

Tudnivalók az írásbeli vizsgáról

Az alábbi hét témakörből négy fog szerepelni a dolgozatban:

1. természetes számok (Peano-féle felépítés);
2. egész számok;
3. racionális számok;
4. valós számok (Dedekind-féle felépítés);
5. komplex számok, Study-féle számok, hiperbolikus komplex számok, kvaterniók;
6. részbenrendezett, illetve lineárisan rendezett (fél)csoportok, (fél)gyűrűk és testek;
7. infinitezimális és végtelen elemek, arkhimédeszi tulajdonság és teljesség lineárisan rendezett testekben.

Mind a négy feladat két részből áll:

- (a) néhány definíció, illetve tétel kimondása;
- (b) vagy egy rövid bizonyítás, vagy pedig egy számolás és/vagy gondolkodtató feladat.

(A hosszabb, nehezebb bizonyításokat csak a szóbeli vizsgán kérem.)

Minden részfeladat 5 pontot ér, tehát összesen 40 pontot lehet szerezni. A ponthatárok a következők:

0 – 19:	elégtelen
20 – 24:	elégséges
25 – 29:	közepes
30 – 34:	jó
35 – 40:	jeles

A következő négy oldalon egy mintafeladatsor található.

1	2	3	4	Σ

Név:

Tudnivalók: A választ minden esetben indokolni kell; indoklás nélkül, illetve próbálgatással talált megoldásért nem jár pont. Mindig az összes megoldást keressük (hacsak a feladat mást nem mond), és meg kell mutatni, hogy miért nincs más megoldás a talált megoldásokon kívül. Semmilyen segédeszköz nem használható, még függvénytáblázat, számológép, mobiltelefon sem. Ezek használata, valamint a puskázás (lésés, sugás, stb.) automatikusan 0 összpontszámot eredményez, javítási lehetőség nélkül.

1(a) feladat (5 pont): Definálja a természetes számokat és a rajtuk értelmezett összeadás és szorzás műveletét.

1(b) feladat (5 pont): Bizonyítsa be, hogy a természetes számok összeadása asszociatív. (Csak az 1(a) feladatban megadott axiómákat szabad használni, és minden lépésnél jelezni kell, hogy éppen mit használunk.)

2(a) feladat (5 pont): Definiálja a racionális számokat és a rajtuk értelmezett összeadás és szorzás műveletét.

2(b) feladat (5 pont): Bizonyítsa be, hogy a racionális számok körében a szorzás disztributív az összeadásra.

3(a) feladat (5 pont): Definiálja a Study-féle számokat és a rajtuk értelmezett összeadás és szorzás műveletét.

3(b) feladat (5 pont): Melyek azok a Study-féle számok, amelyeknek van multiplikatív inverze?

4(a) feladat (5 pont): Definiálja rendezett testben a (pozitív) infinitezimális elem és a végtelen nagy elem fogalmát. Mikor nevezünk egy rendezett testet arkhimédészinek?

4(b) feladat (5 pont): Legyen ε egy pozitív infinitezimális elem. Állítsa nagyság szerinti sorrendbe az alábbi a, b, c elemeket. Indokolja is a választ!

$$a = \frac{1 + 2\varepsilon}{\varepsilon + 3\varepsilon^2}, \quad b = 3 - 100\varepsilon, \quad c = 2 + 100\varepsilon + 2018\varepsilon^2$$