$\mathbb{N}_0 \qquad 0\in\mathbb{N}_0 \qquad \sigma:\mathbb{N}_0\to\mathbb{N}_0,\ n\mapsto\sigma(n)=n'$

PEANO-AXIÓMÁK

(0) $\nexists n\in\mathbb{N}_0:\ n'=0$

(INJ) $\forall m,n\in\mathbb{N}_0:\ m\neq n \Rightarrow m'\neq n'$

(TI) $\forall U\subseteq\mathbb{N}_0:\ (0\in U \wedge \forall n\in U: n'\in U)\Rightarrow U=\mathbb{N}_0$

<u>ÁLL.</u> $R_\sigma=\mathbb{N}_0\setminus\{0\}=\mathbb{N}$.

<u>Biz.</u> $U=R_\sigma\cup\{0\}\underset{(TI)}{=}\mathbb{N}_0 \underset{(0)}{\Longrightarrow} R_\sigma=\mathbb{N}$. $\square$

<u>DEF</u> (+0) $a+0=a$

(+1) $a+b'=(a+b)'$

$\left[\begin{array}{l}\text{rögz. } a\\ U=\{b \mid a+b \text{ def.}\}=\mathbb{N}_0\end{array}\right]$

<u>JELÖLÉS:</u> $0'=1,\ 1'=2,\ 2'=3,\ 3'=4,\ \dots$

<u>PÉLDA</u> $2+2=2+1'\underset{(+1)}{=}(2+1)'=(2+0')'\underset{(+1)}{=}(2+0)''\underset{(+0)}{=}2''=3'=4$

<u>ÁLL</u> $n'=n+1$

<u>Biz</u> $n+1=n+0'\underset{\uparrow}{=}(n+0)'\underset{\uparrow}{=}n'$. $\square$

<u>ÁLL</u> $n'=1+n$

<u>Biz.</u> HF. $U:=\{n \mid n'=1+n\}\underset{(TI)}{=}\mathbb{N}_0$ $\square$

ÁLL $(a+b)+c = a+(b+c)$

Biz. Telj. ind. Rögz. a, b. $U := \{c \mid (a+b)+c = a+(b+c)\}$

Kezdőlépés $0 \overset{?\checkmark}{\in} U$

$$(a+b)+0 = a+b$$
$$a+(\underbrace{b+0}_{b}) = a+b$$

Indukciós lépés $\underbrace{c \in U}_{} \overset{?\checkmark}{\Longrightarrow} c' \in U$

$$(IH): (a+b)+c = a+(b+c)$$

$$(a+b)+c' = ((a+b)+c)' =$$
$$\overset{(IH)}{=} (a+(\underbrace{b+c}_{}))' = a+(b+c)' = a+(b+c')$$

$\overset{(TI)}{\Longrightarrow} U = \mathbb{N}_0$ $\square$

ÁLL $a+0 \overset{\checkmark}{=} a \overset{?}{=} 0+a$

Biz. $U := \{a \mid 0+a = a\}$

Kezdőlépés: $0 \overset{?\checkmark}{\in} U$

$$0+0 = 0$$

Indukciós lépés: $\underbrace{a \in U}_{} \overset{\checkmark}{\Longrightarrow} a' \in U$

$$(IH): 0+a = a$$

$$0+a' = (0+a)' \underset{(IH)}{=} a'$$

$\overset{(TI)}{\Longrightarrow} U = \mathbb{N}_0$ $\square$

ÁLL. $a+b=b+a$

Biz.: Telj. ind. b szerint.

Kezdőlépés: $b=0$

$$a+0=0+a$$

Ind. lép.: Tfh. $a+b=b+a$ (IH)

Cél: $a+b'=b'+a$

$$a+b'=a+(b+1)=(a+b)+1=$$

$$\overset{(IH)}{=}(\underbrace{b+a}_{n})+1=1+(\underbrace{b+a}_{n})=(1+b)+a=b'+a$$

$\square$

DEF. $(\cdot 0)$ $a\cdot 0=0$

$(\cdot 1)$ $a\cdot b'=a\cdot b+a$

HF: $2\cdot 2=4$ (elég $2\cdot 2=2+2$)

ÁLL. $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$

Biz. Telj. ind. c szerint.

Kezdőlépés: $c=0$

$$(a+b)\cdot 0\overset{(\cdot 0)}{=}0$$

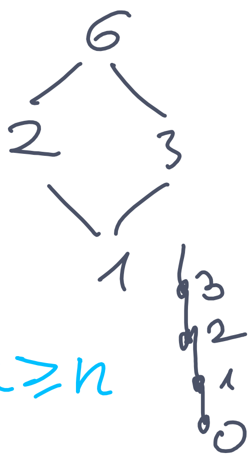
$$a\cdot 0+b\cdot 0\overset{(\cdot 0)}{=}0+0\overset{(+0)}{=}0$$

Indukciós lépés: Tfh. $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$

$$(a+b)\cdot c' \overset{(\cdot 1)}{=} (a+b)\cdot c + (a+b) =$$

$$\overset{(IH)}{=} a\cdot c + b\cdot c + a + b = \underbrace{a\cdot c + a} + \underbrace{b\cdot c + b}$$

$$\overset{(\cdot 1)}{=} a\cdot c' + b\cdot c' \qquad \square$$



DEF: $a \le b \iff \exists x \in \mathbb{N}_0 : b = a + x$

$a < b \iff \exists x \in \mathbb{N} : b = a + x$

ÁLL. $\le$ teljes rendezés

Biz. reflexív, tranzitív, antiszimmetrikus

dichotómia: $\forall a, n \in \mathbb{N}_0 : a \le n \lor a \ge n$

rögz. n.

$$U := \{a \mid a \le n \lor a \ge n\} \overset{?}{=} \mathbb{N}_0$$

$$= \{a \mid a < n \lor a \ge n\}$$

Kezdőlépés: $0 \overset{?}{\in} U$ ✓

$$n = 0 + \underset{x}{n} \Rightarrow 0 \le n$$

Indukciós lépés: Tfh. $a \in U$: $a < n$ (1) v. $a \ge n$ (2)

Cél: $a' \in U$

(1) $a < n \Rightarrow \exists x \in \mathbb{N} : n = a + x$

$R_\sigma = \mathbb{N} \ni x \Rightarrow \exists y \in \mathbb{N}_0 : x = y'$

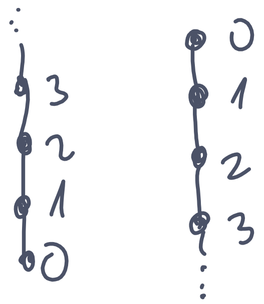
$$n = a + x = a + y' = a + y + 1 = \underbrace{a+1}_{a'} + y = a' + y$$

$\Rightarrow n \geq a' \Rightarrow a' \in U$ ✓

(2) $a \geq n \Rightarrow \exists x \in \mathbb{N}_0 : a = n + x$

$a' = (n+x)' = n + x' \Rightarrow a' \geq n$

$\Rightarrow a' \in U$ ✓ $\square$



Tfl. $\sqsubseteq$ lin. ured. kon p. t-sal

1) $0 \sqsubseteq 1 \xRightarrow{+1} 1 \sqsubseteq 2 \xRightarrow{+1} 2 \sqsubseteq 3 \Rightarrow \dots \Rightarrow$ 

2) $0 \sqsupseteq 1 \xRightarrow{+1} 1 \sqsupseteq 2 \xRightarrow{+1} 2 \sqsupseteq 3 \Rightarrow \dots \Rightarrow$