

GALOIS-KAPCSOLATOK

Waldhauser Tamás

SZTE Bolyai Intézet

Eötvös Kollégium, Matematika Műhely

2022. október 12.

Van fogalmad?

fogalom = tartalom + terjedelem

Van fogalmad?

fogalom = tartalom + terjedelem

- tartalom: a fogalmat meghatározó tulajdonságok
- terjedelem: a fogalomhoz tartozó „dolgok”

Van fogalmad?

fogalom = tartalom + terjedelem

- tartalom: a fogalmat meghatározó tulajdonságok
- terjedelem: a fogalomhoz tartozó „dolgok”

Példa

A **macska** fogalma:

Van fogalmad?

fogalom = tartalom + terjedelem

- tartalom: a fogalmat meghatározó tulajdonságok
- terjedelem: a fogalomhoz tartozó „dolgok”

Példa

A **macska** fogalma:

- tartalom: állat, emlős, négylábú, szőrös, nyávog, dorombol, cuki, ...

Van fogalmad?

fogalom = tartalom + terjedelem

- tartalom: a fogalmat meghatározó tulajdonságok
- terjedelem: a fogalomhoz tartozó „dolgok”

Példa

A **macska** fogalma:

- tartalom: állat, emlős, négy lábú, szőrös, nyávog, dorombol, cuki, ...
- terjedelem:

Van fogalmad?

fogalom = tartalom + terjedelem

- tartalom: a fogalmat meghatározó tulajdonságok
- terjedelem: a fogalomhoz tartozó „dolgok”

Példa

A **macska** fogalma:

- tartalom: állat, emlős, négy lábú, szőrös, nyávog, dorombol, cuki, ...
- terjedelem:



Matematikai modell

Kontextus:

1. objektumok egy G halmaza (németül Gegenstand)
2. tulajdonságok egy M halmaza (németül Merkmal)
3. minden $g \in G$ és $m \in M$ esetén meg van határozva, hogy g rendelkezik-e az m tulajdonsággal

Matematikai modell

Kontextus:

1. objektumok egy G halmazba (németül Gegenstand)
2. tulajdonságok egy M halmazba (németül Merkmal)
3. minden $g \in G$ és $m \in M$ esetén meg van határozva, hogy g rendelkezik-e az m tulajdonsággal

Példa

$$G = \{T, K, Ny\}, \quad M = \{f, d, g, h, l\}$$

	f	d	g	h	l
T		×		×	
K	×	×	×	×	
Ny	×			×	

Galois-kapcsolat: objektumok $\longleftrightarrow$ tulajdonságok

- objektumok egy X halmaza $\rightsquigarrow$ közös tulajdonságok X' halmaza
- tulajdonságok egy Y halmaza $\rightsquigarrow$ a megfelelő objektumok Y' halmaza

Galois-kapcsolat: objektumok $\rightsquigarrow$ tulajdonságok

- objektumok egy X halmaza $\rightsquigarrow$ közös tulajdonságok X' halmaza
- tulajdonságok egy Y halmaza $\rightsquigarrow$ a megfelelő objektumok Y' halmaza

Példa

	f	d	g	h	l
T		×		×	
K	×	×	×	×	
Ny	×			×	

Galois-kapcsolat: objektumok $\leftrightarrow$ tulajdonságok

- objektumok egy X halmaza $\rightsquigarrow$ közös tulajdonságok X' halmaza
- tulajdonságok egy Y halmaza $\rightsquigarrow$ a megfelelő objektumok Y' halmaza

Példa

	f	d	g	h	l
T		×		×	
K	×	×	×	×	
Ny	×			×	

H

Galois-kapcsolat: objektumok $\rightsquigarrow$ tulajdonságok

- objektumok egy X halmaza $\rightsquigarrow$ közös tulajdonságok X' halmaza
- tulajdonságok egy Y halmaza $\rightsquigarrow$ a megfelelő objektumok Y' halmaza

Példa

	f	d	g	h	l
T		×		×	
K	×	×	×	×	
Ny	×			×	

$$H \rightsquigarrow H'$$

Galois-kapcsolat: objektumok $\longleftrightarrow$ tulajdonságok

- objektumok egy X halmaza $\rightsquigarrow$ közös tulajdonságok X' halmaza
- tulajdonságok egy Y halmaza $\rightsquigarrow$ a megfelelő objektumok Y' halmaza

Példa

	f	d	g	h	l
T		×		×	
K	×	×	×	×	
Ny	×			×	

$$H \rightsquigarrow H' \rightsquigarrow H''$$

Galois-kapcsolat: objektumok $\longleftrightarrow$ tulajdonságok

- objektumok egy X halmaza $\rightsquigarrow$ közös tulajdonságok X' halmaza
- tulajdonságok egy Y halmaza $\rightsquigarrow$ a megfelelő objektumok Y' halmaza

Példa

	f	d	g	h	l
T		×		×	
K	×	×	×	×	
Ny	×			×	

$$H \rightsquigarrow H' \rightsquigarrow H'' \rightsquigarrow H''' \rightsquigarrow \dots$$

Galois-kapcsolat: objektumok $\rightsquigarrow$ tulajdonságok

- objektumok egy X halmaza $\rightsquigarrow$ közös tulajdonságok X' halmaza
- tulajdonságok egy Y halmaza $\rightsquigarrow$ a megfelelő objektumok Y' halmaza

Példa

	f	d	g	h	l
T		×		×	
K	×	×	×	×	
Ny	×			×	

$$\begin{array}{ccccccc} H & \rightsquigarrow & H' & \rightsquigarrow & H'' & \rightsquigarrow & H''' & \rightsquigarrow & \dots \\ \hline \{T\} & & & & & & & & \end{array}$$

Galois-kapcsolat: objektumok $\rightsquigarrow$ tulajdonságok

- objektumok egy X halmaza $\rightsquigarrow$ közös tulajdonságok X' halmaza
- tulajdonságok egy Y halmaza $\rightsquigarrow$ a megfelelő objektumok Y' halmaza

Példa

	f	d	g	h	l
T		×		×	
K	×	×	×	×	
Ny	×			×	

$$\begin{array}{ccccccc} H & \rightsquigarrow & H' & \rightsquigarrow & H'' & \rightsquigarrow & H''' & \rightsquigarrow & \dots \\ \hline \{T\} & \rightsquigarrow & \{d, h\} & & & & & & \end{array}$$

Galois-kapcsolat: objektumok $\rightsquigarrow$ tulajdonságok

- objektumok egy X halmaza $\rightsquigarrow$ közös tulajdonságok X' halmaza
- tulajdonságok egy Y halmaza $\rightsquigarrow$ a megfelelő objektumok Y' halmaza

Példa

	f	d	g	h	l
T		×		×	
K	×	×	×	×	
Ny	×			×	

$$\begin{array}{ccccccc} H & \rightsquigarrow & H' & \rightsquigarrow & H'' & \rightsquigarrow & H''' & \rightsquigarrow & \dots \\ \hline \{T\} & \rightsquigarrow & \{d, h\} & \rightsquigarrow & \{T, K\} & & & & \end{array}$$

Galois-kapcsolat: objektumok $\rightsquigarrow$ tulajdonságok

- objektumok egy X halmaza $\rightsquigarrow$ közös tulajdonságok X' halmaza
- tulajdonságok egy Y halmaza $\rightsquigarrow$ a megfelelő objektumok Y' halmaza

Példa

	f	d	g	h	l
T		×		×	
K	×	×	×	×	
Ny	×			×	

H	$\rightsquigarrow$	H'	$\rightsquigarrow$	H''	$\rightsquigarrow$	H'''	$\rightsquigarrow$	$\dots$
$\{T\}$	$\rightsquigarrow$	$\{d, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{T, K\}$	$\rightsquigarrow$	$\{d, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\dots$

Galois-kapcsolat: objektumok $\rightsquigarrow$ tulajdonságok

- objektumok egy X halmaza $\rightsquigarrow$ közös tulajdonságok X' halmaza
- tulajdonságok egy Y halmaza $\rightsquigarrow$ a megfelelő objektumok Y' halmaza

Példa

	f	d	g	h	l
T		×		×	
K	×	×	×	×	
Ny	×			×	

H	$\rightsquigarrow$	H'	$\rightsquigarrow$	H''	$\rightsquigarrow$	H'''	$\rightsquigarrow$	$\dots$
$\{T\}$	$\rightsquigarrow$	$\{d, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{T, K\}$	$\rightsquigarrow$	$\{d, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\dots$
$\{K, Ny\}$								

Galois-kapcsolat: objektumok $\rightsquigarrow$ tulajdonságok

- objektumok egy X halmaza $\rightsquigarrow$ közös tulajdonságok X' halmaza
- tulajdonságok egy Y halmaza $\rightsquigarrow$ a megfelelő objektumok Y' halmaza

Példa

	f	d	g	h	l
T		×		×	
K	×	×	×	×	
Ny	×			×	

H	$\rightsquigarrow$	H'	$\rightsquigarrow$	H''	$\rightsquigarrow$	H'''	$\rightsquigarrow$	$\dots$
$\{T\}$	$\rightsquigarrow$	$\{d, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{T, K\}$	$\rightsquigarrow$	$\{d, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\dots$
$\{K, Ny\}$	$\rightsquigarrow$	$\{f, h\}$						

Galois-kapcsolat: objektumok $\rightsquigarrow$ tulajdonságok

- objektumok egy X halmaza $\rightsquigarrow$ közös tulajdonságok X' halmaza
- tulajdonságok egy Y halmaza $\rightsquigarrow$ a megfelelő objektumok Y' halmaza

Példa

	f	d	g	h	l
T		×		×	
K	×	×	×	×	
Ny	×			×	

H	$\rightsquigarrow$	H'	$\rightsquigarrow$	H''	$\rightsquigarrow$	H'''	$\rightsquigarrow$	$\dots$
$\{T\}$	$\rightsquigarrow$	$\{d, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{T, K\}$	$\rightsquigarrow$	$\{d, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\dots$
$\{K, Ny\}$	$\rightsquigarrow$	$\{f, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{K, Ny\}$				

Galois-kapcsolat: objektumok $\rightsquigarrow$ tulajdonságok

- objektumok egy X halmaza $\rightsquigarrow$ közös tulajdonságok X' halmaza
- tulajdonságok egy Y halmaza $\rightsquigarrow$ a megfelelő objektumok Y' halmaza

Példa

	f	d	g	h	l
T		×		×	
K	×	×	×	×	
Ny	×			×	

H	$\rightsquigarrow$	H'	$\rightsquigarrow$	H''	$\rightsquigarrow$	H'''	$\rightsquigarrow$	$\dots$
$\{T\}$	$\rightsquigarrow$	$\{d, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{T, K\}$	$\rightsquigarrow$	$\{d, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\dots$
$\{K, Ny\}$	$\rightsquigarrow$	$\{f, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{K, Ny\}$	$\rightsquigarrow$	$\{f, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\dots$

Galois-kapcsolat: objektumok $\rightsquigarrow$ tulajdonságok

- objektumok egy X halmaza $\rightsquigarrow$ közös tulajdonságok X' halmaza
- tulajdonságok egy Y halmaza $\rightsquigarrow$ a megfelelő objektumok Y' halmaza

Példa

	f	d	g	h	l
T		×		×	
K	×	×	×	×	
Ny	×			×	

H	$\rightsquigarrow$	H'	$\rightsquigarrow$	H''	$\rightsquigarrow$	H'''	$\rightsquigarrow$	$\dots$
$\{T\}$	$\rightsquigarrow$	$\{d, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{T, K\}$	$\rightsquigarrow$	$\{d, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\dots$
$\{K, Ny\}$	$\rightsquigarrow$	$\{f, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{K, Ny\}$	$\rightsquigarrow$	$\{f, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\dots$
$\{f, d\}$								

Galois-kapcsolat: objektumok $\rightsquigarrow$ tulajdonságok

- objektumok egy X halmaza $\rightsquigarrow$ közös tulajdonságok X' halmaza
- tulajdonságok egy Y halmaza $\rightsquigarrow$ a megfelelő objektumok Y' halmaza

Példa

	f	d	g	h	l
T		×		×	
K	×	×	×	×	
Ny	×			×	

H	$\rightsquigarrow$	H'	$\rightsquigarrow$	H''	$\rightsquigarrow$	H'''	$\rightsquigarrow$	$\dots$
$\{T\}$	$\rightsquigarrow$	$\{d, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{T, K\}$	$\rightsquigarrow$	$\{d, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\dots$
$\{K, Ny\}$	$\rightsquigarrow$	$\{f, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{K, Ny\}$	$\rightsquigarrow$	$\{f, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\dots$
$\{f, d\}$	$\rightsquigarrow$	$\{K\}$						

Galois-kapcsolat: objektumok $\rightsquigarrow$ tulajdonságok

- objektumok egy X halmaza $\rightsquigarrow$ közös tulajdonságok X' halmaza
- tulajdonságok egy Y halmaza $\rightsquigarrow$ a megfelelő objektumok Y' halmaza

Példa

	f	d	g	h	l
T		×		×	
K	×	×	×	×	
Ny	×			×	

H	$\rightsquigarrow$	H'	$\rightsquigarrow$	H''	$\rightsquigarrow$	H'''	$\rightsquigarrow$	$\dots$
$\{T\}$	$\rightsquigarrow$	$\{d, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{T, K\}$	$\rightsquigarrow$	$\{d, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\dots$
$\{K, Ny\}$	$\rightsquigarrow$	$\{f, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{K, Ny\}$	$\rightsquigarrow$	$\{f, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\dots$
$\{f, d\}$	$\rightsquigarrow$	$\{K\}$	$\rightsquigarrow$	$\{f, d, g, h\}$				

Galois-kapcsolat: objektumok $\rightsquigarrow$ tulajdonságok

- objektumok egy X halmaza $\rightsquigarrow$ közös tulajdonságok X' halmaza
- tulajdonságok egy Y halmaza $\rightsquigarrow$ a megfelelő objektumok Y' halmaza

Példa

	f	d	g	h	l
T		×		×	
K	×	×	×	×	
Ny	×			×	

H	$\rightsquigarrow$	H'	$\rightsquigarrow$	H''	$\rightsquigarrow$	H'''	$\rightsquigarrow$	$\dots$
$\{T\}$	$\rightsquigarrow$	$\{d, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{T, K\}$	$\rightsquigarrow$	$\{d, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\dots$
$\{K, Ny\}$	$\rightsquigarrow$	$\{f, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{K, Ny\}$	$\rightsquigarrow$	$\{f, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\dots$
$\{f, d\}$	$\rightsquigarrow$	$\{K\}$	$\rightsquigarrow$	$\{f, d, g, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{K\}$	$\rightsquigarrow$	$\dots$

Galois-kapcsolat: objektumok $\rightsquigarrow$ tulajdonságok

- objektumok egy X halmaza $\rightsquigarrow$ közös tulajdonságok X' halmaza
- tulajdonságok egy Y halmaza $\rightsquigarrow$ a megfelelő objektumok Y' halmaza

Példa

	f	d	g	h	l
T		×		×	
K	×	×	×	×	
Ny	×			×	

H	$\rightsquigarrow$	H'	$\rightsquigarrow$	H''	$\rightsquigarrow$	H'''	$\rightsquigarrow$	$\dots$
$\{T\}$	$\rightsquigarrow$	$\{d, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{T, K\}$	$\rightsquigarrow$	$\{d, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\dots$
$\{K, Ny\}$	$\rightsquigarrow$	$\{f, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{K, Ny\}$	$\rightsquigarrow$	$\{f, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\dots$
$\{f, d\}$	$\rightsquigarrow$	$\{K\}$	$\rightsquigarrow$	$\{f, d, g, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{K\}$	$\rightsquigarrow$	$\dots$
$\{d, h\}$								

Galois-kapcsolat: objektumok $\rightsquigarrow$ tulajdonságok

- objektumok egy X halmaza $\rightsquigarrow$ közös tulajdonságok X' halmaza
- tulajdonságok egy Y halmaza $\rightsquigarrow$ a megfelelő objektumok Y' halmaza

Példa

	f	d	g	h	l
T		×		×	
K	×	×	×	×	
Ny	×			×	

H	$\rightsquigarrow$	H'	$\rightsquigarrow$	H''	$\rightsquigarrow$	H'''	$\rightsquigarrow$	...
$\{T\}$	$\rightsquigarrow$	$\{d, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{T, K\}$	$\rightsquigarrow$	$\{d, h\}$	$\rightsquigarrow$	...
$\{K, Ny\}$	$\rightsquigarrow$	$\{f, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{K, Ny\}$	$\rightsquigarrow$	$\{f, h\}$	$\rightsquigarrow$	...
$\{f, d\}$	$\rightsquigarrow$	$\{K\}$	$\rightsquigarrow$	$\{f, d, g, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{K\}$	$\rightsquigarrow$	...
$\{d, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{T, K\}$						

Galois-kapcsolat: objektumok $\rightsquigarrow$ tulajdonságok

- objektumok egy X halmaza $\rightsquigarrow$ közös tulajdonságok X' halmaza
- tulajdonságok egy Y halmaza $\rightsquigarrow$ a megfelelő objektumok Y' halmaza

Példa

	f	d	g	h	l
T		×		×	
K	×	×	×	×	
Ny	×			×	

H	$\rightsquigarrow$	H'	$\rightsquigarrow$	H''	$\rightsquigarrow$	H'''	$\rightsquigarrow$	...
$\{T\}$	$\rightsquigarrow$	$\{d, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{T, K\}$	$\rightsquigarrow$	$\{d, h\}$	$\rightsquigarrow$	...
$\{K, Ny\}$	$\rightsquigarrow$	$\{f, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{K, Ny\}$	$\rightsquigarrow$	$\{f, h\}$	$\rightsquigarrow$	...
$\{f, d\}$	$\rightsquigarrow$	$\{K\}$	$\rightsquigarrow$	$\{f, d, g, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{K\}$	$\rightsquigarrow$	...
$\{d, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{T, K\}$	$\rightsquigarrow$	$\{d, h\}$				

Galois-kapcsolat: objektumok $\rightsquigarrow$ tulajdonságok

- objektumok egy X halmaza $\rightsquigarrow$ közös tulajdonságok X' halmaza
- tulajdonságok egy Y halmaza $\rightsquigarrow$ a megfelelő objektumok Y' halmaza

Példa

	f	d	g	h	l
T		×		×	
K	×	×	×	×	
Ny	×			×	

H	$\rightsquigarrow$	H'	$\rightsquigarrow$	H''	$\rightsquigarrow$	H'''	$\rightsquigarrow$	...
$\{T\}$	$\rightsquigarrow$	$\{d, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{T, K\}$	$\rightsquigarrow$	$\{d, h\}$	$\rightsquigarrow$	...
$\{K, Ny\}$	$\rightsquigarrow$	$\{f, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{K, Ny\}$	$\rightsquigarrow$	$\{f, h\}$	$\rightsquigarrow$	...
$\{f, d\}$	$\rightsquigarrow$	$\{K\}$	$\rightsquigarrow$	$\{f, d, g, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{K\}$	$\rightsquigarrow$	...
$\{d, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{T, K\}$	$\rightsquigarrow$	$\{d, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{T, K\}$	$\rightsquigarrow$	...

Galois-kapcsolat: objektumok $\rightsquigarrow$ tulajdonságok

- objektumok egy X halmaza $\rightsquigarrow$ közös tulajdonságok X' halmaza
- tulajdonságok egy Y halmaza $\rightsquigarrow$ a megfelelő objektumok Y' halmaza

Példa

	f	d	g	h	l
T		×		×	
K	×	×	×	×	
Ny	×			×	

H	$\rightsquigarrow$	H'	$\rightsquigarrow$	H''	$\rightsquigarrow$	H'''	$\rightsquigarrow$	...
$\{T\}$	$\rightsquigarrow$	$\{d, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{T, K\}$	$\rightsquigarrow$	$\{d, h\}$	$\rightsquigarrow$	...
$\{K, Ny\}$	$\rightsquigarrow$	$\{f, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{K, Ny\}$	$\rightsquigarrow$	$\{f, h\}$	$\rightsquigarrow$	...
$\{f, d\}$	$\rightsquigarrow$	$\{K\}$	$\rightsquigarrow$	$\{f, d, g, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{K\}$	$\rightsquigarrow$	...
$\{d, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{T, K\}$	$\rightsquigarrow$	$\{d, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{T, K\}$	$\rightsquigarrow$	...

A fogalom fogalma

fogalom = (X, Y)

A fogalom fogalma

fogalom = (X, Y)

- X : terjedelem (objektumok)
- Y : tartalom (tulajdonságok)
- $X' = Y$ és $Y' = X$

A fogalom fogalma

fogalom = (X, Y)

- X : terjedelem (objektumok)
- Y : tartalom (tulajdonságok)
- $X' = Y$ és $Y' = X$

Ha (X, Y) fogalom, akkor X és Y **Galois-zárt** halmazok:

$$X'' = X \text{ és } Y'' = Y.$$

A fogalom fogalma

fogalom = (X, Y)

- X : terjedelem (objektumok)
- Y : tartalom (tulajdonságok)
- $X' = Y$ és $Y' = X$

Ha (X, Y) fogalom, akkor X és Y **Galois-zárt** halmazok:

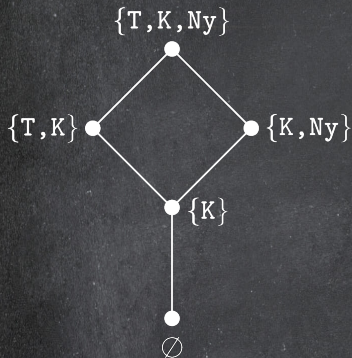
$$X'' = X \text{ és } Y'' = Y.$$

Példa

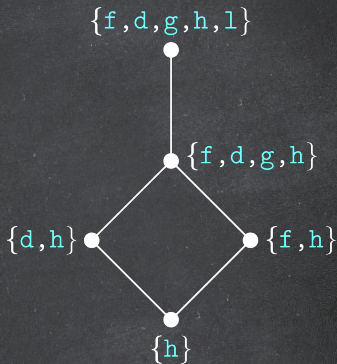
A mi kis példánkban mindössze 5 fogalom van:

1. $(\{\emptyset\}, \{f, d, g, h, l\})$
2. $(\{K\}, \{f, d, g, h\})$
3. $(\{T, K\}, \{d, h\})$
4. $(\{K, Ny\}, \{f, h\})$
5. $(\{T, K, Ny\}, \{h\})$

A zárt halmazok hálói

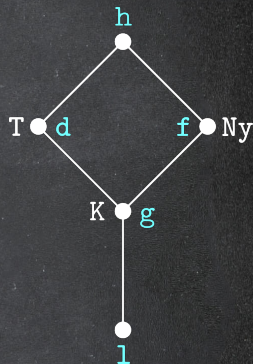
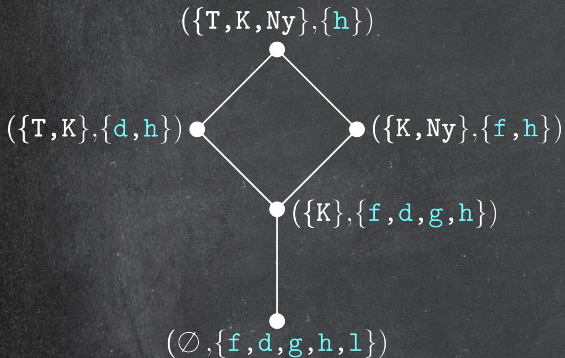


zárt objektumhalmazok



zárt tulajdonsághalmazok

Fogalomháló



Lámpakapcsolgatás

	ki	be
nem nyomom	ki	be
megnyomom	be	ki

Lámpakapcsolgatás

	ki	be
nem nyomom	ki	be
megnyomom	be	ki

+	0	1
0	0	1
1	1	0

Lámpakapcsolgatás

	ki	be
nem nyomom	ki	be
megnyomom	be	ki

+	0	1
0	0	1
1	1	0

+	ps	ptl
ps	ps	ptl
ptl	ptl	ps

Lámpakapcsolgatás

	ki	be
nem nyomom	ki	be
megnyomom	be	ki

+	0	1
0	0	1
1	1	0

+	ps	ptl
ps	ps	ptl
ptl	ptl	ps

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
nyomkodás:	0	1	1	1	0	0	0

Lámpakapcsolgatás

	ki	be
nem nyomom	ki	be
megnyomom	be	ki

+	0	1
0	0	1
1	1	0

+	ps	ptl
ps	ps	ptl
ptl	ptl	ps

	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇
nyomkodás:	0	1	1	1	0	0	0
nyomkodás:	0	0	0	1	1	1	0

Lámpakapcsolgatás

	ki	be
nem nyomom	ki	be
megnyomom	be	ki

+	0	1
0	0	1
1	1	0

+	ps	ptl
ps	ps	ptl
ptl	ptl	ps

	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇
nyomkodás:	0	1	1	1	0	0	0
nyomkodás:	0	0	0	1	1	1	0
nyomkodás:	1	1	1	0	0	0	0

Lámpakapcsolgatás

	ki	be
nem nyomom	ki	be
megnyomom	be	ki

+	0	1
0	0	1
1	1	0

+	ps	ptl
ps	ps	ptl
ptl	ptl	ps

	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇
nyomkodás:	0	1	1	1	0	0	0
nyomkodás:	0	0	0	1	1	1	0
nyomkodás:	1	1	1	0	0	0	0
lámpák:	1	0	0	0	1	1	0

Lámpakapcsolgatás

	ki	be
nem nyomom	ki	be
megnyomom	be	ki

+	0	1
0	0	1
1	1	0

+	ps	ptl
ps	ps	ptl
ptl	ptl	ps

	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇
nyomkodás:	0	1	1	1	0	0	0
nyomkodás:	0	0	0	1	1	1	0
nyomkodás:	1	1	1	0	0	0	0
lámpák:	1	0	0	0	1	1	0

Lámpakapcsolgatás

	ki	be	+	0	1	+	ps	ptl
nem nyomom	ki	be	0	0	1	ps	ps	ptl
megnyomom	be	ki	1	1	0	ptl	ptl	ps

	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇
nyomkodás:	0	1	1	1	0	0	0
nyomkodás:	0	0	0	1	1	1	0
nyomkodás:	1	1	1	0	0	0	0
lámpák:	1	0	0	0	1	1	0

$$x_1 + x_2 + x_4 + x_5 + x_7 = 0$$

Lámpakapcsolgatás

	ki	be	+	0	1	+	ps	ptl
nem nyomom	ki	be	0	0	1	ps	ps	ptl
megnyomom	be	ki	1	1	0	ptl	ptl	ps

	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇
nyomkodás:	0	1	1	1	0	0	0
nyomkodás:	0	0	0	1	1	1	0
nyomkodás:	1	1	1	0	0	0	0
lámpák:	1	0	0	0	1	1	0

Lámpakapcsolgatás

	ki	be
nem nyomom	ki	be
megnyomom	be	ki

+	0	1
0	0	1
1	1	0

+	ps	ptl
ps	ps	ptl
ptl	ptl	ps

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
nyomkodás:	0	1	1	1	0	0	0
nyomkodás:	0	0	0	1	1	1	0
nyomkodás:	1	1	1	0	0	0	0
lámpák:	1	0	0	0	1	1	0

$$x_2 + x_3 + x_5 + x_6 = 0$$

Lámpakapcsolgatás

	ki	be	+	0	1	+	ps	ptl
nem nyomom	ki	be	0	0	1	ps	ps	ptl
megnyomom	be	ki	1	1	0	ptl	ptl	ps

	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇
nyomkodás:	0	1	1	1	0	0	0
nyomkodás:	0	0	0	1	1	1	0
nyomkodás:	1	1	1	0	0	0	0
lámpák:	1	0	0	0	1	1	0

Lámpakapcsolgatás

	ki	be	+	0	1	+	ps	ptl
nem nyomom	ki	be	0	0	1	ps	ps	ptl
megnyomom	be	ki	1	1	0	ptl	ptl	ps

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
nyomkodás:	0	1	1	1	0	0	0
nyomkodás:	0	0	0	1	1	1	0
nyomkodás:	1	1	1	0	0	0	0
lámpák:	1	0	0	0	1	1	0

$$x_1 + x_3 + x_4 + x_6 + x_7 = 0$$

Lámpakapcsolgatós Galois-kapcsolat

- objektumok: 0-1 sorozatok (nyomkodások, lámpák)
- tulajdonságok: egyenletek

Lámpakapcsolgatós Galois-kapcsolat

- objektumok: 0-1 sorozatok (nyomkodások, lámpák)
- tulajdonságok: egyenletek

Tétel

A Galois-zárt. . .

- objektumhalmazok: összeadásra („nyomkodásra”) zárt 0-1 sorozatok;

Lámpakapcsolgatós Galois-kapcsolat

- objektumok: 0-1 sorozatok (nyomkodások, lámpák)
- tulajdonságok: egyenletek

Tétel

A Galois-zárt. . .

- objektumhalmazok: összeadásra („nyomkodásra”) zárt 0-1 sorozatok;
- tulajdonsághalmazok: következményekre zárt egyenlethalmazok.

Lámpakapcsolgatós Galois-kapcsolat

- objektumok: 0-1 sorozatok (nyomkodások, lámpák)
- tulajdonságok: egyenletek

Tétel

A Galois-zárt. . .

- objektumhalmazok: összeadásra („nyomkodásra”) zárt 0-1 sorozatok;
- tulajdonsághalmazok: következményekre zárt egyenlethalmazok.

Tétel

Ha adott megengedett nyomkodások egy halmaza, akkor ezekkel pontosan azok a konfigurációk érhetőek el, amelyek kielégítenek minden olyan egyenletet, amit a megengedett nyomkodások is kielégítenek.

Logikai kapuk

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

x	y	$x \wedge y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

?
~~~~~>

| $x$ | $y$ | $z$ | $m(x, y, z)$ |
|-----|-----|-----|--------------|
| 0   | 0   | 0   | 0            |
| 0   | 0   | 1   | 0            |
| 0   | 1   | 0   | 0            |
| 0   | 1   | 1   | 1            |
| 1   | 0   | 0   | 0            |
| 1   | 0   | 1   | 1            |
| 1   | 1   | 0   | 1            |
| 1   | 1   | 1   | 1            |



# Logikai kapuk

| $x$ | $y$ | $x \vee y$ |
|-----|-----|------------|
| 0   | 0   | 0          |
| 0   | 1   | 1          |
| 1   | 0   | 1          |
| 1   | 1   | 1          |

| $x$ | $y$ | $x \wedge y$ |
|-----|-----|--------------|
| 0   | 0   | 0            |
| 0   | 1   | 0            |
| 1   | 0   | 0            |
| 1   | 1   | 1            |

$\rightsquigarrow$

| $x$ | $y$ | $z$ | $m(x, y, z)$ |
|-----|-----|-----|--------------|
| 0   | 0   | 0   | 0            |
| 0   | 0   | 1   | 0            |
| 0   | 1   | 0   | 0            |
| 0   | 1   | 1   | 1            |
| 1   | 0   | 0   | 0            |
| 1   | 0   | 1   | 1            |
| 1   | 1   | 0   | 1            |
| 1   | 1   | 1   | 1            |

$$m(x, y, z) = (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x)$$

# Logikai kapuk

| $x$ | $y$ | $x \vee y$ |
|-----|-----|------------|
| 0   | 0   | 0          |
| 0   | 1   | 1          |
| 1   | 0   | 1          |
| 1   | 1   | 1          |

| $x$ | $y$ | $x \wedge y$ |
|-----|-----|--------------|
| 0   | 0   | 0            |
| 0   | 1   | 0            |
| 1   | 0   | 0            |
| 1   | 1   | 1            |

?  
~~~~~>

| x | y | z | $m(x, y, z)$ |
|-----|-----|-----|--------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

Logikai kapuk

| x | y | $x \vee y$ |
|-----|-----|------------|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

| x | y | $x \wedge y$ |
|-----|-----|--------------|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

?
~~~~~>

| $x$ | $y$ | $z$ | $m(x, y, z)$ |
|-----|-----|-----|--------------|
| 0   | 0   | 0   | 0            |
| 0   | 0   | 1   | 0            |
| 0   | 1   | 0   | 0            |
| 0   | 1   | 1   | 1            |
| 1   | 0   | 0   | 0            |
| 1   | 0   | 1   | 1            |
| 1   | 1   | 0   | 1            |
| 1   | 1   | 1   | 0            |

A  $\vee$  és  $\wedge$  művelet **monoton**, de  $f$  nem az:

$$1 \leq 1, 1 \leq 1, 0 \leq 1 \text{ de } f(1, 1, 0) > f(1, 1, 1).$$

# Galois-kapcsolat függvények és relációk között

- objektumok: függvények
- tulajdonságok: relációk



# Galois-kapcsolat függvények és relációk között

- objektumok: függvények
- tulajdonságok: relációk

## Tétel

A Galois-zárt. . .

- objektumhalmazok: kompozícióra zárt függvényhalmazok = klónok;

# Galois-kapcsolat függvények és relációk között

- objektumok: függvények
- tulajdonságok: relációk

## Tétel

A Galois-zárt. . .

- objektumhalmazok: kompozícióra zárt függvényhalmazok = klónok;
- tulajdonsághalmazok: pp-definíciókra zárt relációhalmazok.

# Galois-kapcsolat függvények és relációk között

- objektumok: függvények
- tulajdonságok: relációk

## Tétel

A Galois-zárt. . .

- objektumhalmazok: kompozícióra zárt függvényhalmazok = **klónok**;
- tulajdonsághalmazok: pp-definíciókra zárt relációhalmazok.

## Tétel

Ha adott függvények egy halmaza, akkor ezekből pontosan azok a függvények építhetők fel, amelyek kielégítenek minden olyan relációt, amit a kiindulási függvények is kielégítenek.

# Boole-függvények klónjai: Post-háló

