

11. Derivált, többszörös gyökök

11.1. Definíció. Az $f = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in T[x]$ polinom **deriváltján** az $f' = n a_n x^{n-1} + \dots + 2 a_2 x + a_1$ polinomot értjük.

Jelölés. A k -adik deriváltat $f^{(k)}$ jelöli, az $f^{(1)} = f'$ és $f^{(0)} = f$ megállapodással.

11.2. Tétel. Tetszőleges $f, g \in T[x]$ polinomokra és k pozitív egész számra érvényesek az alábbi deriválási szabályok:

$$(1) (f + g)' = f' + g';$$

$$(2) (f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g';$$

$$(3) (f^k)' = k \cdot f^{k-1} \cdot f'.$$

11.3. Tétel. Ha az α komplex szám k -szoros gyöke az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak, akkor $(k-1)$ -szeres gyöke f' -nek. (Ha $k=1$, akkor α nem gyöke f' -nek.)

Bizonyítás. Tízh. $f = (x-\alpha)^k \cdot g$ és $g(\alpha) \neq 0$.

$$f' = k \cdot (x-\alpha)^{k-1} \cdot g + (x-\alpha)^k \cdot g' = (x-\alpha)^{k-1} \cdot \underbrace{(k \cdot g + (x-\alpha) \cdot g')}_{x=\alpha \text{ helyen:}}$$

$$\circ \neq k \cdot g(\alpha) = k \cdot g(\alpha) + (\alpha-\alpha) \cdot g'(\alpha) \quad \square$$

11.4. Megjegyzés. Az előző tétel megfordítása nem igaz: f' -nek lehetnek olyan gyökei is, amelyekért nem f többszörös gyökei a „felelősek”.

11.5. Következmény. Az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinom α gyökének multiplicitása nem más, mint a legkisebb olyan k nemnegatív egész, amelyre $f^{(k)}(\alpha) \neq 0$, azaz α akkor és csak akkor k -szoros gyök, ha

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = \dots = f^{(k-1)}(\alpha) = 0, \text{ de } f^{(k)}(\alpha) \neq 0.$$

11.6. Feladat. Hányszoros gyöke $\alpha = 2$ az $f = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$ polinomnak?

$$\begin{array}{l} f = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8 \\ f' = 5x^4 - 20x^3 + 21x^2 - 4x + 4 \\ f'' = 20x^3 - 60x^2 + 42x - 4 \\ f''' = 60x^2 - 120x + 42 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} f(2) = 0 \\ f'(2) = 0 \\ f''(2) = 0 \\ f'''(2) = 42 \end{array} \right\} \alpha = 2 \text{ 3-szoros gyök}$$

11.7. Feladat. Határozzuk meg az $a, b \in \mathbb{R}$ együtthatókat úgy, hogy teljesüljön az alábbi oszthatóság.

pp.

$$(x+2)^2 \mid x^4 + ax^3 + bx^2 + 4$$

↑↑

-2 legalább kétszeres gyöke f -nek $\text{pot } 2$ -m

↑↑

$f(-2) = 0$ és $f'(-2) = 0$ $\hookrightarrow f'(-2) \neq 0$

$$f = x^4 + ax^3 + bx^2 + 4 \quad f(-2) = 16 - 8a + 4b + 4 = 0 \quad (1)$$

$$f' = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx \quad f'(-2) = -32 + 12a - 4b = 0 \quad (2)$$

$$\begin{cases} (1) & 8a - 4b = 20 \\ (2) & 12a - 4b = 32 \end{cases} \quad a = 3, b = 1$$

$$f = (x-\alpha) \cdot (x-\beta) \cdot (x-\gamma)^2 \cdot (x-\delta)^5 \cdot (x-\epsilon)^5$$

$$f' = (x-\gamma) \cdot (x-\delta)^4 \cdot (x-\epsilon)^4 \cdot (x-\zeta) \cdot (x-\eta)^3$$

$$(f, f') = (x-\gamma) \cdot (x-\delta)^4 \cdot (x-\epsilon)^4$$

$$\frac{f}{(f, f')} = (x-\alpha) \cdot (x-\beta) \cdot (x-\gamma) \cdot (x-\delta) \cdot (x-\epsilon)$$

11.8. Következmény. Az α komplex szám akkor és csak akkor többszörös gyöke az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak, ha gyöke $\text{lko}(f, f')$ -nek.

11.9. Következmény. Bármely legalább elsőfokú $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomra az $\frac{f}{\text{lko}(f, f')}$ polinom gyökei ugyanazok, mint f gyökei, de mindegyik egyszeres gyök.

11.10. Következmény. Ha T számtest, azaz $T \leq \mathbb{C}$, és $f \in T[x]$ irreducibilis T felett, akkor f -nek minden komplex gyöke egyszeres.

11.11. Feladat. Határozzuk meg az $f = x^5 - 10x^3 - 20x^2 - 15x - 4 \in \mathbb{C}[x]$ polinom (többszörös) gyökeit és a gyökök multiplicitását.

$$f' = 5x^4 - 30x^2 - 40x - 15 \sim x^4 - 6x^2 - 8x - 3$$

$$(f, f') = ? \quad f / (f, f') = ?$$

$$\begin{array}{r} \overbrace{(x^5 - 10x^3 - 20x^2 - 15x - 4)}^f : \overbrace{(x^4 - 6x^2 - 8x - 3)}^{f'/5} = x \\ x^5 - 6x^3 - 8x^2 - 3x \\ \hline -4x^3 - 12x^2 - 12x - 4 \sim x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \sim (f, f') = (x+1)^3 \end{array}$$

$$(x^4 - 6x^2 - 8x - 3) : (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) = x - 3$$

$$\begin{array}{r} x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x \\ \hline -3x^3 - 9x^2 - 9x - 3 \\ \hline -3x^3 - 9x^2 - 9x - 3 \\ \hline 0 \end{array}$$

$\Downarrow$
-1 f-nek 4-nak

$$f = (x+1)^4 \cdot (\dots)$$

$$f / (f, f') = x^2 - 3x - 4 = (x+1) \cdot (x-4) \quad f = (x+1)^4 \cdot (x-4)^2$$

pp-

...(HÖRNER)...

$$f = (x+1)^4 \cdot (x-4)^2$$

2.5. Feladat. Határozzuk meg az $a, b \in \mathbb{R}$ együtthatók értékét úgy, hogy teljesüljön az oszthatóság $\mathbb{R}[x]$ -ben.

- (a) $(x-1)(x+2) \mid ax^3 + x^2 + bx + 3$;
 (b) $(x-2)(x+1) \mid ax^3 - x^2 + bx + 4$; $= f$
 (c) $(x-2)(x-3) \mid ax^3 + bx^2 + x - 4$;
 (d) $(x+1)(x+2) \mid x^3 + ax^2 + bx - 1$.

$$(b) \quad (x-2) \cdot (x+1) \mid f \Leftrightarrow f(2) = f(-1) = 0$$

$$f(2) = 8a - 4 + 2b + 4 = 0 \quad (1)$$

$$f(-1) = -a - 1 - b + 4 = 0 \quad (2)$$

$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad 8a + 2b = 0 \\ (2) \quad a + b = 3 \end{array} \right\} \quad a = -1, b = 4$$

$$f \in \mathbb{C}[x]$$

2.10. Feladat. Adjunk meg minimális fokszámú $f \in \mathbb{R}[x]$ polinomot, amelynek

- (a) a 2 kétszeres, a -1 és a $2+i$ egyszeres gyöke;
 (b) az i háromszoros, a $3+i$ egyszeres gyöke;
 (c) az $1+i$ háromszoros, a -2 kétszeres, az i egyszeres gyöke.

$$(c) \quad f = (x - (1+i))^3 \cdot (x - (-2))^2 \cdot (x - i) \in \mathbb{R}[x]$$

$$\begin{aligned} f &= \underbrace{(x - (1+i))^3 \cdot (x - (1-i))^3}_{(x^2 - 2x + 2)^3} \cdot (x - (-2))^2 \cdot (x - i) \cdot (x - (-i)) \\ &= (x^2 - 2x + 2)^3 \cdot (x + 2)^2 \cdot (x^2 + 1) \end{aligned}$$

$$(x - \alpha) \cdot (x - \bar{\alpha}) = (x^2 - 2\operatorname{Re}\alpha \cdot x + |\alpha|^2)$$

3.7. Feladat. Oldjuk meg a következő egyenleteket a természetes számok halmazán.

- (a) $2\varphi(x) = x$;
 (b) $\varphi(x) = x - 8$.

(a) $\varphi(x) = \frac{x}{2}$ (x ps.)

$1, 2, 3, \dots, x$: fele rel. prím x -hez

Mindegyik rel. prím x -hez $\Rightarrow x = 2^k$

$$\begin{aligned} \text{Ell. } \varphi(2^k) &= 2^{k-1}(2-1) \\ &= 2^{k-1} \\ &= \frac{1}{2} 2^k \checkmark \end{aligned}$$

3.3. (f)

$\dots 3^{18} \equiv ? \pmod{44}$

1. u. $\varphi(44) = \varphi(4) \cdot \varphi(11) = 2 \cdot 10 = 20$

$\dots \equiv 18 \equiv -2 \pmod{20}$

$3^{18} \equiv 3^{-2} \equiv 3^{-1} \equiv x \equiv \underline{\underline{5}} \pmod{44}$

$9x \equiv 1 \pmod{44}$

$9x \equiv 45 \pmod{44}$

$x \equiv 5 \pmod{44}$

2. u. $3^{18} \equiv \underbrace{3^4 \cdot 3^4 \cdot 3^4 \cdot 3^4 \cdot 3^2}_{\substack{\equiv -7 \cdot -7 \cdot -7 \cdot -7 \cdot 9 \\ \equiv 5}} \equiv \underbrace{(-7) \cdot (-7) \cdot (-7) \cdot (-7) \cdot 9}_{\substack{\equiv 5 \\ \equiv 1}} \equiv 5 \cdot 5 \cdot 9 \equiv \underline{\underline{5}} \pmod{44}$

$$a \equiv b \pmod{3} \Leftrightarrow 3 \mid a-b \Leftrightarrow \underbrace{a-b}_{a+(-b)} \in \{\dots, -3, 0, 3, 6, \dots\} = H = [3]$$

$$G = (\mathbb{Z}; +) \text{ csoport. } H \leq G$$

$$\text{Mű. } G = (G; \cdot) \text{ csoport. } H \leq G$$

$$\text{DEF: } a \sim b \Leftrightarrow a \cdot b^{-1} \in H$$

$$\text{ALL: } \sim \text{ univ. rel. } G\text{-n}$$

$$\text{Biz: } \cdot \text{ refl. } \underbrace{a \cdot a^{-1}}_1 \in H \quad \checkmark$$

$$\cdot \text{ min. } a \cdot b^{-1} \in H \Rightarrow \underbrace{b \cdot a^{-1}}_{(ab^{-1})^{-1}} \in H \quad \checkmark$$

$$\cdot \text{ trans: } (ab^{-1} \in H \text{ és } bc^{-1} \in H) \Rightarrow \underbrace{ac^{-1}}_{ab^{-1} \cdot bc^{-1}} \in H \quad \checkmark \quad \square$$

$$\begin{aligned} a \text{ univ. rel. } \{b \in G \mid b \sim a\} &= \{b \in G \mid ba^{-1} \in H\} = \\ &= \{b \in G \mid ba^{-1} = h \in H\} = \{b \in G \mid b = ha, h \in H\} \\ &= \{ha \mid h \in H\} = H \cdot a \text{ jobb oldalú mellékoszt.} \end{aligned}$$

$$\text{PELM } G = (\mathbb{Z}_6; +) \quad H = [3] = \{0, 3\} \quad \boxed{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 & 5 \\ \hline \end{array}} \quad G$$

$$H+0 = \{0+0, 3+0\} = \{0, 3\} = H \quad \quad H+3 = \{0+3, 3+3\} = \{3, 0\}$$

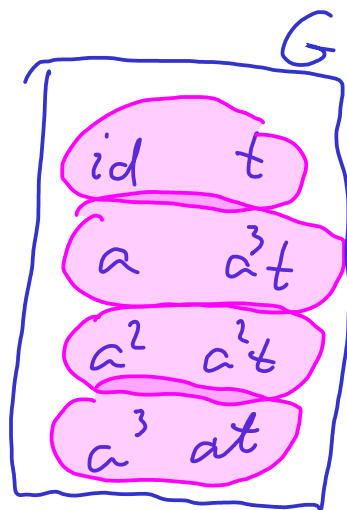
$$H+1 = \{0+1, 3+1\} = \{1, 4\} \quad \quad H+4 = \{0+4, 3+4\} = \{4, 1\}$$

$$H+2 = \{0+2, 3+2\} = \{2, 5\} \quad \quad H+5 = \{0+5, 3+5\} = \{5, 2\}$$

$$[G:H] = 3$$

DEFINITION $G = D_4 = \{id, a, a^2, a^3, t, at, a^2t, a^3t\}$

$$H = [t] = \{id, t\}$$



$$H \cdot id = \{id \cdot id, t \cdot id\} = \{id, t\} = H = H \cdot t$$

$$H \cdot a = \{id \cdot a, t \cdot a\} = \{a, a^3t\} = H \cdot a^3t$$

$$H \cdot a^2 = \{id \cdot a^2, t \cdot a^2\} = \{a^2, a^2t\} = H \cdot a^2t$$

$$H \cdot a^3 = \{id \cdot a^3, t \cdot a^3\} = \{a^3, at\} = H \cdot at \quad [G:H] = 4$$

DEF. Wellknown or naïve: $[G:H]$ index

ALL. $|H \cdot a| = |H|$

BIZ: $\gamma: H \rightarrow H \cdot a$
 $x \mapsto x \cdot a$

$\gamma^{-1}: H \cdot a \rightarrow H$
 $x \mapsto x \cdot a^{-1}$
 $\parallel \quad \parallel$
 $ha \quad h$

□.

LAGRANGE THEOREM G vgrupp, $H \leq G$
 $|G| = |H| \cdot [G:H]$

KÖV $|H| \mid |G|$

KÖV $\sigma(a) \mid |G|$
 $\parallel$
 $[a]$

1.7 (a)-(f)

1.8 (a)-(d)

1.7. Feladat. Adjunk meg n -edrendű elemet az alábbi csoportokban (ha létezik).

(a) $\mathbb{Q}^*$, $n = 3$;

(b) $\mathbb{Z}_{12}$, $n = 3$;

(c) D_6 , $n = 3$;

(d) S_5 , $n = 6$

(e) $\mathbb{Q}^*$, $n = 2$;

(f) $\mathbb{Z}_{15}^*$, $n = 4$;

(g) D_5 , $n = 2$;

(h) A_4 , $n = 4$

(i) $\mathbb{C}^*$, $n = 12$;

(j) $\mathbb{Z}_{15}^*$, $n = 4$;

(k) D_6 , $n = 4$;

(l) A_6 , $n = 4$.

(a) $\mathbb{Q}^*$
 $(\mathbb{Q}^*; \cdot)$ $x^3 = 1, x^2 \neq 1, x^1 \neq 1$ Nincs

$(\mathbb{C}^*; \cdot)$ $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$

(e) -1

(g) $(\mathbb{Z}_{12}; +)$ $\exists x \neq 0, 2x \neq 0, 1x \neq 0$
 $x = 4$ $\text{El. } [4] = \{4, 8, 0\}$

(f) $(\mathbb{Z}_{15}^*; \cdot)$ $x^4 \equiv 1, x^3 \neq 1, x^2 \neq 1, x^1 \neq 1$
 $4^1 \equiv 4, 4^2 \equiv 1 \Rightarrow \sigma(4) = 2$
 $2^1 \equiv 2, 2^2 \equiv 4, 2^3 \equiv 8, 2^4 \equiv 1 \Rightarrow \sigma(2) = 4$
 $[2] = \{2, 4, 8, 1\}$

(c) $D_6 = \{id, a, a^2, \dots, a^5, b, ab, \dots, a^5b\}$
 $(a^2)^1 = a^2, (a^2)^2 = a^4, (a^2)^3 = a^6 = id \Rightarrow \sigma(a^2) = 3$
 $[a^2] = \{a^2, a^4, id\}$ $\sigma(a^4) = 3$

$$(d) |S_5| = 120 \quad \sigma(\pi) = 6 \quad \pi = (121) \cdot (345)$$

$$|S_4| = 24 \quad \sigma(\pi) = 6 \quad \text{NINCS}$$

1.8. Feladat. Hány n -edrendű elem van az alábbi csoportokban?

(a) $\mathbb{C}^*$, $n = 12$;

(b) $\mathbb{Z}_{100}$, $n = 10$;

(c) D_{24} , $n = 2$;

(d) S_4 , $n = 2$;

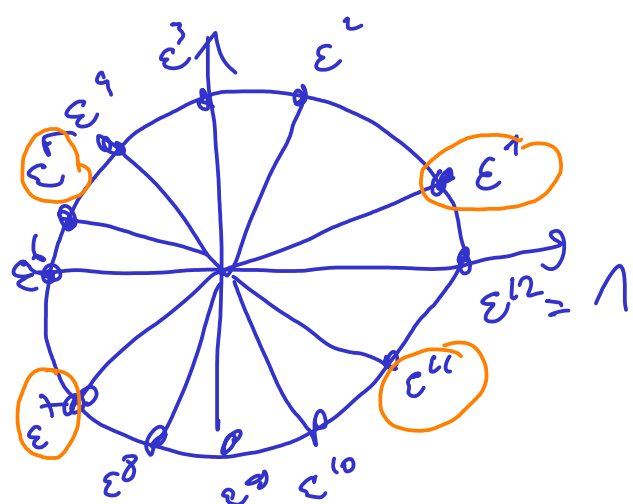
(e) S_4 , $n = 6$;

(f) $\mathbb{Z}_9^*$, $n = 3$;

(g) D_{24} , $n = 5$;

(h) $\mathbb{Q}$, $n = 2$.

(a) $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ 12. pr. elemekből pontosan $= \{k \in \{1, \dots, 12\} \mid \text{hb}(12, k) = 1\}$



$$\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{12} + i \sin \frac{2\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$\varphi(12) = 4$$

$$E_{12} \leq \mathbb{C}^*$$

$$\{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{11}\} \cong (\mathbb{Z}_{12}, +)$$

$$\sigma(\varepsilon^k) = \frac{\sigma(1)}{\text{hb}(\sigma(1), k)} = \frac{12}{\text{hb}(12, k)} \approx 12$$

(b) $(\mathbb{Z}_{100}, +)$ $\sigma(k) = \frac{\sigma(1)}{\text{hb}(\sigma(1), k)} = \frac{100}{\text{hb}(100, k)} = 10$

$$\begin{matrix} \parallel \\ [1] \\ \sigma(1) = 100 \end{matrix}$$

$$\underbrace{1+1+\dots+1}_{k \text{ db}}$$

$$\text{hb}(100, k) = 10$$

$$\updownarrow$$

$$\mathbb{Z}_{100} \cong [10] = \{0, 10, 20, \dots, 90\}$$

$$\parallel S$$

$$\mathbb{Z}_{10}$$

$$4 = \varphi(10) \text{ db generátorelem van}$$

$$k = 10, 30, 70, 90$$

$$\varphi(10) = 4 \text{ db}$$

$$k = 10 \cdot x$$

$$\text{hb}(100, x) = 1$$

$$(c) \mathcal{D}_{24} = \{id, a, a^2, \dots, a^{23}, \underbrace{t, at, \dots, a^{23}t}_{\sigma=2}\}$$

$$\sigma(a^4) = \frac{\sigma(a)}{|\text{Orb}(a)|} = \frac{24}{|\text{Orb}(a)|} = 2 \Leftrightarrow \text{Orb}(a) = 12$$

$$[a] \cong (\mathbb{Z}_{24}, +) \geq [a^{12}] = \{id, a^{12}\}$$

$$\begin{array}{c} \mathbb{Z}_2 \\ \uparrow \\ 1 = \varphi(2) \text{ db} \\ \text{generatorele } \mathbb{Z}_2 \end{array}$$

$$\underline{\underline{25 \text{ db}}}$$

$$k=12$$

$$\sigma(a^{12}) = 2$$

$$(d) S_4 \ni \pi \quad \sigma(\pi) = 2 \quad \underbrace{\pi = (ab)}_{\text{2-cycle}} \vee \underbrace{\pi = (ab)(cd)}_{\text{2-cycle}}$$

$$\binom{4}{2} = 6 \text{ db}$$

$$\begin{array}{l} (12)(34), \\ (13)(24), \\ (14)(23) \end{array}$$

$$3 \text{ db}$$

$$9 \text{ db}$$