

Jelölések. Legyen V egy n -dimenziós vektortér a T test felett (pl. $V = T^n$), és legyen $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ bázisa V -nek. Tetszőleges $\mathbf{v} \in V$ vektorhoz léteznek olyan egyértelműen meghatározott $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in T$ skalárok, hogy $\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{b}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{b}_n$. Ekkor a $\mathbf{v}$ vektor $\mathcal{B}$ bázisra vonatkozó koordinátasora:

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in T^n.$$

Egy $\varphi: V \rightarrow V$ lineáris transzformáció mátrixa a $\mathcal{B}$ bázisban:

$$[\varphi]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} [\mathbf{b}_1 \varphi]_{\mathcal{B}} \\ [\mathbf{b}_2 \varphi]_{\mathcal{B}} \\ \vdots \\ [\mathbf{b}_n \varphi]_{\mathcal{B}} \end{pmatrix}.$$

Ezzel a mátrixszal szorozva egy vektor koordinátasorát, megkapjuk a φ melletti képek koordinátasorát:

$$[\mathbf{v} \varphi]_{\mathcal{B}} = [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} \cdot [\varphi]_{\mathcal{B}}.$$

Feladat. Írjuk fel az $y = 2x$ egyenletű egyenesre való tükrözésnek (mint $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineáris transzformációnak) a mátrixát az $\mathcal{F} = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ bázisban, majd az $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ standard bázisban is, ahol

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 &= (1, 2), & \mathbf{f}_2 &= (-2, 1); \\ \mathbf{e}_1 &= (1, 0), & \mathbf{e}_2 &= (0, 1). \end{aligned}$$

Megoldás. Számítsuk ki az $\mathcal{F}$ bázis elemeinek képeit és a képek koordinátáit az $\mathcal{F}$ bázisban. Mivel $\mathbf{f}_1$ a tükrözés tengelyére esik, $\mathbf{f}_2$ pedig merőleges a tengelyre, nem nehéz meghatározni a tükörképeket:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 \varphi &= \mathbf{f}_1 = 1 \mathbf{f}_1 + 0 \mathbf{f}_2 \implies [\mathbf{f}_1 \varphi]_{\mathcal{F}} = (1, 0) \\ \mathbf{f}_2 \varphi &= -\mathbf{f}_2 = 0 \mathbf{f}_1 + (-1) \mathbf{f}_2 \implies [\mathbf{f}_2 \varphi]_{\mathcal{F}} = (0, -1) \end{aligned}$$

A koordinátasorokat egymás alá írva kapjuk φ mátrixát az $\mathcal{F}$ bázisban:

$$[\varphi]_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

A $[\varphi]_{\mathcal{E}}$ mátrix felírásához az $\mathbf{e}_1 \varphi$ és $\mathbf{e}_2 \varphi$ vektorokat kell meghatároznunk. Ehhez hasznos lesz kifejezni az $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ vektorokat $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ segítségével (hiszen az utóbbiak képeit már ismerjük). Ez két kis könnyű egyenletrendszer megoldását jelenti, íme az eredmény (a számolást lásd [itt](#)):

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{5} \mathbf{f}_1 - \frac{2}{5} \mathbf{f}_2, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{2}{5} \mathbf{f}_1 + \frac{1}{5} \mathbf{f}_2.$$

Ennek alapján ki tudjuk számolni az $[\mathbf{e}_1 \varphi]_{\mathcal{E}}$ és $[\mathbf{e}_2 \varphi]_{\mathcal{E}}$ koordinátasorokat:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 \varphi &= \frac{1}{5} \mathbf{f}_1 \varphi - \frac{2}{5} \mathbf{f}_2 \varphi = \frac{1}{5} \mathbf{f}_1 + \frac{2}{5} \mathbf{f}_2 = (-3/5, 4/5) = -\frac{3}{5} \mathbf{e}_1 + \frac{4}{5} \mathbf{e}_2 \implies [\mathbf{e}_1 \varphi]_{\mathcal{E}} = (-3/5, 4/5) \\ \mathbf{e}_2 \varphi &= \frac{2}{5} \mathbf{f}_1 \varphi + \frac{1}{5} \mathbf{f}_2 \varphi = \frac{2}{5} \mathbf{f}_1 - \frac{1}{5} \mathbf{f}_2 = (4/5, 3/5) = \frac{4}{5} \mathbf{e}_1 + \frac{3}{5} \mathbf{e}_2 \implies [\mathbf{e}_2 \varphi]_{\mathcal{E}} = (4/5, 3/5) \end{aligned}$$

A koordinátasorokat egymás alá írva kapjuk φ mátrixát az $\mathcal{E}$ bázisban:

$$[\varphi]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

Ezzel a mátrixszal könnyen meghatározhatjuk tetszőleges vektor tükörképét. Például a $\mathbf{v} = (-1, 8)$ vektor φ melletti képét így számíthatjuk ki ([itt](#) található hozzá ábra):

$$\mathbf{v} \varphi = (-1, 8) \varphi = (-1, 8) \cdot \begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} = (7, 4).$$

Általános képletet is felírhatunk tetszőleges (x, y) pont tükörképére:

$$(x, y) \varphi = (x, y) \cdot \begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} = \left(-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y, \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y\right).$$

◇