$$\exp(S) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

emiatt $v^{\mathsf{t}} \exp(S) v = 1$. Ebből adódik, hogy a

$$v^{\mathsf{t}} c \frac{\exp(T) + \exp(S)}{2} v$$

nem függ x-től. Így elég azt megmutatni, hogy az x-et jól megválasztva a

$$v^{\mathsf{t}} \exp\left(\frac{T+S}{2}\right) v$$

tetszőlegesen nagy lehet. Mivel az exp hatványsora nemnegatív együtthatós, valamint S, T és v elemei is nemnegatívak, a fenti kifejezést alulról becsülhetjük az egyik taggal:

$$v^{\mathsf{t}} \exp\left(\frac{T+S}{2}\right) v \geq v^{\mathsf{t}} \frac{1}{6} \left(\frac{T+S}{2}\right)^3 v \geq \frac{1}{48} v^{\mathsf{t}} TSTv =$$

$$= \frac{1}{48} v^{\mathsf{t}} TS \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{48} v^{\mathsf{t}} T \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{48} v^{\mathsf{t}} \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{x}{48},$$

ez valóban tetszőlegesen nagy lehet.

Érkezett 5 dolgozat. Helyesen oldotta meg Gáspár Attila.

11. feladat. *Legyen K egy egységnyi területű szabályos háromszög, és válasszunk n független véletlen pontot egyenletesen K-ból. Jelölje K_n a K összes olyan eltoltjának metszetét, amely tartalmazza a választott pontokat. Mennyi K_n területének a várható értéke?*

Megoldás (Kökényesi Márk dolgozata alapján).

Jelölje a, b, c a háromszög oldalait, és legyen m_a, m_b, m_c a megfelelő oldalnak és a hozzá legközelebb eső véletlen pontnak a távolsága. Az eredeti háromszög magassága $m_0 = 3^{1/4}$. A kérdéses K_n sokszögek metszete, ezért maga is sokszög. Oldairányai pedig csak K oldalirányai közül kerülhetnek ki, ezért K_n is egy szabályos háromszög, amelynek magassága $m_0 - (m_a + m_b + m_c)$, így területe

$$T_n = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(m_0 - (m_a + m_b + m_c)\right)^2.$$

Világos, hogy $m_a > x$ pontosan akkor teljesül, ha minden választott pont egy $m_0 - x$ magasságú szabályos háromszögbe esik, ezért a választott véletlen pontok függetlensége miatt

$$\mathbf{P}(m_a > x) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(m_0 - x)^2\right)^n, \quad x \in [0, m_0].$$

Ugyanígy, $m_a > x$ és $m_b > y$ pontosan akkor teljesül egyszerre, ha minden választott pont egy $m_0 - x - y$ magasságú szabályos háromszögbe esik, ezért

$$\mathbf{P}(m_a > x, m_b > y) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(m_0 - x - y)^2\right)^n, \quad x, y \geq 0, x + y \leq m_0.$$

Ezekből deriválással adódik az m_a, ill. (m_a, m_b) változók sűrűségfüggvénye

$$f(x) = 3^{-n/2} 2n(m_0 - x)^{2n-1}, \quad x \in [0, m_0],$$
$$f(x, y) = 3^{-n/2} 2n(2n - 1)(m_0 - x - y)^{2n-2}, \quad x, y \geq 0, x + y \leq m_0.$$

A következő várható értékeket rutin számolással kaphatjuk:

$$\mathbf{E}(m_a) = \int_0^{m_0} x f(x) \mathrm{d}x = \frac{m_0}{2n+1},$$
$$\mathbf{E}(m_a^2) = \int_0^{m_0} x^2 f(x) \mathrm{d}x = 2nm_0^2 \left(\frac{1}{2n} - \frac{2}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}\right),$$
$$\mathbf{E}(m_a m_b) = \int_0^{m_0} \left(\int_0^{m_0 - x} xy f(x, y) \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x = \frac{m_0^2}{(2n+1)(2n+2)}.$$

Végül a változók szimmetriája miatt

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(T_n) &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(m_0^2 + 3\mathbf{E}(m_a^2) + 6\mathbf{E}(m_a m_b) - 6m_0\mathbf{E}(m_a)\right) \\
&= 1 - \frac{6}{n+1} + \frac{6}{2n+1}.
\end{aligned}$$

Ezt akartuk kiszámolni.

Megjegyzés: a fentiekhez hasonló ötletekkel kiszámítható az is, hogy $nT(K \setminus K_n)$ határeloszlása (3,2) paraméterű gamma eloszlás.

Érkezett 11 dolgozat. Helyesen oldotta meg Füredi Erik, Gáspár Attila, Imolay András, Kocsis Anett, Kökényesi Márk és Zólomy Kristóf, továbbá lényegében jó Kalocsai Zoltán megoldása. Sztranyák Gabriella helyes eredményre jut, de gondolatmenete túlságosan szemléletre alapoz.