

Csoportok I.

2013 április 12.

1. A csoport definíciói

2. Példák

3. Permutációk

4. Elem rendje, ciklikus csoportok

1. A csoport definíciói

2. Példák

3. Permutációk

4. Elem rendje, ciklikus csoportok

Ez a rész a tankönyvekben a [Sz] XII/1 és [F] II/1,3 fejezetekben található.

Definíció

Legyen $*$ egy kétváltozós művelet a nemüres A halmazon.

1. $*$ **invertálható** művelet, ha bármely $a, b \in A$ elemek esetén az $a * x = b$, illetve $y * a = b$ egyenleteknek **legalább** egy megoldása van.
2. $*$ **kancellatív** művelet, ha bármely $a, b \in A$ elemek esetén az $a * x = b$, illetve $y * a = b$ egyenleteknek **legfeljebb** egy megoldása van.

Definíció

Legyen $*$ egy kétváltozós művelet a nemüres A halmazon.

1. $*$ **invertálható** művelet, ha bármely $a, b \in A$ elemek esetén az $a * x = b$, illetve $y * a = b$ egyenleteknek **legalább** egy megoldása van.
2. $*$ **kancellatív** művelet, ha bármely $a, b \in A$ elemek esetén az $a * x = b$, illetve $y * a = b$ egyenleteknek **legfeljebb** egy megoldása van.

Megjegyzés

A kancellativitás így is megfogalmazható: $\forall a, x_1, x_2, y_1, y_2 \in A :$

$$a * x_1 = a * x_2 \implies x_1 = x_2;$$

$$y_1 * a = y_2 * a \implies y_1 = y_2.$$

Definíció

Legyen $*$ egy kétváltozós művelet a nemüres A halmazon. Tetszőleges $a \in A$ esetén definiáljuk az a -val való balról szorzást és az a -val való jobbról szorzást:

$$\lambda_a: A \rightarrow A, x \mapsto a * x, \qquad \rho_a: A \rightarrow A, x \mapsto x * a.$$

Definíció

Legyen $*$ egy kétváltozós művelet a nemüres A halmazon. Tetszőleges $a \in A$ esetén definiáljuk az a -val való balról szorzást és az a -val való jobbról szorzást:

$$\lambda_a: A \rightarrow A, x \mapsto a * x, \quad \rho_a: A \rightarrow A, x \mapsto x * a.$$

Állítás

Legyen $$ egy kétváltozós művelet a nemüres A halmazon.*

1. *$*$ invertálható $\iff \forall a \in A: \lambda_a$ és ρ_a szürjektív.*
2. *$*$ kancellatív $\iff \forall a \in A: \lambda_a$ és ρ_a injektív.*

Definíció

Legyen $*$ egy kétváltozós művelet a nemüres A halmazon. Tetszőleges $a \in A$ esetén definiáljuk az a -val való balról szorzást és az a -val való jobbról szorzást:

$$\lambda_a: A \rightarrow A, x \mapsto a * x, \quad \rho_a: A \rightarrow A, x \mapsto x * a.$$

Állítás

Legyen $$ egy kétváltozós művelet a nemüres A halmazon.*

- 1. $*$ invertálható $\iff \forall a \in A: \lambda_a$ és ρ_a szürjektív.*
- 2. $*$ kancellatív $\iff \forall a \in A: \lambda_a$ és ρ_a injektív.*

Biz.

HF

Definíció

Legyen $*$ egy kétváltozós művelet a nemüres A halmazon. Tetszőleges $a \in A$ esetén definiáljuk az a -val való balról szorzást és az a -val való jobbról szorzást:

$$\lambda_a: A \rightarrow A, x \mapsto a * x, \quad \rho_a: A \rightarrow A, x \mapsto x * a.$$

Állítás

Legyen $$ egy kétváltozós művelet a nemüres A halmazon.*

- 1. $*$ invertálható $\iff \forall a \in A: \lambda_a$ és ρ_a szürjektív.*
- 2. $*$ kancellatív $\iff \forall a \in A: \lambda_a$ és ρ_a injektív.*

Biz.

HF



Következmény

Véges alaphalmaz esetén az invertálhatóság és a kancellativitás egymással ekvivalens.

Definíció

Legyen $*$ egy kétváltozós művelet a nemüres A halmazon. Tetszőleges $a \in A$ esetén definiáljuk az a -val való balról szorzást és az a -val való jobbról szorzást:

$$\lambda_a: A \rightarrow A, x \mapsto a * x, \quad \rho_a: A \rightarrow A, x \mapsto x * a.$$

Állítás

Legyen $$ egy kétváltozós művelet a nemüres A halmazon.*

- 1. $*$ invertálható $\iff \forall a \in A: \lambda_a$ és ρ_a szürjektív.*
- 2. $*$ kancellatív $\iff \forall a \in A: \lambda_a$ és ρ_a injektív.*

Biz.

HF



Következmény

Véges alaphalmaz esetén az invertálhatóság és a kancellativitás egymással ekvivalens.

Biz.

Skatulya-elv. (HF)



Definíció (I)

Az $\mathbb{A} = (A; *)$ félcsoportot **csoporthnak** nevezzük, ha van egységeleme, és minden elemének van inverze.

Definíció (I)

Az $\mathbb{A} = (A; *)$ félcsoportot **csoportnak** nevezzük, ha van egységeleme, és minden elemének van inverze.

Definíció (II)

Az $\mathbb{A} = (A; *)$ félcsoportot **csoportnak** nevezzük, ha $*$ invertálható művelet.

Definíció (I)

Az $\mathbb{A} = (A; *)$ félcsoportot **csoportnak** nevezzük, ha van egységeleme, és minden elemének van inverze.

Definíció (II)

Az $\mathbb{A} = (A; *)$ félcsoportot **csoportnak** nevezzük, ha $*$ invertálható művelet.

Definíció (III)

Az $\mathbb{A} = (A; *, e, {}^{-1})$ algebrát **csoportnak** nevezzük, ha $*$ asszociatív kétváltozós művelet, az e (nullváltozós) és ${}^{-1}$ (egyváltozós) műveletekre pedig teljesülnek az alábbi azonosságok:

$$\forall a \in A : a * e = e * a = a;$$

$$\forall a \in A : a * a^{-1} = a^{-1} * a = e.$$

Tétel

A csoport három definíciója „lényegében” ekvivalens egymással.

Tétel

A csoport három definíciója „lényegében” ekvivalens egymással.

Biz.

(I) $\iff$ (II): [Sz] XII. fejezet, 1.4. Tétel.

Tétel

A csoport három definíciója „lényegében” ekvivalens egymással.

Biz.

(I) $\iff$ (II): [Sz] XII. fejezet, 1.4. Tétel.

(I) $\implies$ (III): Legyen $(A; *)$ csoport az (I) definíció értelmében. Jelölje e az egységelemet, egy tetszőleges $a \in A$ elem inverzét pedig jelöljük a^{-1} -gyel.

Tétel

A csoport három definíciója „lényegében” ekvivalens egymással.

Biz.

(I) $\iff$ (II): [Sz] XII. fejezet, 1.4. Tétel.

(I) $\implies$ (III): Legyen $(A; *)$ csoport az (I) definíció értelmében. Jelölje e az egységelemet, egy tetszőleges $a \in A$ elem inverzét pedig jelöljük a^{-1} -gyel. Ekkor az

$$\begin{aligned} e: A^0 &\rightarrow A, \quad \heartsuit \mapsto e, \\ ^{-1}: A &\rightarrow A, \quad a \mapsto a^{-1} \end{aligned}$$

műveletekkel $(A; *, e, ^{-1})$ csoport a (III) definíció értelmében.

Tétel

A csoport három definíciója „lényegében” ekvivalens egymással.

Biz.

(I) $\iff$ (II): [Sz] XII. fejezet, 1.4. Tétel.

(I) $\implies$ (III): Legyen $(A; *)$ csoport az (I) definíció értelmében. Jelölje e az egységelemet, egy tetszőleges $a \in A$ elem inverzét pedig jelöljük a^{-1} -gyel. Ekkor az

$$\begin{aligned} e: A^0 &\rightarrow A, \quad \heartsuit \mapsto e, \\ ^{-1}: A &\rightarrow A, \quad a \mapsto a^{-1} \end{aligned}$$

műveletekkel $(A; *, e, ^{-1})$ csoport a (III) definíció értelmében.

(III) $\implies$ (I): Legyen $(A; *, e, ^{-1})$ csoport a (III) definíció értelmében.

Tétel

A csoport három definíciója „lényegében” ekvivalens egymással.

Biz.

(I) $\iff$ (II): [Sz] XII. fejezet, 1.4. Tétel.

(I) $\implies$ (III): Legyen $(A; *)$ csoport az (I) definíció értelmében. Jelölje e az egységelemet, egy tetszőleges $a \in A$ elem inverzét pedig jelöljük a^{-1} -gyel. Ekkor az

$$\begin{aligned} e: A^0 &\rightarrow A, \quad \heartsuit \mapsto e, \\ ^{-1}: A &\rightarrow A, \quad a \mapsto a^{-1} \end{aligned}$$

műveletekkel $(A; *, e, ^{-1})$ csoport a (III) definíció értelmében.

(III) $\implies$ (I): Legyen $(A; *, e, ^{-1})$ csoport a (III) definíció értelmében. Ekkor $*$ asszociatív, $e \in A$ egységelem, és minden $a \in A$ -ra a^{-1} inverze A -nak, így $(A; *)$ csoport az (I) definíció értelmében. $\square$

Állítás

Legyen $$ egy kétváltozós művelet a nemüres A halmazon.*

- 1. Ha $(A; *)$ csoport, akkor $*$ cancellatív.*

Állítás

Legyen $$ egy kétváltozós művelet a nemüres A halmazon.*

- 1. Ha $(A; *)$ csoport, akkor $*$ cancellatív.*
- 2. Ha $*$ asszociatív és cancellatív, akkor $(A; *)$ csoport,*

Állítás

Legyen $$ egy kétváltozós művelet a nemüres A halmazon.*

- 1. Ha $(A; *)$ csoport, akkor $*$ kancellatív.*
- 2. Ha $*$ asszociatív és kancellatív, akkor $(A; *)$ csoport, feltéve, hogy A véges.*

Állítás

Legyen $$ egy kétváltozós művelet a nemüres A halmazon.*

- 1. Ha $(A; *)$ csoport, akkor $*$ kancellatív.*
- 2. Ha $*$ asszociatív és kancellatív, akkor $(A; *)$ csoport, feltéve, hogy A véges.*

Biz.

1. [Sz] XII. fejezet, 1.6. Tétel.

$$a * x_1 = a * x_2$$

Állítás

Legyen $$ egy kétváltozós művelet a nemüres A halmazon.*

- 1. Ha $(A; *)$ csoport, akkor $*$ kancellatív.*
- 2. Ha $*$ asszociatív és kancellatív, akkor $(A; *)$ csoport, feltéve, hogy A véges.*

Biz.

1. [Sz] XII. fejezet, 1.6. Tétel.

$$a * x_1 = a * x_2 \implies a^{-1} * (a * x_1) = a^{-1} * (a * x_2)$$

Állítás

Legyen $*$ egy kétváltozós művelet a nemüres A halmazon.

1. Ha $(A; *)$ csoport, akkor $*$ kancellatív.
2. Ha $*$ asszociatív és kancellatív, akkor $(A; *)$ csoport, *feltéve, hogy A véges.*

Biz.

1. [Sz] XII. fejezet, 1.6. Tétel.

$$\begin{aligned}a * x_1 = a * x_2 &\implies a^{-1} * (a * x_1) = a^{-1} * (a * x_2) \\ &\implies (a^{-1} * a) * x_1 = (a^{-1} * a) * x_2\end{aligned}$$

Állítás

Legyen $*$ egy kétváltozós művelet a nemüres A halmazon.

1. Ha $(A; *)$ csoport, akkor $*$ kancellatív.
2. Ha $*$ asszociatív és kancellatív, akkor $(A; *)$ csoport, *feltéve, hogy A véges.*

Biz.

1. [Sz] XII. fejezet, 1.6. Tétel.

$$\begin{aligned}a * x_1 = a * x_2 &\implies a^{-1} * (a * x_1) = a^{-1} * (a * x_2) \\&\implies (a^{-1} * a) * x_1 = (a^{-1} * a) * x_2 \\&\implies x_1 = x_2\end{aligned}$$

Állítás

Legyen $*$ egy kétváltozós művelet a nemüres A halmazon.

1. Ha $(A; *)$ csoport, akkor $*$ cancellatív.
2. Ha $*$ asszociatív és cancellatív, akkor $(A; *)$ csoport, *feltéve, hogy A véges.*

Biz.

1. [Sz] XII. fejezet, 1.6. Tétel.

$$\begin{aligned}a * x_1 = a * x_2 &\implies a^{-1} * (a * x_1) = a^{-1} * (a * x_2) \\&\implies (a^{-1} * a) * x_1 = (a^{-1} * a) * x_2 \\&\implies x_1 = x_2\end{aligned}$$

2. Ha A véges, akkor a cancellativitásból következik az invertálhatóság, tehát $(A; *)$ csoport a (II) definíció értelmében.

Állítás

Legyen $*$ egy kétváltozós művelet a nemüres A halmazon.

1. Ha $(A; *)$ csoport, akkor $*$ cancellatív.
2. Ha $*$ asszociatív és cancellatív, akkor $(A; *)$ csoport, *feltéve, hogy A véges.*

Biz.

1. [Sz] XII. fejezet, 1.6. Tétel.

$$\begin{aligned}a * x_1 = a * x_2 &\implies a^{-1} * (a * x_1) = a^{-1} * (a * x_2) \\&\implies (a^{-1} * a) * x_1 = (a^{-1} * a) * x_2 \\&\implies x_1 = x_2\end{aligned}$$

2. Ha A véges, akkor a cancellativitásból következik az invertálhatóság, tehát $(A; *)$ csoport a (II) definíció értelmében.



Példa

Az $(\mathbb{N}; +)$ félcsoport cancellatív, de nem invertálható (és így nem is csoport).

Jelölés

Ezentúl a csoportműveletet $\cdot$ jelöli, az egységelemet 1 , a g elem inverzét pedig g^{-1} . A $(G; \cdot)$ csoportot gyakran csak G -vel jelöljük.

Jelölés

Ezentúl a csoportműveletet $\cdot$ jelöli, az egységelemet 1 , a g elem inverzét pedig g^{-1} . A $(G; \cdot)$ csoportot gyakran csak G -vel jelöljük.

Definíció

Ha $(G; \cdot)$ csoport, $\emptyset \neq H \subseteq G$, és a $(H; \cdot)$ részgrupoid maga is csoport, akkor azt mondjuk, hogy $(H; \cdot)$ **részcsoportha** $(G; \cdot)$ -nek.

Jelölés

Ezentúl a csoportműveletet $\cdot$ jelöli, az egységelemet 1 , a g elem inverzét pedig g^{-1} . A $(G; \cdot)$ csoportot gyakran csak G -vel jelöljük.

Definíció

Ha $(G; \cdot)$ csoport, $\emptyset \neq H \subseteq G$, és a $(H; \cdot)$ részgrupoid maga is csoport, akkor azt mondjuk, hogy $(H; \cdot)$ **részcsoporthja** $(G; \cdot)$ -nek.

Állítás

Tetszőleges $(G; \cdot)$ csoport és $\emptyset \neq H \subseteq G$ esetén H akkor és csak akkor részcsoporthja $(G; \cdot)$ -nek, ha

1. H zárt a szorzásra: $\forall h_1, h_2 \in H : h_1 \cdot h_2 \in H$;
2. H tartalmazza G egységelemét: $1_G \in H$;
3. H zárt az inverzképzésre: $\forall h \in H : h^{-1} \in H$.

Jelölés

Ezentúl a csoportműveletet $\cdot$ jelöli, az egységelemet 1 , a g elem inverzét pedig g^{-1} . A $(G; \cdot)$ csoportot gyakran csak G -vel jelöljük.

Definíció

Ha $(G; \cdot)$ csoport, $\emptyset \neq H \subseteq G$, és a $(H; \cdot)$ részgrupoid maga is csoport, akkor azt mondjuk, hogy $(H; \cdot)$ **részcsoporthja** $(G; \cdot)$ -nek.

Állítás

Tetszőleges $(G; \cdot)$ csoport és $\emptyset \neq H \subseteq G$ esetén H akkor és csak akkor részcsoporthja $(G; \cdot)$ -nek, ha

1. H zárt a szorzásra: $\forall h_1, h_2 \in H : h_1 \cdot h_2 \in H$;
2. H tartalmazza G egységelemét: $1_G \in H$;
3. H zárt az inverzképzésre: $\forall h \in H : h^{-1} \in H$.

Megjegyzés

Az állítás így is megfogalmazható: H akkor és csak akkor részcsoporthja G -nek, ha részalgebrája a $(G; \cdot, 1_G, {}^{-1})$ algebrának.

Biz.

Az elegendőség nyilvánvaló.

Biz.

Az elegendőség nyilvánvaló. A szükségességhez tegyük fel, hogy $(H; \cdot)$ csoport, és jelölje 1_H az egységelemét.

Biz.

Az elegendőség nyilvánvaló. A szükségességhez tegyük fel, hogy $(H; \cdot)$ csoport, és jelölje 1_H az egységelemét. Ekkor tetszőleges $h \in H$ esetén

$$1_H \cdot h = 1_G \cdot h \text{ (miért?)}$$

Biz.

Az elegendőség nyilvánvaló. A szükségességhez tegyük fel, hogy $(H; \cdot)$ csoport, és jelölje 1_H az egységelemét. Ekkor tetszőleges $h \in H$ esetén

$$1_H \cdot h = 1_G \cdot h \text{ (miért?)}, \text{ és így } 1_H = 1_G \text{ (miért?).}$$

Biz.

Az elegendőség nyilvánvaló. A szükségességhez tegyük fel, hogy $(H; \cdot)$ csoport, és jelölje 1_H az egységelemét. Ekkor tetszőleges $h \in H$ esetén

$$1_H \cdot h = 1_G \cdot h \text{ (miért?)}, \text{ és így } 1_H = 1_G \text{ (miért?).}$$

Tehát $1_G = 1_H \in H$.

Biz.

Az elegendőség nyilvánvaló. A szükségességhez tegyük fel, hogy $(H; \cdot)$ csoport, és jelölje 1_H az egységelemét. Ekkor tetszőleges $h \in H$ esetén

$$1_H \cdot h = 1_G \cdot h \text{ (miért?)}, \text{ és így } 1_H = 1_G \text{ (miért?).}$$

Tehát $1_G = 1_H \in H$.

Bármely $h \in H$ elemnek van inverze a H csoportban (mondjuk h'), és van inverze a G csoportban is (h^{-1}).

Biz.

Az elegendőség nyilvánvaló. A szükségességhez tegyük fel, hogy $(H; \cdot)$ csoport, és jelölje 1_H az egységelemét. Ekkor tetszőleges $h \in H$ esetén

$$1_H \cdot h = 1_G \cdot h \text{ (miért?)}, \text{ és így } 1_H = 1_G \text{ (miért?)}.$$

Tehát $1_G = 1_H \in H$.

Bármely $h \in H$ elemnek van inverze a H csoportban (mondjuk h'), és van inverze a G csoportban is (h^{-1}). Ekkor

$$h'(hh^{-1})$$

Biz.

Az elegendőség nyilvánvaló. A szükségességhez tegyük fel, hogy $(H; \cdot)$ csoport, és jelölje 1_H az egységelemét. Ekkor tetszőleges $h \in H$ esetén

$$1_H \cdot h = 1_G \cdot h \text{ (miért?)}, \text{ és így } 1_H = 1_G \text{ (miért?)}.$$

Tehát $1_G = 1_H \in H$.

Bármely $h \in H$ elemnek van inverze a H csoportban (mondjuk h'), és van inverze a G csoportban is (h^{-1}). Ekkor

$$h'(hh^{-1}) = h' \cdot 1$$

Biz.

Az elegendőség nyilvánvaló. A szükségességhez tegyük fel, hogy $(H; \cdot)$ csoport, és jelölje 1_H az egységelemét. Ekkor tetszőleges $h \in H$ esetén

$$1_H \cdot h = 1_G \cdot h \text{ (miért?)}, \text{ és így } 1_H = 1_G \text{ (miért?)}.$$

Tehát $1_G = 1_H \in H$.

Bármely $h \in H$ elemnek van inverze a H csoportban (mondjuk h'), és van inverze a G csoportban is (h^{-1}). Ekkor

$$h'(hh^{-1}) = h' \cdot 1 = h';$$

Biz.

Az elegendőség nyilvánvaló. A szükségességhez tegyük fel, hogy $(H; \cdot)$ csoport, és jelölje 1_H az egységelemét. Ekkor tetszőleges $h \in H$ esetén

$$1_H \cdot h = 1_G \cdot h \text{ (miért?)}, \text{ és így } 1_H = 1_G \text{ (miért?).}$$

Tehát $1_G = 1_H \in H$.

Bármely $h \in H$ elemnek van inverze a H csoportban (mondjuk h'), és van inverze a G csoportban is (h^{-1}). Ekkor

$$h'(hh^{-1}) = h' \cdot 1 = h';$$

$$(h'h)h^{-1}$$

Biz.

Az elegendőség nyilvánvaló. A szükségességhez tegyük fel, hogy $(H; \cdot)$ csoport, és jelölje 1_H az egységelemét. Ekkor tetszőleges $h \in H$ esetén

$$1_H \cdot h = 1_G \cdot h \text{ (miért?)}, \text{ és így } 1_H = 1_G \text{ (miért?)}.$$

Tehát $1_G = 1_H \in H$.

Bármely $h \in H$ elemnek van inverze a H csoportban (mondjuk h'), és van inverze a G csoportban is (h^{-1}). Ekkor

$$h'(hh^{-1}) = h' \cdot 1 = h';$$

$$(h'h)h^{-1} = 1 \cdot h^{-1}$$

Biz.

Az elegendőség nyilvánvaló. A szükségességhez tegyük fel, hogy $(H; \cdot)$ csoport, és jelölje 1_H az egységelemét. Ekkor tetszőleges $h \in H$ esetén

$$1_H \cdot h = 1_G \cdot h \text{ (miért?)}, \text{ és így } 1_H = 1_G \text{ (miért?).}$$

Tehát $1_G = 1_H \in H$.

Bármely $h \in H$ elemnek van inverze a H csoportban (mondjuk h'), és van inverze a G csoportban is (h^{-1}). Ekkor

$$h'(hh^{-1}) = h' \cdot 1 = h';$$

$$(h'h)h^{-1} = 1 \cdot h^{-1} = h^{-1}.$$

Biz.

Az elegendőség nyilvánvaló. A szükségességhez tegyük fel, hogy $(H; \cdot)$ csoport, és jelölje 1_H az egységelemét. Ekkor tetszőleges $h \in H$ esetén

$$1_H \cdot h = 1_G \cdot h \text{ (miért?)}, \text{ és így } 1_H = 1_G \text{ (miért?)}.$$

Tehát $1_G = 1_H \in H$.

Bármely $h \in H$ elemnek van inverze a H csoportban (mondjuk h'), és van inverze a G csoportban is (h^{-1}). Ekkor

$$h'(hh^{-1}) = h' \cdot 1 = h';$$

$$(h'h)h^{-1} = 1 \cdot h^{-1} = h^{-1}.$$

Tehát $h^{-1} = h' \in H$.

Biz.

Az elegendőség nyilvánvaló. A szükségességhez tegyük fel, hogy $(H; \cdot)$ csoport, és jelölje 1_H az egységelemét. Ekkor tetszőleges $h \in H$ esetén

$$1_H \cdot h = 1_G \cdot h \text{ (miért?)}, \text{ és így } 1_H = 1_G \text{ (miért?)}.$$

Tehát $1_G = 1_H \in H$.

Bármely $h \in H$ elemnek van inverze a H csoportban (mondjuk h'), és van inverze a G csoportban is (h^{-1}). Ekkor

$$\begin{aligned} h'(hh^{-1}) &= h' \cdot 1 = h'; \\ (h'h)h^{-1} &= 1 \cdot h^{-1} = h^{-1}. \end{aligned}$$

Tehát $h^{-1} = h' \in H$.



Példa

$\mathbb{N}_0$ részalgebrája a $(\mathbb{Z}; +)$ csoportnak, de nem részcsoporthja (csak részmonoid).

Állítás

$A (G; \cdot)$ csoportban a $B \subseteq G$ részhalmaz által generált részcsoport:

$$[B] = \{b_1^{\varepsilon_1} \cdots b_n^{\varepsilon_n} : n \in \mathbb{N}_0, b_1, \dots, b_n \in B, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n = \pm 1\}.$$

Állítás

$A (G; \cdot)$ csoportban a $B \subseteq G$ részhalmaz által generált részcsoport:

$$[B] = \{b_1^{\varepsilon_1} \cdots b_n^{\varepsilon_n} : n \in \mathbb{N}_0, b_1, \dots, b_n \in B, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n = \pm 1\}.$$

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 1.6. Tétel.

Állítás

$A (G; \cdot)$ csoportban a $B \subseteq G$ részhalmaz által generált részcsoport:

$$[B] = \{b_1^{\varepsilon_1} \cdots b_n^{\varepsilon_n} : n \in \mathbb{N}_0, b_1, \dots, b_n \in B, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n = \pm 1\}.$$

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 1.6. Tétel.



Megjegyzés

Az üres halmaz generátuma a legszűkebb részcsoport: $[\emptyset] = \{1_G\}$.

Állítás

Tetszőleges $\varphi: (G; \cdot) \rightarrow (H; \cdot)$ csoporthomomorfizmusra

1. $1_G \varphi = 1_H$;
2. $\forall g \in G: (g^{-1}) \varphi = (g \varphi)^{-1}$.

Állítás

Tetszőleges $\varphi: (G; \cdot) \rightarrow (H; \cdot)$ csoporthomomorfizmusra

1. $1_G \varphi = 1_H$;
2. $\forall g \in G: (g^{-1}) \varphi = (g \varphi)^{-1}$.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 1.7. Tétel.

Tetszőleges $g \in G$ esetén

1. $1_H \cdot g \varphi$

Állítás

Tetszőleges $\varphi: (G; \cdot) \rightarrow (H; \cdot)$ csoporthomomorfizmusra

1. $1_G \varphi = 1_H$;
2. $\forall g \in G: (g^{-1}) \varphi = (g \varphi)^{-1}$.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 1.7. Tétel.

Tetszőleges $g \in G$ esetén

1. $1_H \cdot g \varphi = g \varphi$

Állítás

Tetszőleges $\varphi: (G; \cdot) \rightarrow (H; \cdot)$ csoporthomomorfizmusra

1. $1_G \varphi = 1_H$;
2. $\forall g \in G: (g^{-1}) \varphi = (g \varphi)^{-1}$.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 1.7. Tétel.

Tetszőleges $g \in G$ esetén

1. $1_H \cdot g \varphi = g \varphi = (1_G \cdot g) \varphi$

Állítás

Tetszőleges $\varphi: (G; \cdot) \rightarrow (H; \cdot)$ csoporthomomorfizmusra

1. $1_G \varphi = 1_H$;
2. $\forall g \in G: (g^{-1}) \varphi = (g \varphi)^{-1}$.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 1.7. Tétel.

Tetszőleges $g \in G$ esetén

1. $1_H \cdot g \varphi = g \varphi = (1_G \cdot g) \varphi = 1_G \varphi \cdot g \varphi$

Állítás

Tetszőleges $\varphi: (G; \cdot) \rightarrow (H; \cdot)$ csoporthomomorfizmusra

1. $1_G \varphi = 1_H$;
2. $\forall g \in G: (g^{-1}) \varphi = (g \varphi)^{-1}$.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 1.7. Tétel.

Tetszőleges $g \in G$ esetén

1. $1_H \cdot g \varphi = g \varphi = (1_G \cdot g) \varphi = 1_G \varphi \cdot g \varphi \implies 1_H = 1_G \varphi$.

Állítás

Tetszőleges $\varphi: (G; \cdot) \rightarrow (H; \cdot)$ csoporthomomorfizmusra

1. $1_G \varphi = 1_H$;
2. $\forall g \in G: (g^{-1}) \varphi = (g \varphi)^{-1}$.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 1.7. Tétel.

Tetszőleges $g \in G$ esetén

1. $1_H \cdot g \varphi = g \varphi = (1_G \cdot g) \varphi = 1_G \varphi \cdot g \varphi \implies 1_H = 1_G \varphi$.
2. $1_H = 1_G \varphi$

Állítás

Tetszőleges $\varphi: (G; \cdot) \rightarrow (H; \cdot)$ csoporthomomorfizmusra

1. $1_G \varphi = 1_H$;
2. $\forall g \in G: (g^{-1}) \varphi = (g \varphi)^{-1}$.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 1.7. Tétel.

Tetszőleges $g \in G$ esetén

1. $1_H \cdot g \varphi = g \varphi = (1_G \cdot g) \varphi = 1_G \varphi \cdot g \varphi \implies 1_H = 1_G \varphi$.
2. $1_H = 1_G \varphi = (g \cdot g^{-1}) \varphi$

Állítás

Tetszőleges $\varphi: (G; \cdot) \rightarrow (H; \cdot)$ csoporthomomorfizmusra

1. $1_G \varphi = 1_H$;
2. $\forall g \in G: (g^{-1}) \varphi = (g \varphi)^{-1}$.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 1.7. Tétel.

Tetszőleges $g \in G$ esetén

1. $1_H \cdot g \varphi = g \varphi = (1_G \cdot g) \varphi = 1_G \varphi \cdot g \varphi \implies 1_H = 1_G \varphi$.
2. $1_H = 1_G \varphi = (g \cdot g^{-1}) \varphi = g \varphi \cdot g^{-1} \varphi$

Állítás

Tetszőleges $\varphi: (G; \cdot) \rightarrow (H; \cdot)$ csoporthomomorfizmusra

1. $1_G \varphi = 1_H$;
2. $\forall g \in G: (g^{-1}) \varphi = (g \varphi)^{-1}$.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 1.7. Tétel.

Tetszőleges $g \in G$ esetén

1. $1_H \cdot g \varphi = g \varphi = (1_G \cdot g) \varphi = 1_G \varphi \cdot g \varphi \implies 1_H = 1_G \varphi$.
2. $1_H = 1_G \varphi = (g \cdot g^{-1}) \varphi = g \varphi \cdot g^{-1} \varphi$ és hasonlóan $1_H = g^{-1} \varphi \cdot g \varphi$

Állítás

Tetszőleges $\varphi: (G; \cdot) \rightarrow (H; \cdot)$ csoporthomomorfizmusra

1. $1_G \varphi = 1_H$;
2. $\forall g \in G: (g^{-1}) \varphi = (g \varphi)^{-1}$.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 1.7. Tétel.

Tetszőleges $g \in G$ esetén

1. $1_H \cdot g \varphi = g \varphi = (1_G \cdot g) \varphi = 1_G \varphi \cdot g \varphi \implies 1_H = 1_G \varphi$.
2. $1_H = 1_G \varphi = (g \cdot g^{-1}) \varphi = g \varphi \cdot g^{-1} \varphi$ és hasonlóan $1_H = g^{-1} \varphi \cdot g \varphi$,
tehát $g^{-1} \varphi$ valóban inverze $g \varphi$ -nek.

Állítás

Tetszőleges $\varphi: (G; \cdot) \rightarrow (H; \cdot)$ csoporthomomorfizmusra

1. $1_G \varphi = 1_H$;
2. $\forall g \in G: (g^{-1}) \varphi = (g \varphi)^{-1}$.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 1.7. Tétel.

Tetszőleges $g \in G$ esetén

1. $1_H \cdot g \varphi = g \varphi = (1_G \cdot g) \varphi = 1_G \varphi \cdot g \varphi \implies 1_H = 1_G \varphi$.
2. $1_H = 1_G \varphi = (g \cdot g^{-1}) \varphi = g \varphi \cdot g^{-1} \varphi$ és hasonlóan $1_H = g^{-1} \varphi \cdot g \varphi$,
tehát $g^{-1} \varphi$ valóban inverze $g \varphi$ -nek.



Megjegyzés

Az állítás azt fejezi ki, hogy egy $\varphi: G \rightarrow H$ leképezés akkor és csak akkor homomorfizmus a $(G; \cdot)$ és $(H; \cdot)$ algebraik között, ha homomorfizmus a $(G; \cdot, 1_G, {}^{-1})$ és $(H; \cdot, 1_H, {}^{-1})$ algebraik között.

Állítás

Ha $\sim$ kongruenciarelációja a G csoportnak, akkor

$$\forall a, b \in G : a \sim b \implies a^{-1} \sim b^{-1}.$$

Állítás

Ha $\sim$ kongruenciarelációja a G csoportnak, akkor

$$\forall a, b \in G : a \sim b \implies a^{-1} \sim b^{-1}.$$

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 4.7. Tétel.

Tegyük fel, hogy $a \sim b$.

Állítás

Ha $\sim$ kongruenciarelációja a G csoportnak, akkor

$$\forall a, b \in G : a \sim b \implies a^{-1} \sim b^{-1}.$$

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 4.7. Tétel.

Tegyük fel, hogy $a \sim b$. Ekkor

$$\left. \begin{array}{l} a^{-1} \sim a^{-1} \\ a \sim b \\ b^{-1} \sim b^{-1} \end{array} \right\}$$

Állítás

Ha $\sim$ kongruenciarelációja a G csoportnak, akkor

$$\forall a, b \in G : a \sim b \implies a^{-1} \sim b^{-1}.$$

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 4.7. Tétel.

Tegyük fel, hogy $a \sim b$. Ekkor

$$\left. \begin{array}{l} a^{-1} \sim a^{-1} \\ a \sim b \\ b^{-1} \sim b^{-1} \end{array} \right\} \implies b^{-1} = a^{-1} \cdot a \cdot b^{-1} \sim a^{-1} \cdot b \cdot b^{-1} = a^{-1}.$$

Állítás

Ha $\sim$ kongruenciarelációja a G csoportnak, akkor

$$\forall a, b \in G : a \sim b \implies a^{-1} \sim b^{-1}.$$

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 4.7. Tétel.

Tegyük fel, hogy $a \sim b$. Ekkor

$$\left. \begin{array}{l} a^{-1} \sim a^{-1} \\ a \sim b \\ b^{-1} \sim b^{-1} \end{array} \right\} \implies b^{-1} = a^{-1} \cdot a \cdot b^{-1} \sim a^{-1} \cdot b \cdot b^{-1} = a^{-1}. \quad \square$$

Megjegyzés

Az állítás azt fejezi ki, hogy egy $\sim \subseteq G \times G$ ekvivalenciareláció akkor és csak akkor kongruenciája a $(G; \cdot)$ algebrának, ha kongruenciája a $(G; \cdot, 1_G, {}^{-1})$ algebrának.

1. A csoport definíciói

2. Példák

3. Permutációk

4. Elem rendje, ciklikus csoportok

Ez a rész a tankönyvekben a [Sz] V/2 és [F] II/4,6 fejezetekben található.

Példa

Az alábbi H számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos összeadásra nézve?

Példa

Az alábbi H számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos összeadásra nézve?

► $H = \emptyset$

Példa

Az alábbi H számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos összeadásra nézve?

- ▶ $H = \emptyset$: nem (nem is grupoid)

Példa

Az alábbi H számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos összeadásra nézve?

- ▶ $H = \emptyset$: nem (nem is grupoid)
- ▶ $H = \{0\}$

Példa

Az alábbi H számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos összeadásra nézve?

- ▶ $H = \emptyset$: nem (nem is grupoid)
- ▶ $H = \{0\}$: igen (Abel-csoport)

Példa

Az alábbi H számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos összeadásra nézve?

- ▶ $H = \emptyset$: nem (nem is grupoid)
- ▶ $H = \{0\}$: igen (Abel-csoport)
- ▶ $H = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$

Példa

Az alábbi H számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos összeadásra nézve?

- ▶ $H = \emptyset$: nem (nem is grupoid)
- ▶ $H = \{0\}$: igen (Abel-csoport)
- ▶ $H = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$: igen (Abel-csoport)

Példa

Az alábbi H számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos összeadásra nézve?

- ▶ $H = \emptyset$: nem (nem is grupoid)
- ▶ $H = \{0\}$: igen (Abel-csoport)
- ▶ $H = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$: igen (Abel-csoport)
- ▶ $H = \mathbb{R}^+, \mathbb{Q}^+, \mathbb{N}$

Példa

Az alábbi H számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos összeadásra nézve?

- ▶ $H = \emptyset$: nem (nem is grupoid)
- ▶ $H = \{0\}$: igen (Abel-csoport)
- ▶ $H = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$: igen (Abel-csoport)
- ▶ $H = \mathbb{R}^+, \mathbb{Q}^+, \mathbb{N}$: nem (csak félcsoport)

Példa

Az alábbi H számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos összeadásra nézve?

- ▶ $H = \emptyset$: nem (nem is grupoid)
- ▶ $H = \{0\}$: igen (Abel-csoport)
- ▶ $H = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$: igen (Abel-csoport)
- ▶ $H = \mathbb{R}^+, \mathbb{Q}^+, \mathbb{N}$: nem (csak félcsoport)
- ▶ $H = \{\text{páros számok}\}$

Példa

Az alábbi H számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos összeadásra nézve?

- ▶ $H = \emptyset$: nem (nem is grupoid)
- ▶ $H = \{0\}$: igen (Abel-csoport)
- ▶ $H = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$: igen (Abel-csoport)
- ▶ $H = \mathbb{R}^+, \mathbb{Q}^+, \mathbb{N}$: nem (csak félcsoport)
- ▶ $H = \{\text{páros számok}\}$: igen (Abel-csoport)

Példa

Az alábbi H számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos összeadásra nézve?

- ▶ $H = \emptyset$: nem (nem is grupoid)
- ▶ $H = \{0\}$: igen (Abel-csoport)
- ▶ $H = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$: igen (Abel-csoport)
- ▶ $H = \mathbb{R}^+, \mathbb{Q}^+, \mathbb{N}$: nem (csak félcsoport)
- ▶ $H = \{\text{páros számok}\}$: igen (Abel-csoport)
- ▶ $H = \{\text{páratlan számok}\}$

Példa

Az alábbi H számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos összeadásra nézve?

- ▶ $H = \emptyset$: nem (nem is grupoid)
- ▶ $H = \{0\}$: igen (Abel-csoport)
- ▶ $H = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$: igen (Abel-csoport)
- ▶ $H = \mathbb{R}^+, \mathbb{Q}^+, \mathbb{N}$: nem (csak félcsoport)
- ▶ $H = \{\text{páros számok}\}$: igen (Abel-csoport)
- ▶ $H = \{\text{páratlan számok}\}$: nem (nem is grupoid)

Példa

Az alábbi H számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos összeadásra nézve?

- ▶ $H = \emptyset$: nem (nem is grupoid)
- ▶ $H = \{0\}$: igen (Abel-csoport)
- ▶ $H = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$: igen (Abel-csoport)
- ▶ $H = \mathbb{R}^+, \mathbb{Q}^+, \mathbb{N}$: nem (csak félcsoport)
- ▶ $H = \{\text{páros számok}\}$: igen (Abel-csoport)
- ▶ $H = \{\text{páratlan számok}\}$: nem (nem is grupoid)
- ▶ $H = \{\text{irracionális számok}\}$

Példa

Az alábbi H számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos összeadásra nézve?

- ▶ $H = \emptyset$: nem (nem is grupoid)
- ▶ $H = \{0\}$: igen (Abel-csoport)
- ▶ $H = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$: igen (Abel-csoport)
- ▶ $H = \mathbb{R}^+, \mathbb{Q}^+, \mathbb{N}$: nem (csak félcsoport)
- ▶ $H = \{\text{páros számok}\}$: igen (Abel-csoport)
- ▶ $H = \{\text{páratlan számok}\}$: nem (nem is grupoid)
- ▶ $H = \{\text{irracionális számok}\}$: nem (nem is grupoid)

Példa

Az alábbi H számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos összeadásra nézve?

- ▶ $H = \emptyset$: nem (nem is grupoid)
- ▶ $H = \{0\}$: igen (Abel-csoport)
- ▶ $H = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$: igen (Abel-csoport)
- ▶ $H = \mathbb{R}^+, \mathbb{Q}^+, \mathbb{N}$: nem (csak félcsoport)
- ▶ $H = \{\text{páros számok}\}$: igen (Abel-csoport)
- ▶ $H = \{\text{páratlan számok}\}$: nem (nem is grupoid)
- ▶ $H = \{\text{irracionális számok}\}$: nem (nem is grupoid)
- ▶ $H = \{\text{véges tizedestörtek}\}$

Példa

Az alábbi H számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos összeadásra nézve?

- ▶ $H = \emptyset$: nem (nem is grupoid)
- ▶ $H = \{0\}$: igen (Abel-csoport)
- ▶ $H = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$: igen (Abel-csoport)
- ▶ $H = \mathbb{R}^+, \mathbb{Q}^+, \mathbb{N}$: nem (csak félcsoport)
- ▶ $H = \{\text{páros számok}\}$: igen (Abel-csoport)
- ▶ $H = \{\text{páratlan számok}\}$: nem (nem is grupoid)
- ▶ $H = \{\text{irracionális számok}\}$: nem (nem is grupoid)
- ▶ $H = \{\text{véges tizedestörtek}\}$: igen (Abel-csoport)

Példa

Az alábbi H számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos szorzásra nézve?

Példa

Az alábbi H számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos szorzásra nézve?

► $H = \emptyset$

Példa

Az alábbi H számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos szorzásra nézve?

- ▶ $H = \emptyset$: nem (nem is grupoid)

Példa

Az alábbi H számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos szorzásra nézve?

- ▶ $H = \emptyset$: nem (nem is grupoid)
- ▶ $H = \{1\}$

Példa

Az alábbi H számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos szorzásra nézve?

- ▶ $H = \emptyset$: nem (nem is grupoid)
- ▶ $H = \{1\}$: igen (Abel-csoport)

Példa

Az alábbi H számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos szorzásra nézve?

- ▶ $H = \emptyset$: nem (nem is grupoid)
- ▶ $H = \{1\}$: igen (Abel-csoport)
- ▶ $H = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$

Példa

Az alábbi H számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos szorzásra nézve?

- ▶ $H = \emptyset$: nem (nem is grupoid)
- ▶ $H = \{1\}$: igen (Abel-csoport)
- ▶ $H = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$: nem (csak monoid)

Példa

Az alábbi H számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos szorzásra nézve?

- ▶ $H = \emptyset$: nem (nem is grupoid)
- ▶ $H = \{1\}$: igen (Abel-csoport)
- ▶ $H = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$: nem (csak monoid)
- ▶ $H = \mathbb{C} \setminus \{0\}, \mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

Példa

Az alábbi H számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos szorzásra nézve?

- ▶ $H = \emptyset$: nem (nem is grupoid)
- ▶ $H = \{1\}$: igen (Abel-csoport)
- ▶ $H = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$: nem (csak monoid)
- ▶ $H = \mathbb{C} \setminus \{0\}, \mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{Q} \setminus \{0\}$: igen (Abel-csoport)

Példa

Az alábbi H számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos szorzásra nézve?

- ▶ $H = \emptyset$: nem (nem is grupoid)
- ▶ $H = \{1\}$: igen (Abel-csoport)
- ▶ $H = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$: nem (csak monoid)
- ▶ $H = \mathbb{C} \setminus \{0\}, \mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{Q} \setminus \{0\}$: igen (Abel-csoport)
- ▶ $H = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

Példa

Az alábbi H számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos szorzásra nézve?

- ▶ $H = \emptyset$: nem (nem is grupoid)
- ▶ $H = \{1\}$: igen (Abel-csoport)
- ▶ $H = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$: nem (csak monoid)
- ▶ $H = \mathbb{C} \setminus \{0\}, \mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{Q} \setminus \{0\}$: igen (Abel-csoport)
- ▶ $H = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$: nem (csak monoid)

Példa

Az alábbi H számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos szorzásra nézve?

- ▶ $H = \emptyset$: nem (nem is grupoid)
- ▶ $H = \{1\}$: igen (Abel-csoport)
- ▶ $H = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$: nem (csak monoid)
- ▶ $H = \mathbb{C} \setminus \{0\}, \mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{Q} \setminus \{0\}$: igen (Abel-csoport)
- ▶ $H = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$: nem (csak monoid)
- ▶ $H = \mathbb{R}^+, \mathbb{Q}^+$

Példa

Az alábbi H számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos szorzásra nézve?

- ▶ $H = \emptyset$: nem (nem is grupoid)
- ▶ $H = \{1\}$: igen (Abel-csoport)
- ▶ $H = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$: nem (csak monoid)
- ▶ $H = \mathbb{C} \setminus \{0\}, \mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{Q} \setminus \{0\}$: igen (Abel-csoport)
- ▶ $H = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$: nem (csak monoid)
- ▶ $H = \mathbb{R}^+, \mathbb{Q}^+$: igen (Abel-csoport)

Példa

Az alábbi H számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos szorzásra nézve?

- ▶ $H = \emptyset$: nem (nem is grupoid)
- ▶ $H = \{1\}$: igen (Abel-csoport)
- ▶ $H = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$: nem (csak monoid)
- ▶ $H = \mathbb{C} \setminus \{0\}, \mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{Q} \setminus \{0\}$: igen (Abel-csoport)
- ▶ $H = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$: nem (csak monoid)
- ▶ $H = \mathbb{R}^+, \mathbb{Q}^+$: igen (Abel-csoport)
- ▶ $H = \mathbb{N}$

Példa

Az alábbi H számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos szorzásra nézve?

- ▶ $H = \emptyset$: nem (nem is grupoid)
- ▶ $H = \{1\}$: igen (Abel-csoport)
- ▶ $H = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$: nem (csak monoid)
- ▶ $H = \mathbb{C} \setminus \{0\}, \mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{Q} \setminus \{0\}$: igen (Abel-csoport)
- ▶ $H = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$: nem (csak monoid)
- ▶ $H = \mathbb{R}^+, \mathbb{Q}^+$: igen (Abel-csoport)
- ▶ $H = \mathbb{N}$: nem (csak monoid)

Példa

Az alábbi H számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos szorzásra nézve?

- ▶ $H = \emptyset$: nem (nem is grupoid)
- ▶ $H = \{1\}$: igen (Abel-csoport)
- ▶ $H = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$: nem (csak monoid)
- ▶ $H = \mathbb{C} \setminus \{0\}, \mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{Q} \setminus \{0\}$: igen (Abel-csoport)
- ▶ $H = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$: nem (csak monoid)
- ▶ $H = \mathbb{R}^+, \mathbb{Q}^+$: igen (Abel-csoport)
- ▶ $H = \mathbb{N}$: nem (csak monoid)
- ▶ $H = \{\text{irracionális számok}\}$

Példa

Az alábbi H számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos szorzásra nézve?

- ▶ $H = \emptyset$: nem (nem is grupoid)
- ▶ $H = \{1\}$: igen (Abel-csoport)
- ▶ $H = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$: nem (csak monoid)
- ▶ $H = \mathbb{C} \setminus \{0\}, \mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{Q} \setminus \{0\}$: igen (Abel-csoport)
- ▶ $H = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$: nem (csak monoid)
- ▶ $H = \mathbb{R}^+, \mathbb{Q}^+$: igen (Abel-csoport)
- ▶ $H = \mathbb{N}$: nem (csak monoid)
- ▶ $H = \{\text{irracionális számok}\}$: nem (nem is grupoid)

Példa

Az alábbi H számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos szorzásra nézve?

- ▶ $H = \emptyset$: nem (nem is grupoid)
- ▶ $H = \{1\}$: igen (Abel-csoport)
- ▶ $H = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$: nem (csak monoid)
- ▶ $H = \mathbb{C} \setminus \{0\}, \mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{Q} \setminus \{0\}$: igen (Abel-csoport)
- ▶ $H = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$: nem (csak monoid)
- ▶ $H = \mathbb{R}^+, \mathbb{Q}^+$: igen (Abel-csoport)
- ▶ $H = \mathbb{N}$: nem (csak monoid)
- ▶ $H = \{\text{irracionális számok}\}$: nem (nem is grupoid)
- ▶ $H = \{\text{véges tizedestörtek}\} \setminus \{0\}$

Példa

Az alábbi H számhalmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos szorzásra nézve?

- ▶ $H = \emptyset$: nem (nem is grupoid)
- ▶ $H = \{1\}$: igen (Abel-csoport)
- ▶ $H = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$: nem (csak monoid)
- ▶ $H = \mathbb{C} \setminus \{0\}, \mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{Q} \setminus \{0\}$: igen (Abel-csoport)
- ▶ $H = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$: nem (csak monoid)
- ▶ $H = \mathbb{R}^+, \mathbb{Q}^+$: igen (Abel-csoport)
- ▶ $H = \mathbb{N}$: nem (csak monoid)
- ▶ $H = \{\text{irracionális számok}\}$: nem (nem is grupoid)
- ▶ $H = \{\text{véges tizedestörtek}\} \setminus \{0\}$: nem (csak monoid)

Példa

Csoportot alkot-e az $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ halmaz az $x * y := x^{\ln y}$ művelettel?

Példa

Csoportot alkot-e az $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ halmaz az $x * y := x^{\ln y}$ művelettel?

- (0) Grupoid-e egyáltalán, azaz $*$ valóban művelet-e az $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ halmazon?

Példa

Csoportot alkot-e az $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ halmaz az $x * y := x^{\ln y}$ művelettel?

- (0) Grupoid-e egyáltalán, azaz $*$ valóban művelet-e az $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ halmazon?

$$x, y \neq 1 \implies x^{\ln y} \neq 1 \text{ (miért?)}$$

Példa

Csoportot alkot-e az $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ halmaz az $x * y := x^{\ln y}$ művelettel?

- (0) Grupoid-e egyáltalán, azaz $*$ valóban művelet-e az $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ halmazon?

$$x, y \neq 1 \implies x^{\ln y} \neq 1 \text{ (miért?)}$$

- (1) Asszociatív-e a $*$ művelet?

Példa

Csoportot alkot-e az $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ halmaz az $x * y := x^{\ln y}$ művelettel?

- (0) Grupoid-e egyáltalán, azaz $*$ valóban művelet-e az $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ halmazon?

$$x, y \neq 1 \implies x^{\ln y} \neq 1 \text{ (miért?)}$$

- (1) Asszociatív-e a $*$ művelet? Tetszőleges $x, y, z \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ esetén

$$(x * y) * z$$

Példa

Csoportot alkot-e az $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ halmaz az $x * y := x^{\ln y}$ művelettel?

- (0) Grupoid-e egyáltalán, azaz $*$ valóban művelet-e az $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ halmazon?

$$x, y \neq 1 \implies x^{\ln y} \neq 1 \text{ (miért?)}$$

- (1) Asszociatív-e a $*$ művelet? Tetszőleges $x, y, z \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ esetén

$$(x * y) * z = (x * y)^{\ln z}$$

Példa

Csoportot alkot-e az $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ halmaz az $x * y := x^{\ln y}$ művelettel?

- (0) Grupoid-e egyáltalán, azaz $*$ valóban művelet-e az $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ halmazon?

$$x, y \neq 1 \implies x^{\ln y} \neq 1 \text{ (miért?)}$$

- (1) Asszociatív-e a $*$ művelet? Tetszőleges $x, y, z \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ esetén

$$(x * y) * z = (x * y)^{\ln z} = (x^{\ln y})^{\ln z}$$

Példa

Csoportot alkot-e az $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ halmaz az $x * y := x^{\ln y}$ művelettel?

- (0) Grupoid-e egyáltalán, azaz $*$ valóban művelet-e az $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ halmazon?

$$x, y \neq 1 \implies x^{\ln y} \neq 1 \text{ (miért?)}$$

- (1) Asszociatív-e a $*$ művelet? Tetszőleges $x, y, z \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ esetén

$$(x * y) * z = (x * y)^{\ln z} = (x^{\ln y})^{\ln z} = x^{\ln y \cdot \ln z}$$

Példa

Csoportot alkot-e az $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ halmaz az $x * y := x^{\ln y}$ művelettel?

- (0) Grupoid-e egyáltalán, azaz $*$ valóban művelet-e az $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ halmazon?

$$x, y \neq 1 \implies x^{\ln y} \neq 1 \text{ (miért?)}$$

- (1) Asszociatív-e a $*$ művelet? Tetszőleges $x, y, z \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ esetén

$$\begin{aligned}(x * y) * z &= (x * y)^{\ln z} = (x^{\ln y})^{\ln z} = x^{\ln y \cdot \ln z}, \\ x * (y * z) &\end{aligned}$$

Példa

Csoportot alkot-e az $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ halmaz az $x * y := x^{\ln y}$ művelettel?

- (0) Grupoid-e egyáltalán, azaz $*$ valóban művelet-e az $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ halmazon?

$$x, y \neq 1 \implies x^{\ln y} \neq 1 \text{ (miért?)}$$

- (1) Asszociatív-e a $*$ művelet? Tetszőleges $x, y, z \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ esetén

$$\begin{aligned}(x * y) * z &= (x * y)^{\ln z} = (x^{\ln y})^{\ln z} = x^{\ln y \cdot \ln z}, \\ x * (y * z) &= x^{\ln(y * z)}\end{aligned}$$

Példa

Csoportot alkot-e az $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ halmaz az $x * y := x^{\ln y}$ művelettel?

- (0) Grupoid-e egyáltalán, azaz $*$ valóban művelet-e az $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ halmazon?

$$x, y \neq 1 \implies x^{\ln y} \neq 1 \text{ (miért?)}$$

- (1) Asszociatív-e a $*$ művelet? Tetszőleges $x, y, z \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ esetén

$$\begin{aligned}(x * y) * z &= (x * y)^{\ln z} = (x^{\ln y})^{\ln z} = x^{\ln y \cdot \ln z}, \\ x * (y * z) &= x^{\ln(y * z)} = x^{\ln(y^{\ln z})}\end{aligned}$$

Példa

Csoportot alkot-e az $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ halmaz az $x * y := x^{\ln y}$ művelettel?

- (0) Grupoid-e egyáltalán, azaz $*$ valóban művelet-e az $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ halmazon?

$$x, y \neq 1 \implies x^{\ln y} \neq 1 \text{ (miért?)}$$

- (1) Asszociatív-e a $*$ művelet? Tetszőleges $x, y, z \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ esetén

$$\begin{aligned}(x * y) * z &= (x * y)^{\ln z} = (x^{\ln y})^{\ln z} = x^{\ln y \cdot \ln z}, \\ x * (y * z) &= x^{\ln(y * z)} = x^{\ln(y^{\ln z})} = x^{\ln z \cdot \ln y}.\end{aligned}$$

Példa

Csoportot alkot-e az $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ halmaz az $x * y := x^{\ln y}$ művelettel?

- (0) Grupoid-e egyáltalán, azaz $*$ valóban művelet-e az $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ halmazon?

$$x, y \neq 1 \implies x^{\ln y} \neq 1 \text{ (miért?)}$$

- (1) Asszociatív-e a $*$ művelet? Tetszőleges $x, y, z \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ esetén

$$\begin{aligned}(x * y) * z &= (x * y)^{\ln z} = (x^{\ln y})^{\ln z} = x^{\ln y \cdot \ln z}, \\ x * (y * z) &= x^{\ln(y * z)} = x^{\ln(y^{\ln z})} = x^{\ln z \cdot \ln y}. \quad \checkmark\end{aligned}$$

Példa

Csoportot alkot-e az $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ halmaz az $x * y := x^{\ln y}$ művelettel?

- (0) Grupoid-e egyáltalán, azaz $*$ valóban művelet-e az $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ halmazon?

$$x, y \neq 1 \implies x^{\ln y} \neq 1 \text{ (miért?)}$$

- (1) Asszociatív-e a $*$ művelet? Tetszőleges $x, y, z \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ esetén

$$\begin{aligned} (x * y) * z &= (x * y)^{\ln z} = (x^{\ln y})^{\ln z} = x^{\ln y \cdot \ln z}, \\ x * (y * z) &= x^{\ln(y * z)} = x^{\ln(y^{\ln z})} = x^{\ln z \cdot \ln y}. \quad \checkmark \end{aligned}$$

- (2) Egységelem?

Példa

Csoportot alkot-e az $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ halmaz az $x * y := x^{\ln y}$ művelettel?

- (0) Grupoid-e egyáltalán, azaz $*$ valóban művelet-e az $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ halmazon?

$$x, y \neq 1 \implies x^{\ln y} \neq 1 \text{ (miért?)}$$

- (1) Asszociatív-e a $*$ művelet? Tetszőleges $x, y, z \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ esetén

$$\begin{aligned} (x * y) * z &= (x * y)^{\ln z} = (x^{\ln y})^{\ln z} = x^{\ln y \cdot \ln z}, \\ x * (y * z) &= x^{\ln(y * z)} = x^{\ln(y^{\ln z})} = x^{\ln z \cdot \ln y}. \quad \checkmark \end{aligned}$$

- (2) Egységelem? Az e szám!

Példa

Csoportot alkot-e az $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ halmaz az $x * y := x^{\ln y}$ művelettel?

- (0) Grupoid-e egyáltalán, azaz $*$ valóban művelet-e az $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ halmazon?

$$x, y \neq 1 \implies x^{\ln y} \neq 1 \text{ (miért?)}$$

- (1) Asszociatív-e a $*$ művelet? Tetszőleges $x, y, z \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ esetén

$$\begin{aligned}(x * y) * z &= (x * y)^{\ln z} = (x^{\ln y})^{\ln z} = x^{\ln y \cdot \ln z}, \\ x * (y * z) &= x^{\ln(y * z)} = x^{\ln(y^{\ln z})} = x^{\ln z \cdot \ln y}. \quad \checkmark\end{aligned}$$

- (2) Egységelem? Az e szám! Tetszőleges $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ esetén

$$x * e$$

Példa

Csoportot alkot-e az $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ halmaz az $x * y := x^{\ln y}$ művelettel?

- (0) Grupoid-e egyáltalán, azaz $*$ valóban művelet-e az $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ halmazon?

$$x, y \neq 1 \implies x^{\ln y} \neq 1 \text{ (miért?)}$$

- (1) Asszociatív-e a $*$ művelet? Tetszőleges $x, y, z \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ esetén

$$\begin{aligned}(x * y) * z &= (x * y)^{\ln z} = (x^{\ln y})^{\ln z} = x^{\ln y \cdot \ln z}, \\ x * (y * z) &= x^{\ln(y * z)} = x^{\ln(y^{\ln z})} = x^{\ln z \cdot \ln y}. \quad \checkmark\end{aligned}$$

- (2) Egységelem? Az e szám! Tetszőleges $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ esetén

$$x * e = x^{\ln e}$$

Példa

Csoportot alkot-e az $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ halmaz az $x * y := x^{\ln y}$ művelettel?

- (0) Grupoid-e egyáltalán, azaz $*$ valóban művelet-e az $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ halmazon?

$$x, y \neq 1 \implies x^{\ln y} \neq 1 \text{ (miért?)}$$

- (1) Asszociatív-e a $*$ művelet? Tetszőleges $x, y, z \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ esetén

$$\begin{aligned}(x * y) * z &= (x * y)^{\ln z} = (x^{\ln y})^{\ln z} = x^{\ln y \cdot \ln z}, \\ x * (y * z) &= x^{\ln(y * z)} = x^{\ln(y^{\ln z})} = x^{\ln z \cdot \ln y}. \quad \checkmark\end{aligned}$$

- (2) Egységelem? Az e szám! Tetszőleges $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ esetén

$$x * e = x^{\ln e} = x^1$$

Példa

Csoportot alkot-e az $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ halmaz az $x * y := x^{\ln y}$ művelettel?

- (0) Grupoid-e egyáltalán, azaz $*$ valóban művelet-e az $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ halmazon?

$$x, y \neq 1 \implies x^{\ln y} \neq 1 \text{ (miért?)}$$

- (1) Asszociatív-e a $*$ művelet? Tetszőleges $x, y, z \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ esetén

$$\begin{aligned} (x * y) * z &= (x * y)^{\ln z} = (x^{\ln y})^{\ln z} = x^{\ln y \cdot \ln z}, \\ x * (y * z) &= x^{\ln(y * z)} = x^{\ln(y^{\ln z})} = x^{\ln z \cdot \ln y}. \quad \checkmark \end{aligned}$$

- (2) Egységelem? Az e szám! Tetszőleges $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ esetén

$$x * e = x^{\ln e} = x^1 = x$$

Példa

Csoportot alkot-e az $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ halmaz az $x * y := x^{\ln y}$ művelettel?

- (0) Grupoid-e egyáltalán, azaz $*$ valóban művelet-e az $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ halmazon?

$$x, y \neq 1 \implies x^{\ln y} \neq 1 \text{ (miért?)}$$

- (1) Asszociatív-e a $*$ művelet? Tetszőleges $x, y, z \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ esetén

$$\begin{aligned}(x * y) * z &= (x * y)^{\ln z} = (x^{\ln y})^{\ln z} = x^{\ln y \cdot \ln z}, \\ x * (y * z) &= x^{\ln(y * z)} = x^{\ln(y^{\ln z})} = x^{\ln z \cdot \ln y}. \quad \checkmark\end{aligned}$$

- (2) Egységelem? Az e szám! Tetszőleges $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ esetén

$$x * e = x^{\ln e} = x^1 = x \quad \text{és} \quad e * x$$

Példa

Csoportot alkot-e az $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ halmaz az $x * y := x^{\ln y}$ művelettel?

- (0) Grupoid-e egyáltalán, azaz $*$ valóban művelet-e az $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ halmazon?

$$x, y \neq 1 \implies x^{\ln y} \neq 1 \text{ (miért?)}$$

- (1) Asszociatív-e a $*$ művelet? Tetszőleges $x, y, z \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ esetén

$$\begin{aligned}(x * y) * z &= (x * y)^{\ln z} = (x^{\ln y})^{\ln z} = x^{\ln y \cdot \ln z}, \\ x * (y * z) &= x^{\ln(y * z)} = x^{\ln(y^{\ln z})} = x^{\ln z \cdot \ln y}. \quad \checkmark\end{aligned}$$

- (2) Egységelem? Az e szám! Tetszőleges $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ esetén

$$x * e = x^{\ln e} = x^1 = x \quad \text{és} \quad e * x =$$

Példa

Csoportot alkot-e az $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ halmaz az $x * y := x^{\ln y}$ művelettel?

- (0) Grupoid-e egyáltalán, azaz $*$ valóban művelet-e az $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ halmazon?

$$x, y \neq 1 \implies x^{\ln y} \neq 1 \text{ (miért?)}$$

- (1) Asszociatív-e a $*$ művelet? Tetszőleges $x, y, z \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ esetén

$$\begin{aligned}(x * y) * z &= (x * y)^{\ln z} = (x^{\ln y})^{\ln z} = x^{\ln y \cdot \ln z}, \\ x * (y * z) &= x^{\ln(y * z)} = x^{\ln(y^{\ln z})} = x^{\ln z \cdot \ln y}. \quad \checkmark\end{aligned}$$

- (2) Egységelem? Az e szám! Tetszőleges $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ esetén

$$x * e = x^{\ln e} = x^1 = x \quad \text{és} \quad e * x = e^{\ln x}$$

Példa

Csoportot alkot-e az $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ halmaz az $x * y := x^{\ln y}$ művelettel?

- (0) Grupoid-e egyáltalán, azaz $*$ valóban művelet-e az $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ halmazon?

$$x, y \neq 1 \implies x^{\ln y} \neq 1 \text{ (miért?)}$$

- (1) Asszociatív-e a $*$ művelet? Tetszőleges $x, y, z \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ esetén

$$\begin{aligned} (x * y) * z &= (x * y)^{\ln z} = (x^{\ln y})^{\ln z} = x^{\ln y \cdot \ln z}, \\ x * (y * z) &= x^{\ln(y * z)} = x^{\ln(y^{\ln z})} = x^{\ln z \cdot \ln y}. \quad \checkmark \end{aligned}$$

- (2) Egységelem? Az e szám! Tetszőleges $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ esetén

$$x * e = x^{\ln e} = x^1 = x \quad \text{és} \quad e * x = e^{\ln x} = x$$

Példa

Csoportot alkot-e az $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ halmaz az $x * y := x^{\ln y}$ művelettel?

- (0) Grupoid-e egyáltalán, azaz $*$ valóban művelet-e az $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ halmazon?

$$x, y \neq 1 \implies x^{\ln y} \neq 1 \text{ (miért?)}$$

- (1) Asszociatív-e a $*$ művelet? Tetszőleges $x, y, z \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ esetén

$$\begin{aligned}(x * y) * z &= (x * y)^{\ln z} = (x^{\ln y})^{\ln z} = x^{\ln y \cdot \ln z}, \\ x * (y * z) &= x^{\ln(y * z)} = x^{\ln(y^{\ln z})} = x^{\ln z \cdot \ln y}. \quad \checkmark\end{aligned}$$

- (2) Egységelem? Az e szám! Tetszőleges $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ esetén

$$x * e = x^{\ln e} = x^1 = x \quad \text{és} \quad e * x = e^{\ln x} = x$$

- (3) Vannak-e inverzek?

Példa

Csoportot alkot-e az $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ halmaz az $x * y := x^{\ln y}$ művelettel?

- (0) Grupoid-e egyáltalán, azaz $*$ valóban művelet-e az $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ halmazon?

$$x, y \neq 1 \implies x^{\ln y} \neq 1 \text{ (miért?)}$$

- (1) Asszociatív-e a $*$ művelet? Tetszőleges $x, y, z \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ esetén

$$\begin{aligned}(x * y) * z &= (x * y)^{\ln z} = (x^{\ln y})^{\ln z} = x^{\ln y \cdot \ln z}, \\ x * (y * z) &= x^{\ln(y * z)} = x^{\ln(y^{\ln z})} = x^{\ln z \cdot \ln y}. \quad \checkmark\end{aligned}$$

- (2) Egységelem? Az e szám! Tetszőleges $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ esetén

$$x * e = x^{\ln e} = x^1 = x \quad \text{és} \quad e * x = e^{\ln x} = x$$

- (3) Vannak-e inverzek? Ha $x, y \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ egymás inverzei, akkor

$$x * y = x^{\ln y} = e$$

Példa

Csoportot alkot-e az $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ halmaz az $x * y := x^{\ln y}$ művelettel?

- (0) Grupoid-e egyáltalán, azaz $*$ valóban művelet-e az $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ halmazon?

$$x, y \neq 1 \implies x^{\ln y} \neq 1 \text{ (miért?)}$$

- (1) Asszociatív-e a $*$ művelet? Tetszőleges $x, y, z \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ esetén

$$\begin{aligned}(x * y) * z &= (x * y)^{\ln z} = (x^{\ln y})^{\ln z} = x^{\ln y \cdot \ln z}, \\ x * (y * z) &= x^{\ln(y * z)} = x^{\ln(y^{\ln z})} = x^{\ln z \cdot \ln y}. \quad \checkmark\end{aligned}$$

- (2) Egységelem? Az e szám! Tetszőleges $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ esetén

$$x * e = x^{\ln e} = x^1 = x \quad \text{és} \quad e * x = e^{\ln x} = x$$

- (3) Vannak-e inverzek? Ha $x, y \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ egymás inverzei, akkor

$$x * y = x^{\ln y} = e \implies x = e^{\frac{1}{\ln y}}.$$

Példa

Csoportot alkot-e az $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ halmaz az $x * y := x^{\ln y}$ művelettel?

- (0) Grupoid-e egyáltalán, azaz $*$ valóban művelet-e az $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ halmazon?

$$x, y \neq 1 \implies x^{\ln y} \neq 1 \text{ (miért?)}$$

- (1) Asszociatív-e a $*$ művelet? Tetszőleges $x, y, z \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ esetén

$$\begin{aligned}(x * y) * z &= (x * y)^{\ln z} = (x^{\ln y})^{\ln z} = x^{\ln y \cdot \ln z}, \\ x * (y * z) &= x^{\ln(y * z)} = x^{\ln(y^{\ln z})} = x^{\ln z \cdot \ln y}. \quad \checkmark\end{aligned}$$

- (2) Egységelem? Az e szám! Tetszőleges $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ esetén

$$x * e = x^{\ln e} = x^1 = x \quad \text{és} \quad e * x = e^{\ln x} = x$$

- (3) Vannak-e inverzek? Ha $x, y \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ egymás inverzei, akkor

$$x * y = x^{\ln y} = e \implies x = e^{\frac{1}{\ln y}}. \quad (y \neq 1)$$

Példa

Csoportot alkot-e az $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ halmaz az $x * y := x^{\ln y}$ művelettel?

- (0) Grupoid-e egyáltalán, azaz $*$ valóban művelet-e az $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ halmazon?

$$x, y \neq 1 \implies x^{\ln y} \neq 1 \text{ (miért?)}$$

- (1) Asszociatív-e a $*$ művelet? Tetszőleges $x, y, z \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ esetén

$$\begin{aligned} (x * y) * z &= (x * y)^{\ln z} = (x^{\ln y})^{\ln z} = x^{\ln y \cdot \ln z}, \\ x * (y * z) &= x^{\ln(y * z)} = x^{\ln(y^{\ln z})} = x^{\ln z \cdot \ln y}. \quad \checkmark \end{aligned}$$

- (2) Egységelem? Az e szám! Tetszőleges $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ esetén

$$x * e = x^{\ln e} = x^1 = x \quad \text{és} \quad e * x = e^{\ln x} = x$$

- (3) Vannak-e inverzek? Ha $x, y \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ egymás inverzei, akkor

$$x * y = x^{\ln y} = e \implies x = e^{\frac{1}{\ln y}}. \quad (y \neq 1)$$

Tehát y inverze csak $e^{\frac{1}{\ln y}}$ lehet.

Példa

Csoportot alkot-e az $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ halmaz az $x * y := x^{\ln y}$ művelettel?

- (0) Grupoid-e egyáltalán, azaz $*$ valóban művelet-e az $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ halmazon?

$$x, y \neq 1 \implies x^{\ln y} \neq 1 \text{ (miért?)}$$

- (1) Asszociatív-e a $*$ művelet? Tetszőleges $x, y, z \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ esetén

$$\begin{aligned} (x * y) * z &= (x * y)^{\ln z} = (x^{\ln y})^{\ln z} = x^{\ln y \cdot \ln z}, \\ x * (y * z) &= x^{\ln(y * z)} = x^{\ln(y^{\ln z})} = x^{\ln z \cdot \ln y}. \quad \checkmark \end{aligned}$$

- (2) Egységelem? Az e szám! Tetszőleges $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ esetén

$$x * e = x^{\ln e} = x^1 = x \quad \text{és} \quad e * x = e^{\ln x} = x$$

- (3) Vannak-e inverzek? Ha $x, y \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ egymás inverzei, akkor

$$x * y = x^{\ln y} = e \implies x = e^{\frac{1}{\ln y}}. \quad (y \neq 1)$$

Tehát y inverze csak $e^{\frac{1}{\ln y}}$ lehet. Próbáljuk ki, hogy valóban az-e.

Példa (folyt.)

Tehát x inverze csak $e^{\frac{1}{\ln x}}$ lehet. Próbáljuk ki, hogy valóban az-e.

Példa (folyt.)

Tehát x inverze csak $e^{\frac{1}{\ln x}}$ lehet. Próbáljuk ki, hogy valóban az-e.

$$e^{\frac{1}{\ln x}} * x$$

Példa (folyt.)

Tehát x inverze csak $e^{\frac{1}{\ln x}}$ lehet. Próbáljuk ki, hogy valóban az-e.

$$e^{\frac{1}{\ln x}} * x = \left(e^{\frac{1}{\ln x}}\right)^{\ln x}$$

Példa (folyt.)

Tehát x inverze csak $e^{\frac{1}{\ln x}}$ lehet. Próbáljuk ki, hogy valóban az-e.

$$e^{\frac{1}{\ln x}} * x = \left(e^{\frac{1}{\ln x}} \right)^{\ln x} = e^{\frac{1}{\ln x} \cdot \ln x}$$

Példa (folyt.)

Tehát x inverze csak $e^{\frac{1}{\ln x}}$ lehet. Próbáljuk ki, hogy valóban az-e.

$$e^{\frac{1}{\ln x}} * x = \left(e^{\frac{1}{\ln x}} \right)^{\ln x} = e^{\frac{1}{\ln x} \cdot \ln x} = e^1$$

Példa (folyt.)

Tehát x inverze csak $e^{\frac{1}{\ln x}}$ lehet. Próbáljuk ki, hogy valóban az-e.

$$e^{\frac{1}{\ln x}} * x = \left(e^{\frac{1}{\ln x}} \right)^{\ln x} = e^{\frac{1}{\ln x} \cdot \ln x} = e^1 = e$$

Példa (folyt.)

Tehát x inverze csak $e^{\frac{1}{\ln x}}$ lehet. Próbáljuk ki, hogy valóban az-e.

$$e^{\frac{1}{\ln x}} * x = \left(e^{\frac{1}{\ln x}}\right)^{\ln x} = e^{\frac{1}{\ln x} \cdot \ln x} = e^1 = e$$

$$x * e^{\frac{1}{\ln x}}$$

Példa (folyt.)

Tehát x inverze csak $e^{\frac{1}{\ln x}}$ lehet. Próbáljuk ki, hogy valóban az-e.

$$e^{\frac{1}{\ln x}} * x = \left(e^{\frac{1}{\ln x}}\right)^{\ln x} = e^{\frac{1}{\ln x} \cdot \ln x} = e^1 = e$$

$$x * e^{\frac{1}{\ln x}} = x^{\ln\left(e^{\frac{1}{\ln x}}\right)}$$

Példa (folyt.)

Tehát x inverze csak $e^{\frac{1}{\ln x}}$ lehet. Próbáljuk ki, hogy valóban az-e.

$$e^{\frac{1}{\ln x}} * x = \left(e^{\frac{1}{\ln x}} \right)^{\ln x} = e^{\frac{1}{\ln x} \cdot \ln x} = e^1 = e$$

$$x * e^{\frac{1}{\ln x}} = x^{\ln \left(e^{\frac{1}{\ln x}} \right)} = x^{\frac{1}{\ln x}}$$

Példa (folyt.)

Tehát x inverze csak $e^{\frac{1}{\ln x}}$ lehet. Próbáljuk ki, hogy valóban az-e.

$$e^{\frac{1}{\ln x}} * x = \left(e^{\frac{1}{\ln x}} \right)^{\ln x} = e^{\frac{1}{\ln x} \cdot \ln x} = e^1 = e$$

$$x * e^{\frac{1}{\ln x}} = x^{\ln \left(e^{\frac{1}{\ln x}} \right)} = x^{\frac{1}{\ln x}} = x^{\frac{\ln e}{\ln x}}$$

Példa (folyt.)

Tehát x inverze csak $e^{\frac{1}{\ln x}}$ lehet. Próbáljuk ki, hogy valóban az-e.

$$e^{\frac{1}{\ln x}} * x = \left(e^{\frac{1}{\ln x}} \right)^{\ln x} = e^{\frac{1}{\ln x} \cdot \ln x} = e^1 = e$$

$$x * e^{\frac{1}{\ln x}} = x^{\ln \left(e^{\frac{1}{\ln x}} \right)} = x^{\frac{1}{\ln x}} = x^{\frac{\ln e}{\ln x}} = x^{\log_x e}$$

Példa (folyt.)

Tehát x inverze csak $e^{\frac{1}{\ln x}}$ lehet. Próbáljuk ki, hogy valóban az-e.

$$e^{\frac{1}{\ln x}} * x = \left(e^{\frac{1}{\ln x}} \right)^{\ln x} = e^{\frac{1}{\ln x} \cdot \ln x} = e^1 = e$$

$$x * e^{\frac{1}{\ln x}} = x^{\ln \left(e^{\frac{1}{\ln x}} \right)} = x^{\frac{1}{\ln x}} = x^{\frac{\ln e}{\ln x}} = x^{\log_x e} = e$$

Példa (folyt.)

Tehát x inverze csak $e^{\frac{1}{\ln x}}$ lehet. Próbáljuk ki, hogy valóban az-e.

$$e^{\frac{1}{\ln x}} * x = \left(e^{\frac{1}{\ln x}}\right)^{\ln x} = e^{\frac{1}{\ln x} \cdot \ln x} = e^1 = e$$

$$x * e^{\frac{1}{\ln x}} = x^{\ln\left(e^{\frac{1}{\ln x}}\right)} = x^{\frac{1}{\ln x}} = x^{\frac{\ln e}{\ln x}} = x^{\log_x e} = e$$

A titok nyitja:

$$x * y = x^{\ln y} = \left(e^{\ln x}\right)^{\ln y} = e^{\ln x \cdot \ln y}.$$

Példa (folyt.)

Tehát x inverze csak $e^{\frac{1}{\ln x}}$ lehet. Próbáljuk ki, hogy valóban az-e.

$$e^{\frac{1}{\ln x}} * x = \left(e^{\frac{1}{\ln x}}\right)^{\ln x} = e^{\frac{1}{\ln x} \cdot \ln x} = e^1 = e$$

$$x * e^{\frac{1}{\ln x}} = x^{\ln\left(e^{\frac{1}{\ln x}}\right)} = x^{\frac{1}{\ln x}} = x^{\frac{\ln e}{\ln x}} = x^{\log_x e} = e$$

A titok nyitja:

$$x * y = x^{\ln y} = \left(e^{\ln x}\right)^{\ln y} = e^{\ln x \cdot \ln y}.$$

Innen látszik, hogy a $*$ művelet kommutatív, azaz $(\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}; *)$ Abel-csoport.

Példa (folyt.)

Tehát x inverze csak $e^{\frac{1}{\ln x}}$ lehet. Próbáljuk ki, hogy valóban az-e.

$$e^{\frac{1}{\ln x}} * x = \left(e^{\frac{1}{\ln x}}\right)^{\ln x} = e^{\frac{1}{\ln x} \cdot \ln x} = e^1 = e$$

$$x * e^{\frac{1}{\ln x}} = x^{\ln\left(e^{\frac{1}{\ln x}}\right)} = x^{\frac{1}{\ln x}} = x^{\frac{\ln e}{\ln x}} = x^{\log_x e} = e$$

A titok nyitja:

$$x * y = x^{\ln y} = \left(e^{\ln x}\right)^{\ln y} = e^{\ln x \cdot \ln y}.$$

Innen látszik, hogy a $*$ művelet kommutatív, azaz $(\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}; *)$ Abel-csoport.

A korábbiak is egyszerűbben kijöttek volna, ha már az elején észrevettük volna ezt. (HF végiggondolni)

Példa

Csoportot alkot-e az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ halmaz az alábbi $*$ művelettel?

$$(a, b) * (c, d) := (ac - bd, ad + bc).$$

Példa

Csoportot alkot-e az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ halmaz az alábbi $*$ művelettel?

$$(a, b) * (c, d) := (ac - bd, ad + bc).$$

Hosszas számolás helyett vegyük észre, hogy

Példa

Csoportot alkot-e az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ halmaz az alábbi $*$ művelettel?

$$(a, b) * (c, d) := (ac - bd, ad + bc).$$

Hosszas számolás helyett vegyük észre, hogy ez éppen a komplex számok szorzása!

Példa

Csoportot alkot-e az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ halmaz az alábbi $*$ művelettel?

$$(a, b) * (c, d) := (ac - bd, ad + bc).$$

Hosszas számolás helyett vegyük észre, hogy ez éppen a komplex számok szorzása!

Tehát $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; *)$ nem csoport

Példa

Csoportot alkot-e az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ halmaz az alábbi $*$ művelettel?

$$(a, b) * (c, d) := (ac - bd, ad + bc).$$

Hosszas számolás helyett vegyük észre, hogy ez éppen a komplex számok szorzása!

Tehát $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; *)$ nem csoport,

de $(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}; *)$ már Abel-csoport.

Példa

Csoportot alkot-e az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ halmaz az alábbi $*$ művelettel?

$$(a, b) * (c, d) := (ac - bd, ad + bc).$$

Hosszas számolás helyett vegyük észre, hogy ez éppen a komplex számok szorzása!

Tehát $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; *)$ nem csoport,

de $(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}; *)$ már Abel-csoport.

Példa

Kvaterniócsoport: $Q = (\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}; \cdot)$ HF

Példa

Csoportot alkot-e az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ halmaz az alábbi $*$ művelettel?

$$(a, b) * (c, d) := (ac - bd, ad + bc).$$

Hosszas számolás helyett vegyük észre, hogy ez éppen a komplex számok szorzása!

Tehát $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; *)$ nem csoport,

de $(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}; *)$ már Abel-csoport.

Példa

Kvaterniócsoport: $Q = (\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}; \cdot)$ HF

Példa

$(\mathcal{P}(U); \Delta)$

Példa

Csoportot alkot-e az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ halmaz az alábbi $*$ művelettel?

$$(a, b) * (c, d) := (ac - bd, ad + bc).$$

Hosszas számolás helyett vegyük észre, hogy ez éppen a komplex számok szorzása!

Tehát $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; *)$ nem csoport,

de $(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}; *)$ már Abel-csoport.

Példa

Kvaterniócsoport: $Q = (\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}; \cdot)$ HF

Példa

$(\mathcal{P}(U); \Delta)$ Abel-csoport, de $(\mathcal{P}(U); \cup)$

Példa

Csoportot alkot-e az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ halmaz az alábbi $*$ művelettel?

$$(a, b) * (c, d) := (ac - bd, ad + bc).$$

Hosszas számolás helyett vegyük észre, hogy ez éppen a komplex számok szorzása!

Tehát $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; *)$ nem csoport,

de $(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}; *)$ már Abel-csoport.

Példa

Kvaterniócsoport: $Q = (\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}; \cdot)$ HF

Példa

$(\mathcal{P}(U); \Delta)$ Abel-csoport, de $(\mathcal{P}(U); \cup)$ általában csak monoid

Példa

Csoportot alkot-e az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ halmaz az alábbi $*$ művelettel?

$$(a, b) * (c, d) := (ac - bd, ad + bc).$$

Hosszas számolás helyett vegyük észre, hogy ez éppen a komplex számok szorzása!

Tehát $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; *)$ nem csoport,

de $(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}; *)$ már Abel-csoport.

Példa

Kvaterniócsoport: $Q = (\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}; \cdot)$ HF

Példa

$(\mathcal{P}(U); \Delta)$ Abel-csoport, de $(\mathcal{P}(U); \cup)$ általában csak monoid (ha $U = \emptyset$, akkor Abel-csoport).

Példa

- ▶ $(\mathbb{Z}_{12}; +)$

Példa

- ▶ $(\mathbb{Z}_{12}; +)$: Abel-csoport

Példa

- ▶ $(\mathbb{Z}_{12}; +)$: Abel-csoport
- ▶ $(\mathbb{Z}_{12}; \cdot)$

Példa

- ▶ $(\mathbb{Z}_{12}; +)$: Abel-csoport
- ▶ $(\mathbb{Z}_{12}; \cdot)$: csak monoid

Példa

- ▶ $(\mathbb{Z}_{12}; +)$: Abel-csoport
- ▶ $(\mathbb{Z}_{12}; \cdot)$: csak monoid
- ▶ $(\mathbb{Z}_{12} \setminus \{\bar{0}\}; \cdot)$

Példa

- ▶ $(\mathbb{Z}_{12}; +)$: Abel-csoport
- ▶ $(\mathbb{Z}_{12}; \cdot)$: csak monoid
- ▶ $(\mathbb{Z}_{12} \setminus \{\bar{0}\}; \cdot)$: csak monoid

Példa

- ▶ $(\mathbb{Z}_{12}; +)$: Abel-csoport
- ▶ $(\mathbb{Z}_{12}; \cdot)$: csak monoid
- ▶ $(\mathbb{Z}_{12} \setminus \{\bar{0}\}; \cdot)$: csak monoid
- ▶ $(\mathbb{Z}_{13} \setminus \{\bar{0}\}; \cdot)$

Példa

- ▶ $(\mathbb{Z}_{12}; +)$: Abel-csoport
- ▶ $(\mathbb{Z}_{12}; \cdot)$: csak monoid
- ▶ $(\mathbb{Z}_{12} \setminus \{\bar{0}\}; \cdot)$: csak monoid
- ▶ $(\mathbb{Z}_{13} \setminus \{\bar{0}\}; \cdot)$: Abel-csoport

Példa

- ▶ $(\mathbb{Z}_{12}; +)$: Abel-csoport
- ▶ $(\mathbb{Z}_{12}; \cdot)$: csak monoid
- ▶ $(\mathbb{Z}_{12} \setminus \{\bar{0}\}; \cdot)$: csak monoid
- ▶ $(\mathbb{Z}_{13} \setminus \{\bar{0}\}; \cdot)$: Abel-csoport
- ▶ $(\mathbb{Z}_{12}^*; \cdot)$

Példa

- ▶ $(\mathbb{Z}_{12}; +)$: Abel-csoport
- ▶ $(\mathbb{Z}_{12}; \cdot)$: csak monoid
- ▶ $(\mathbb{Z}_{12} \setminus \{\bar{0}\}; \cdot)$: csak monoid
- ▶ $(\mathbb{Z}_{13} \setminus \{\bar{0}\}; \cdot)$: Abel-csoport
- ▶ $(\mathbb{Z}_{12}^*; \cdot)$: Abel-csoport

Példa

- ▶ $(\mathbb{Z}_{12}; +)$: Abel-csoport
- ▶ $(\mathbb{Z}_{12}; \cdot)$: csak monoid
- ▶ $(\mathbb{Z}_{12} \setminus \{\bar{0}\}; \cdot)$: csak monoid
- ▶ $(\mathbb{Z}_{13} \setminus \{\bar{0}\}; \cdot)$: Abel-csoport
- ▶ $(\mathbb{Z}_{12}^*; \cdot)$: Abel-csoport
- ▶ $(\mathbb{R}^{n \times n}; \cdot)$

Példa

- ▶ $(\mathbb{Z}_{12}; +)$: Abel-csoport
- ▶ $(\mathbb{Z}_{12}; \cdot)$: csak monoid
- ▶ $(\mathbb{Z}_{12} \setminus \{\bar{0}\}; \cdot)$: csak monoid
- ▶ $(\mathbb{Z}_{13} \setminus \{\bar{0}\}; \cdot)$: Abel-csoport
- ▶ $(\mathbb{Z}_{12}^*; \cdot)$: Abel-csoport
- ▶ $(\mathbb{R}^{n \times n}; \cdot)$: csak monoid

Példa

- ▶ $(\mathbb{Z}_{12}; +)$: Abel-csoport
- ▶ $(\mathbb{Z}_{12}; \cdot)$: csak monoid
- ▶ $(\mathbb{Z}_{12} \setminus \{\bar{0}\}; \cdot)$: csak monoid
- ▶ $(\mathbb{Z}_{13} \setminus \{\bar{0}\}; \cdot)$: Abel-csoport
- ▶ $(\mathbb{Z}_{12}^*; \cdot)$: Abel-csoport
- ▶ $(\mathbb{R}^{n \times n}; \cdot)$: csak monoid
- ▶ $\text{GL}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathbb{R}^{n \times n} : \det(M) \neq 0\}$

Példa

- ▶ $(\mathbb{Z}_{12}; +)$: Abel-csoport
- ▶ $(\mathbb{Z}_{12}; \cdot)$: csak monoid
- ▶ $(\mathbb{Z}_{12} \setminus \{\bar{0}\}; \cdot)$: csak monoid
- ▶ $(\mathbb{Z}_{13} \setminus \{\bar{0}\}; \cdot)$: Abel-csoport
- ▶ $(\mathbb{Z}_{12}^*; \cdot)$: Abel-csoport
- ▶ $(\mathbb{R}^{n \times n}; \cdot)$: csak monoid
- ▶ $\text{GL}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathbb{R}^{n \times n} : \det(M) \neq 0\}$:
 $n = 1$ esetén Abel-csoport, $n \geq 2$ esetén nemkommutatív csoport

Példa

- ▶ $(\mathbb{Z}_{12}; +)$: Abel-csoport
- ▶ $(\mathbb{Z}_{12}; \cdot)$: csak monoid
- ▶ $(\mathbb{Z}_{12} \setminus \{\bar{0}\}; \cdot)$: csak monoid
- ▶ $(\mathbb{Z}_{13} \setminus \{\bar{0}\}; \cdot)$: Abel-csoport
- ▶ $(\mathbb{Z}_{12}^*; \cdot)$: Abel-csoport
- ▶ $(\mathbb{R}^{n \times n}; \cdot)$: csak monoid
- ▶ $GL_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathbb{R}^{n \times n} : \det(M) \neq 0\}$:
 $n = 1$ esetén Abel-csoport, $n \geq 2$ esetén nemkommutatív csoport
- ▶ $SL_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathbb{R}^{n \times n} : \det(M) = 1\}$

Példa

- ▶ $(\mathbb{Z}_{12}; +)$: Abel-csoport
- ▶ $(\mathbb{Z}_{12}; \cdot)$: csak monoid
- ▶ $(\mathbb{Z}_{12} \setminus \{\bar{0}\}; \cdot)$: csak monoid
- ▶ $(\mathbb{Z}_{13} \setminus \{\bar{0}\}; \cdot)$: Abel-csoport
- ▶ $(\mathbb{Z}_{12}^*; \cdot)$: Abel-csoport
- ▶ $(\mathbb{R}^{n \times n}; \cdot)$: csak monoid
- ▶ $GL_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathbb{R}^{n \times n} : \det(M) \neq 0\}$:
 $n = 1$ esetén Abel-csoport, $n \geq 2$ esetén nemkommutatív csoport
- ▶ $SL_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathbb{R}^{n \times n} : \det(M) = 1\}$:
 $n = 1$ esetén Abel-csoport, $n \geq 2$ esetén nemkommutatív csoport

Példa

- ▶ $(\mathbb{Z}_{12}; +)$: Abel-csoport
- ▶ $(\mathbb{Z}_{12}; \cdot)$: csak monoid
- ▶ $(\mathbb{Z}_{12} \setminus \{\bar{0}\}; \cdot)$: csak monoid
- ▶ $(\mathbb{Z}_{13} \setminus \{\bar{0}\}; \cdot)$: Abel-csoport
- ▶ $(\mathbb{Z}_{12}^*; \cdot)$: Abel-csoport
- ▶ $(\mathbb{R}^{n \times n}; \cdot)$: csak monoid
- ▶ $GL_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathbb{R}^{n \times n} : \det(M) \neq 0\}$:
 $n = 1$ esetén Abel-csoport, $n \geq 2$ esetén nemkommutatív csoport
- ▶ $SL_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathbb{R}^{n \times n} : \det(M) = 1\}$:
 $n = 1$ esetén Abel-csoport, $n \geq 2$ esetén nemkommutatív csoport
- ▶ $GL_n(\mathbb{Z}) = \{M \in \mathbb{Z}^{n \times n} : \det(M) \neq 0\}$

Példa

- ▶ $(\mathbb{Z}_{12}; +)$: Abel-csoport
- ▶ $(\mathbb{Z}_{12}; \cdot)$: csak monoid
- ▶ $(\mathbb{Z}_{12} \setminus \{\bar{0}\}; \cdot)$: csak monoid
- ▶ $(\mathbb{Z}_{13} \setminus \{\bar{0}\}; \cdot)$: Abel-csoport
- ▶ $(\mathbb{Z}_{12}^*; \cdot)$: Abel-csoport
- ▶ $(\mathbb{R}^{n \times n}; \cdot)$: csak monoid
- ▶ $GL_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathbb{R}^{n \times n} : \det(M) \neq 0\}$:
 $n = 1$ esetén Abel-csoport, $n \geq 2$ esetén nemkommutatív csoport
- ▶ $SL_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathbb{R}^{n \times n} : \det(M) = 1\}$:
 $n = 1$ esetén Abel-csoport, $n \geq 2$ esetén nemkommutatív csoport
- ▶ $GL_n(\mathbb{Z}) = \{M \in \mathbb{Z}^{n \times n} : \det(M) \neq 0\}$: (csak monoid)

Példa

- ▶ $(\mathbb{Z}_{12}; +)$: Abel-csoport
- ▶ $(\mathbb{Z}_{12}; \cdot)$: csak monoid
- ▶ $(\mathbb{Z}_{12} \setminus \{\bar{0}\}; \cdot)$: csak monoid
- ▶ $(\mathbb{Z}_{13} \setminus \{\bar{0}\}; \cdot)$: Abel-csoport
- ▶ $(\mathbb{Z}_{12}^*; \cdot)$: Abel-csoport
- ▶ $(\mathbb{R}^{n \times n}; \cdot)$: csak monoid
- ▶ $GL_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathbb{R}^{n \times n} : \det(M) \neq 0\}$:
 $n = 1$ esetén Abel-csoport, $n \geq 2$ esetén nemkommutatív csoport
- ▶ $SL_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathbb{R}^{n \times n} : \det(M) = 1\}$:
 $n = 1$ esetén Abel-csoport, $n \geq 2$ esetén nemkommutatív csoport
- ▶ $GL_n(\mathbb{Z}) = \{M \in \mathbb{Z}^{n \times n} : \det(M) \neq 0\}$: (csak monoid)
- ▶ $SL_n(\mathbb{Z}) = \{M \in \mathbb{Z}^{n \times n} : \det(M) = 1\}$

Példa

- ▶ $(\mathbb{Z}_{12}; +)$: Abel-csoport
- ▶ $(\mathbb{Z}_{12}; \cdot)$: csak monoid
- ▶ $(\mathbb{Z}_{12} \setminus \{\bar{0}\}; \cdot)$: csak monoid
- ▶ $(\mathbb{Z}_{13} \setminus \{\bar{0}\}; \cdot)$: Abel-csoport
- ▶ $(\mathbb{Z}_{12}^*; \cdot)$: Abel-csoport
- ▶ $(\mathbb{R}^{n \times n}; \cdot)$: csak monoid
- ▶ $GL_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathbb{R}^{n \times n} : \det(M) \neq 0\}$:
 $n = 1$ esetén Abel-csoport, $n \geq 2$ esetén nemkommutatív csoport
- ▶ $SL_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathbb{R}^{n \times n} : \det(M) = 1\}$:
 $n = 1$ esetén Abel-csoport, $n \geq 2$ esetén nemkommutatív csoport
- ▶ $GL_n(\mathbb{Z}) = \{M \in \mathbb{Z}^{n \times n} : \det(M) \neq 0\}$: (csak monoid)
- ▶ $SL_n(\mathbb{Z}) = \{M \in \mathbb{Z}^{n \times n} : \det(M) = 1\}$:
 $n = 1$ esetén Abel-csoport, $n \geq 2$ esetén nemkommutatív csoport

Példa

A sík összes egybevágósági transzformációi (nemkommutatív) csoportot alkotnak a transzformációk szorzására (egymás utáni végrehajtás).

Példa

A sík összes egybevágósági transzformációi (nemkommutatív) csoportot alkotnak a transzformációk szorzására (egymás utáni végrehajtás).

Egy tetszőleges síkidomot önmagába képező egybevágóságok részcsoporthat alkotnak ebben a csoportban (a síkidom szimmetriacsoportja).

Példa

A sík összes egybevágósági transzformációi (nemkommutatív) csoportot alkotnak a transzformációk szorzására (egymás utáni végrehajtás).

Egy tetszőleges síkidomot önmagába képező egybevágóságok részcsoportot alkotnak ebben a csoportban (a síkidom szimmetriacsoportja).

Rajzoljunk olyan alakzatot, amelynek szimmetriacsoportja

- ▶ egyelemű;

Példa

A sík összes egybevágósági transzformációi (nemkommutatív) csoportot alkotnak a transzformációk szorzására (egymás utáni végrehajtás).

Egy tetszőleges síkidomot önmagába képező egybevágóságok részcsoporthat alkotnak ebben a csoportban (a síkidom szimmetriacsoportja).

Rajzoljunk olyan alakzatot, amelynek szimmetriacsoportja

- ▶ egyelemű;
- ▶ kételemű;

Példa

A sík összes egybevágósági transzformációi (nemkommutatív) csoportot alkotnak a transzformációk szorzására (egymás utáni végrehajtás).

Egy tetszőleges síkidomot önmagába képező egybevágóságok részcsoporthat alkotnak ebben a csoportban (a síkidom szimmetriacsoportja).

Rajzoljunk olyan alakzatot, amelynek szimmetriacsoportja

- ▶ egyelemű;
- ▶ kételemű;
- ▶ háromelemű;

Példa

A sík összes egybevágósági transzformációi (nemkommutatív) csoportot alkotnak a transzformációk szorzására (egymás utáni végrehajtás).

Egy tetszőleges síkidomot önmagába képező egybevágóságok részcsoporthat alkotnak ebben a csoportban (a síkidom szimmetriacsoportja).

Rajzoljunk olyan alakzatot, amelynek szimmetriacsoportja

- ▶ egyelemű;
- ▶ kételemű;
- ▶ háromelemű;
- ▶ négyelemű;

Példa

A sík összes egybevágósági transzformációi (nemkommutatív) csoportot alkotnak a transzformációk szorzására (egymás utáni végrehajtás).

Egy tetszőleges síkidomot önmagába képező egybevágóságok részcsoporthat alkotnak ebben a csoportban (a síkidom szimmetriacsoportja).

Rajzoljunk olyan alakzatot, amelynek szimmetriacsoportja

- ▶ egyelemű;
- ▶ kételemű;
- ▶ háromelemű;
- ▶ négyelemű;
- ▶ n -elemű;

Példa

A sík összes egybevágósági transzformációi (nemkommutatív) csoportot alkotnak a transzformációk szorzására (egymás utáni végrehajtás).

Egy tetszőleges síkidomot önmagába képező egybevágóságok részcsoporthat alkotnak ebben a csoportban (a síkidom szimmetriacsoportja).

Rajzoljunk olyan alakzatot, amelynek szimmetriacsoportja

- ▶ egyelemű;
- ▶ kételemű;
- ▶ háromelemű;
- ▶ négyelemű;
- ▶ n -elemű;
- ▶ megszámlálhatóan végtelen;

Példa

A sík összes egybevágósági transzformációi (nemkommutatív) csoportot alkotnak a transzformációk szorzására (egymás utáni végrehajtás).

Egy tetszőleges síkidomot önmagába képező egybevágóságok részcsoporthat alkotnak ebben a csoportban (a síkidom szimmetriacsoportja).

Rajzoljunk olyan alakzatot, amelynek szimmetriacsoportja

- ▶ egyelemű;
- ▶ kételemű;
- ▶ háromelemű;
- ▶ négyelemű;
- ▶ n -elemű;
- ▶ megszámlálhatóan végtelen;
- ▶ kontinuum számosságú.

Tétel

A sík egybevágóságainak csoportját generálják a tengelyes tükrözések.

Tétel

A sík egybevágóságainak csoportját generálják a tengelyes tükrözések.

Biz.

Az egybevágóságok a következők:

Tétel

A sík egybevágóságainak csoportját generálják a tengelyes tükrözések.

Biz.

Az egybevágóságok a következők:

- ▶ tengelyes tükrözések;

Tétel

A sík egybevágóságainak csoportját generálják a tengelyes tükrözések.

Biz.

Az egybevágóságok a következők:

- ▶ tengelyes tükrözések;
- ▶ forgatások

Tétel

A sík egybevágóságainak csoportját generálják a tengelyes tükrözések.

Biz.

Az egybevágóságok a következők:

- ▶ tengelyes tükrözések;
- ▶ forgatások (két tükrözés szorzata, HF);

Tétel

A sík egybevágóságainak csoportját generálják a tengelyes tükrözések.

Biz.

Az egybevágóságok a következők:

- ▶ tengelyes tükrözések;
- ▶ forgatások (két tükrözés szorzata, HF);
- ▶ eltolások

Tétel

A sík egybevágóságainak csoportját generálják a tengelyes tükrözések.

Biz.

Az egybevágóságok a következők:

- ▶ tengelyes tükrözések;
- ▶ forgatások (két tükrözés szorzata, HF);
- ▶ eltolások (két tükrözés szorzata, HF);

Tétel

A sík egybevágóságainak csoportját generálják a tengelyes tükrözések.

Biz.

Az egybevágóságok a következők:

- ▶ tengelyes tükrözések;
- ▶ forgatások (két tükrözés szorzata, HF);
- ▶ eltolások (két tükrözés szorzata, HF);
- ▶ csúsztatva tükrözések

Tétel

A sík egybevágóságainak csoportját generálják a tengelyes tükrözések.

Biz.

Az egybevágóságok a következők:

- ▶ tengelyes tükrözések;
- ▶ forgatások (két tükrözés szorzata, HF);
- ▶ eltolások (két tükrözés szorzata, HF);
- ▶ csúsztatva tükrözések (három tükrözés szorzata, HF).



Definíció

A szabályos n -szög szimmetriacsoportját **n -edfokú diédercsoportnak** nevezzük és D_n -nel jelöljük.

Definíció

A szabályos n -szög szimmetriacsoportját **n -edfokú diédercsoportnak** nevezzük és D_n -nel jelöljük.

A D_n csoportnak $2n$ eleme van: n forgatás és n tükrözés.

Definíció

A szabályos n -szög szimmetriacsoportját **n -edfokú diédercsoportnak** nevezzük és D_n -nel jelöljük.

A D_n csoportnak $2n$ eleme van: n forgatás és n tükrözés.

Jelölje f_k sokszög középpontja körüli $\frac{2k\pi}{n}$ szögű forgatást ($0 \leq k \leq n-1$)

Definíció

A szabályos n -szög szimmetriacsoportját **n -edfokú diédercsoportnak** nevezzük és D_n -nel jelöljük.

A D_n csoportnak $2n$ eleme van: n forgatás és n tükrözés.

Jelölje f_k sokszög középpontja körüli $\frac{2k\pi}{n}$ szögű forgatást ($0 \leq k \leq n-1$), és legyenek a tükrözések $t_0, t_1, \dots, t_{n-1}$ (a tengelyeket pozitív körüljárás szerint számozzuk; két „szomszédos” tengely $\frac{\pi}{n}$ szöget zár be egymással).

Definíció

A szabályos n -szög szimmetriacsoportját **n -edfokú diédercsoportnak** nevezzük és D_n -nel jelöljük.

A D_n csoportnak $2n$ eleme van: n forgatás és n tükrözés.

Jelölje f_k sokszög középpontja körüli $\frac{2k\pi}{n}$ szögű forgatást ($0 \leq k \leq n-1$), és legyenek a tükrözések $t_0, t_1, \dots, t_{n-1}$ (a tengelyeket pozitív körüljárás szerint számozzuk; két „szomszédos” tengely $\frac{\pi}{n}$ szöget zár be egymással). Ekkor $D_n = \{\text{id} = f_0, f_1, \dots, f_{n-1}, t_0, t_1, \dots, t_{n-1}\}$.

Definíció

A szabályos n -szög szimmetriacsoportját **n -edfokú diédercsoportnak** nevezzük és D_n -nel jelöljük.

A D_n csoportnak $2n$ eleme van: n forgatás és n tükrözés.

Jelölje f_k sokszög középpontja körüli $\frac{2k\pi}{n}$ szögű forgatást ($0 \leq k \leq n-1$), és legyenek a tükrözések $t_0, t_1, \dots, t_{n-1}$ (a tengelyeket pozitív körüljárás szerint számozzuk; két „szomszédos” tengely $\frac{\pi}{n}$ szöget zár be egymással). Ekkor $D_n = \{\text{id} = f_0, f_1, \dots, f_{n-1}, t_0, t_1, \dots, t_{n-1}\}$.

Állítás

Minden $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ esetén

$$(1) \quad f_k = f_1^k;$$

Definíció

A szabályos n -szög szimmetriacsoportját **n -edfokú diédercsoportnak** nevezzük és D_n -nel jelöljük.

A D_n csoportnak $2n$ eleme van: n forgatás és n tükrözés.

Jelölje f_k sokszög középpontja körüli $\frac{2k\pi}{n}$ szögű forgatást ($0 \leq k \leq n-1$), és legyenek a tükrözések $t_0, t_1, \dots, t_{n-1}$ (a tengelyeket pozitív körüljárás szerint számozzuk; két „szomszédos” tengely $\frac{\pi}{n}$ szöget zár be egymással). Ekkor $D_n = \{\text{id} = f_0, f_1, \dots, f_{n-1}, t_0, t_1, \dots, t_{n-1}\}$.

Állítás

Minden $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ esetén

(1) $f_k = f_1^k$;

(2) $t_k = t_0 \cdot f_k = t_0 \cdot f_1^k$.

Definíció

A szabályos n -szög szimmetriacsoportját **n -edfokú diédercsoportnak** nevezzük és D_n -nel jelöljük.

A D_n csoportnak $2n$ eleme van: n forgatás és n tükrözés.

Jelölje f_k sokszög középpontja körüli $\frac{2k\pi}{n}$ szögű forgatást ($0 \leq k \leq n-1$), és legyenek a tükrözések $t_0, t_1, \dots, t_{n-1}$ (a tengelyeket pozitív körüljárás szerint számozzuk; két „szomszédos” tengely $\frac{\pi}{n}$ szöget zár be egymással). Ekkor $D_n = \{\text{id} = f_0, f_1, \dots, f_{n-1}, t_0, t_1, \dots, t_{n-1}\}$.

Állítás

Minden $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ esetén

$$(1) \quad f_k = f_1^k;$$

$$(2) \quad t_k = t_0 \cdot f_k = t_0 \cdot f_1^k.$$

Biz.

HF

Definíció

A szabályos n -szög szimmetriacsoportját **n -edfokú diédercsoportnak** nevezzük és D_n -nel jelöljük.

A D_n csoportnak $2n$ eleme van: n forgatás és n tükrözés.

Jelölje f_k sokszög középpontja körüli $\frac{2k\pi}{n}$ szögű forgatást ($0 \leq k \leq n-1$), és legyenek a tükrözések $t_0, t_1, \dots, t_{n-1}$ (a tengelyeket pozitív körüljárás szerint számozzuk; két „szomszédos” tengely $\frac{\pi}{n}$ szöget zár be egymással). Ekkor $D_n = \{\text{id} = f_0, f_1, \dots, f_{n-1}, t_0, t_1, \dots, t_{n-1}\}$.

Állítás

Minden $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ esetén

$$(1) \quad f_k = f_1^k;$$

$$(2) \quad t_k = t_0 \cdot f_k = t_0 \cdot f_1^k.$$

Biz.

HF



Következmény

A D_n csoportot generálja $f := f_1$ és $t := t_0$:

$$D_n = [f, t] = \{\text{id}, f, f^2, \dots, f^{n-1}, t, tf, tf^2, \dots, tf^{n-1}\}.$$

Állítás

Ha t és f helyet cserél, akkor f „invertálódik”: $ft = tf^{-1}$.

Állítás

Ha t és f helyet cserél, akkor f „invertálódik”: $ft = tf^{-1}$.

Sőt, minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén $f^k t = tf^{-k}$.

Állítás

Ha t és f helyet cserél, akkor f „invertálódik”: $ft = tf^{-1}$.

Sőt, minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén $f^k t = tf^{-k}$.

Biz.

HF

Állítás

Ha t és f helyet cserél, akkor f „invertálódik”: $ft = tf^{-1}$.

Sőt, minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén $f^k t = tf^{-k}$.

Biz.

HF



Példa

Számoljunk D_{10} -ben! Emlékeztető: $D_{10} = \{\text{id}, f, \dots, f^9, t, tf, \dots, tf^9\}$.

Állítás

Ha t és f helyet cserél, akkor f „invertálódik”: $ft = tf^{-1}$.

Sőt, minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén $f^k t = tf^{-k}$.

Biz.

HF



Példa

Számoljunk D_{10} -ben! Emlékeztető: $D_{10} = \{\text{id}, f, \dots, f^9, t, tf, \dots, tf^9\}$.

► $f^5 \cdot f^9$

Állítás

Ha t és f helyet cserél, akkor f „invertálódik”: $ft = tf^{-1}$.

Sőt, minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén $f^k t = tf^{-k}$.

Biz.

HF



Példa

Számoljunk D_{10} -ben! Emlékeztető: $D_{10} = \{\text{id}, f, \dots, f^9, t, tf, \dots, tf^9\}$.

► $f^5 \cdot f^9 = f^{14}$

Állítás

Ha t és f helyet cserél, akkor f „invertálódik”: $ft = tf^{-1}$.

Sőt, minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén $f^k t = tf^{-k}$.

Biz.

HF



Példa

Számoljunk D_{10} -ben! Emlékeztető: $D_{10} = \{\text{id}, f, \dots, f^9, t, tf, \dots, tf^9\}$.

► $f^5 \cdot f^9 = f^{14} = f^4$

Állítás

Ha t és f helyet cserél, akkor f „invertálódik”: $ft = tf^{-1}$.

Sőt, minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén $f^k t = tf^{-k}$.

Biz.

HF



Példa

Számoljunk D_{10} -ben! Emlékeztető: $D_{10} = \{\text{id}, f, \dots, f^9, t, tf, \dots, tf^9\}$.

► $f^5 \cdot f^9 = f^{14} = f^4$

► f^{2013}

Állítás

Ha t és f helyet cserél, akkor f „invertálódik”: $ft = tf^{-1}$.

Sőt, minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén $f^k t = tf^{-k}$.

Biz.

HF



Példa

Számoljunk D_{10} -ben! Emlékeztető: $D_{10} = \{\text{id}, f, \dots, f^9, t, tf, \dots, tf^9\}$.

► $f^5 \cdot f^9 = f^{14} = f^4$

► $f^{2013} = f^3$

Állítás

Ha t és f helyet cserél, akkor f „invertálódik”: $ft = tf^{-1}$.

Sőt, minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén $f^k t = tf^{-k}$.

Biz.

HF



Példa

Számoljunk D_{10} -ben! Emlékeztető: $D_{10} = \{\text{id}, f, \dots, f^9, t, tf, \dots, tf^9\}$.

▶ $f^5 \cdot f^9 = f^{14} = f^4$

▶ $f^{2013} = f^3$

▶ f^{-2013}

Állítás

Ha t és f helyet cserél, akkor f „invertálódik”: $ft = tf^{-1}$.

Sőt, minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén $f^k t = tf^{-k}$.

Biz.

HF



Példa

Számoljunk D_{10} -ben! Emlékeztető: $D_{10} = \{\text{id}, f, \dots, f^9, t, tf, \dots, tf^9\}$.

► $f^5 \cdot f^9 = f^{14} = f^4$

► $f^{2013} = f^3$

► $f^{-2013} = f^7$

Állítás

Ha t és f helyet cserél, akkor f „invertálódik”: $ft = tf^{-1}$.

Sőt, minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén $f^k t = tf^{-k}$.

Biz.

HF



Példa

Számoljunk D_{10} -ben! Emlékeztető: $D_{10} = \{\text{id}, f, \dots, f^9, t, tf, \dots, tf^9\}$.

▶ $f^5 \cdot f^9 = f^{14} = f^4$

▶ $f^{2013} = f^3$

▶ $f^{-2013} = f^7$

▶ $tf^7 \cdot f^9$

Állítás

Ha t és f helyet cserél, akkor f „invertálódik”: $ft = tf^{-1}$.

Sőt, minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén $f^k t = tf^{-k}$.

Biz.

HF



Példa

Számoljunk D_{10} -ben! Emlékeztető: $D_{10} = \{\text{id}, f, \dots, f^9, t, tf, \dots, tf^9\}$.

▶ $f^5 \cdot f^9 = f^{14} = f^4$

▶ $f^{2013} = f^3$

▶ $f^{-2013} = f^7$

▶ $tf^7 \cdot f^9 = tf^{16}$

Állítás

Ha t és f helyet cserél, akkor f „invertálódik”: $ft = tf^{-1}$.

Sőt, minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén $f^k t = tf^{-k}$.

Biz.

HF



Példa

Számoljunk D_{10} -ben! Emlékeztető: $D_{10} = \{\text{id}, f, \dots, f^9, t, tf, \dots, tf^9\}$.

- ▶ $f^5 \cdot f^9 = f^{14} = f^4$
- ▶ $f^{2013} = f^3$
- ▶ $f^{-2013} = f^7$
- ▶ $tf^7 \cdot f^9 = tf^{16} = tf^6$

Állítás

Ha t és f helyet cserél, akkor f „invertálódik”: $ft = tf^{-1}$.

Sőt, minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén $f^k t = tf^{-k}$.

Biz.

HF



Példa

Számoljunk D_{10} -ben! Emlékeztető: $D_{10} = \{\text{id}, f, \dots, f^9, t, tf, \dots, tf^9\}$.

- ▶ $f^5 \cdot f^9 = f^{14} = f^4$
- ▶ $f^{2013} = f^3$
- ▶ $f^{-2013} = f^7$
- ▶ $tf^7 \cdot f^9 = tf^{16} = tf^6$
- ▶ $f^9 \cdot tf^7$

Állítás

Ha t és f helyet cserél, akkor f „invertálódik”: $ft = tf^{-1}$.

Sőt, minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén $f^k t = tf^{-k}$.

Biz.

HF



Példa

Számoljunk D_{10} -ben! Emlékeztető: $D_{10} = \{\text{id}, f, \dots, f^9, t, tf, \dots, tf^9\}$.

- ▶ $f^5 \cdot f^9 = f^{14} = f^4$
- ▶ $f^{2013} = f^3$
- ▶ $f^{-2013} = f^7$
- ▶ $tf^7 \cdot f^9 = tf^{16} = tf^6$
- ▶ $f^9 \cdot tf^7 = tf^{-9}f^7$

Állítás

Ha t és f helyet cserél, akkor f „invertálódik”: $ft = tf^{-1}$.

Sőt, minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén $f^k t = tf^{-k}$.

Biz.

HF



Példa

Számoljunk D_{10} -ben! Emlékeztető: $D_{10} = \{\text{id}, f, \dots, f^9, t, tf, \dots, tf^9\}$.

- ▶ $f^5 \cdot f^9 = f^{14} = f^4$
- ▶ $f^{2013} = f^3$
- ▶ $f^{-2013} = f^7$
- ▶ $tf^7 \cdot f^9 = tf^{16} = tf^6$
- ▶ $f^9 \cdot tf^7 = tf^{-9}f^7 = tf^{-2}$

Állítás

Ha t és f helyet cserél, akkor f „invertálódik”: $ft = tf^{-1}$.

Sőt, minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén $f^k t = tf^{-k}$.

Biz.

HF



Példa

Számoljunk D_{10} -ben! Emlékeztető: $D_{10} = \{\text{id}, f, \dots, f^9, t, tf, \dots, tf^9\}$.

- ▶ $f^5 \cdot f^9 = f^{14} = f^4$
- ▶ $f^{2013} = f^3$
- ▶ $f^{-2013} = f^7$
- ▶ $tf^7 \cdot f^9 = tf^{16} = tf^6$
- ▶ $f^9 \cdot tf^7 = tf^{-9}f^7 = tf^{-2} = tf^8$

Állítás

Ha t és f helyet cserél, akkor f „invertálódik”: $ft = tf^{-1}$.

Sőt, minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén $f^k t = tf^{-k}$.

Biz.

HF



Példa

Számoljunk D_{10} -ben! Emlékeztető: $D_{10} = \{\text{id}, f, \dots, f^9, t, tf, \dots, tf^9\}$.

- ▶ $f^5 \cdot f^9 = f^{14} = f^4$
- ▶ $f^{2013} = f^3$
- ▶ $f^{-2013} = f^7$
- ▶ $tf^7 \cdot f^9 = tf^{16} = tf^6$
- ▶ $f^9 \cdot tf^7 = tf^{-9}f^7 = tf^{-2} = tf^8$
- ▶ $tf^9 \cdot tf^7$

Állítás

Ha t és f helyet cserél, akkor f „invertálódik”: $ft = tf^{-1}$.

Sőt, minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén $f^k t = tf^{-k}$.

Biz.

HF



Példa

Számoljunk D_{10} -ben! Emlékeztető: $D_{10} = \{\text{id}, f, \dots, f^9, t, tf, \dots, tf^9\}$.

- ▶ $f^5 \cdot f^9 = f^{14} = f^4$
- ▶ $f^{2013} = f^3$
- ▶ $f^{-2013} = f^7$
- ▶ $tf^7 \cdot f^9 = tf^{16} = tf^6$
- ▶ $f^9 \cdot tf^7 = tf^{-9}f^7 = tf^{-2} = tf^8$
- ▶ $tf^9 \cdot tf^7 = ttf^{-9}f^7$

Állítás

Ha t és f helyet cserél, akkor f „invertálódik”: $ft = tf^{-1}$.

Sőt, minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén $f^k t = tf^{-k}$.

Biz.

HF



Példa

Számoljunk D_{10} -ben! Emlékeztető: $D_{10} = \{\text{id}, f, \dots, f^9, t, tf, \dots, tf^9\}$.

- ▶ $f^5 \cdot f^9 = f^{14} = f^4$
- ▶ $f^{2013} = f^3$
- ▶ $f^{-2013} = f^7$
- ▶ $tf^7 \cdot f^9 = tf^{16} = tf^6$
- ▶ $f^9 \cdot tf^7 = tf^{-9}f^7 = tf^{-2} = tf^8$
- ▶ $tf^9 \cdot tf^7 = ttf^{-9}f^7 = f^{-2}$

Állítás

Ha t és f helyet cserél, akkor f „invertálódik”: $ft = tf^{-1}$.

Sőt, minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén $f^k t = tf^{-k}$.

Biz.

HF



Példa

Számoljunk D_{10} -ben! Emlékeztető: $D_{10} = \{\text{id}, f, \dots, f^9, t, tf, \dots, tf^9\}$.

- ▶ $f^5 \cdot f^9 = f^{14} = f^4$
- ▶ $f^{2013} = f^3$
- ▶ $f^{-2013} = f^7$
- ▶ $tf^7 \cdot f^9 = tf^{16} = tf^6$
- ▶ $f^9 \cdot tf^7 = tf^{-9}f^7 = tf^{-2} = tf^8$
- ▶ $tf^9 \cdot tf^7 = ttf^{-9}f^7 = f^{-2} = f^8$

Állítás

Ha t és f helyet cserél, akkor f „invertálódik”: $ft = tf^{-1}$.

Sőt, minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén $f^k t = tf^{-k}$.

Biz.

HF



Példa

Számoljunk D_{10} -ben! Emlékeztető: $D_{10} = \{\text{id}, f, \dots, f^9, t, tf, \dots, tf^9\}$.

- ▶ $f^5 \cdot f^9 = f^{14} = f^4$
- ▶ $f^{2013} = f^3$
- ▶ $f^{-2013} = f^7$
- ▶ $tf^7 \cdot f^9 = tf^{16} = tf^6$
- ▶ $f^9 \cdot tf^7 = tf^{-9}f^7 = tf^{-2} = tf^8$
- ▶ $tf^9 \cdot tf^7 = ttf^{-9}f^7 = f^{-2} = f^8$
- ▶ $(tf^7)^{-1}$

Állítás

Ha t és f helyet cserél, akkor f „invertálódik”: $ft = tf^{-1}$.

Sőt, minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén $f^k t = tf^{-k}$.

Biz.

HF



Példa

Számoljunk D_{10} -ben! Emlékeztető: $D_{10} = \{\text{id}, f, \dots, f^9, t, tf, \dots, tf^9\}$.

- ▶ $f^5 \cdot f^9 = f^{14} = f^4$
- ▶ $f^{2013} = f^3$
- ▶ $f^{-2013} = f^7$
- ▶ $tf^7 \cdot f^9 = tf^{16} = tf^6$
- ▶ $f^9 \cdot tf^7 = tf^{-9}f^7 = tf^{-2} = tf^8$
- ▶ $tf^9 \cdot tf^7 = ttf^{-9}f^7 = f^{-2} = f^8$
- ▶ $(tf^7)^{-1} = f^{-7}t^{-1}$

Állítás

Ha t és f helyet cserél, akkor f „invertálódik”: $ft = tf^{-1}$.

Sőt, minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén $f^k t = tf^{-k}$.

Biz.

HF



Példa

Számoljunk D_{10} -ben! Emlékeztető: $D_{10} = \{\text{id}, f, \dots, f^9, t, tf, \dots, tf^9\}$.

- ▶ $f^5 \cdot f^9 = f^{14} = f^4$
- ▶ $f^{2013} = f^3$
- ▶ $f^{-2013} = f^7$
- ▶ $tf^7 \cdot f^9 = tf^{16} = tf^6$
- ▶ $f^9 \cdot tf^7 = tf^{-9}f^7 = tf^{-2} = tf^8$
- ▶ $tf^9 \cdot tf^7 = ttf^{-9}f^7 = f^{-2} = f^8$
- ▶ $(tf^7)^{-1} = f^{-7}t^{-1} = f^3t$

Állítás

Ha t és f helyet cserél, akkor f „invertálódik”: $ft = tf^{-1}$.

Sőt, minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén $f^k t = tf^{-k}$.

Biz.

HF



Példa

Számoljunk D_{10} -ben! Emlékeztető: $D_{10} = \{\text{id}, f, \dots, f^9, t, tf, \dots, tf^9\}$.

- ▶ $f^5 \cdot f^9 = f^{14} = f^4$
- ▶ $f^{2013} = f^3$
- ▶ $f^{-2013} = f^7$
- ▶ $tf^7 \cdot f^9 = tf^{16} = tf^6$
- ▶ $f^9 \cdot tf^7 = tf^{-9}f^7 = tf^{-2} = tf^8$
- ▶ $tf^9 \cdot tf^7 = ttf^{-9}f^7 = f^{-2} = f^8$
- ▶ $(tf^7)^{-1} = f^{-7}t^{-1} = f^3t = tf^{-3}$

Állítás

Ha t és f helyet cserél, akkor f „invertálódik”: $ft = tf^{-1}$.

Sőt, minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén $f^k t = tf^{-k}$.

Biz.

HF



Példa

Számoljunk D_{10} -ben! Emlékeztető: $D_{10} = \{\text{id}, f, \dots, f^9, t, tf, \dots, tf^9\}$.

- ▶ $f^5 \cdot f^9 = f^{14} = f^4$
- ▶ $f^{2013} = f^3$
- ▶ $f^{-2013} = f^7$
- ▶ $tf^7 \cdot f^9 = tf^{16} = tf^6$
- ▶ $f^9 \cdot tf^7 = tf^{-9}f^7 = tf^{-2} = tf^8$
- ▶ $tf^9 \cdot tf^7 = ttf^{-9}f^7 = f^{-2} = f^8$
- ▶ $(tf^7)^{-1} = f^{-7}t^{-1} = f^3t = tf^{-3} = tf^7$

Állítás

Ha t és f helyet cserél, akkor f „invertálódik”: $ft = tf^{-1}$.

Sőt, minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén $f^k t = tf^{-k}$.

Biz.

HF



Példa

Számoljunk D_{10} -ben! Emlékeztető: $D_{10} = \{\text{id}, f, \dots, f^9, t, tf, \dots, tf^9\}$.

- ▶ $f^5 \cdot f^9 = f^{14} = f^4$
- ▶ $f^{2013} = f^3$
- ▶ $f^{-2013} = f^7$
- ▶ $tf^7 \cdot f^9 = tf^{16} = tf^6$
- ▶ $f^9 \cdot tf^7 = tf^{-9}f^7 = tf^{-2} = tf^8$
- ▶ $tf^9 \cdot tf^7 = ttf^{-9}f^7 = f^{-2} = f^8$
- ▶ $(tf^7)^{-1} = f^{-7}t^{-1} = f^3t = tf^{-3} = tf^7$ (nem véletlen!)

Állítás

Ha t és f helyet cserél, akkor f „invertálódik”: $ft = tf^{-1}$.

Sőt, minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén $f^k t = tf^{-k}$.

Biz.

HF



Példa

Számoljunk D_{10} -ben! Emlékeztető: $D_{10} = \{\text{id}, f, \dots, f^9, t, tf, \dots, tf^9\}$.

- ▶ $f^5 \cdot f^9 = f^{14} = f^4$
- ▶ $f^{2013} = f^3$
- ▶ $f^{-2013} = f^7$
- ▶ $tf^7 \cdot f^9 = tf^{16} = tf^6$
- ▶ $f^9 \cdot tf^7 = tf^{-9}f^7 = tf^{-2} = tf^8$
- ▶ $tf^9 \cdot tf^7 = ttf^{-9}f^7 = f^{-2} = f^8$
- ▶ $(tf^7)^{-1} = f^{-7}t^{-1} = f^3t = tf^{-3} = tf^7$ (nem véletlen!)
- ▶ $(tf^7)^{2013}$

Állítás

Ha t és f helyet cserél, akkor f „invertálódik”: $ft = tf^{-1}$.

Sőt, minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén $f^k t = tf^{-k}$.

Biz.

HF



Példa

Számoljunk D_{10} -ben! Emlékeztető: $D_{10} = \{\text{id}, f, \dots, f^9, t, tf, \dots, tf^9\}$.

- ▶ $f^5 \cdot f^9 = f^{14} = f^4$
- ▶ $f^{2013} = f^3$
- ▶ $f^{-2013} = f^7$
- ▶ $tf^7 \cdot f^9 = tf^{16} = tf^6$
- ▶ $f^9 \cdot tf^7 = tf^{-9}f^7 = tf^{-2} = tf^8$
- ▶ $tf^9 \cdot tf^7 = ttf^{-9}f^7 = f^{-2} = f^8$
- ▶ $(tf^7)^{-1} = f^{-7}t^{-1} = f^3t = tf^{-3} = tf^7$ (nem véletlen!)
- ▶ $(tf^7)^{2013} = tf^7$

Állítás

Ha t és f helyet cserél, akkor f „invertálódik”: $ft = tf^{-1}$.

Sőt, minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén $f^k t = tf^{-k}$.

Biz.

HF



Példa

Számoljunk D_{10} -ben! Emlékeztető: $D_{10} = \{\text{id}, f, \dots, f^9, t, tf, \dots, tf^9\}$.

- ▶ $f^5 \cdot f^9 = f^{14} = f^4$
- ▶ $f^{2013} = f^3$
- ▶ $f^{-2013} = f^7$
- ▶ $tf^7 \cdot f^9 = tf^{16} = tf^6$
- ▶ $f^9 \cdot tf^7 = tf^{-9}f^7 = tf^{-2} = tf^8$
- ▶ $tf^9 \cdot tf^7 = ttf^{-9}f^7 = f^{-2} = f^8$
- ▶ $(tf^7)^{-1} = f^{-7}t^{-1} = f^3t = tf^{-3} = tf^7$ (nem véletlen!)
- ▶ $(tf^7)^{2013} = tf^7$ (ez sem véletlen...)

Állítás

Ha t és f helyet cserél, akkor f „invertálódik”: $ft = tf^{-1}$.

Sőt, minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén $f^k t = tf^{-k}$.

Biz.

HF



Példa

Számoljunk D_{10} -ben! Emlékeztető: $D_{10} = \{\text{id}, f, \dots, f^9, t, tf, \dots, tf^9\}$.

- ▶ $f^5 \cdot f^9 = f^{14} = f^4$
- ▶ $f^{2013} = f^3$
- ▶ $f^{-2013} = f^7$
- ▶ $tf^7 \cdot f^9 = tf^{16} = tf^6$
- ▶ $f^9 \cdot tf^7 = tf^{-9}f^7 = tf^{-2} = tf^8$
- ▶ $tf^9 \cdot tf^7 = ttf^{-9}f^7 = f^{-2} = f^8$
- ▶ $(tf^7)^{-1} = f^{-7}t^{-1} = f^3t = tf^{-3} = tf^7$ (nem véletlen!)
- ▶ $(tf^7)^{2013} = tf^7$ (ez sem véletlen...)
- ▶ $x \cdot tf^4 = tf^5$

Állítás

Ha t és f helyet cserél, akkor f „invertálódik”: $ft = tf^{-1}$.

Sőt, minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén $f^k t = tf^{-k}$.

Biz.

HF



Példa

Számoljunk D_{10} -ben! Emlékeztető: $D_{10} = \{\text{id}, f, \dots, f^9, t, tf, \dots, tf^9\}$.

- ▶ $f^5 \cdot f^9 = f^{14} = f^4$
- ▶ $f^{2013} = f^3$
- ▶ $f^{-2013} = f^7$
- ▶ $tf^7 \cdot f^9 = tf^{16} = tf^6$
- ▶ $f^9 \cdot tf^7 = tf^{-9}f^7 = tf^{-2} = tf^8$
- ▶ $tf^9 \cdot tf^7 = ttf^{-9}f^7 = f^{-2} = f^8$
- ▶ $(tf^7)^{-1} = f^{-7}t^{-1} = f^3t = tf^{-3} = tf^7$ (nem véletlen!)
- ▶ $(tf^7)^{2013} = tf^7$ (ez sem véletlen...)
- ▶ $x \cdot tf^4 = tf^5 \iff x = tf^5 \cdot (tf^4)^{-1}$

Állítás

Ha t és f helyet cserél, akkor f „invertálódik”: $ft = tf^{-1}$.

Sőt, minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén $f^k t = tf^{-k}$.

Biz.

HF



Példa

Számoljunk D_{10} -ben! Emlékeztető: $D_{10} = \{\text{id}, f, \dots, f^9, t, tf, \dots, tf^9\}$.

- ▶ $f^5 \cdot f^9 = f^{14} = f^4$
- ▶ $f^{2013} = f^3$
- ▶ $f^{-2013} = f^7$
- ▶ $tf^7 \cdot f^9 = tf^{16} = tf^6$
- ▶ $f^9 \cdot tf^7 = tf^{-9}f^7 = tf^{-2} = tf^8$
- ▶ $tf^9 \cdot tf^7 = ttf^{-9}f^7 = f^{-2} = f^8$
- ▶ $(tf^7)^{-1} = f^{-7}t^{-1} = f^3t = tf^{-3} = tf^7$ (nem véletlen!)
- ▶ $(tf^7)^{2013} = tf^7$ (ez sem véletlen...)
- ▶ $x \cdot tf^4 = tf^5 \iff x = tf^5 \cdot (tf^4)^{-1} = tf^5 \cdot f^{-4}t$

Állítás

Ha t és f helyet cserél, akkor f „invertálódik”: $ft = tf^{-1}$.

Sőt, minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén $f^k t = tf^{-k}$.

Biz.

HF



Példa

Számoljunk D_{10} -ben! Emlékeztető: $D_{10} = \{\text{id}, f, \dots, f^9, t, tf, \dots, tf^9\}$.

- ▶ $f^5 \cdot f^9 = f^{14} = f^4$
- ▶ $f^{2013} = f^3$
- ▶ $f^{-2013} = f^7$
- ▶ $tf^7 \cdot f^9 = tf^{16} = tf^6$
- ▶ $f^9 \cdot tf^7 = tf^{-9}f^7 = tf^{-2} = tf^8$
- ▶ $tf^9 \cdot tf^7 = ttf^{-9}f^7 = f^{-2} = f^8$
- ▶ $(tf^7)^{-1} = f^{-7}t^{-1} = f^3t = tf^{-3} = tf^7$ (nem véletlen!)
- ▶ $(tf^7)^{2013} = tf^7$ (ez sem véletlen...)
- ▶ $x \cdot tf^4 = tf^5 \iff x = tf^5 \cdot (tf^4)^{-1} = tf^5 \cdot f^{-4}t = tft$

Állítás

Ha t és f helyet cserél, akkor f „invertálódik”: $ft = tf^{-1}$.

Sőt, minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén $f^k t = tf^{-k}$.

Biz.

HF



Példa

Számoljunk D_{10} -ben! Emlékeztető: $D_{10} = \{\text{id}, f, \dots, f^9, t, tf, \dots, tf^9\}$.

- ▶ $f^5 \cdot f^9 = f^{14} = f^4$
- ▶ $f^{2013} = f^3$
- ▶ $f^{-2013} = f^7$
- ▶ $tf^7 \cdot f^9 = tf^{16} = tf^6$
- ▶ $f^9 \cdot tf^7 = tf^{-9}f^7 = tf^{-2} = tf^8$
- ▶ $tf^9 \cdot tf^7 = ttf^{-9}f^7 = f^{-2} = f^8$
- ▶ $(tf^7)^{-1} = f^{-7}t^{-1} = f^3t = tf^{-3} = tf^7$ (nem véletlen!)
- ▶ $(tf^7)^{2013} = tf^7$ (ez sem véletlen...)
- ▶ $x \cdot tf^4 = tf^5 \iff x = tf^5 \cdot (tf^4)^{-1} = tf^5 \cdot f^{-4}t = tft = ttf^{-1}$

Állítás

Ha t és f helyet cserél, akkor f „invertálódik”: $ft = tf^{-1}$.

Sőt, minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén $f^k t = tf^{-k}$.

Biz.

HF



Példa

Számoljunk D_{10} -ben! Emlékeztető: $D_{10} = \{\text{id}, f, \dots, f^9, t, tf, \dots, tf^9\}$.

- ▶ $f^5 \cdot f^9 = f^{14} = f^4$
- ▶ $f^{2013} = f^3$
- ▶ $f^{-2013} = f^7$
- ▶ $tf^7 \cdot f^9 = tf^{16} = tf^6$
- ▶ $f^9 \cdot tf^7 = tf^{-9}f^7 = tf^{-2} = tf^8$
- ▶ $tf^9 \cdot tf^7 = ttf^{-9}f^7 = f^{-2} = f^8$
- ▶ $(tf^7)^{-1} = f^{-7}t^{-1} = f^3t = tf^{-3} = tf^7$ (nem véletlen!)
- ▶ $(tf^7)^{2013} = tf^7$ (ez sem véletlen...)
- ▶ $x \cdot tf^4 = tf^5 \iff x = tf^5 \cdot (tf^4)^{-1} = tf^5 \cdot f^{-4}t = tft = ttf^{-1} = f^9$

Példa

Határozzuk meg a $(\mathbb{C}; +)$ csoportban a megadott részhalmaz generátumát.

- ▶ $[6, 8]$

Példa

Határozzuk meg a $(\mathbb{C}; +)$ csoportban a megadott részhalmaz generátumát.

- ▶ $[6, 8] = \{\text{páros számok}\}$

Példa

Határozzuk meg a $(\mathbb{C}; +)$ csoportban a megadott részhalmaz generátumát.

- ▶ $[6, 8] = \{\text{páros számok}\}$
- ▶ $[6, 10, 15]$

Példa

Határozzuk meg a $(\mathbb{C}; +)$ csoportban a megadott részhalmaz generátumát.

- ▶ $[6, 8] = \{\text{páros számok}\}$
- ▶ $[6, 10, 15] = \mathbb{Z}$

Példa

Határozzuk meg a $(\mathbb{C}; +)$ csoportban a megadott részhalmaz generátumát.

- ▶ $[6, 8] = \{\text{páros számok}\}$
- ▶ $[6, 10, 15] = \mathbb{Z}$
- ▶ $[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}]$

Példa

Határozzuk meg a $(\mathbb{C}; +)$ csoportban a megadott részhalmaz generátumát.

- ▶ $[6, 8] = \{\text{páros számok}\}$
- ▶ $[6, 10, 15] = \mathbb{Z}$
- ▶ $[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}] = \{\frac{k}{6} : k \in \mathbb{Z}\}$

Példa

Határozzuk meg a $(\mathbb{C}; +)$ csoportban a megadott részhalmaz generátumát.

- ▶ $[6, 8] = \{\text{páros számok}\}$
- ▶ $[6, 10, 15] = \mathbb{Z}$
- ▶ $[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}] = \{\frac{k}{6} : k \in \mathbb{Z}\}$
- ▶ $[1, i]$

Példa

Határozzuk meg a $(\mathbb{C}; +)$ csoportban a megadott részhalmaz generátumát.

- ▶ $[6, 8] = \{\text{páros számok}\}$
- ▶ $[6, 10, 15] = \mathbb{Z}$
- ▶ $[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}] = \{\frac{k}{6} : k \in \mathbb{Z}\}$
- ▶ $[1, i] = \mathbb{Z}[i]$

Példa

Határozzuk meg a $(\mathbb{C}; +)$ csoportban a megadott részhalmaz generátumát.

- ▶ $[6, 8] = \{\text{páros számok}\}$
- ▶ $[6, 10, 15] = \mathbb{Z}$
- ▶ $[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}] = \{\frac{k}{6} : k \in \mathbb{Z}\}$
- ▶ $[1, i] = \mathbb{Z}[i]$
- ▶ $[\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}]$

Példa

Határozzuk meg a $(\mathbb{C}; +)$ csoportban a megadott részhalmaz generátumát.

- ▶ $[6, 8] = \{\text{páros számok}\}$
- ▶ $[6, 10, 15] = \mathbb{Z}$
- ▶ $[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}] = \{\frac{k}{6} : k \in \mathbb{Z}\}$
- ▶ $[1, i] = \mathbb{Z}[i]$
- ▶ $[\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}] = \mathbb{C}$

Példa

Határozzuk meg a $(\mathbb{C}; +)$ csoportban a megadott részhalmaz generátumát.

- ▶ $[6, 8] = \{\text{páros számok}\}$
- ▶ $[6, 10, 15] = \mathbb{Z}$
- ▶ $[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}] = \{\frac{k}{6} : k \in \mathbb{Z}\}$
- ▶ $[1, i] = \mathbb{Z}[i]$
- ▶ $[\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}] = \mathbb{C}$

Példa

Határozzuk meg a $(\mathbb{C}^*; \cdot)$ csoportban a megadott részhalmaz generátumát.

- ▶ $[\{\text{prímszámok}\}]$

Példa

Határozzuk meg a $(\mathbb{C}; +)$ csoportban a megadott részhalmaz generátumát.

- ▶ $[6, 8] = \{\text{páros számok}\}$
- ▶ $[6, 10, 15] = \mathbb{Z}$
- ▶ $[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}] = \{\frac{k}{6} : k \in \mathbb{Z}\}$
- ▶ $[1, i] = \mathbb{Z}[i]$
- ▶ $[\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}] = \mathbb{C}$

Példa

Határozzuk meg a $(\mathbb{C}^*; \cdot)$ csoportban a megadott részhalmaz generátumát.

- ▶ $[\{\text{prímszámok}\}] = \mathbb{Q}^+$

Példa

Határozzuk meg a $(\mathbb{C}; +)$ csoportban a megadott részhalmaz generátumát.

- ▶ $[6, 8] = \{\text{páros számok}\}$
- ▶ $[6, 10, 15] = \mathbb{Z}$
- ▶ $[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}] = \{\frac{k}{6} : k \in \mathbb{Z}\}$
- ▶ $[1, i] = \mathbb{Z}[i]$
- ▶ $[\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}] = \mathbb{C}$

Példa

Határozzuk meg a $(\mathbb{C}^*; \cdot)$ csoportban a megadott részhalmaz generátumát.

- ▶ $[\{\text{prímszámok}\}] = \mathbb{Q}^+$
- ▶ $[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}]$

Példa

Határozzuk meg a $(\mathbb{C}; +)$ csoportban a megadott részhalmaz generátumát.

- ▶ $[6, 8] = \{\text{páros számok}\}$
- ▶ $[6, 10, 15] = \mathbb{Z}$
- ▶ $[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}] = \{\frac{k}{6} : k \in \mathbb{Z}\}$
- ▶ $[1, i] = \mathbb{Z}[i]$
- ▶ $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \mathbb{C}$

Példa

Határozzuk meg a $(\mathbb{C}^*; \cdot)$ csoportban a megadott részhalmaz generátumát.

- ▶ $[\{\text{prímszámok}\}] = \mathbb{Q}^+$
- ▶ $[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}] = \{2^k 3^l : k, l \in \mathbb{Z}\}$

Példa

Határozzuk meg a $(\mathbb{C}; +)$ csoportban a megadott részhalmaz generátumát.

- ▶ $[6, 8] = \{\text{páros számok}\}$
- ▶ $[6, 10, 15] = \mathbb{Z}$
- ▶ $[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}] = \{\frac{k}{6} : k \in \mathbb{Z}\}$
- ▶ $[1, i] = \mathbb{Z}[i]$
- ▶ $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \mathbb{C}$

Példa

Határozzuk meg a $(\mathbb{C}^*; \cdot)$ csoportban a megadott részhalmaz generátumát.

- ▶ $\{\{\text{prímszámok}\}\} = \mathbb{Q}^+$
- ▶ $[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}] = \{2^k 3^l : k, l \in \mathbb{Z}\}$
- ▶ $[1, i]$

Példa

Határozzuk meg a $(\mathbb{C}; +)$ csoportban a megadott részhalmaz generátumát.

- ▶ $[6, 8] = \{\text{páros számok}\}$
- ▶ $[6, 10, 15] = \mathbb{Z}$
- ▶ $[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}] = \{\frac{k}{6} : k \in \mathbb{Z}\}$
- ▶ $[1, i] = \mathbb{Z}[i]$
- ▶ $[\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}] = \mathbb{C}$

Példa

Határozzuk meg a $(\mathbb{C}^*; \cdot)$ csoportban a megadott részhalmaz generátumát.

- ▶ $[\{\text{prímszámok}\}] = \mathbb{Q}^+$
- ▶ $[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}] = \{2^k 3^l : k, l \in \mathbb{Z}\}$
- ▶ $[1, i] = \{1, -1, i, -i\}$

Példa

Határozzuk meg a $(\mathbb{C}; +)$ csoportban a megadott részhalmaz generátumát.

- ▶ $[6, 8] = \{\text{páros számok}\}$
- ▶ $[6, 10, 15] = \mathbb{Z}$
- ▶ $[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}] = \{\frac{k}{6} : k \in \mathbb{Z}\}$
- ▶ $[1, i] = \mathbb{Z}[i]$
- ▶ $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \mathbb{C}$

Példa

Határozzuk meg a $(\mathbb{C}^*; \cdot)$ csoportban a megadott részhalmaz generátumát.

- ▶ $\{\{\text{prímszámok}\}\} = \mathbb{Q}^+$
- ▶ $[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}] = \{2^k 3^l : k, l \in \mathbb{Z}\}$
- ▶ $[1, i] = \{1, -1, i, -i\}$
- ▶ $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$

Példa

Határozzuk meg a $(\mathbb{C}; +)$ csoportban a megadott részhalmaz generátumát.

- ▶ $[6, 8] = \{\text{páros számok}\}$
- ▶ $[6, 10, 15] = \mathbb{Z}$
- ▶ $[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}] = \{\frac{k}{6} : k \in \mathbb{Z}\}$
- ▶ $[1, i] = \mathbb{Z}[i]$
- ▶ $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \mathbb{C}$

Példa

Határozzuk meg a $(\mathbb{C}^*; \cdot)$ csoportban a megadott részhalmaz generátumát.

- ▶ $\{\{\text{prímszámok}\}\} = \mathbb{Q}^+$
- ▶ $[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}] = \{2^k 3^l : k, l \in \mathbb{Z}\}$
- ▶ $[1, i] = \{1, -1, i, -i\}$
- ▶ $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$

Példa

Határozzuk meg a B részhalmaz által generált részcsoportot a G csoportban.

$$\blacktriangleright B = \{\overline{4}, \overline{10}\}, G = \mathbb{Z}_{12}$$

Példa

Határozzuk meg a B részhalmaz által generált részcsoportot a G csoportban.

$$\blacktriangleright B = \{\overline{4}, \overline{10}\}, \quad G = \mathbb{Z}_{12}$$

$$[B] = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}\}$$

Példa

Határozzuk meg a B részhalmaz által generált részcsoportot a G csoportban.

$$\blacktriangleright B = \{\overline{4}, \overline{10}\}, \quad G = \mathbb{Z}_{12}$$

$$[B] = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}\} \cong \mathbb{Z}_6$$

Példa

Határozzuk meg a B részhalmaz által generált részcsoportot a G csoportban.

- ▶ $B = \{\overline{4}, \overline{10}\}$, $G = \mathbb{Z}_{12}$
 $[B] = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}\} \cong \mathbb{Z}_6$
- ▶ $B = \{\overline{4}, \overline{10}\}$, $G = \mathbb{Z}_{13}$

Példa

Határozzuk meg a B részhalmaz által generált részcsoportot a G csoportban.

$$\blacktriangleright B = \{\overline{4}, \overline{10}\}, G = \mathbb{Z}_{12}$$

$$[B] = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}\} \cong \mathbb{Z}_6$$

$$\blacktriangleright B = \{\overline{4}, \overline{10}\}, G = \mathbb{Z}_{13}$$

$$[B] = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}\} = \mathbb{Z}_{13}$$

Példa

Határozzuk meg a B részhalmaz által generált részcsoportot a G csoportban.

$$\blacktriangleright B = \{\overline{4}, \overline{10}\}, G = \mathbb{Z}_{12}$$

$$[B] = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}\} \cong \mathbb{Z}_6$$

$$\blacktriangleright B = \{\overline{4}, \overline{10}\}, G = \mathbb{Z}_{13}$$

$$[B] = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}\} = \mathbb{Z}_{13}$$

$$\blacktriangleright B = \{\overline{5}, \overline{7}\}, G = \mathbb{Z}_{12}^*$$

Példa

Határozzuk meg a B részhalmaz által generált részcsoportot a G csoportban.

$$\blacktriangleright B = \{\overline{4}, \overline{10}\}, \quad G = \mathbb{Z}_{12}$$

$$[B] = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}\} \cong \mathbb{Z}_6$$

$$\blacktriangleright B = \{\overline{4}, \overline{10}\}, \quad G = \mathbb{Z}_{13}$$

$$[B] = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}\} = \mathbb{Z}_{13}$$

$$\blacktriangleright B = \{\overline{5}, \overline{7}\}, \quad G = \mathbb{Z}_{12}^*$$

$$[B] = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{11}\}$$

Példa

Határozzuk meg a B részhalmaz által generált részcsoportot a G csoportban.

$$\blacktriangleright B = \{\overline{4}, \overline{10}\}, \quad G = \mathbb{Z}_{12}$$

$$[B] = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}\} \cong \mathbb{Z}_6$$

$$\blacktriangleright B = \{\overline{4}, \overline{10}\}, \quad G = \mathbb{Z}_{13}$$

$$[B] = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}\} = \mathbb{Z}_{13}$$

$$\blacktriangleright B = \{\overline{5}, \overline{7}\}, \quad G = \mathbb{Z}_{12}^*$$

$$[B] = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{11}\} = \{\overline{1}, -\overline{1}, \overline{5}, -\overline{5}\}$$

Példa

Határozzuk meg a B részhalmaz által generált részcsoportot a G csoportban.

$$\blacktriangleright B = \{\overline{4}, \overline{10}\}, \quad G = \mathbb{Z}_{12}$$

$$[B] = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}\} \cong \mathbb{Z}_6$$

$$\blacktriangleright B = \{\overline{4}, \overline{10}\}, \quad G = \mathbb{Z}_{13}$$

$$[B] = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}\} = \mathbb{Z}_{13}$$

$$\blacktriangleright B = \{\overline{5}, \overline{7}\}, \quad G = \mathbb{Z}_{12}^*$$

$$[B] = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{11}\} = \{\overline{1}, -\overline{1}, \overline{5}, -\overline{5}\} \cong \text{Klein-féle csoport}$$

Példa

Határozzuk meg a B részhalmaz által generált részcsoportot a G csoportban.

$$\blacktriangleright B = \{\overline{4}, \overline{10}\}, \quad G = \mathbb{Z}_{12}$$

$$[B] = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}\} \cong \mathbb{Z}_6$$

$$\blacktriangleright B = \{\overline{4}, \overline{10}\}, \quad G = \mathbb{Z}_{13}$$

$$[B] = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}\} = \mathbb{Z}_{13}$$

$$\blacktriangleright B = \{\overline{5}, \overline{7}\}, \quad G = \mathbb{Z}_{12}^*$$

$$[B] = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{11}\} = \{\overline{1}, -\overline{1}, \overline{5}, -\overline{5}\} \cong \text{Klein-féle csoport}$$

$$\blacktriangleright B = \{\overline{5}\}, \quad G = \mathbb{Z}_{13}^*$$

Példa

Határozzuk meg a B részhalmaz által generált részcsoportot a G csoportban.

$$\blacktriangleright B = \{\overline{4}, \overline{10}\}, \quad G = \mathbb{Z}_{12}$$

$$[B] = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}\} \cong \mathbb{Z}_6$$

$$\blacktriangleright B = \{\overline{4}, \overline{10}\}, \quad G = \mathbb{Z}_{13}$$

$$[B] = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}\} = \mathbb{Z}_{13}$$

$$\blacktriangleright B = \{\overline{5}, \overline{7}\}, \quad G = \mathbb{Z}_{12}^*$$

$$[B] = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{11}\} = \{\overline{1}, -\overline{1}, \overline{5}, -\overline{5}\} \cong \text{Klein-féle csoport}$$

$$\blacktriangleright B = \{\overline{5}\}, \quad G = \mathbb{Z}_{13}^*$$

$$[B] = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{12}\}$$

Példa

Határozzuk meg a B részhalmaz által generált részcsoportot a G csoportban.

$$\blacktriangleright B = \{\overline{4}, \overline{10}\}, G = \mathbb{Z}_{12}$$

$$[B] = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}\} \cong \mathbb{Z}_6$$

$$\blacktriangleright B = \{\overline{4}, \overline{10}\}, G = \mathbb{Z}_{13}$$

$$[B] = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}\} = \mathbb{Z}_{13}$$

$$\blacktriangleright B = \{\overline{5}, \overline{7}\}, G = \mathbb{Z}_{12}^*$$

$$[B] = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{11}\} = \{\overline{1}, -\overline{1}, \overline{5}, -\overline{5}\} \cong \text{Klein-féle csoport}$$

$$\blacktriangleright B = \{\overline{5}\}, G = \mathbb{Z}_{13}^*$$

$$[B] = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{12}\} = \{\overline{1}, -\overline{1}, \overline{5}, -\overline{5}\}$$

Példa

Határozzuk meg a B részhalmaz által generált részcsoportot a G csoportban.

$$\blacktriangleright B = \{\overline{4}, \overline{10}\}, G = \mathbb{Z}_{12}$$

$$[B] = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}\} \cong \mathbb{Z}_6$$

$$\blacktriangleright B = \{\overline{4}, \overline{10}\}, G = \mathbb{Z}_{13}$$

$$[B] = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}\} = \mathbb{Z}_{13}$$

$$\blacktriangleright B = \{\overline{5}, \overline{7}\}, G = \mathbb{Z}_{12}^*$$

$$[B] = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{11}\} = \{\overline{1}, -\overline{1}, \overline{5}, -\overline{5}\} \cong \text{Klein-féle csoport}$$

$$\blacktriangleright B = \{\overline{5}\}, G = \mathbb{Z}_{13}^*$$

$$[B] = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{12}\} = \{\overline{1}, -\overline{1}, \overline{5}, -\overline{5}\} \cong \mathbb{Z}_4$$

Példa

Határozzuk meg a B részhalmaz által generált részcsoportot a G csoportban.

- ▶ $B = \{\overline{4}, \overline{10}\}$, $G = \mathbb{Z}_{12}$
 $[B] = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}\} \cong \mathbb{Z}_6$
- ▶ $B = \{\overline{4}, \overline{10}\}$, $G = \mathbb{Z}_{13}$
 $[B] = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}\} = \mathbb{Z}_{13}$
- ▶ $B = \{\overline{5}, \overline{7}\}$, $G = \mathbb{Z}_{12}^*$
 $[B] = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{11}\} = \{\overline{1}, -\overline{1}, \overline{5}, -\overline{5}\} \cong \text{Klein-féle csoport}$
- ▶ $B = \{\overline{5}\}$, $G = \mathbb{Z}_{13}^*$
 $[B] = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{12}\} = \{\overline{1}, -\overline{1}, \overline{5}, -\overline{5}\} \cong \mathbb{Z}_4$
- ▶ $B = \{t, tf^6\}$, $G = D_{12}$

Példa

Határozzuk meg a B részhalmaz által generált részcsoportot a G csoportban.

- ▶ $B = \{\overline{4}, \overline{10}\}$, $G = \mathbb{Z}_{12}$
 $[B] = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}\} \cong \mathbb{Z}_6$
- ▶ $B = \{\overline{4}, \overline{10}\}$, $G = \mathbb{Z}_{13}$
 $[B] = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}\} = \mathbb{Z}_{13}$
- ▶ $B = \{\overline{5}, \overline{7}\}$, $G = \mathbb{Z}_{12}^*$
 $[B] = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{11}\} = \{\overline{1}, -\overline{1}, \overline{5}, -\overline{5}\} \cong \text{Klein-féle csoport}$
- ▶ $B = \{\overline{5}\}$, $G = \mathbb{Z}_{13}^*$
 $[B] = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{12}\} = \{\overline{1}, -\overline{1}, \overline{5}, -\overline{5}\} \cong \mathbb{Z}_4$
- ▶ $B = \{t, tf^6\}$, $G = D_{12}$
 $[B] = \{f^0, f^6, t, tf^6\}$

Példa

Határozzuk meg a B részhalmaz által generált részcsoportot a G csoportban.

- ▶ $B = \{\overline{4}, \overline{10}\}$, $G = \mathbb{Z}_{12}$
 $[B] = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}\} \cong \mathbb{Z}_6$
- ▶ $B = \{\overline{4}, \overline{10}\}$, $G = \mathbb{Z}_{13}$
 $[B] = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}\} = \mathbb{Z}_{13}$
- ▶ $B = \{\overline{5}, \overline{7}\}$, $G = \mathbb{Z}_{12}^*$
 $[B] = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{11}\} = \{\overline{1}, -\overline{1}, \overline{5}, -\overline{5}\} \cong \text{Klein-féle csoport}$
- ▶ $B = \{\overline{5}\}$, $G = \mathbb{Z}_{13}^*$
 $[B] = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{12}\} = \{\overline{1}, -\overline{1}, \overline{5}, -\overline{5}\} \cong \mathbb{Z}_4$
- ▶ $B = \{t, tf^6\}$, $G = D_{12}$
 $[B] = \{f^0, f^6, t, tf^6\} \cong \text{Klein-féle csoport}$

Példa

Határozzuk meg a B részhalmaz által generált részcsoportot a G csoportban.

- ▶ $B = \{\overline{4}, \overline{10}\}$, $G = \mathbb{Z}_{12}$
 $[B] = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}\} \cong \mathbb{Z}_6$
- ▶ $B = \{\overline{4}, \overline{10}\}$, $G = \mathbb{Z}_{13}$
 $[B] = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}\} = \mathbb{Z}_{13}$
- ▶ $B = \{\overline{5}, \overline{7}\}$, $G = \mathbb{Z}_{12}^*$
 $[B] = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{11}\} = \{\overline{1}, -\overline{1}, \overline{5}, -\overline{5}\} \cong \text{Klein-féle csoport}$
- ▶ $B = \{\overline{5}\}$, $G = \mathbb{Z}_{13}^*$
 $[B] = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{12}\} = \{\overline{1}, -\overline{1}, \overline{5}, -\overline{5}\} \cong \mathbb{Z}_4$
- ▶ $B = \{t, tf^6\}$, $G = D_{12}$
 $[B] = \{f^0, f^6, t, tf^6\} \cong \text{Klein-féle csoport}$
- ▶ $B = \{f^2, tf\}$, $G = D_8$

Példa

Határozzuk meg a B részhalmaz által generált részcsoportot a G csoportban.

- ▶ $B = \{\overline{4}, \overline{10}\}$, $G = \mathbb{Z}_{12}$
 $[B] = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}\} \cong \mathbb{Z}_6$
- ▶ $B = \{\overline{4}, \overline{10}\}$, $G = \mathbb{Z}_{13}$
 $[B] = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}\} = \mathbb{Z}_{13}$
- ▶ $B = \{\overline{5}, \overline{7}\}$, $G = \mathbb{Z}_{12}^*$
 $[B] = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{11}\} = \{\overline{1}, -\overline{1}, \overline{5}, -\overline{5}\} \cong \text{Klein-féle csoport}$
- ▶ $B = \{\overline{5}\}$, $G = \mathbb{Z}_{13}^*$
 $[B] = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{12}\} = \{\overline{1}, -\overline{1}, \overline{5}, -\overline{5}\} \cong \mathbb{Z}_4$
- ▶ $B = \{t, tf^6\}$, $G = D_{12}$
 $[B] = \{f^0, f^6, t, tf^6\} \cong \text{Klein-féle csoport}$
- ▶ $B = \{f^2, tf\}$, $G = D_8$
 $[B] = \{f^0, f^2, f^4, f^6, tf, tf^3, tf^5, tf^7\}$

Példa

Határozzuk meg a B részhalmaz által generált részcsoportot a G csoportban.

- ▶ $B = \{\overline{4}, \overline{10}\}$, $G = \mathbb{Z}_{12}$
 $[B] = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}\} \cong \mathbb{Z}_6$
- ▶ $B = \{\overline{4}, \overline{10}\}$, $G = \mathbb{Z}_{13}$
 $[B] = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}\} = \mathbb{Z}_{13}$
- ▶ $B = \{\overline{5}, \overline{7}\}$, $G = \mathbb{Z}_{12}^*$
 $[B] = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{11}\} = \{\overline{1}, -\overline{1}, \overline{5}, -\overline{5}\} \cong \text{Klein-féle csoport}$
- ▶ $B = \{\overline{5}\}$, $G = \mathbb{Z}_{13}^*$
 $[B] = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{12}\} = \{\overline{1}, -\overline{1}, \overline{5}, -\overline{5}\} \cong \mathbb{Z}_4$
- ▶ $B = \{t, tf^6\}$, $G = D_{12}$
 $[B] = \{f^0, f^6, t, tf^6\} \cong \text{Klein-féle csoport}$
- ▶ $B = \{f^2, tf\}$, $G = D_8$
 $[B] = \{f^0, f^2, f^4, f^6, tf, tf^3, tf^5, tf^7\} \cong D_4$

1. A csoport definíciói

2. Példák

3. Permutációk

4. Elem rendje, ciklikus csoportok

Ez a rész a tankönyvekben a [Sz] II/6 és [F] II/12 fejezetekben található.

Példa

Adott nemüres A halmaz összes permutációi (vagyis az $A \rightarrow A$ bijekciók) csoportot alkotnak a leképezésszorozásra nézve.

Példa

Adott nemüres A halmaz összes permutációi (vagyis az $A \rightarrow A$ bijekciók) csoportot alkotnak a leképezésszorozásra nézve.

Definíció

Az $A = \{1, 2, \dots, n\}$ halmaz összes permutációi alkotta csoportot **n -edfokú szimmetrikus csoportnak** nevezzük, és S_n -nel jelöljük.

Példa

Adott nemüres A halmaz összes permutációi (vagyis az $A \rightarrow A$ bijekciók) csoportot alkotnak a leképezésszorozásra nézve.

Definíció

Az $A = \{1, 2, \dots, n\}$ halmaz összes permutációi alkotta csoportot **n -edfokú szimmetrikus csoportnak** nevezzük, és S_n -nel jelöljük.

Egy $\pi \in S_n$ permutációt megadhatunk úgy, hogy $\{1, 2, \dots, n\}$ minden eleme alá odaírjuk a π melletti képét:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1\pi & 2\pi & 3\pi & \cdots & n\pi \end{pmatrix}.$$

Példa

Adott nemüres A halmaz összes permutációi (vagyis az $A \rightarrow A$ bijekciók) csoportot alkotnak a leképezésszorozásra nézve.

Definíció

Az $A = \{1, 2, \dots, n\}$ halmaz összes permutációi alkotta csoportot **n -edfokú szimmetrikus csoportnak** nevezzük, és S_n -nel jelöljük.

Egy $\pi \in S_n$ permutációt megadhatunk úgy, hogy $\{1, 2, \dots, n\}$ minden eleme alá odaírjuk a π melletti képét:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1\pi & 2\pi & 3\pi & \cdots & n\pi \end{pmatrix}.$$

Vegyük észre, hogy π bijektivitása azt jelenti, hogy a mátrix alsó sorában az $1, 2, \dots, n$ számok egy **permutációja** van.

Példa

Számítsuk ki S_6 -ban a $\pi\rho$, $\rho\pi$, π^{-1} és π^{2013} permutációkat, ahol

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Példa

Számítsuk ki S_6 -ban a $\pi\rho$, $\rho\pi$, π^{-1} és π^{2013} permutációkat, ahol

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\pi\rho =$$

Példa

Számítsuk ki S_6 -ban a $\pi\rho$, $\rho\pi$, π^{-1} és π^{2013} permutációkat, ahol

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\pi\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Példa

Számítsuk ki S_6 -ban a $\pi\rho$, $\rho\pi$, π^{-1} és π^{2013} permutációkat, ahol

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\pi\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\rho\pi =$$

Példa

Számítsuk ki S_6 -ban a $\pi\rho$, $\rho\pi$, π^{-1} és π^{2013} permutációkat, ahol

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\pi\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\rho\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Példa

Számítsuk ki S_6 -ban a $\pi\rho$, $\rho\pi$, π^{-1} és π^{2013} permutációkat, ahol

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\pi\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\rho\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\pi^{-1} =$$

Példa

Számítsuk ki S_6 -ban a $\pi\rho$, $\rho\pi$, π^{-1} és π^{2013} permutációkat, ahol

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\pi\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\rho\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\pi^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 2 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Példa

Számítsuk ki S_6 -ban a $\pi\rho$, $\rho\pi$, π^{-1} és π^{2013} permutációkat, ahol

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\pi\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\rho\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\pi^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 2 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Példa

Számítsuk ki S_6 -ban a $\pi\rho$, $\rho\pi$, π^{-1} és π^{2013} permutációkat, ahol

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\pi\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\rho\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\pi^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 2 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\pi^2 =$$

Példa

Számítsuk ki S_6 -ban a $\pi\rho$, $\rho\pi$, π^{-1} és π^{2013} permutációkat, ahol

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\pi\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\rho\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\pi^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 2 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\pi^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Példa

Számítsuk ki S_6 -ban a $\pi\rho$, $\rho\pi$, π^{-1} és π^{2013} permutációkat, ahol

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\pi\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\rho\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\pi^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 2 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\pi^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \implies \pi^4 = \text{id}$$

Példa

Számítsuk ki S_6 -ban a $\pi\rho$, $\rho\pi$, π^{-1} és π^{2013} permutációkat, ahol

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\pi\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\rho\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\pi^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 2 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\pi^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \implies \pi^4 = \text{id} \implies \pi^{2013} = (\pi^4)^{503} \cdot \pi = \pi$$

Definíció

Legyenek $a_1, \dots, a_k \in \{1, 2, \dots, n\}$ különböző elemek, és legyen $\pi \in S_n$ az alábbi permutáció:

$$a_1\pi = a_2, a_2\pi = a_3, \dots, a_{k-1}\pi = a_k, a_k\pi = a_1 \text{ és}$$

$$b\pi = b \text{ ha } b \notin \{a_1, \dots, a_k\}.$$

Definíció

Legyenek $a_1, \dots, a_k \in \{1, 2, \dots, n\}$ különböző elemek, és legyen $\pi \in S_n$ az alábbi permutáció:

$$a_1\pi = a_2, a_2\pi = a_3, \dots, a_{k-1}\pi = a_k, a_k\pi = a_1 \text{ és} \\ b\pi = b \text{ ha } b \notin \{a_1, \dots, a_k\}.$$

Ezt a π permutációt röviden így jelöljük: $\pi = (a_1 a_2 \cdots a_{k-1} a_k)$ és **ciklikus permutációnak** vagy röviden **ciklusnak** nevezzük.

Definíció

Legyenek $a_1, \dots, a_k \in \{1, 2, \dots, n\}$ különböző elemek, és legyen $\pi \in S_n$ az alábbi permutáció:

$$a_1\pi = a_2, a_2\pi = a_3, \dots, a_{k-1}\pi = a_k, a_k\pi = a_1 \text{ és} \\ b\pi = b \text{ ha } b \notin \{a_1, \dots, a_k\}.$$

Ezt a π permutációt röviden így jelöljük: $\pi = (a_1 a_2 \cdots a_{k-1} a_k)$ és **ciklikus permutációnak** vagy röviden **ciklusnak** nevezzük.

Definíció

Két ciklus **idegen**, ha **mozgatott elemeik** halmaza diszjunkt.

Definíció

Legyenek $a_1, \dots, a_k \in \{1, 2, \dots, n\}$ különböző elemek, és legyen $\pi \in S_n$ az alábbi permutáció:

$$a_1\pi = a_2, a_2\pi = a_3, \dots, a_{k-1}\pi = a_k, a_k\pi = a_1 \text{ és} \\ b\pi = b \text{ ha } b \notin \{a_1, \dots, a_k\}.$$

Ezt a π permutációt röviden így jelöljük: $\pi = (a_1 a_2 \cdots a_{k-1} a_k)$ és **ciklikus permutációnak** vagy röviden **ciklusnak** nevezzük.

Definíció

Két ciklus **idegen**, ha **mozgatott elemeik** halmaza diszjunkt.

Tétel

Ha π és ρ idegen ciklusok, akkor fölcserélhetőek, azaz $\pi\rho = \rho\pi$.

Definíció

Legyenek $a_1, \dots, a_k \in \{1, 2, \dots, n\}$ különböző elemek, és legyen $\pi \in S_n$ az alábbi permutáció:

$$a_1\pi = a_2, a_2\pi = a_3, \dots, a_{k-1}\pi = a_k, a_k\pi = a_1 \text{ és} \\ b\pi = b \text{ ha } b \notin \{a_1, \dots, a_k\}.$$

Ezt a π permutációt röviden így jelöljük: $\pi = (a_1 a_2 \cdots a_{k-1} a_k)$ és **ciklikus permutációnak** vagy röviden **ciklusnak** nevezzük.

Definíció

Két ciklus **idegen**, ha **mozgatott elemeik** halmaza diszjunkt.

Tétel

Ha π és ρ idegen ciklusok, akkor fölcserélhetőek, azaz $\pi\rho = \rho\pi$.

Biz.

[Sz] II. fejezet, 6.9. Tétel.

Definíció

Legyenek $a_1, \dots, a_k \in \{1, 2, \dots, n\}$ különböző elemek, és legyen $\pi \in S_n$ az alábbi permutáció:

$$a_1\pi = a_2, a_2\pi = a_3, \dots, a_{k-1}\pi = a_k, a_k\pi = a_1 \text{ és} \\ b\pi = b \text{ ha } b \notin \{a_1, \dots, a_k\}.$$

Ezt a π permutációt röviden így jelöljük: $\pi = (a_1 a_2 \cdots a_{k-1} a_k)$ és **ciklikus permutációnak** vagy röviden **ciklusnak** nevezzük.

Definíció

Két ciklus **idegen**, ha **mozgatott elemeik** halmaza diszjunkt.

Tétel

Ha π és ρ idegen ciklusok, akkor fölcserélhetőek, azaz $\pi\rho = \rho\pi$.

Biz.

[Sz] II. fejezet, 6.9. Tétel.



Tétel

Minden S_n -beli permutáció előáll páronként idegen ciklusok szorzataként, és ez az előállítás a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelmű.

Definíció

Legyenek $a_1, \dots, a_k \in \{1, 2, \dots, n\}$ különböző elemek, és legyen $\pi \in S_n$ az alábbi permutáció:

$$a_1\pi = a_2, a_2\pi = a_3, \dots, a_{k-1}\pi = a_k, a_k\pi = a_1 \text{ és} \\ b\pi = b \text{ ha } b \notin \{a_1, \dots, a_k\}.$$

Ezt a π permutációt röviden így jelöljük: $\pi = (a_1 a_2 \cdots a_{k-1} a_k)$ és **ciklikus permutációnak** vagy röviden **ciklusnak** nevezzük.

Definíció

Két ciklus **idegen**, ha **mozgatott elemeik** halmaza diszjunkt.

Tétel

Ha π és ρ idegen ciklusok, akkor fölcserélhetőek, azaz $\pi\rho = \rho\pi$.

Biz.

[Sz] II. fejezet, 6.9. Tétel.



Tétel

Minden S_n -beli permutáció előáll páronként idegen ciklusok szorzataként, és ez az előállítás a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelmű.

Biz.

[Sz] II. fejezet, 6.11. Tétel.



Példa

Bontsuk idegen ciklusok szorzatára az alábbi π és ρ permutációkat, majd számítsuk ki 99-edik hatványukat:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Példa

Bontsuk idegen ciklusok szorzatára az alábbi π és ρ permutációkat, majd számítsuk ki 99-edik hatványukat:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\pi = (13)(2564)$$

Példa

Bontsuk idegen ciklusok szorzatára az alábbi π és ρ permutációkat, majd számítsuk ki 99-edik hatványukat:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\pi = (13)(2564) \implies \pi^{99} = ((13)(2564))^{99}$$

Példa

Bontsuk idegen ciklusok szorzatára az alábbi π és ρ permutációkat, majd számítsuk ki 99-edik hatványukat:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\pi = (13)(2564) \implies \pi^{99} = ((13)(2564))^{99} = (13)^{99}(2564)^{99}$$

Példa

Bontsuk idegen ciklusok szorzatára az alábbi π és ρ permutációkat, majd számítsuk ki 99-edik hatványukat:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \pi = (13)(2564) &\implies \pi^{99} = ((13)(2564))^{99} = (13)^{99}(2564)^{99} = \\ &= (13)^{2 \cdot 49 + 1} \cdot (2564)^{4 \cdot 24 + 3} \end{aligned}$$

Példa

Bontsuk idegen ciklusok szorzatára az alábbi π és ρ permutációkat, majd számítsuk ki 99-edik hatványukat:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \pi = (13)(2564) &\implies \pi^{99} = ((13)(2564))^{99} = (13)^{99}(2564)^{99} = \\ &= (13)^{2 \cdot 49 + 1} \cdot (2564)^{4 \cdot 24 + 3} = (13)^1 (2564)^3 \end{aligned}$$

Példa

Bontsuk idegen ciklusok szorzatára az alábbi π és ρ permutációkat, majd számítsuk ki 99-edik hatványukat:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \pi = (13)(2564) &\implies \pi^{99} = ((13)(2564))^{99} = (13)^{99}(2564)^{99} = \\ &= (13)^{2 \cdot 49 + 1} \cdot (2564)^{4 \cdot 24 + 3} = (13)^1 (2564)^3 = (13)(2465) \end{aligned}$$

Példa

Bontsuk idegen ciklusok szorzatára az alábbi π és ρ permutációkat, majd számítsuk ki 99-edik hatványukat:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \pi = (13)(2564) &\implies \pi^{99} = ((13)(2564))^{99} = (13)^{99}(2564)^{99} = \\ &= (13)^{2 \cdot 49 + 1} \cdot (2564)^{4 \cdot 24 + 3} = (13)^1 (2564)^3 = (13)(2465) = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Példa

Bontsuk idegen ciklusok szorzatára az alábbi π és ρ permutációkat, majd számítsuk ki 99-edik hatványukat:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \pi = (13)(2564) &\implies \pi^{99} = ((13)(2564))^{99} = (13)^{99}(2564)^{99} = \\ &= (13)^{2 \cdot 49 + 1} \cdot (2564)^{4 \cdot 24 + 3} = (13)^1 (2564)^3 = (13)(2465) = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\rho = (123)(56)$$

Példa

Bontsuk idegen ciklusok szorzatára az alábbi π és ρ permutációkat, majd számítsuk ki 99-edik hatványukat:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \pi = (13)(2564) &\implies \pi^{99} = ((13)(2564))^{99} = (13)^{99}(2564)^{99} = \\ &= (13)^{2 \cdot 49 + 1} \cdot (2564)^{4 \cdot 24 + 3} = (13)^1 (2564)^3 = (13)(2465) = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\rho = (123)(56) \implies \rho^{99} = ((123)(56))^{99}$$

Példa

Bontsuk idegen ciklusok szorzatára az alábbi π és ρ permutációkat, majd számítsuk ki 99-edik hatványukat:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \pi = (13)(2564) &\implies \pi^{99} = ((13)(2564))^{99} = (13)^{99}(2564)^{99} = \\ &= (13)^{2 \cdot 49 + 1} \cdot (2564)^{4 \cdot 24 + 3} = (13)^1 (2564)^3 = (13)(2465) = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\rho = (123)(56) \implies \rho^{99} = ((123)(56))^{99} = (123)^{99}(56)^{99}$$

Példa

Bontsuk idegen ciklusok szorzatára az alábbi π és ρ permutációkat, majd számítsuk ki 99-edik hatványukat:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \pi = (13)(2564) &\implies \pi^{99} = ((13)(2564))^{99} = (13)^{99}(2564)^{99} = \\ &= (13)^{2 \cdot 49 + 1} \cdot (2564)^{4 \cdot 24 + 3} = (13)^1 (2564)^3 = (13)(2465) = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho = (123)(56) &\implies \rho^{99} = ((123)(56))^{99} = (123)^{99}(56)^{99} = \\ &= (123)^{3 \cdot 33} \cdot (56)^{2 \cdot 49 + 1} \end{aligned}$$

Példa

Bontsuk idegen ciklusok szorzatára az alábbi π és ρ permutációkat, majd számítsuk ki 99-edik hatványukat:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \pi = (13)(2564) &\implies \pi^{99} = ((13)(2564))^{99} = (13)^{99}(2564)^{99} = \\ &= (13)^{2 \cdot 49 + 1} \cdot (2564)^{4 \cdot 24 + 3} = (13)^1 (2564)^3 = (13)(2465) = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho = (123)(56) &\implies \rho^{99} = ((123)(56))^{99} = (123)^{99}(56)^{99} = \\ &= (123)^{3 \cdot 33} \cdot (56)^{2 \cdot 49 + 1} = \text{id} \cdot (56)^1 \end{aligned}$$

Példa

Bontsuk idegen ciklusok szorzatára az alábbi π és ρ permutációkat, majd számítsuk ki 99-edik hatványukat:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \pi = (13)(2564) &\implies \pi^{99} = ((13)(2564))^{99} = (13)^{99}(2564)^{99} = \\ &= (13)^{2 \cdot 49 + 1} \cdot (2564)^{4 \cdot 24 + 3} = (13)^1 (2564)^3 = (13)(2465) = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho = (123)(56) &\implies \rho^{99} = ((123)(56))^{99} = (123)^{99}(56)^{99} = \\ &= (123)^{3 \cdot 33} \cdot (56)^{2 \cdot 49 + 1} = \text{id} \cdot (56)^1 = (56) \end{aligned}$$

Példa

Bontsuk idegen ciklusok szorzatára az alábbi π és ρ permutációkat, majd számítsuk ki 99-edik hatványukat:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \pi = (13)(2564) &\implies \pi^{99} = ((13)(2564))^{99} = (13)^{99}(2564)^{99} = \\ &= (13)^{2 \cdot 49 + 1} \cdot (2564)^{4 \cdot 24 + 3} = (13)^1 (2564)^3 = (13)(2465) = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho = (123)(56) &\implies \rho^{99} = ((123)(56))^{99} = (123)^{99}(56)^{99} = \\ &= (123)^{3 \cdot 33} \cdot (56)^{2 \cdot 49 + 1} = \text{id} \cdot (56)^1 = (56) = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Példa

Adjuk meg idegen ciklusok szorzataként az alábbi permutációt:

$(134)(3247)(14527)$

Példa

Adjuk meg idegen ciklusok szorzataként az alábbi permutációt:

$$(134)(3247)(14527) = (173)(25)(4)$$

Példa

Adjuk meg idegen ciklusok szorzataként az alábbi permutációt:

$$(134)(3247)(14527) = (173)(25)(4) = (173)(25)$$

Példa

Adjuk meg idegen ciklusok szorzataként az alábbi permutációt:

$$(134)(3247)(14527) = (173)(25)(4) = (173)(25)$$

Példa

Oldjuk meg S_6 -ban az $(123)(2345)\pi(456) = (134)$ egyenletet.

Példa

Adjuk meg idegen ciklusok szorzataként az alábbi permutációt:

$$(134)(3247)(14527) = (173)(25)(4) = (173)(25)$$

Példa

Oldjuk meg S_6 -ban az $(123)(2345)\pi(456) = (134)$ egyenletet.

szorozzunk be **balról** $(123)^{-1}$ -zel:

Példa

Adjuk meg idegen ciklusok szorzataként az alábbi permutációt:

$$(134)(3247)(14527) = (173)(25)(4) = (173)(25)$$

Példa

Oldjuk meg S_6 -ban az $(123)(2345)\pi(456) = (134)$ egyenletet.

szorozzunk be **balról** $(123)^{-1}$ -zel: $(2345)\pi(456) = (321)(134)$

Példa

Adjuk meg idegen ciklusok szorzataként az alábbi permutációt:

$$(134)(3247)(14527) = (173)(25)(4) = (173)(25)$$

Példa

Oldjuk meg S_6 -ban az $(123)(2345)\pi(456) = (134)$ egyenletet.

szorozzunk be **balról** $(123)^{-1}$ -zel: $(2345)\pi(456) = (321)(134)$

szorozzunk be **balról** $(2345)^{-1}$ -zel:

Példa

Adjuk meg idegen ciklusok szorzataként az alábbi permutációt:

$$(134)(3247)(14527) = (173)(25)(4) = (173)(25)$$

Példa

Oldjuk meg S_6 -ban az $(123)(2345)\pi(456) = (134)$ egyenletet.

szorozzunk be **balról** $(123)^{-1}$ -zel: $(2345)\pi(456) = (321)(134)$

szorozzunk be **balról** $(2345)^{-1}$ -zel: $\pi(456) = (5432)(321)(134)$

Példa

Adjuk meg idegen ciklusok szorzataként az alábbi permutációt:

$$(134)(3247)(14527) = (173)(25)(4) = (173)(25)$$

Példa

Oldjuk meg S_6 -ban az $(123)(2345)\pi(456) = (134)$ egyenletet.

szorozzunk be **balról** $(123)^{-1}$ -zel: $(2345)\pi(456) = (321)(134)$

szorozzunk be **balról** $(2345)^{-1}$ -zel: $\pi(456) = (5432)(321)(134)$

szorozzunk be **jobbról** $(456)^{-1}$ -zel:

Példa

Adjuk meg idegen ciklusok szorzataként az alábbi permutációt:

$$(134)(3247)(14527) = (173)(25)(4) = (173)(25)$$

Példa

Oldjuk meg S_6 -ban az $(123)(2345)\pi(456) = (134)$ egyenletet.

szorozzunk be **balról** $(123)^{-1}$ -zel: $(2345)\pi(456) = (321)(134)$

szorozzunk be **balról** $(2345)^{-1}$ -zel: $\pi(456) = (5432)(321)(134)$

szorozzunk be **jobbról** $(456)^{-1}$ -zel: $\pi = (5432)(321)(134)(654)$

Példa

Adjuk meg idegen ciklusok szorzataként az alábbi permutációt:

$$(134)(3247)(14527) = (173)(25)(4) = (173)(25)$$

Példa

Oldjuk meg S_6 -ban az $(123)(2345)\pi(456) = (134)$ egyenletet.

szorozzunk be **balról** $(123)^{-1}$ -zel: $(2345)\pi(456) = (321)(134)$

szorozzunk be **balról** $(2345)^{-1}$ -zel: $\pi(456) = (5432)(321)(134)$

szorozzunk be **jobbról** $(456)^{-1}$ -zel: $\pi = (5432)(321)(134)(654)$

számoljuk ki:

Példa

Adjuk meg idegen ciklusok szorzataként az alábbi permutációt:

$$(134)(3247)(14527) = (173)(25)(4) = (173)(25)$$

Példa

Oldjuk meg S_6 -ban az $(123)(2345)\pi(456) = (134)$ egyenletet.

szorozzunk be **balról** $(123)^{-1}$ -zel: $(2345)\pi(456) = (321)(134)$

szorozzunk be **balról** $(2345)^{-1}$ -zel: $\pi(456) = (5432)(321)(134)$

szorozzunk be **jobbról** $(456)^{-1}$ -zel: $\pi = (5432)(321)(134)(654)$

számoljuk ki: $\pi = (165)(24)$

Példa

Adjuk meg idegen ciklusok szorzataként az alábbi permutációt:

$$(134)(3247)(14527) = (173)(25)(4) = (173)(25)$$

Példa

Oldjuk meg S_6 -ban az $(123)(2345)\pi(456) = (134)$ egyenletet.

$$\text{szorozzunk be balról } (123)^{-1}\text{-zel: } (2345)\pi(456) = (321)(134)$$

$$\text{szorozzunk be balról } (2345)^{-1}\text{-zel: } \pi(456) = (5432)(321)(134)$$

$$\text{szorozzunk be jobbról } (456)^{-1}\text{-zel: } \pi = (5432)(321)(134)(654)$$

$$\text{számoljuk ki: } \pi = (165)(24)$$

Az első két lépés összevonható:

$$\text{szorozzunk be balról } [(123)(2345)]^{-1}$$

Példa

Adjuk meg idegen ciklusok szorzataként az alábbi permutációt:

$$(134)(3247)(14527) = (173)(25)(4) = (173)(25)$$

Példa

Oldjuk meg S_6 -ban az $(123)(2345)\pi(456) = (134)$ egyenletet.

szorozzunk be **balról** $(123)^{-1}$ -zel: $(2345)\pi(456) = (321)(134)$

szorozzunk be **balról** $(2345)^{-1}$ -zel: $\pi(456) = (5432)(321)(134)$

szorozzunk be **jobbról** $(456)^{-1}$ -zel: $\pi = (5432)(321)(134)(654)$

számoljuk ki: $\pi = (165)(24)$

Az első két lépés összevonható:

szorozzunk be **balról** $[(123)(2345)]^{-1} = (5432)(321)$ -gyel.

Példa

Adjuk meg idegen ciklusok szorzataként az alábbi permutációt:

$$(134)(3247)(14527) = (173)(25)(4) = (173)(25)$$

Példa

Oldjuk meg S_6 -ban az $(123)(2345)\pi(456) = (134)$ egyenletet.

szorozzunk be **balról** $(123)^{-1}$ -zel: $(2345)\pi(456) = (321)(134)$

szorozzunk be **balról** $(2345)^{-1}$ -zel: $\pi(456) = (5432)(321)(134)$

szorozzunk be **jobbról** $(456)^{-1}$ -zel: $\pi = (5432)(321)(134)(654)$

számoljuk ki: $\pi = (165)(24)$

Az első két lépés összevonható:

szorozzunk be **balról** $[(123)(2345)]^{-1} = (5432)(321)$ -gyel.

Tetszőleges csoportban az $axb = c$ egyenlet egyetlen megoldása

Példa

Adjuk meg idegen ciklusok szorzataként az alábbi permutációt:

$$(134)(3247)(14527) = (173)(25)(4) = (173)(25)$$

Példa

Oldjuk meg S_6 -ban az $(123)(2345)\pi(456) = (134)$ egyenletet.

$$\text{szorozzunk be balról } (123)^{-1}\text{-zel: } (2345)\pi(456) = (321)(134)$$

$$\text{szorozzunk be balról } (2345)^{-1}\text{-zel: } \pi(456) = (5432)(321)(134)$$

$$\text{szorozzunk be jobbról } (456)^{-1}\text{-zel: } \pi = (5432)(321)(134)(654)$$

$$\text{számoljuk ki: } \pi = (165)(24)$$

Az első két lépés összevonható:

$$\text{szorozzunk be balról } [(123)(2345)]^{-1} = (5432)(321)\text{-gyel.}$$

Tetszőleges csoportban az $axb = c$ egyenlet egyetlen megoldása

$$x = a^{-1}cb^{-1}.$$

Példa

Oldjuk meg S_4 -ben a $\pi^2 = (134)$ egyenletet.

Példa

Oldjuk meg S_4 -ben a $\pi^2 = (134)$ egyenletet.

Egy S_4 -beli permutáció ciklusszerkezete ötféle lehet:

Példa

Oldjuk meg S_4 -ben a $\pi^2 = (134)$ egyenletet.

Egy S_4 -beli permutáció ciklusszerkezete ötféle lehet:

$$\pi = (), (\bullet \bullet), (\bullet \bullet \bullet), (\bullet \bullet \bullet \bullet), (\bullet \bullet)(\bullet \bullet)$$

Példa

Oldjuk meg S_4 -ben a $\pi^2 = (134)$ egyenletet.

Egy S_4 -beli permutáció ciklusszerkezete ötféle lehet:

$$\pi = (), (\bullet \bullet), (\bullet \bullet \bullet), (\bullet \bullet \bullet \bullet), (\bullet \bullet)(\bullet \bullet)$$

$$\pi^2 = (),$$

Példa

Oldjuk meg S_4 -ben a $\pi^2 = (134)$ egyenletet.

Egy S_4 -beli permutáció ciklusszerkezete ötféle lehet:

$$\pi = (), (\bullet \bullet), (\bullet \bullet \bullet), (\bullet \bullet \bullet \bullet), (\bullet \bullet)(\bullet \bullet)$$

$$\pi^2 = (), ()$$

Példa

Oldjuk meg S_4 -ben a $\pi^2 = (134)$ egyenletet.

Egy S_4 -beli permutáció ciklusszerkezete ötféle lehet:

$$\pi = (), (\bullet \bullet), (\bullet \bullet \bullet), (\bullet \bullet \bullet \bullet), (\bullet \bullet)(\bullet \bullet)$$

$$\pi^2 = (), (), (\bullet \bullet \bullet),$$

Példa

Oldjuk meg S_4 -ben a $\pi^2 = (134)$ egyenletet.

Egy S_4 -beli permutáció ciklusszerkezete ötféle lehet:

$$\pi = (), (\bullet \bullet), (\bullet \bullet \bullet), (\bullet \bullet \bullet \bullet), (\bullet \bullet)(\bullet \bullet)$$

$$\pi^2 = (), (), (\bullet \bullet \bullet), (\bullet \bullet)(\bullet \bullet),$$

Példa

Oldjuk meg S_4 -ben a $\pi^2 = (134)$ egyenletet.

Egy S_4 -beli permutáció ciklusszerkezete ötféle lehet:

$$\pi = (), (\bullet \bullet), (\bullet \bullet \bullet), (\bullet \bullet \bullet \bullet), (\bullet \bullet)(\bullet \bullet)$$

$$\pi^2 = (), (), (\bullet \bullet \bullet), (\bullet \bullet)(\bullet \bullet), ()$$

Példa

Oldjuk meg S_4 -ben a $\pi^2 = (134)$ egyenletet.

Egy S_4 -beli permutáció ciklusszerkezete ötféle lehet:

$$\pi = (), (\bullet \bullet), (\bullet \bullet \bullet), (\bullet \bullet \bullet \bullet), (\bullet \bullet)(\bullet \bullet)$$

$$\pi^2 = (), (), (\bullet \bullet \bullet), (\bullet \bullet)(\bullet \bullet), ()$$

Tehát π csak egy hármas ciklus lehet.

Példa

Oldjuk meg S_4 -ben a $\pi^2 = (134)$ egyenletet.

Egy S_4 -beli permutáció ciklusszerkezete ötféle lehet:

$$\pi = (), (\bullet \bullet), (\bullet \bullet \bullet), (\bullet \bullet \bullet \bullet), (\bullet \bullet)(\bullet \bullet)$$

$$\pi^2 = (), (), (\bullet \bullet \bullet), (\bullet \bullet)(\bullet \bullet), ()$$

Tehát π csak egy hármas ciklus lehet.

Ekkor $\pi^3 = \text{id}$ miatt $\pi^2 = \pi^{-1} = (134)$

Példa

Oldjuk meg S_4 -ben a $\pi^2 = (134)$ egyenletet.

Egy S_4 -beli permutáció ciklusszerkezete ötféle lehet:

$$\pi = (), (\bullet \bullet), (\bullet \bullet \bullet), (\bullet \bullet \bullet \bullet), (\bullet \bullet)(\bullet \bullet)$$

$$\pi^2 = (), (), (\bullet \bullet \bullet), (\bullet \bullet)(\bullet \bullet), ()$$

Tehát π csak egy hármas ciklus lehet.

Ekkor $\pi^3 = \text{id}$ miatt $\pi^2 = \pi^{-1} = (134)$,
és így $\pi =$

Példa

Oldjuk meg S_4 -ben a $\pi^2 = (134)$ egyenletet.

Egy S_4 -beli permutáció ciklusszerkezete ötféle lehet:

$$\pi = (), (\bullet \bullet), (\bullet \bullet \bullet), (\bullet \bullet \bullet \bullet), (\bullet \bullet)(\bullet \bullet)$$

$$\pi^2 = (), (), (\bullet \bullet \bullet), (\bullet \bullet)(\bullet \bullet), ()$$

Tehát π csak egy hármas ciklus lehet.

Ekkor $\pi^3 = \text{id}$ miatt $\pi^2 = \pi^{-1} = (134)$,
és így $\pi = (143)$ az egyetlen megoldás.

Definíció

A 2 hosszúságú ciklusokat, vagyis az (ij) alakú permutációkat **transzpozícióknak** nevezzük.

Definíció

A 2 hosszúságú ciklusokat, vagyis az (ij) alakú permutációkat **transzpozícióknak** nevezzük.

Tétel

Az S_n csoportot generálják a transzpozíciók, azaz minden S_n -beli permutáció előáll transzpozíciók szorzataként.

Definíció

A 2 hosszúságú ciklusokat, vagyis az (ij) alakú permutációkat **transzpozícióknak** nevezzük.

Tétel

Az S_n csoportot generálják a transzpozíciók, azaz minden S_n -beli permutáció előáll transzpozíciók szorzataként.

Biz.

[Sz] X. fejezet, 6.15. Következmény.

Elég ciklusokra bizonyítani.

Definíció

A 2 hosszúságú ciklusokat, vagyis az (ij) alakú permutációkat **transzpozícióknak** nevezzük.

Tétel

Az S_n csoportot generálják a transzpozíciók, azaz minden S_n -beli permutáció előáll transzpozíciók szorzataként.

Biz.

[Sz] X. fejezet, 6.15. Következmény.

Elég ciklusokra bizonyítani.

$$(a_1 a_2 \cdots a_{k-1} a_k) = (a_1 a_2)(a_1 a_3) \cdots (a_1 a_k)$$



Definíció

A 2 hosszúságú ciklusokat, vagyis az (ij) alakú permutációkat **transzpozícióknak** nevezzük.

Tétel

Az S_n csoportot generálják a transzpozíciók, azaz minden S_n -beli permutáció előáll transzpozíciók szorzataként.

Biz.

[Sz] X. fejezet, 6.15. Következmény.

Elég ciklusokra bizonyítani.

$$(a_1 a_2 \cdots a_{k-1} a_k) = (a_1 a_2)(a_1 a_3) \cdots (a_1 a_k)$$



Példa

$$\pi = (13)(2564)$$

Definíció

A 2 hosszúságú ciklusokat, vagyis az (ij) alakú permutációkat **transzpozícióknak** nevezzük.

Tétel

Az S_n csoportot generálják a transzpozíciók, azaz minden S_n -beli permutáció előáll transzpozíciók szorzataként.

Biz.

[Sz] X. fejezet, 6.15. Következmény.

Elég ciklusokra bizonyítani.

$$(a_1 a_2 \cdots a_{k-1} a_k) = (a_1 a_2)(a_1 a_3) \cdots (a_1 a_k)$$



Példa

$$\pi = (13)(2564) = (13)(25)(26)(24)$$

Definíció

A 2 hosszúságú ciklusokat, vagyis az (ij) alakú permutációkat **transzpozícióknak** nevezzük.

Tétel

Az S_n csoportot generálják a transzpozíciók, azaz minden S_n -beli permutáció előáll transzpozíciók szorzataként.

Biz.

[Sz] X. fejezet, 6.15. Következmény.

Elég ciklusokra bizonyítani.

$$(a_1 a_2 \cdots a_{k-1} a_k) = (a_1 a_2)(a_1 a_3) \cdots (a_1 a_k)$$



Példa

$$\pi = (13)(2564) = (13)(25)(26)(24)$$

vagy

$$\pi \cdot (13)(25)(45)(56) = \text{id}$$

Definíció

A 2 hosszúságú ciklusokat, vagyis az (ij) alakú permutációkat **transzpozícióknak** nevezzük.

Tétel

Az S_n csoportot generálják a transzpozíciók, azaz minden S_n -beli permutáció előáll transzpozíciók szorzataként.

Biz.

[Sz] X. fejezet, 6.15. Következmény.

Elég ciklusokra bizonyítani.

$$(a_1 a_2 \cdots a_{k-1} a_k) = (a_1 a_2)(a_1 a_3) \cdots (a_1 a_k)$$



Példa

$$\pi = (13)(2564) = (13)(25)(26)(24)$$

vagy

$$\pi \cdot (13)(25)(45)(56) = \text{id} \implies \pi = (56)(45)(25)(13)$$

1. A csoport definíciói
2. Példák
3. Permutációk
4. Elem rendje, ciklikus csoportok

Ez a rész a tankönyvekben a [Sz] XII/2 és [F] II/5 fejezetekben található.

Példa

Határozzuk meg a $[2]$ és $[i]$ részcsoportokat a $\mathbb{C}^*$ csoportban.

Példa

Határozzuk meg a $[2]$ és $[i]$ részcsoportokat a $\mathbb{C}^*$ csoportban.

Általánosan: $[a] =$

Példa

Határozzuk meg a $[2]$ és $[i]$ részcsoportokat a $\mathbb{C}^*$ csoportban.

Általánosan: $[a] = \{a^k : k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, a^{-2}, a^{-1}, a^0, a^1, a^2, \dots\}$

Példa

Határozzuk meg a $[2]$ és $[i]$ részcsoportokat a $\mathbb{C}^*$ csoportban.

Általánosan: $[a] = \{a^k : k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, a^{-2}, a^{-1}, a^0, a^1, a^2, \dots\}$

k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2^k	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64	128	256
i^k	$-i$	1	i	-1	$-i$	1	i	-1	$-i$	1	i	-1	$-i$	1

Az első esetben a hatványok mind különbözőek, ezért $[2] \cong$

Példa

Határozzuk meg a $[2]$ és $[i]$ részcsoportokat a $\mathbb{C}^*$ csoportban.

Általánosan: $[a] = \{a^k : k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, a^{-2}, a^{-1}, a^0, a^1, a^2, \dots\}$

k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2^k	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64	128	256
i^k	$-i$	1	i	-1	$-i$	1	i	-1	$-i$	1	i	-1	$-i$	1

Az első esetben a hatványok mind különbözőek, ezért $[2] \cong \mathbb{Z}$

Példa

Határozzuk meg a $[2]$ és $[i]$ részcsoportokat a $\mathbb{C}^*$ csoportban.

Általánosan: $[a] = \{a^k : k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, a^{-2}, a^{-1}, a^0, a^1, a^2, \dots\}$

k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2^k	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64	128	256
i^k	$-i$	1	i	-1	$-i$	1	i	-1	$-i$	1	i	-1	$-i$	1

Az első esetben a hatványok mind különbözőek, ezért $[2] \cong \mathbb{Z}$

A második esetben négyes periodicitást tapasztalunk, ezért $[i] \cong$

Példa

Határozzuk meg a $[2]$ és $[i]$ részcsoportokat a $\mathbb{C}^*$ csoportban.

Általánosan: $[a] = \{a^k : k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, a^{-2}, a^{-1}, a^0, a^1, a^2, \dots\}$

k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2^k	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64	128	256
i^k	$-i$	1	i	-1	$-i$	1	i	-1	$-i$	1	i	-1	$-i$	1

Az első esetben a hatványok mind különbözőek, ezért $[2] \cong \mathbb{Z}$

A második esetben négyes periodicitást tapasztalunk, ezért $[i] \cong \mathbb{Z}_4$.

Egy tetszőleges $(G; \cdot)$ csoportban egy a elemet hatványozva két eset lehetséges:

- (1) A hatványok mind különbözőek.

Egy tetszőleges $(G; \cdot)$ csoportban egy a elemet hatványozva két eset lehetséges:

(1) A hatványok mind különbözőek.

Ekkor $\varphi: (\mathbb{Z}, +) \rightarrow ([a]; \cdot), k \mapsto a^k$ izomorfizmus

Egy tetszőleges $(G; \cdot)$ csoportban egy a elemet hatványozva két eset lehetséges:

(1) A hatványok mind különbözőek.

Ekkor $\varphi: (\mathbb{Z}, +) \rightarrow ([a]; \cdot)$, $k \mapsto a^k$ izomorfizmus,
ezért $([a]; \cdot) \cong (\mathbb{Z}, +)$.

Egy tetszőleges $(G; \cdot)$ csoportban egy a elemet hatványozva két eset lehetséges:

(1) A hatványok mind különbözőek.

Ekkor $\varphi: (\mathbb{Z}, +) \rightarrow ([a]; \cdot), k \mapsto a^k$ izomorfizmus,
ezért $([a]; \cdot) \cong (\mathbb{Z}, +)$.

► Szürjektivitás:

Egy tetszőleges $(G; \cdot)$ csoportban egy a elemet hatványozva két eset lehetséges:

(1) A hatványok mind különbözőek.

Ekkor $\varphi: (\mathbb{Z}, +) \rightarrow ([a]; \cdot), k \mapsto a^k$ izomorfizmus,
ezért $([a]; \cdot) \cong (\mathbb{Z}, +)$.

- Szürjektivitás: $[a]$ minden eleme előáll a^k alakban.

Egy tetszőleges $(G; \cdot)$ csoportban egy a elemet hatványozva két eset lehetséges:

(1) A hatványok mind különbözőek.

Ekkor $\varphi: (\mathbb{Z}, +) \rightarrow ([a]; \cdot), k \mapsto a^k$ izomorfizmus,
ezért $([a]; \cdot) \cong (\mathbb{Z}, +)$.

- ▶ Szürjektivitás: $[a]$ minden eleme előáll a^k alakban.
- ▶ Injektivitás:

Egy tetszőleges $(G; \cdot)$ csoportban egy a elemet hatványozva két eset lehetséges:

(1) A hatványok mind különbözőek.

Ekkor $\varphi: (\mathbb{Z}, +) \rightarrow ([a]; \cdot)$, $k \mapsto a^k$ izomorfizmus, ezért $([a]; \cdot) \cong (\mathbb{Z}, +)$.

- ▶ Szürjektivitás: $[a]$ minden eleme előáll a^k alakban.
- ▶ Injektivitás: feltettük, hogy $k \neq \ell$ esetén $a^k \neq a^\ell$.

Egy tetszőleges $(G; \cdot)$ csoportban egy a elemet hatványozva két eset lehetséges:

(1) A hatványok mind különbözőek.

Ekkor $\varphi: (\mathbb{Z}, +) \rightarrow ([a]; \cdot)$, $k \mapsto a^k$ izomorfizmus, ezért $([a]; \cdot) \cong (\mathbb{Z}, +)$.

- ▶ Szürjektivitás: $[a]$ minden eleme előáll a^k alakban.
- ▶ Injektivitás: feltettük, hogy $k \neq \ell$ esetén $a^k \neq a^\ell$.
- ▶ Művelettartás:

Egy tetszőleges $(G; \cdot)$ csoportban egy a elemet hatványozva két eset lehetséges:

(1) A hatványok mind különbözőek.

Ekkor $\varphi: (\mathbb{Z}, +) \rightarrow ([a]; \cdot)$, $k \mapsto a^k$ izomorfizmus, ezért $([a]; \cdot) \cong (\mathbb{Z}, +)$.

- ▶ Szürjektivitás: $[a]$ minden eleme előáll a^k alakban.
- ▶ Injektivitás: feltettük, hogy $k \neq \ell$ esetén $a^k \neq a^\ell$.
- ▶ Művelettartás: $(k + \ell) \varphi = a^{k+\ell} = a^k \cdot a^\ell = k\varphi \cdot \ell\varphi = a^k \cdot a^\ell$.

Egy tetszőleges $(G; \cdot)$ csoportban egy a elemet hatványozva két eset lehetséges:

(2) A hatványok között van ismétlődés

Egy tetszőleges $(G; \cdot)$ csoportban egy a elemet hatványozva két eset lehetséges:

(2) A hatványok között van ismétlődés: $\exists i < j : a^i = a^j \implies a^{j-i} = 1$.

Egy tetszőleges $(G; \cdot)$ csoportban egy a elemet hatványozva két eset lehetséges:

- (2) A hatványok között van ismétlődés: $\exists i < j : a^i = a^j \implies a^{j-i} = 1$.
Legyen n a legkisebb **pozitív** kitevő, amelyre $a^n = 1$.

Egy tetszőleges $(G; \cdot)$ csoportban egy a elemet hatványozva két eset lehetséges:

- (2) A hatványok között van ismétlődés: $\exists i < j : a^i = a^j \implies a^{j-i} = 1$.
Legyen n a legkisebb **pozitív** kitevő, amelyre $a^n = 1$.

Az $a^0, a^1, a^2, \dots, a^{n-1}$ hatványok páronként különbözőek (miért?)

Egy tetszőleges $(G; \cdot)$ csoportban egy a elemet hatványozva két eset lehetséges:

- (2) A hatványok között van ismétlődés: $\exists i < j : a^i = a^j \implies a^{j-i} = 1$.
Legyen n a legkisebb **pozitív** kitevő, amelyre $a^n = 1$.

Az $a^0, a^1, a^2, \dots, a^{n-1}$ hatványok páronként különbözőek (miért?)
és minden más hatvány ezek valamelyikével megegyezik:

Egy tetszőleges $(G; \cdot)$ csoportban egy a elemet hatványozva két eset lehetséges:

- (2) A hatványok között van ismétlődés: $\exists i < j : a^i = a^j \implies a^{j-i} = 1$.
Legyen n a legkisebb **pozitív** kitevő, amelyre $a^n = 1$.

Az $a^0, a^1, a^2, \dots, a^{n-1}$ hatványok páronként különbözőek (miért?)
és minden más hatvány ezek valamelyikével megegyezik:
 $k = nq + r$ esetén $a^k =$

Egy tetszőleges $(G; \cdot)$ csoportban egy a elemet hatványozva két eset lehetséges:

- (2) A hatványok között van ismétlődés: $\exists i < j : a^i = a^j \implies a^{j-i} = 1$.
Legyen n a legkisebb **pozitív** kitevő, amelyre $a^n = 1$.

Az $a^0, a^1, a^2, \dots, a^{n-1}$ hatványok páronként különbözőek (miért?)
és minden más hatvány ezek valamelyikével megegyezik:
 $k = nq + r$ esetén $a^k = a^{nq+r} = (a^n)^q \cdot a^r$

Egy tetszőleges $(G; \cdot)$ csoportban egy a elemet hatványozva két eset lehetséges:

- (2) A hatványok között van ismétlődés: $\exists i < j : a^i = a^j \implies a^{j-i} = 1$.
Legyen n a legkisebb **pozitív** kitevő, amelyre $a^n = 1$.

Az $a^0, a^1, a^2, \dots, a^{n-1}$ hatványok páronként különbözőek (miért?)
és minden más hatvány ezek valamelyikével megegyezik:
 $k = nq + r$ esetén $a^k = a^{nq+r} = (a^n)^q \cdot a^r = 1^q \cdot a^r = a^r$.

Egy tetszőleges $(G; \cdot)$ csoportban egy a elemet hatványozva két eset lehetséges:

- (2) A hatványok között van ismétlődés: $\exists i < j : a^i = a^j \implies a^{j-i} = 1$.
Legyen n a legkisebb **pozitív** kitevő, amelyre $a^n = 1$.

Az $a^0, a^1, a^2, \dots, a^{n-1}$ hatványok páronként különbözőek (miért?)
és minden más hatvány ezek valamelyikével megegyezik:
 $k = nq + r$ esetén $a^k = a^{nq+r} = (a^n)^q \cdot a^r = 1^q \cdot a^r = a^r$.

Ekkor $\varphi: (\mathbb{Z}_n, +) \rightarrow ([a]; \cdot), \bar{k} \mapsto a^k$ izomorfizmus

Egy tetszőleges $(G; \cdot)$ csoportban egy a elemet hatványozva két eset lehetséges:

- (2) A hatványok között van ismétlődés: $\exists i < j : a^i = a^j \implies a^{j-i} = 1$.
Legyen n a legkisebb **pozitív** kitevő, amelyre $a^n = 1$.

Az $a^0, a^1, a^2, \dots, a^{n-1}$ hatványok páronként különbözőek (miért?)
és minden más hatvány ezek valamelyikével megegyezik:
 $k = nq + r$ esetén $a^k = a^{nq+r} = (a^n)^q \cdot a^r = 1^q \cdot a^r = a^r$.

Ekkor $\varphi: (\mathbb{Z}_n, +) \rightarrow ([a]; \cdot), \bar{k} \mapsto a^k$ izomorfizmus,
ezért $([a]; \cdot) \cong (\mathbb{Z}_n, +)$.

Egy tetszőleges $(G; \cdot)$ csoportban egy a elemet hatványozva két eset lehetséges:

- (2) A hatványok között van ismétlődés: $\exists i < j : a^i = a^j \implies a^{j-i} = 1$.
Legyen n a legkisebb **pozitív** kitevő, amelyre $a^n = 1$.

Az $a^0, a^1, a^2, \dots, a^{n-1}$ hatványok páronként különbözőek (miért?)
és minden más hatvány ezek valamelyikével megegyezik:
 $k = nq + r$ esetén $a^k = a^{nq+r} = (a^n)^q \cdot a^r = 1^q \cdot a^r = a^r$.

Ekkor $\varphi: (\mathbb{Z}_n, +) \rightarrow ([a]; \cdot), \bar{k} \mapsto a^k$ izomorfizmus,
ezért $([a]; \cdot) \cong (\mathbb{Z}_n, +)$.

- Jóldefiniáltság:

Egy tetszőleges $(G; \cdot)$ csoportban egy a elemet hatványozva két eset lehetséges:

- (2) A hatványok között van ismétlődés: $\exists i < j : a^i = a^j \implies a^{j-i} = 1$.
Legyen n a legkisebb **pozitív** kitevő, amelyre $a^n = 1$.

Az $a^0, a^1, a^2, \dots, a^{n-1}$ hatványok páronként különbözőek (miért?)
és minden más hatvány ezek valamelyikével megegyezik:
 $k = nq + r$ esetén $a^k = a^{nq+r} = (a^n)^q \cdot a^r = 1^q \cdot a^r = a^r$.

Ekkor $\varphi: (\mathbb{Z}_n, +) \rightarrow ([a]; \cdot), \bar{k} \mapsto a^k$ izomorfizmus,
ezért $([a]; \cdot) \cong (\mathbb{Z}_n, +)$.

- Jóldefiniáltság: $k \equiv \ell \pmod{n} \implies a^k = a^\ell$.

Egy tetszőleges $(G; \cdot)$ csoportban egy a elemet hatványozva két eset lehetséges:

- (2) A hatványok között van ismétlődés: $\exists i < j : a^i = a^j \implies a^{j-i} = 1$.
Legyen n a legkisebb **pozitív** kitevő, amelyre $a^n = 1$.

Az $a^0, a^1, a^2, \dots, a^{n-1}$ hatványok páronként különbözőek (miért?) és minden más hatvány ezek valamelyikével megegyezik:
 $k = nq + r$ esetén $a^k = a^{nq+r} = (a^n)^q \cdot a^r = 1^q \cdot a^r = a^r$.

Ekkor $\varphi: (\mathbb{Z}_n, +) \rightarrow ([a]; \cdot), \bar{k} \mapsto a^k$ izomorfizmus, ezért $([a]; \cdot) \cong (\mathbb{Z}_n, +)$.

- ▶ Jóldefiniáltság: $k \equiv \ell \pmod{n} \implies a^k = a^\ell$.
- ▶ Szürjektivitás:

Egy tetszőleges $(G; \cdot)$ csoportban egy a elemet hatványozva két eset lehetséges:

- (2) A hatványok között van ismétlődés: $\exists i < j : a^i = a^j \implies a^{j-i} = 1$.
Legyen n a legkisebb **pozitív** kitevő, amelyre $a^n = 1$.

Az $a^0, a^1, a^2, \dots, a^{n-1}$ hatványok páronként különbözőek (miért?) és minden más hatvány ezek valamelyikével megegyezik:
 $k = nq + r$ esetén $a^k = a^{nq+r} = (a^n)^q \cdot a^r = 1^q \cdot a^r = a^r$.

Ekkor $\varphi: (\mathbb{Z}_n, +) \rightarrow ([a]; \cdot), \bar{k} \mapsto a^k$ izomorfizmus, ezért $([a]; \cdot) \cong (\mathbb{Z}_n, +)$.

- ▶ Jóldefiniáltság: $k \equiv \ell \pmod{n} \implies a^k = a^\ell$.
- ▶ Szürjektivitás: $[a]$ minden eleme előáll a^k ($k = 0, 1, \dots, n-1$) alakban.

Egy tetszőleges $(G; \cdot)$ csoportban egy a elemet hatványozva két eset lehetséges:

- (2) A hatványok között van ismétlődés: $\exists i < j : a^i = a^j \implies a^{j-i} = 1$.
Legyen n a legkisebb **pozitív** kitevő, amelyre $a^n = 1$.

Az $a^0, a^1, a^2, \dots, a^{n-1}$ hatványok páronként különbözőek (miért?)
és minden más hatvány ezek valamelyikével megegyezik:
 $k = nq + r$ esetén $a^k = a^{nq+r} = (a^n)^q \cdot a^r = 1^q \cdot a^r = a^r$.

Ekkor $\varphi: (\mathbb{Z}_n, +) \rightarrow ([a]; \cdot), \bar{k} \mapsto a^k$ izomorfizmus,
ezért $([a]; \cdot) \cong (\mathbb{Z}_n, +)$.

- ▶ Jóldefiniáltság: $k \equiv \ell \pmod{n} \implies a^k = a^\ell$.
- ▶ Szürjektivitás: $[a]$ minden eleme előáll a^k ($k = 0, 1, \dots, n-1$) alakban.
- ▶ Injektivitás:

Egy tetszőleges $(G; \cdot)$ csoportban egy a elemet hatványozva két eset lehetséges:

- (2) A hatványok között van ismétlődés: $\exists i < j : a^i = a^j \implies a^{j-i} = 1$.
Legyen n a legkisebb **pozitív** kitevő, amelyre $a^n = 1$.

Az $a^0, a^1, a^2, \dots, a^{n-1}$ hatványok páronként különbözőek (miért?)
és minden más hatvány ezek valamelyikével megegyezik:
 $k = nq + r$ esetén $a^k = a^{nq+r} = (a^n)^q \cdot a^r = 1^q \cdot a^r = a^r$.

Ekkor $\varphi: (\mathbb{Z}_n, +) \rightarrow ([a]; \cdot), \bar{k} \mapsto a^k$ izomorfizmus,
ezért $([a]; \cdot) \cong (\mathbb{Z}_n, +)$.

- ▶ Jóldefiniáltság: $k \equiv \ell \pmod{n} \implies a^k = a^\ell$.
- ▶ Szürjektivitás: $[a]$ minden eleme előáll a^k ($k = 0, 1, \dots, n-1$) alakban.
- ▶ Injektivitás: $k \not\equiv \ell \pmod{n} \implies a^k \neq a^\ell$.

Egy tetszőleges $(G; \cdot)$ csoportban egy a elemet hatványozva két eset lehetséges:

- (2) A hatványok között van ismétlődés: $\exists i < j : a^i = a^j \implies a^{j-i} = 1$.
Legyen n a legkisebb **pozitív** kitevő, amelyre $a^n = 1$.

Az $a^0, a^1, a^2, \dots, a^{n-1}$ hatványok páronként különbözőek (miért?)
és minden más hatvány ezek valamelyikével megegyezik:
 $k = nq + r$ esetén $a^k = a^{nq+r} = (a^n)^q \cdot a^r = 1^q \cdot a^r = a^r$.

Ekkor $\varphi: (\mathbb{Z}_n, +) \rightarrow ([a]; \cdot), \bar{k} \mapsto a^k$ izomorfizmus,
ezért $([a]; \cdot) \cong (\mathbb{Z}_n, +)$.

- ▶ Jóldefiniáltság: $k \equiv \ell \pmod{n} \implies a^k = a^\ell$.
- ▶ Szürjektivitás: $[a]$ minden eleme előáll a^k ($k = 0, 1, \dots, n-1$) alakban.
- ▶ Injektivitás: $k \not\equiv \ell \pmod{n} \implies a^k \neq a^\ell$.
- ▶ Művelettartás:

Egy tetszőleges $(G; \cdot)$ csoportban egy a elemet hatványozva két eset lehetséges:

- (2) A hatványok között van ismétlődés: $\exists i < j : a^i = a^j \implies a^{j-i} = 1$.
Legyen n a legkisebb **pozitív** kitevő, amelyre $a^n = 1$.

Az $a^0, a^1, a^2, \dots, a^{n-1}$ hatványok páronként különbözőek (miért?)
és minden más hatvány ezek valamelyikével megegyezik:
 $k = nq + r$ esetén $a^k = a^{nq+r} = (a^n)^q \cdot a^r = 1^q \cdot a^r = a^r$.

Ekkor $\varphi: (\mathbb{Z}_n, +) \rightarrow ([a]; \cdot), \bar{k} \mapsto a^k$ izomorfizmus,
ezért $([a]; \cdot) \cong (\mathbb{Z}_n, +)$.

- ▶ Jóldefiniáltság: $k \equiv \ell \pmod{n} \implies a^k = a^\ell$.
- ▶ Szürjektivitás: $[a]$ minden eleme előáll a^k ($k = 0, 1, \dots, n-1$) alakban.
- ▶ Injektivitás: $k \not\equiv \ell \pmod{n} \implies a^k \neq a^\ell$.
- ▶ Művelettartás: $(\bar{k} + \bar{\ell}) \varphi = \overline{k+\ell} \varphi = a^{k+\ell} = \bar{k} \varphi \cdot \bar{\ell} \varphi = a^k \cdot a^\ell$.

Definíció

Az $a \in G$ elem **rendjén** azt a legkisebb n pozitív egész számot értjük, amelyre $a^n = 1$.

Definíció

Az $a \in G$ elem **rendjén** azt a legkisebb n pozitív egész számot értjük, amelyre $a^n = 1$.

Ha nincs ilyen n , akkor azt mondjuk, hogy a rendje végtelen.

Definíció

Az $a \in G$ elem **rendjén** azt a legkisebb n pozitív egész számot értjük, amelyre $a^n = 1$.

Ha nincs ilyen n , akkor azt mondjuk, hogy a rendje végtelen.

Az a elem rendjét $o(a)$ jelöli:

$$o(a) = \min \{n \in \mathbb{N} : a^n = 1\}.$$

Definíció

Az $a \in G$ elem **rendjén** azt a legkisebb n pozitív egész számot értjük, amelyre $a^n = 1$.

Ha nincs ilyen n , akkor azt mondjuk, hogy a rendje végtelen.

Az a elem rendjét $o(a)$ jelöli:

$$o(a) = \min \{n \in \mathbb{N} : a^n = 1\}.$$

Definíció

A véges G **csoport rendjén** elemeinek számát értjük.

Definíció

Az $a \in G$ elem **rendjén** azt a legkisebb n pozitív egész számot értjük, amelyre $a^n = 1$.

Ha nincs ilyen n , akkor azt mondjuk, hogy a rendje végtelen.

Az a elem rendjét $o(a)$ jelöli:

$$o(a) = \min \{n \in \mathbb{N} : a^n = 1\}.$$

Definíció

A véges G **csoport rendjén** elemeinek számát értjük.

Definíció

A G csoportot **ciklikus csoportnak** nevezzük, ha egyetlen elemmel generálható: $\exists a \in G : [a] = G$.

Definíció

Az $a \in G$ elem **rendjén** azt a legkisebb n pozitív egész számot értjük, amelyre $a^n = 1$.

Ha nincs ilyen n , akkor azt mondjuk, hogy a rendje végtelen.

Az a elem rendjét $o(a)$ jelöli:

$$o(a) = \min \{n \in \mathbb{N} : a^n = 1\}.$$

Definíció

A véges G **csoport rendjén** elemeinek számát értjük.

Definíció

A G csoportot **ciklikus csoportnak** nevezzük, ha egyetlen elemmel generálható: $\exists a \in G : [a] = G$.

Megjegyzés

Az a elem rendje nem más, mint az általa generált részcsoporthoz tartozó rendje:
 $o(a) = |[a]|$ (ha véges).

Tétel

Egy csoport akkor és csak akkor ciklikus, ha izomorf a $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_4, \dots$ csoportok valamelyikével.

Tétel

Egy csoport akkor és csak akkor ciklikus, ha izomorf a $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_4, \dots$ csoportok valamelyikével.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 2.8. Tétel (+2.4. Állítás, 2.6. Tétel).

Láttuk, hogy ha $G = [a]$, akkor vagy $G \cong \mathbb{Z}$ (első eset),
vagy $G \cong \mathbb{Z}_{o(a)}$ (második eset).

Tétel

Egy csoport akkor és csak akkor ciklikus, ha izomorf a $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_4, \dots$ csoportok valamelyikével.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 2.8. Tétel (+2.4. Állítás, 2.6. Tétel).

Láttuk, hogy ha $G = [a]$, akkor vagy $G \cong \mathbb{Z}$ (első eset),
vagy $G \cong \mathbb{Z}_{o(a)}$ (második eset).

Az világos, hogy ezek a csoportok ciklikusak:

Tétel

Egy csoport akkor és csak akkor ciklikus, ha izomorf a $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_4, \dots$ csoportok valamelyikével.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 2.8. Tétel (+2.4. Állítás, 2.6. Tétel).

Láttuk, hogy ha $G = [a]$, akkor vagy $G \cong \mathbb{Z}$ (első eset),
vagy $G \cong \mathbb{Z}_{o(a)}$ (második eset).

Az világos, hogy ezek a csoportok ciklikusak: $\mathbb{Z} = [1]$, $\mathbb{Z}_n = [\bar{1}]$.

Tétel

Egy csoport akkor és csak akkor ciklikus, ha izomorf a $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_4, \dots$ csoportok valamelyikével.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 2.8. Tétel (+2.4. Állítás, 2.6. Tétel).

Láttuk, hogy ha $G = [a]$, akkor vagy $G \cong \mathbb{Z}$ (első eset),
vagy $G \cong \mathbb{Z}_{o(a)}$ (második eset).

Az világos, hogy ezek a csoportok ciklikusak: $\mathbb{Z} = [1]$, $\mathbb{Z}_n = [\bar{1}]$. □

Tétel

Ciklikus csoport minden homomorf képe is ciklikus.

Tétel

Egy csoport akkor és csak akkor ciklikus, ha izomorf a $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_4, \dots$ csoportok valamelyikével.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 2.8. Tétel (+2.4. Állítás, 2.6. Tétel).

Láttuk, hogy ha $G = [a]$, akkor vagy $G \cong \mathbb{Z}$ (első eset),
vagy $G \cong \mathbb{Z}_{o(a)}$ (második eset).

Az világos, hogy ezek a csoportok ciklikusak: $\mathbb{Z} = [1]$, $\mathbb{Z}_n = [\bar{1}]$. □

Tétel

Ciklikus csoport minden homomorf képe is ciklikus.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 2.13. Tétel.

Legyen $\varphi: G \rightarrow H$ szürjektív homomorfizmus, és
tegyük fel, hogy $[a] = G$.

Tétel

Egy csoport akkor és csak akkor ciklikus, ha izomorf a $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_4, \dots$ csoportok valamelyikével.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 2.8. Tétel (+2.4. Állítás, 2.6. Tétel).

Láttuk, hogy ha $G = [a]$, akkor vagy $G \cong \mathbb{Z}$ (első eset),
vagy $G \cong \mathbb{Z}_{o(a)}$ (második eset).

Az világos, hogy ezek a csoportok ciklikusak: $\mathbb{Z} = [1]$, $\mathbb{Z}_n = [\bar{1}]$. □

Tétel

Ciklikus csoport minden homomorf képe is ciklikus.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 2.13. Tétel.

Legyen $\varphi: G \rightarrow H$ szürjektív homomorfizmus, és tegyük fel, hogy $[a] = G$. Ekkor

$$H = G\varphi$$

Tétel

Egy csoport akkor és csak akkor ciklikus, ha izomorf a $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_4, \dots$ csoportok valamelyikével.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 2.8. Tétel (+2.4. Állítás, 2.6. Tétel).

Láttuk, hogy ha $G = [a]$, akkor vagy $G \cong \mathbb{Z}$ (első eset),
vagy $G \cong \mathbb{Z}_{o(a)}$ (második eset).

Az világos, hogy ezek a csoportok ciklikusak: $\mathbb{Z} = [1]$, $\mathbb{Z}_n = [\bar{1}]$. □

Tétel

Ciklikus csoport minden homomorf képe is ciklikus.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 2.13. Tétel.

Legyen $\varphi: G \rightarrow H$ szürjektív homomorfizmus, és tegyük fel, hogy $[a] = G$. Ekkor

$$H = G\varphi = \{a^k\varphi: k \in \mathbb{Z}\}$$

Tétel

Egy csoport akkor és csak akkor ciklikus, ha izomorf a $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_4, \dots$ csoportok valamelyikével.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 2.8. Tétel (+2.4. Állítás, 2.6. Tétel).

Láttuk, hogy ha $G = [a]$, akkor vagy $G \cong \mathbb{Z}$ (első eset),
vagy $G \cong \mathbb{Z}_{o(a)}$ (második eset).

Az világos, hogy ezek a csoportok ciklikusak: $\mathbb{Z} = [1]$, $\mathbb{Z}_n = [\bar{1}]$. □

Tétel

Ciklikus csoport minden homomorf képe is ciklikus.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 2.13. Tétel.

Legyen $\varphi: G \rightarrow H$ szürjektív homomorfizmus, és tegyük fel, hogy $[a] = G$. Ekkor

$$H = G\varphi = \{a^k\varphi : k \in \mathbb{Z}\} = \{(a\varphi)^k : k \in \mathbb{Z}\}$$

Tétel

Egy csoport akkor és csak akkor ciklikus, ha izomorf a $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_4, \dots$ csoportok valamelyikével.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 2.8. Tétel (+2.4. Állítás, 2.6. Tétel).

Láttuk, hogy ha $G = [a]$, akkor vagy $G \cong \mathbb{Z}$ (első eset),
vagy $G \cong \mathbb{Z}_{o(a)}$ (második eset).

Az világos, hogy ezek a csoportok ciklikusak: $\mathbb{Z} = [1]$, $\mathbb{Z}_n = [\bar{1}]$. □

Tétel

Ciklikus csoport minden homomorf képe is ciklikus.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 2.13. Tétel.

Legyen $\varphi: G \rightarrow H$ szürjektív homomorfizmus, és
tegyük fel, hogy $[a] = G$. Ekkor

$$H = G\varphi = \{a^k\varphi : k \in \mathbb{Z}\} = \{(a\varphi)^k : k \in \mathbb{Z}\} = [a\varphi].$$



Tétel

Ciklikus csoport minden részcsoporthja is ciklikus.

Tétel

Ciklikus csoport minden részcsoporthja is ciklikus.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 2.10. Tétel.

Legyen $\{1\} \neq H \leq G = [a]$.

Tétel

Ciklikus csoport minden részcsoporthja is ciklikus.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 2.10. Tétel.

Legyen $\{1\} \neq H \leq G = [a]$. Legyen n a legkisebb pozitív kitevő, amelyre $a^n \in H$. (Miért létezik ilyen?)

Tétel

Ciklikus csoport minden részcsoporthja is ciklikus.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 2.10. Tétel.

Legyen $\{1\} \neq H \leq G = [a]$. Legyen n a legkisebb pozitív kitevő, amelyre $a^n \in H$. (Miért létezik ilyen?) Ekkor $[a^n] = H$.

Tétel

Ciklikus csoport minden részcsoporthja is ciklikus.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 2.10. Tétel.

Legyen $\{1\} \neq H \leq G = [a]$. Legyen n a legkisebb pozitív kitevő, amelyre $a^n \in H$. (Miért létezik ilyen?) Ekkor $[a^n] = H$.

1. $[a^n] \subseteq H$:

Tétel

Ciklikus csoport minden részcsoporthja is ciklikus.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 2.10. Tétel.

Legyen $\{1\} \neq H \leq G = [a]$. Legyen n a legkisebb pozitív kitevő, amelyre $a^n \in H$. (Miért létezik ilyen?) Ekkor $[a^n] = H$.

1. $[a^n] \subseteq H$: Világos, hiszen $a^n \in H \implies [a^n] \subseteq H$.

Tétel

Ciklikus csoport minden részcsoporthja is ciklikus.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 2.10. Tétel.

Legyen $\{1\} \neq H \leq G = \langle a \rangle$. Legyen n a legkisebb **pozitív** kitevő, amelyre $a^n \in H$. (Miért létezik ilyen?) Ekkor $\langle a^n \rangle = H$.

1. $\langle a^n \rangle \subseteq H$: Világos, hiszen $a^n \in H \implies \langle a^n \rangle \subseteq H$.

2. $H \subseteq \langle a^n \rangle$:

Tétel

Ciklikus csoport minden részcsoporthja is ciklikus.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 2.10. Tétel.

Legyen $\{1\} \neq H \leq G = [a]$. Legyen n a legkisebb pozitív kitevő, amelyre $a^n \in H$. (Miért létezik ilyen?) Ekkor $[a^n] = H$.

1. $[a^n] \subseteq H$: Világos, hiszen $a^n \in H \implies [a^n] \subseteq H$.
2. $H \subseteq [a^n]$: Legyen $h = a^k \in H$ tetszőleges elem.

Tétel

Ciklikus csoport minden részcsoporthja is ciklikus.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 2.10. Tétel.

Legyen $\{1\} \neq H \leq G = [a]$. Legyen n a legkisebb **pozitív** kitevő, amelyre $a^n \in H$. (Miért létezik ilyen?) Ekkor $[a^n] = H$.

1. $[a^n] \subseteq H$: Világos, hiszen $a^n \in H \implies [a^n] \subseteq H$.
2. $H \subseteq [a^n]$: Legyen $h = a^k \in H$ tetszőleges elem.
Osszuk el k -t maradékosan n -nel:

$$k = nq + r, \quad 0 \leq r < n - 1.$$

Tétel

Ciklikus csoport minden részcsoporthja is ciklikus.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 2.10. Tétel.

Legyen $\{1\} \neq H \leq G = [a]$. Legyen n a legkisebb **pozitív** kitevő, amelyre $a^n \in H$. (Miért létezik ilyen?) Ekkor $[a^n] = H$.

1. $[a^n] \subseteq H$: Világos, hiszen $a^n \in H \implies [a^n] \subseteq H$.
2. $H \subseteq [a^n]$: Legyen $h = a^k \in H$ tetszőleges elem.
Osszuk el k -t maradékosan n -nel:

$$k = nq + r, \quad 0 \leq r < n - 1.$$

Ekkor a^r kifejezhető H -beli elemekkel:

$$a^r = a^{nq+r} \cdot a^{-nq}$$

Tétel

Ciklikus csoport minden részcsoportja is ciklikus.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 2.10. Tétel.

Legyen $\{1\} \neq H \leq G = [a]$. Legyen n a legkisebb **pozitív** kitevő, amelyre $a^n \in H$. (Miért létezik ilyen?) Ekkor $[a^n] = H$.

1. $[a^n] \subseteq H$: Világos, hiszen $a^n \in H \implies [a^n] \subseteq H$.
2. $H \subseteq [a^n]$: Legyen $h = a^k \in H$ tetszőleges elem.
Osszuk el k -t maradékosan n -nel:

$$k = nq + r, \quad 0 \leq r < n - 1.$$

Ekkor a^r kifejezhető H -beli elemekkel:

$$a^r = a^{nq+r} \cdot a^{-nq} = h \cdot (a^n)^{-q}$$

Tétel

Ciklikus csoport minden részcsoporthja is ciklikus.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 2.10. Tétel.

Legyen $\{1\} \neq H \leq G = [a]$. Legyen n a legkisebb **pozitív** kitevő, amelyre $a^n \in H$. (Miért létezik ilyen?) Ekkor $[a^n] = H$.

1. $[a^n] \subseteq H$: Világos, hiszen $a^n \in H \implies [a^n] \subseteq H$.
2. $H \subseteq [a^n]$: Legyen $h = a^k \in H$ tetszőleges elem.
Osszuk el k -t maradékosan n -nel:

$$k = nq + r, \quad 0 \leq r < n - 1.$$

Ekkor a^r kifejezhető H -beli elemekkel:

$$a^r = a^{nq+r} \cdot a^{-nq} = h \cdot (a^n)^{-q} \in H,$$

Tétel

Ciklikus csoport minden részcsoportja is ciklikus.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 2.10. Tétel.

Legyen $\{1\} \neq H \leq G = [a]$. Legyen n a legkisebb **pozitív** kitevő, amelyre $a^n \in H$. (Miért létezik ilyen?) Ekkor $[a^n] = H$.

1. $[a^n] \subseteq H$: Világos, hiszen $a^n \in H \implies [a^n] \subseteq H$.
2. $H \subseteq [a^n]$: Legyen $h = a^k \in H$ tetszőleges elem.
Osszuk el k -t maradékosan n -nel:

$$k = nq + r, \quad 0 \leq r < n - 1.$$

Ekkor a^r kifejezhető H -beli elemekkel:

$$a^r = a^{nq+r} \cdot a^{-nq} = h \cdot (a^n)^{-q} \in H,$$

így n minimalitása miatt

Tétel

Ciklikus csoport minden részcsoporthja is ciklikus.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 2.10. Tétel.

Legyen $\{1\} \neq H \leq G = [a]$. Legyen n a legkisebb **pozitív** kitevő, amelyre $a^n \in H$. (Miért létezik ilyen?) Ekkor $[a^n] = H$.

1. $[a^n] \subseteq H$: Világos, hiszen $a^n \in H \implies [a^n] \subseteq H$.
2. $H \subseteq [a^n]$: Legyen $h = a^k \in H$ tetszőleges elem.
Osszuk el k -t maradékosan n -nel:

$$k = nq + r, \quad 0 \leq r < n - 1.$$

Ekkor a^r kifejezhető H -beli elemekkel:

$$a^r = a^{nq+r} \cdot a^{-nq} = h \cdot (a^n)^{-q} \in H,$$

így n minimalitása miatt $r = 0$.

Tétel

Ciklikus csoport minden részcsoportja is ciklikus.

Biz.

[Sz] XII. fejezet, 2.10. Tétel.

Legyen $\{1\} \neq H \leq G = [a]$. Legyen n a legkisebb **pozitív** kitevő, amelyre $a^n \in H$. (Miért létezik ilyen?) Ekkor $[a^n] = H$.

1. $[a^n] \subseteq H$: Világos, hiszen $a^n \in H \implies [a^n] \subseteq H$.
2. $H \subseteq [a^n]$: Legyen $h = a^k \in H$ tetszőleges elem.
Osszuk el k -t maradékosan n -nel:

$$k = nq + r, \quad 0 \leq r < n - 1.$$

Ekkor a^r kifejezhető H -beli elemekkel:

$$a^r = a^{nq+r} \cdot a^{-nq} = h \cdot (a^n)^{-q} \in H,$$

így n minimalitása miatt $r = 0$. Tehát $h = a^{nq} \in [a^n]$.



Példa

Határozzuk meg az $a \in G$ elem rendjét, illetve az $[a] \leq G$ részcsoportot.

► $G = \mathbb{C}^*$, $a = 2$

Példa

Határozzuk meg az $a \in G$ elem rendjét, illetve az $[a] \leq G$ részcsoportot.

► $G = \mathbb{C}^*$, $a = 2$: $o(a) = \infty$, $[a] = \{\dots, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, \dots\}$

Példa

Határozzuk meg az $a \in G$ elem rendjét, illetve az $[a] \leq G$ részcsoportot.

- ▶ $G = \mathbb{C}^*$, $a = 2$: $o(a) = \infty$, $[a] = \{\dots, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, \dots\}$
- ▶ $G = \mathbb{C}^*$, $a = i$

Példa

Határozzuk meg az $a \in G$ elem rendjét, illetve az $[a] \leq G$ részcsoportot.

- ▶ $G = \mathbb{C}^*$, $a = 2$: $o(a) = \infty$, $[a] = \{\dots, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, \dots\}$
- ▶ $G = \mathbb{C}^*$, $a = i$: $o(a) = 4$, $[a] = \{1, -1, i, -i\}$

Példa

Határozzuk meg az $a \in G$ elem rendjét, illetve az $[a] \leq G$ részcsoportot.

- ▶ $G = \mathbb{C}^*$, $a = 2$: $o(a) = \infty$, $[a] = \{\dots, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, \dots\}$
- ▶ $G = \mathbb{C}^*$, $a = i$: $o(a) = 4$, $[a] = \{1, -1, i, -i\}$
- ▶ $G = \mathbb{C}^*$, $a = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Példa

Határozzuk meg az $a \in G$ elem rendjét, illetve az $[a] \leq G$ részcsoporthat.

- ▶ $G = \mathbb{C}^*$, $a = 2$: $o(a) = \infty$, $[a] = \{\dots, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, \dots\}$
- ▶ $G = \mathbb{C}^*$, $a = i$: $o(a) = 4$, $[a] = \{1, -1, i, -i\}$
- ▶ $G = \mathbb{C}^*$, $a = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$: $o(a) = 3$, $[a] = \left\{1, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$

Példa

Határozzuk meg az $a \in G$ elem rendjét, illetve az $[a] \leq G$ részcsoportot.

- ▶ $G = \mathbb{C}^*$, $a = 2$: $o(a) = \infty$, $[a] = \{\dots, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, \dots\}$
- ▶ $G = \mathbb{C}^*$, $a = i$: $o(a) = 4$, $[a] = \{1, -1, i, -i\}$
- ▶ $G = \mathbb{C}^*$, $a = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$: $o(a) = 3$, $[a] = \left\{1, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$
- ▶ $G = \mathbb{C}$, $a = 2$

Példa

Határozzuk meg az $a \in G$ elem rendjét, illetve az $[a] \leq G$ részcsoportot.

- ▶ $G = \mathbb{C}^*$, $a = 2$: $o(a) = \infty$, $[a] = \{\dots, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, \dots\}$
- ▶ $G = \mathbb{C}^*$, $a = i$: $o(a) = 4$, $[a] = \{1, -1, i, -i\}$
- ▶ $G = \mathbb{C}^*$, $a = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$: $o(a) = 3$, $[a] = \left\{1, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$
- ▶ $G = \mathbb{C}$, $a = 2$: $o(a) = \infty$, $[a] = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$

Példa

Határozzuk meg az $a \in G$ elem rendjét, illetve az $[a] \leq G$ részcsoportot.

- ▶ $G = \mathbb{C}^*$, $a = 2$: $o(a) = \infty$, $[a] = \{\dots, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, \dots\}$
- ▶ $G = \mathbb{C}^*$, $a = i$: $o(a) = 4$, $[a] = \{1, -1, i, -i\}$
- ▶ $G = \mathbb{C}^*$, $a = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$: $o(a) = 3$, $[a] = \left\{1, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$
- ▶ $G = \mathbb{C}$, $a = 2$: $o(a) = \infty$, $[a] = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$
- ▶ $G = \mathbb{C}$, $a = i$

Példa

Határozzuk meg az $a \in G$ elem rendjét, illetve az $[a] \leq G$ részcsoportot.

- ▶ $G = \mathbb{C}^*$, $a = 2$: $o(a) = \infty$, $[a] = \{\dots, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, \dots\}$
- ▶ $G = \mathbb{C}^*$, $a = i$: $o(a) = 4$, $[a] = \{1, -1, i, -i\}$
- ▶ $G = \mathbb{C}^*$, $a = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$: $o(a) = 3$, $[a] = \left\{1, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$
- ▶ $G = \mathbb{C}$, $a = 2$: $o(a) = \infty$, $[a] = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$
- ▶ $G = \mathbb{C}$, $a = i$: $o(a) = \infty$, $[a] = \{\dots, -2i, -i, 0, i, 2i, 3i, \dots\}$

Példa

Határozzuk meg az $a \in G$ elem rendjét, illetve az $[a] \leq G$ részcsoporthat.

- ▶ $G = \mathbb{C}^*, a = 2: o(a) = \infty, [a] = \{\dots, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, \dots\}$
- ▶ $G = \mathbb{C}^*, a = i: o(a) = 4, [a] = \{1, -1, i, -i\}$
- ▶ $G = \mathbb{C}^*, a = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i: o(a) = 3, [a] = \left\{1, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$
- ▶ $G = \mathbb{C}, a = 2: o(a) = \infty, [a] = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$
- ▶ $G = \mathbb{C}, a = i: o(a) = \infty, [a] = \{\dots, -2i, -i, 0, i, 2i, 3i, \dots\}$
- ▶ $G = \mathbb{Z}_{12}^*, a = \bar{5}$

Példa

Határozzuk meg az $a \in G$ elem rendjét, illetve az $[a] \leq G$ részcsoportot.

- ▶ $G = \mathbb{C}^*, a = 2: o(a) = \infty, [a] = \{\dots, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, \dots\}$
- ▶ $G = \mathbb{C}^*, a = i: o(a) = 4, [a] = \{1, -1, i, -i\}$
- ▶ $G = \mathbb{C}^*, a = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i: o(a) = 3, [a] = \left\{1, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$
- ▶ $G = \mathbb{C}, a = 2: o(a) = \infty, [a] = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$
- ▶ $G = \mathbb{C}, a = i: o(a) = \infty, [a] = \{\dots, -2i, -i, 0, i, 2i, 3i, \dots\}$
- ▶ $G = \mathbb{Z}_{12}^*, a = \bar{5}: o(a) = 2, [a] = \{\bar{1}, \bar{5}\}$

Példa

Határozzuk meg az $a \in G$ elem rendjét, illetve az $[a] \leq G$ részcsoporthat.

- ▶ $G = \mathbb{C}^*, a = 2: o(a) = \infty, [a] = \{\dots, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, \dots\}$
- ▶ $G = \mathbb{C}^*, a = i: o(a) = 4, [a] = \{1, -1, i, -i\}$
- ▶ $G = \mathbb{C}^*, a = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i: o(a) = 3, [a] = \left\{1, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$
- ▶ $G = \mathbb{C}, a = 2: o(a) = \infty, [a] = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$
- ▶ $G = \mathbb{C}, a = i: o(a) = \infty, [a] = \{\dots, -2i, -i, 0, i, 2i, 3i, \dots\}$
- ▶ $G = \mathbb{Z}_{12}^*, a = \bar{5}: o(a) = 2, [a] = \{\bar{1}, \bar{5}\}$
- ▶ $G = \mathbb{Z}_{13}^*, a = \bar{5}$

Példa

Határozzuk meg az $a \in G$ elem rendjét, illetve az $[a] \leq G$ részcsoportot.

- ▶ $G = \mathbb{C}^*$, $a = 2$: $o(a) = \infty$, $[a] = \{\dots, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, \dots\}$
- ▶ $G = \mathbb{C}^*$, $a = i$: $o(a) = 4$, $[a] = \{1, -1, i, -i\}$
- ▶ $G = \mathbb{C}^*$, $a = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$: $o(a) = 3$, $[a] = \left\{1, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$
- ▶ $G = \mathbb{C}$, $a = 2$: $o(a) = \infty$, $[a] = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$
- ▶ $G = \mathbb{C}$, $a = i$: $o(a) = \infty$, $[a] = \{\dots, -2i, -i, 0, i, 2i, 3i, \dots\}$
- ▶ $G = \mathbb{Z}_{12}^*$, $a = \bar{5}$: $o(a) = 2$, $[a] = \{\bar{1}, \bar{5}\}$
- ▶ $G = \mathbb{Z}_{13}^*$, $a = \bar{5}$: $o(a) = 4$, $[a] = \{\bar{1}, \bar{5}, \bar{8}, \bar{12}\}$

Példa

Határozzuk meg az $a \in G$ elem rendjét, illetve az $[a] \leq G$ részcsoportot.

- ▶ $G = \mathbb{C}^*, a = 2: o(a) = \infty, [a] = \{\dots, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, \dots\}$
- ▶ $G = \mathbb{C}^*, a = i: o(a) = 4, [a] = \{1, -1, i, -i\}$
- ▶ $G = \mathbb{C}^*, a = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i: o(a) = 3, [a] = \left\{1, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$
- ▶ $G = \mathbb{C}, a = 2: o(a) = \infty, [a] = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$
- ▶ $G = \mathbb{C}, a = i: o(a) = \infty, [a] = \{\dots, -2i, -i, 0, i, 2i, 3i, \dots\}$
- ▶ $G = \mathbb{Z}_{12}^*, a = \bar{5}: o(a) = 2, [a] = \{\bar{1}, \bar{5}\}$
- ▶ $G = \mathbb{Z}_{13}^*, a = \bar{5}: o(a) = 4, [a] = \{\bar{1}, \bar{5}, \bar{8}, \bar{12}\}$
- ▶ $G = \mathbb{Z}_{12}, a = \bar{10}$

Példa

Határozzuk meg az $a \in G$ elem rendjét, illetve az $[a] \leq G$ részcsoportot.

- ▶ $G = \mathbb{C}^*, a = 2: o(a) = \infty, [a] = \{\dots, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, \dots\}$
- ▶ $G = \mathbb{C}^*, a = i: o(a) = 4, [a] = \{1, -1, i, -i\}$
- ▶ $G = \mathbb{C}^*, a = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i: o(a) = 3, [a] = \left\{1, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$
- ▶ $G = \mathbb{C}, a = 2: o(a) = \infty, [a] = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$
- ▶ $G = \mathbb{C}, a = i: o(a) = \infty, [a] = \{\dots, -2i, -i, 0, i, 2i, 3i, \dots\}$
- ▶ $G = \mathbb{Z}_{12}^*, a = \bar{5}: o(a) = 2, [a] = \{\bar{1}, \bar{5}\}$
- ▶ $G = \mathbb{Z}_{13}^*, a = \bar{5}: o(a) = 4, [a] = \{\bar{1}, \bar{5}, \bar{8}, \bar{12}\}$
- ▶ $G = \mathbb{Z}_{12}, a = \bar{10}: o(a) = 6, [a] = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}\}$

Példa

Határozzuk meg az $a \in G$ elem rendjét, illetve az $[a] \leq G$ részcsoportot.

- ▶ $G = \mathbb{C}^*, a = 2: o(a) = \infty, [a] = \{\dots, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, \dots\}$
- ▶ $G = \mathbb{C}^*, a = i: o(a) = 4, [a] = \{1, -1, i, -i\}$
- ▶ $G = \mathbb{C}^*, a = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i: o(a) = 3, [a] = \left\{1, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$
- ▶ $G = \mathbb{C}, a = 2: o(a) = \infty, [a] = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$
- ▶ $G = \mathbb{C}, a = i: o(a) = \infty, [a] = \{\dots, -2i, -i, 0, i, 2i, 3i, \dots\}$
- ▶ $G = \mathbb{Z}_{12}^*, a = \bar{5}: o(a) = 2, [a] = \{\bar{1}, \bar{5}\}$
- ▶ $G = \mathbb{Z}_{13}^*, a = \bar{5}: o(a) = 4, [a] = \{\bar{1}, \bar{5}, \bar{8}, \bar{12}\}$
- ▶ $G = \mathbb{Z}_{12}, a = \bar{10}: o(a) = 6, [a] = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}\}$
- ▶ $G = \mathbb{Z}_{13}, a = \bar{10}$

Példa

Határozzuk meg az $a \in G$ elem rendjét, illetve az $[a] \leq G$ részcsoportot.

- ▶ $G = \mathbb{C}^*, a = 2: o(a) = \infty, [a] = \{\dots, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, \dots\}$
- ▶ $G = \mathbb{C}^*, a = i: o(a) = 4, [a] = \{1, -1, i, -i\}$
- ▶ $G = \mathbb{C}^*, a = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i: o(a) = 3, [a] = \left\{1, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$
- ▶ $G = \mathbb{C}, a = 2: o(a) = \infty, [a] = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$
- ▶ $G = \mathbb{C}, a = i: o(a) = \infty, [a] = \{\dots, -2i, -i, 0, i, 2i, 3i, \dots\}$
- ▶ $G = \mathbb{Z}_{12}^*, a = \bar{5}: o(a) = 2, [a] = \{\bar{1}, \bar{5}\}$
- ▶ $G = \mathbb{Z}_{13}^*, a = \bar{5}: o(a) = 4, [a] = \{\bar{1}, \bar{5}, \bar{8}, \bar{12}\}$
- ▶ $G = \mathbb{Z}_{12}, a = \bar{10}: o(a) = 6, [a] = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}\}$
- ▶ $G = \mathbb{Z}_{13}, a = \bar{10}: o(a) = 13, [a] = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \bar{12}\}$

Példa

Határozzuk meg az $a \in G$ elem rendjét, illetve az $[a] \leq G$ részcsoportot.

- ▶ $G = \mathbb{C}^*, a = 2: o(a) = \infty, [a] = \{\dots, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, \dots\}$
- ▶ $G = \mathbb{C}^*, a = i: o(a) = 4, [a] = \{1, -1, i, -i\}$
- ▶ $G = \mathbb{C}^*, a = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i: o(a) = 3, [a] = \left\{1, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$
- ▶ $G = \mathbb{C}, a = 2: o(a) = \infty, [a] = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$
- ▶ $G = \mathbb{C}, a = i: o(a) = \infty, [a] = \{\dots, -2i, -i, 0, i, 2i, 3i, \dots\}$
- ▶ $G = \mathbb{Z}_{12}^*, a = \bar{5}: o(a) = 2, [a] = \{\bar{1}, \bar{5}\}$
- ▶ $G = \mathbb{Z}_{13}^*, a = \bar{5}: o(a) = 4, [a] = \{\bar{1}, \bar{5}, \bar{8}, \bar{12}\}$
- ▶ $G = \mathbb{Z}_{12}, a = \bar{10}: o(a) = 6, [a] = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}\}$
- ▶ $G = \mathbb{Z}_{13}, a = \bar{10}: o(a) = 13, [a] = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \bar{12}\}$
- ▶ $G = \mathbb{Z}_{35}, a = \bar{10}$

Példa

Határozzuk meg az $a \in G$ elem rendjét, illetve az $[a] \leq G$ részcsoportot.

- ▶ $G = \mathbb{C}^*, a = 2: o(a) = \infty, [a] = \{\dots, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, \dots\}$
- ▶ $G = \mathbb{C}^*, a = i: o(a) = 4, [a] = \{1, -1, i, -i\}$
- ▶ $G = \mathbb{C}^*, a = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i: o(a) = 3, [a] = \left\{1, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$
- ▶ $G = \mathbb{C}, a = 2: o(a) = \infty, [a] = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$
- ▶ $G = \mathbb{C}, a = i: o(a) = \infty, [a] = \{\dots, -2i, -i, 0, i, 2i, 3i, \dots\}$
- ▶ $G = \mathbb{Z}_{12}^*, a = \bar{5}: o(a) = 2, [a] = \{\bar{1}, \bar{5}\}$
- ▶ $G = \mathbb{Z}_{13}^*, a = \bar{5}: o(a) = 4, [a] = \{\bar{1}, \bar{5}, \bar{8}, \bar{12}\}$
- ▶ $G = \mathbb{Z}_{12}, a = \bar{10}: o(a) = 6, [a] = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}\}$
- ▶ $G = \mathbb{Z}_{13}, a = \bar{10}: o(a) = 13, [a] = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \bar{12}\}$
- ▶ $G = \mathbb{Z}_{35}, a = \bar{10}: o(a) = 7, [a] = \{\bar{0}, \bar{5}, \bar{10}, \bar{15}, \bar{20}, \bar{25}, \bar{30}\}$

Példa

Határozzuk meg az $a \in G$ elem rendjét, illetve az $\langle a \rangle \leq G$ részcsoporthat.

► $G = D_{12}$, $a = f^{10}$

Példa

Határozzuk meg az $a \in G$ elem rendjét, illetve az $[a] \leq G$ részcsoporthat.

- ▶ $G = D_{12}$, $a = f^{10}$: $o(a) = 6$, $[a] = \{\text{id}, f^2, f^4, f^6, f^8, f^{10}\}$

Példa

Határozzuk meg az $a \in G$ elem rendjét, illetve az $[a] \leq G$ részcsoportot.

- ▶ $G = D_{12}$, $a = f^{10}$: $o(a) = 6$, $[a] = \{\text{id}, f^2, f^4, f^6, f^8, f^{10}\}$
- ▶ $G = D_{12}$, $a = tf^{10}$

Példa

Határozzuk meg az $a \in G$ elem rendjét, illetve az $[a] \leq G$ részcsoportot.

- ▶ $G = D_{12}$, $a = f^{10}$: $o(a) = 6$, $[a] = \{\text{id}, f^2, f^4, f^6, f^8, f^{10}\}$
- ▶ $G = D_{12}$, $a = tf^{10}$: $o(a) = 2$, $[a] = \{\text{id}, tf^{10}\}$

Példa

Határozzuk meg az $a \in G$ elem rendjét, illetve az $[a] \leq G$ részcsoporthat.

- ▶ $G = D_{12}$, $a = f^{10}$: $o(a) = 6$, $[a] = \{\text{id}, f^2, f^4, f^6, f^8, f^{10}\}$
- ▶ $G = D_{12}$, $a = tf^{10}$: $o(a) = 2$, $[a] = \{\text{id}, tf^{10}\}$
- ▶ $G = S_9$, $a = (368)$

Példa

Határozzuk meg az $a \in G$ elem rendjét, illetve az $[a] \leq G$ részcsoportot.

- ▶ $G = D_{12}$, $a = f^{10}$: $o(a) = 6$, $[a] = \{\text{id}, f^2, f^4, f^6, f^8, f^{10}\}$
- ▶ $G = D_{12}$, $a = tf^{10}$: $o(a) = 2$, $[a] = \{\text{id}, tf^{10}\}$
- ▶ $G = S_9$, $a = (368)$: $o(a) = 3$, $[a] = \{\text{id}, (368), (386)\}$

Példa

Határozzuk meg az $a \in G$ elem rendjét, illetve az $[a] \leq G$ részcsoportot.

- ▶ $G = D_{12}$, $a = f^{10}$: $o(a) = 6$, $[a] = \{\text{id}, f^2, f^4, f^6, f^8, f^{10}\}$
- ▶ $G = D_{12}$, $a = tf^{10}$: $o(a) = 2$, $[a] = \{\text{id}, tf^{10}\}$
- ▶ $G = S_9$, $a = (368)$: $o(a) = 3$, $[a] = \{\text{id}, (368), (386)\}$
- ▶ $G = S_9$, $a = (368)(45)$

Példa

Határozzuk meg az $a \in G$ elem rendjét, illetve az $[a] \leq G$ részcsoportot.

- ▶ $G = D_{12}$, $a = f^{10}$: $o(a) = 6$, $[a] = \{\text{id}, f^2, f^4, f^6, f^8, f^{10}\}$
- ▶ $G = D_{12}$, $a = tf^{10}$: $o(a) = 2$, $[a] = \{\text{id}, tf^{10}\}$
- ▶ $G = S_9$, $a = (368)$: $o(a) = 3$, $[a] = \{\text{id}, (368), (386)\}$
- ▶ $G = S_9$, $a = (368)(45)$: $o(a) = 6$,
 $[a] = \{\text{id}, (368), (386), (368)(45), (386)(45)\}$

Példa

Határozzuk meg az $a \in G$ elem rendjét, illetve az $[a] \leq G$ részcsoportot.

- ▶ $G = D_{12}$, $a = f^{10}$: $o(a) = 6$, $[a] = \{\text{id}, f^2, f^4, f^6, f^8, f^{10}\}$
- ▶ $G = D_{12}$, $a = tf^{10}$: $o(a) = 2$, $[a] = \{\text{id}, tf^{10}\}$
- ▶ $G = S_9$, $a = (368)$: $o(a) = 3$, $[a] = \{\text{id}, (368), (386)\}$
- ▶ $G = S_9$, $a = (368)(45)$: $o(a) = 6$,
 $[a] = \{\text{id}, (368), (386), (368)(45), (386)(45)\}$
- ▶ $G = S_9$, $a = (368)(46)$

Példa

Határozzuk meg az $a \in G$ elem rendjét, illetve az $[a] \leq G$ részcsoportot.

- ▶ $G = D_{12}$, $a = f^{10}$: $o(a) = 6$, $[a] = \{\text{id}, f^2, f^4, f^6, f^8, f^{10}\}$
- ▶ $G = D_{12}$, $a = tf^{10}$: $o(a) = 2$, $[a] = \{\text{id}, tf^{10}\}$
- ▶ $G = S_9$, $a = (368)$: $o(a) = 3$, $[a] = \{\text{id}, (368), (386)\}$
- ▶ $G = S_9$, $a = (368)(45)$: $o(a) = 6$,
 $[a] = \{\text{id}, (368), (386), (368)(45), (386)(45)\}$
- ▶ $G = S_9$, $a = (368)(46)$: $o(a) = 4$,
 $[a] = \{\text{id}, (3468), (36)(48), (3864)\}$

Példa

Határozzuk meg az $a \in G$ elem rendjét, illetve az $[a] \leq G$ részcsoportot.

- ▶ $G = D_{12}$, $a = f^{10}$: $o(a) = 6$, $[a] = \{\text{id}, f^2, f^4, f^6, f^8, f^{10}\}$
- ▶ $G = D_{12}$, $a = tf^{10}$: $o(a) = 2$, $[a] = \{\text{id}, tf^{10}\}$
- ▶ $G = S_9$, $a = (368)$: $o(a) = 3$, $[a] = \{\text{id}, (368), (386)\}$
- ▶ $G = S_9$, $a = (368)(45)$: $o(a) = 6$,
 $[a] = \{\text{id}, (368), (386), (368)(45), (386)(45)\}$
- ▶ $G = S_9$, $a = (368)(46)$: $o(a) = 4$,
 $[a] = \{\text{id}, (3468), (36)(48), (3864)\}$
- ▶ $G = S_9$, $a = (12)(345)(6789)$

Példa

Határozzuk meg az $a \in G$ elem rendjét, illetve az $[a] \leq G$ részcsoportot.

- ▶ $G = D_{12}$, $a = f^{10}$: $o(a) = 6$, $[a] = \{\text{id}, f^2, f^4, f^6, f^8, f^{10}\}$
- ▶ $G = D_{12}$, $a = tf^{10}$: $o(a) = 2$, $[a] = \{\text{id}, tf^{10}\}$
- ▶ $G = S_9$, $a = (368)$: $o(a) = 3$, $[a] = \{\text{id}, (368), (386)\}$
- ▶ $G = S_9$, $a = (368)(45)$: $o(a) = 6$,
 $[a] = \{\text{id}, (368), (386), (368)(45), (386)(45)\}$
- ▶ $G = S_9$, $a = (368)(46)$: $o(a) = 4$,
 $[a] = \{\text{id}, (3468), (36)(48), (3864)\}$
- ▶ $G = S_9$, $a = (12)(345)(6789)$: $o(a) = 12$,
 $[a] = \{\text{id}, a, a^2, \dots, a^{11}\}$