

Párosítás: olyan M élhalmaz, amelyben semelyik két élnek nincs közös végpontja.
A maximális elemszám jelölése: $\nu(G)$.

Lefogó ponthalmaz: olyan C csúcshalmaz, ami minden élnek legalább az egyik végpontját tartalmazza.
A minimális elemszám jelölése: $\tau(G)$.

Trivialitás: Ha M egy tetszőleges párosítás és C egy tetszőleges lefogó ponthalmaz, akkor $|M| \leq |C|$, mert minden M -beli élnek legalább az egyik végpontja C -ben van, és két él nem osztható ugyanazon a végponton. Következésképp $\nu(G) \leq \tau(G)$.

König-tétel: Ha G véges páros gráf, akkor $\nu(G) = \tau(G)$.

Következmény: Ha G véges páros gráf és M egy maximális elemszámú párosítás G -ben, akkor létezik olyan C lefogó ponthalmaz, amelyre $|M| = |C|$.
Ekkor $\nu(G) = |M| = |C| = \tau(G)$.

Alternáló út: olyan út, amelyben felváltva szerepelnek M -beli és nem M -beli élek.

Javító út: olyan alternáló út, aminek kezdő- és végpontja is párosítatlan csúcs.

Trivialitás: Ha van javító út, akkor a párosítás nem maximális elemszámú, mert a javító útban szereplő élek státuszát megfordítva eggyel nagyobb párosítást kapunk.

Berge-tétel: Egy párosítás akkor és csak akkor maximális elemszámú, ha nincs javító út.

Magyar módszer: Legyen G véges *páros* gráf.

- ▶ Induljunk ki egy tetszőleges M párosításból (lehet akár üres is).
- ▶ Keressünk javító utat.
- ▶ Ha van javító út, akkor javítsuk a párosítást, és kezdjük előlről.
- ▶ Ha nincs javító út, akkor M maximális elemszámú párosítás, és
- ▶ ezt igazolhatjuk egy M -mel azonos méretű lefogó ponthalmaz megadásával.

Címkézés (javítóút-kezdemények növesztése):

- ▶ Az alsó párosítatlan pontok 0 címkét kapnak.
- ▶ **Fölfelé az összes** lehetséges **élet** megnézzük, és a felső végponthoz eggyel nagyobb számot írunk, mint ami az alsóhoz van írva (ha nincs még megcímkézve).
- ▶ **Lefelé** mindig **csak párosított élen** megyünk, és az alsó végponthoz eggyel nagyobb számot írunk, mint ami a felsőhöz van írva (garantáltan nincs még megcímkézve).
- ▶ Ha elérünk egy felső párosítatlan csúcshoz, akkor az egy javító út végpontja. A javító utat innen visszafelé haladva (a számok csökkenő sorrendjében) megtaláljuk.
- ▶ Ha nem érünk el felső párosítatlan csúcshoz, de már nem is tudunk több csúcsot megcímkézni, akkor a párosításunk maximális elemszámú.

A minimális elemszámú lefogó ponthalmaz megtalálása:

- ▶ Ha elakadt a címkézés, akkor alsó címkézett csúcsból nem vezet él felső címkézetlen csúcsba. (Különben még azt is meg tudtuk volna címkézni.)
- ▶ Ezért az **alsó címkézetlen** és a **felső címkézett** csúcsok lefogó ponthalmazt alkotnak.
- ▶ Ez a lefogó ponthalmaz minden párosított él egyik végpontját tartalmazza, így $|M| = |C|$.
- ▶ Tehát a párosításunk maximális elemszámú és a lefogó ponthalmazunk minimális elemszámú: $\nu(G) = |M| = |C| = \tau(G)$.