

LINEÁRIS ALGEBRA II.

matematika BSc, 2025. őszi félév

-1. feladat. Hozzuk Gauss–Jordan-eliminációval (elemi sorátalakításokkal) redukált lépcsős alakra az alábbi A mátrixot.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & -7 & 1 & 6 \\ -3 & -9 & 10 & -1 & -11 \end{pmatrix}$$

0. feladat.

(a) Hozzuk Gauss–Jordan-eliminációval (elemi sorátalakításokkal) redukált lépcsős alakra az alábbi A mátrixot.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 11 & 6 \\ 2 & 6 & -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszert a valós számtest fölött. Az összes megoldást adjuk meg (paraméteresen), ne csak egyet!

$$\begin{aligned} x_3 + 4x_4 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 11x_4 &= 6 \\ 2x_1 + 6x_2 - 4x_3 - 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

(c) Oldjuk meg az alábbi homogén lineáris egyenletrendszert a valós számtest fölött, és adjunk meg egy generátorrendszert (bázist) a megoldások terében.

$$\begin{aligned} x_3 + 4x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 11x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 4x_3 - 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

(d) Előáll-e a $\mathbf{v}_5 \in \mathbb{R}^4$ vektor a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \in \mathbb{R}^4$ vektorok lineáris kombinációjaként? Ha igen, hogyan; ha nem, miért nem?

$$\mathbf{v}_1 = (0, 1, 1, 2), \quad \mathbf{v}_2 = (0, 3, 3, 6), \quad \mathbf{v}_3 = (1, -1, 1, -4), \quad \mathbf{v}_4 = (4, 3, 11, -2), \quad \mathbf{v}_5 = (2, 2, 6, 0)$$

(e) Lineárisan független-e a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5$ vektorrendszer?

(f) Lineárisan független-e a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ vektorrendszer?

(g) Írjuk le a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ vektorok által kifeszített $V := [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4] \leq \mathbb{R}^4$ alteret (úgy, hogy bármilyen vektorról könnyen látszódjon, hogy benne van-e V -ben).

(h) Előáll-e a $\mathbf{w}_4 \in \mathbb{R}^5$ vektor a $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3 \in \mathbb{R}^5$ vektorok lineáris kombinációjaként?

$$\mathbf{w}_1 = (0, 0, 1, 4, 2), \quad \mathbf{w}_2 = (1, 3, -1, 3, 2), \quad \mathbf{w}_3 = (1, 3, 1, 11, 6), \quad \mathbf{w}_4 = (2, 6, -4, -2, 0)$$

(i) Adjunk meg egy olyan homogén lineáris egyenletrendszert, amelynek megoldástere a $W := [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4] \leq \mathbb{R}^5$ altér.

(j) Hozzuk Gauss–Jordan-eliminációval redukált lépcsős alakra az A^T mátrixot is, és olvassuk le ebből is a válaszokat a fenti (d)–(i) kérdésekre (amelyikre lehet).

1. feladat. Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszert a valós számtest fölött, és adjunk meg egy bázist a megoldások terében.

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 - 2x_5 &= 0 \\ 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 4x_5 &= 0 \\ -3x_1 + 8x_2 - 11x_3 + 15x_4 + 3x_5 &= 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 7x_3 - 7x_4 - 4x_5 &= 0 \end{aligned}$$

2. feladat. ♥ Tekintsük az $\mathbb{R}^5$ vektortérben az alábbi W alteret:

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_1 - x_4 = 0, x_1 - x_2 - x_3 = 0, 3x_1 - x_5 = 0\}.$$

Adjunk meg bázist a W altérben.

3. feladat. ♥ Tekintsük az $\mathbb{R}^5$ vektortérben az alábbi három vektort:

$$\mathbf{v}_1 = (1, 4, -3, 1, 3), \quad \mathbf{v}_2 = (-2, 1, 0, 1, 0), \quad \mathbf{v}_3 = (3, -2, -1, 1, 1).$$

Írjuk le a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ vektorok által kifeszített $U = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$ alteret, vagyis adjuk meg, hogy milyen összefüggéseknek kell teljesülniük az x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 számok között ahhoz, hogy az $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ vektor előálljon $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ lineáris kombinációjaként. Másképp fogalmazva: adjunk meg olyan homogén lineáris egyenletrendszert, amelynek megoldástere U .

4. feladat. Adjunk meg olyan homogén lineáris egyenletrendszert, melynek megoldástere éppen az alábbi vektorok által kifeszített $U = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4] \leq \mathbb{Z}_5^5$ altér.

$$\mathbf{v}_1 = 10020, \quad \mathbf{v}_2 = 22342, \quad \mathbf{v}_3 = 32312, \quad \mathbf{v}_4 = 44443.$$

5. feladat.♥ Tekintsük a 2. és 3. feladatokban szereplő W és U altereket $\mathbb{R}^5$ -ben, és határozzuk meg az összegüket és a metszetüket. Mindkettőt adjuk meg bázissal és egyenletrendszer megoldástereként is.

6. feladat.♥ Tekintsük most a 2. és 3. feladatbeli W , U altereket $\mathbb{Z}_2$ felett, és határozzuk meg az összegüket és metszetüket. Mind a négy alteret adjuk meg bázissal és egyenletrendszerrel is.

7. feladat. Tekintsük a $\mathbb{Z}_2^6$ vektortérben az alábbi U és V altereket:

$$U = [100011, 010010, 001010, 000111]$$

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in \mathbb{Z}_2^6 : x_1 + x_4 + x_6 = 0, x_2 + x_3 = 0, x_2 + x_4 + x_5 = 0\}.$$

Határozzuk meg az $U + V$ és $U \cap V$ altereket. Mindkettőt adjuk meg bázissal is és egyenletrendszer megoldástereként is.

8. feladat. Igazoljuk, hogy a pozitív valós számok halmaza vektorteret alkot $\mathbb{R}$ felett, ha az „összeadást” és a „skalárral való szorzást” a következőképpen definiáljuk:

$$\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = \mathbf{u}\mathbf{v}, \quad \lambda \odot \mathbf{v} = \mathbf{v}^\lambda \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^+, \lambda \in \mathbb{R}).$$

9. feladat. Igazoljuk, hogy bármely halmaz hatványhalmaza vektorteret alkot $\mathbb{Z}_2$ felett, ha „összeadásnak” a szimmetrikus differencia képzését tekintjük. (A $\mathbb{Z}_2$ -beli skalárokkal való szorzást miért nem kell külön definiálni?)

10. feladat. Írjuk le a $\mathbb{Z}_2^3$ vektortér összes alterét, és rajzoljuk fel az altérhálót.

11. feladat. Alteret alkotnak-e a valós számsorozatok $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vektorterében az alábbi halmazok? A nemleges választ konkrét ellenpéldával indokoljuk!

- | | |
|--|---|
| (a) U_1 : korlátos sorozatok halmaza | (d) U_4 : mértani sorozatok halmaza |
| (b) U_2 : monoton sorozatok halmaza | (e) U_5 : azon sorozatok halmaza, amelyek csak véges sok nemnulla elemet tartalmaznak |
| (c) U_3 : számtani sorozatok halmaza | (f) U_6 : azon sorozatok halmaza, amelyek végtelen sok nullát tartalmaznak |

12. feladat. Alteret alkotnak-e a valós $n \times n$ -es mátrixok $\mathbb{R}^{n \times n}$ vektorterében az alábbi halmazok? A nemleges választ konkrét ellenpéldával indokoljuk!

- | | |
|--------------------------------|---|
| (a) $U_1 = \{A : A = 0\}$ | (d) $U_4 = \{A : AB = BA\}$, ahol B egy adott mátrix |
| (b) $U_2 = \{A : A \neq 0\}$ | (e) $U_5 = \{A : AB = B\}$, ahol B egy adott mátrix |
| (c) $U_3 = \{A : A^T = A\}$ | (f) $U_6 = \{A : AB = A\}$, ahol B egy adott mátrix |

13. feladat. Mutassuk meg, hogy az $\{\alpha \sin(x + \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ halmaz alteret alkot a valós függvények $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ vektorterében.

14. feladat. Igazoljuk, hogy egy vektortér soha nem állhat elő két valódi alterének uniójaként.

15. feladat. Igazoljuk, hogy $n \geq 2$ esetén a $\mathbb{Z}_2^n$ vektortér előáll három valódi alterének uniójaként.

16. feladat. Tekintsük a valós számok halmazát vektortérnek $\mathbb{Q}$ felett, a szokásos műveletekkel (mit jelent ez?). Mi lesz a $\{\log p : p \text{ prímszám}\}$ halmaz által generált altér ebben a vektortérben?

17. feladat. Legyen $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ három vektor egy tetszőleges vektortérben. Mit lehet mondani az $\mathbf{u}$ vektorról, ha tudjuk, hogy $\mathbf{w} \notin [\mathbf{u}, \mathbf{v}]$, $\mathbf{v} \notin [\mathbf{u}, \mathbf{w}]$, de $\mathbf{u} \in [\mathbf{v}, \mathbf{w}]$?

18. feladat. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges vektortér tetszőleges U , V , W altereire

$$U \subseteq W \implies (U + V) \cap W = U + (V \cap W).$$

19. feladat. Legyen $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ lineárisan független vektorrendszer a V valós vektortérben, és legyen $\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{u}_k$. Bizonyítsuk be, hogy amennyiben $\lambda_1 + \dots + \lambda_k \neq 1$, akkor az $\mathbf{u}_1 - \mathbf{v}, \dots, \mathbf{u}_k - \mathbf{v}$ vektorrendszer is lineárisan független.

20. feladat. Az $\mathbb{R}^2$ halmaz nemcsak $\mathbb{R}$ felett, hanem $\mathbb{Q}$ felett is vektorteret alkot (ugye?).

- (a) Igaz-e, hogy ha $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^2$ lineárisan független $\mathbb{R}$ felett, akkor lineárisan független $\mathbb{Q}$ felett is? Ha igaz, bizonyítsuk be; ha nem, adjunk egy konkrét ellenpéldát.
- (b) Igaz-e, hogy ha $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^2$ lineárisan független $\mathbb{Q}$ felett, akkor lineárisan független $\mathbb{R}$ felett is? Ha igaz, bizonyítsuk be; ha nem, adjunk egy konkrét ellenpéldát.

21. feladat. Létezik-e olyan végtelen vektorrendszer az $\mathbb{R}^n$ vektortérben, amelynek minden n -elemű részrendszere lineárisan független?

22. feladat.♥ Tekintsük a $\mathbb{Z}_3^4$ vektortérben az alábbi $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4$ bázist:

$$\mathbf{b}_1 = 1011, \mathbf{b}_2 = 1112, \mathbf{b}_3 = 2002, \mathbf{b}_4 = 1121.$$

Számítsuk ki a $\mathbf{v} = 1222$ vektor koordinátáit ebben a bázisban.

23. feladat. Tekintsük az $\mathbb{R}^4$ vektortérben az alábbi $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4$ bázist:

$$\mathbf{b}_1 = (1, -1, 2, 1), \mathbf{b}_2 = (2, -1, 5, 0), \mathbf{b}_3 = (-1, 3, 2, -3), \mathbf{b}_4 = (-1, 3, 2, -5).$$

Számítsuk ki a $\mathbf{v} = (4, -1, 13, -4)$ vektor koordinátáit ebben a bázisban.

24. feladat. Adjunk meg bázist a 12. feladatban szereplő alterekben és állapítsuk meg a dimenziójukat, ha a (d), (e), (f) részekben B az alábbi mátrix.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

25. feladat. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi p_0, p_1, p_2, p_3 polinomok bázist alkotnak a legfeljebb harmadfokú valós polinomok vektorterében, és határozzuk meg az $\frac{7}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{14}{3}x + 2$ polinom koordinátáit ebben a bázisban.

$$p_0 = 1, \quad p_1 = x, \quad p_2 = \frac{x(x-1)}{2}, \quad p_3 = \frac{x(x-1)(x-2)}{6}$$

(A megoldáshoz szabad, sőt, célszerű számítógépet használni.)

26. feladat. Hány nemnulla determinánsú $n \times n$ -es mátrix van $\mathbb{Z}_3$ felett?

27. feladat. $\heartsuit$ Szűkítsük a $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_6] \leq \mathbb{R}^4$ altér bázisává a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_6$ vektorrendszert.

$$\mathbf{v}_1 = (1, -1, 2, 0), \mathbf{v}_2 = (-1, 2, -5, -1), \mathbf{v}_3 = (0, 1, -3, -1), \mathbf{v}_4 = (2, -1, 2, 0), \mathbf{v}_5 = (1, 2, -6, -2), \mathbf{v}_6 = (-3, 3, -4, 3)$$

28. feladat. Szűkítsük a $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4] \leq \mathbb{R}^4$ altér bázisává a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ vektorrendszert.

$$\mathbf{v}_1 = (1, 2, 4, 1), \quad \mathbf{v}_2 = (-2, -4, -5, -3), \quad \mathbf{v}_3 = (-1, -2, -7, 0), \quad \mathbf{v}_4 = (1, 2, -2, 3)$$

29. feladat. $\heartsuit$ Bővítsük $\mathbb{R}^4$ bázisává a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ vektorrendszert.

$$\mathbf{v}_1 = (3, 2, 2, 3), \quad \mathbf{v}_2 = (6, 1, 2, 3)$$

30. feladat. Bővítsük $\mathbb{Z}_5^4$ bázisává a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ vektorrendszert.

$$\mathbf{v}_1 = 1112, \quad \mathbf{v}_2 = 1121$$

31. feladat. Tekintsük a $\mathbb{Z}_3^6$ vektortérben az $U = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$ és $V = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4]$ altereket.

$$\mathbf{u}_1 = 100210, \mathbf{u}_2 = 010002, \mathbf{u}_3 = 001000, \quad \mathbf{v}_1 = 102001, \mathbf{v}_2 = 011002, \mathbf{v}_3 = 000100, \mathbf{v}_4 = 000010$$

Adjunk meg egy bázist az $U \cap V$ altérben, majd egészítsük ki ezt U , illetve V bázisává.

32. feladat. Az $S \subseteq \mathbb{R}^n$ halmazt *lineáris sokaságnak* vagy *affin altérnek* nevezzük, ha van olyan $U \leq \mathbb{R}^n$ altér és $\mathbf{v}_0 \in \mathbb{R}^n$ vektor, hogy $S = U + \mathbf{v}_0 = \{\mathbf{u} + \mathbf{v}_0 : \mathbf{u} \in U\}$. Ez szemléletesen azt jelenti, hogy S úgy keletkezik, hogy az U alteret a $\mathbf{v}_0$ vektorral eltoljuk. Ha $\dim U = 1$, akkor S egy egyenes, ha $\dim U = 2$, akkor S egy sík. Mutassuk meg, hogy bármely két síkhoz lehet találni olyan legfeljebb ötdimenziós lineáris sokaságot, ami mindkét síkot tartalmazza.

33. feladat. Mekkora lehet egy tízdimenziós térben egy nyolcdimenziós és egy kilencedimenziós altér metszetének dimenziója? Adjunk konkrét példát az összes lehetséges értékre, a többitől meg bizonyítsuk be, hogy valóban nem lehetséges.

34. feladat. Egy végesdimenziós vektortér A, B, C altereiről a következőket tudjuk: $A + B = A + C$, $A \cap B = A \cap C$ és $B \leq C$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $B = C$.

35. feladat. $\heartsuit$ Tekintsük az $\mathbb{R}^5$ vektortérben az $U = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$ és $V = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$ altereket.

$$\mathbf{u}_1 = (1, 0, 2, 3, 2), \mathbf{u}_2 = (3, -1, 5, 4, 1), \mathbf{u}_3 = (2, 1, 0, 1, -1), \quad \mathbf{v}_1 = (-2, 3, 0, 1, 1), \mathbf{v}_2 = (4, 1, 3, 0, 1)$$

Igaz-e, hogy $\mathbb{R}^5 = U \oplus V$?

36. feladat. Bontsuk a valós függvények vektorterét két nemtriviális altér direkt összegére.

37. feladat. $\heartsuit$ Határozzuk meg az alábbi $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ mátrix (oszlop)rangját, és adjunk meg $r(A)$ darab oszlopvektort, amelyek lineárisan függetlenek.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

38. feladat. Határozzuk meg az alábbi $A \in \mathbb{Z}_5^{4 \times 5}$ mátrix (oszlop)rangját, és adjunk meg $r(A)$ darab oszlopvektort, amelyek lineárisan függetlenek.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

39. feladat. $\heartsuit$ Határozzuk meg az alábbi $A \in \mathbb{Z}_3^{5 \times 4}$ mátrix (sor)rangját, és adjunk meg $r(A)$ darab sorvektort, amelyek lineárisan függetlenek.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

40. feladat. Határozzuk meg az alábbi $A \in \mathbb{R}^{4 \times 5}$ mátrix (sor)rangját, és adjunk meg $r(A)$ darab sorvektort, amelyek lineárisan függetlenek.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

41. feladat. Egy adott $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mátrixot szeretnénk két minél kisebb mátrix szorzatára felbontatni. Tekintsük az összes $A = BC$ alakú felbontást, ahol $B \in \mathbb{R}^{n \times k}$ és $C \in \mathbb{R}^{k \times m}$. Bizonyítsuk be, hogy k lehetséges legkisebb értéke éppen $r(A)$.

42. feladat. $\heartsuit$ Melyek lineárisak az alábbi leképezések közül? Amelyik lineáris, annak határozzuk meg a képterét és a magterét (bázissal is és egyenletrendszerrel is), illetve ezek dimenzióját.

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (x + y, y + 1, x) \\ \psi: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x + y, xy) \\ \chi: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (x - y, x + y) \\ \omega: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^4, (x, y, z) \mapsto (x - y, y - z, x - z, z - x) \end{aligned}$$

43. feladat. Melyek lineárisak az alábbi leképezések közül?

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{Z}_3^2 &\rightarrow \mathbb{Z}_3^4, (x, y) \mapsto (x + 2y, x + y, 2x, x + 2y) \\ \psi: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x^2 + y, x + y^2) \\ \chi: \mathbb{C}^3 &\rightarrow \mathbb{C}^2, (x, y, z) \mapsto (x + 2y, 2x + iy - 2z) \\ \omega: \mathbb{C}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (\overline{x + y} + x + y, |z| + |x|) \end{aligned}$$

44. feladat. Határozzuk meg az alábbi lineáris leképezés magterét és képterét. Mindegyiket adjuk meg bázissal is, egyenletrendszerrel is, és elemeik felsorolásával is.

$$\begin{aligned} \zeta: \mathbb{Z}_3^2 &\rightarrow \mathbb{Z}_3^4, (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + 2x_2, x_1 + x_2, 2x_1, x_1 + 2x_2) \\ \eta: \mathbb{Z}_3^4 &\rightarrow \mathbb{Z}_3^3, (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4, x_1 + 2x_2 + x_3, 2x_2 + x_3 + x_4) \\ \vartheta: \mathbb{Z}_5^3 &\rightarrow \mathbb{Z}_5^3, (x_1, x_2, x_3) \mapsto (3x_1, x_1 + 4x_2 + x_3, 2x_1 + 2x_2 + 3x_3) \end{aligned}$$

45. feladat. Határozzuk meg az alábbi lineáris leképezés magterét és képterét. Mindegyiket adjuk meg bázissal és egyenletrendszerrel is.

$$\begin{aligned} \sigma: \mathbb{C}^3 &\rightarrow \mathbb{C}^2, (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + 2x_2 + 3ix_3, 2x_1 + x_2 + x_3 - ix_1 + 3ix_3) \\ \tau: \mathbb{C}^4 &\rightarrow \mathbb{C}^3, (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4, x_1 + 2x_2 + x_3, 2x_2 + x_3 + x_4) \\ \upsilon: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3, (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_1 + 4x_2 + x_3, -5x_1 - 8x_2 - 2x_3) \end{aligned}$$

46. feladat. Legyen V a legfeljebb n -edfokú valós polinomok vektortere. Ellenőrizzük, hogy a $\varphi: V \rightarrow V, f \mapsto f'$ leképezés lineáris, és határozzuk meg a képterét és a magterét. Adjunk meg bázist a képtérben és a magtérben, és állapítsuk meg, hogy hány dimenziósak. (Itt f' az f polinom deriváltját jelöli.)

47. feladat. Adjunk meg egy olyan $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineáris leképezést, amelyre $\text{Ker } \varphi = [(1, 0, 1), (0, 1, 2)]$ és $\text{Im } \varphi = [(1, 3)]$.

48. feladat. Legyen V egy kétdimenziós vektortér, és $\varphi \in \text{Hom}(V, V)$ egy lineáris transzformáció. Bizonyítsuk be, hogy ha $\varphi^3 = \underline{0}$, akkor $\varphi^2 = \underline{0}$. (Itt $\underline{0}$ az azonosan nulla lineáris transzformációt jelöli, amely minden V -beli vektorhoz a nullvektort rendeli.)

49. feladat. Igazoljuk, hogy minden $\varphi: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ lineáris leképezéshez létezik egy egyértelműen meghatározott $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix, hogy minden $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixra $A\varphi = \text{tr}(AB)$. (Itt $\text{tr}(\dots)$ a mátrix nyomát, azaz a főátlón álló elemek összegét jelöli.)

50. feladat. Legyenek $\alpha: U \rightarrow W$ és $\beta: U \rightarrow V$ lineáris leképezések. Mutassuk meg, hogy akkor és csak akkor létezik olyan $\gamma: V \rightarrow W$ lineáris leképezés, amelyre $\alpha = \beta\gamma$, ha $\text{Ker } \beta \subseteq \text{Ker } \alpha$.

51. feladat. Legyenek $\alpha: U \rightarrow V$ és $\beta: V \rightarrow W$ lineáris leképezések. Igazoljuk, hogy

$$r(\alpha\beta) = r(\alpha) - \dim(\text{Ker } \beta \cap \text{Im } \alpha).$$

(Emlékeztető: lineáris leképezés rangján a képtere dimenzióját értjük.)

52. feladat. Legyenek $\pi, \tau \in \text{Hom}(V, V)$ projekciók. Bizonyítsa be, hogy $\pi + \tau$ akkor és csak akkor projekció, ha $\pi\tau = \tau\pi = \underline{0}$. (Itt $\underline{0}$ az azonosan nulla lineáris transzformációt jelöli, amely minden V -beli vektorhoz a nullvektort rendeli.)

53. feladat. Legyen $\mathcal{P}_3$ a legfeljebb harmadfokú valós polinomok vektortere, és tekintsük benne az $\mathcal{A}: 1, x, x^2, x^3$ bázist. Hasonlóképpen, legyen $\mathcal{P}_2$ a legfeljebb másodfokú valós polinomok vektortere a $\mathcal{B}: 1, x, x^2$ bázissal. Határozzuk meg a $\varphi: \mathcal{P}_3 \rightarrow \mathcal{P}_2$, $f \mapsto f'$ lineáris leképezés mátrixát az $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ bázispárban.

54. feladat. Írjuk fel az $y = 2x$ egyenletű egyenesre való tükrözésnek (mint $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineáris transzformációnak) a mátrixát az $\mathcal{F}: \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ bázisban, majd az $\mathcal{E}: \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ bázisban is, ahol

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 &= (1, 2), & \mathbf{f}_2 &= (-2, 1); \\ \mathbf{e}_1 &= (1, 0), & \mathbf{e}_2 &= (0, 1). \end{aligned}$$

55. feladat. Írjuk fel az $y = 2x$ egyenletű egyenesre való merőleges vetítésnek a mátrixát az $\mathcal{F}: \mathbf{f}_1 = (1, 2), \mathbf{f}_2 = (-2, 1)$ bázisban, majd a standard $\mathcal{E}: \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ bázisban is.

56. feladat. Írjuk fel a $3x + 2y = 0$ egyenletű egyenesre való tükrözésnek a mátrixát az $\mathcal{F}: \mathbf{f}_1 = (3, 2), \mathbf{f}_2 = (2, -3)$ bázisban, majd a standard $\mathcal{E}: \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ bázisban is.

57. feladat. Írjuk fel a $3x - 4y = 0$ egyenletű egyenesre való merőleges vetítésnek a mátrixát előbb egy ügyesen megválasztott $\mathcal{F}: \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ bázisban, majd a standard $\mathcal{E}: \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ bázisban is.

58. feladat. Adott a $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineáris transzformáció mátrixa az $\mathcal{F}: \mathbf{f}_1 = (1, 2), \mathbf{f}_2 = (3, 1)$ bázisban. Határozzuk meg φ mátrixát a standard bázisban. Milyen geometriai transzformáció ez?

$$[\varphi]_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 14 & -8 \\ 16 & -2 \end{pmatrix}.$$

59. feladat. Határozzuk meg az alábbi φ lineáris transzformáció mátrixát $\mathbb{R}^3$ standard $\mathcal{E}: \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ bázisában, majd az $\mathcal{F}: \mathbf{f}_1 = (2, 1, 1), \mathbf{f}_2 = (1, 2, 1), \mathbf{f}_3 = (1, 1, 1)$ bázisban is. Milyen geometriai transzformáció lehet ez?

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (x - y + z, -y + 2z, -y + 2z).$$

60. feladat. Írjuk fel az $x + 2y + 3z = 0$ egyenletű síkra való tükrözésnek (mint $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineáris transzformációnak) a mátrixát előbb egy ügyesen megválasztott $\mathcal{F}: \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ bázisban, majd a standard $\mathcal{E}: \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ bázisban is.

61. feladat. Határozzuk meg az alábbi φ lineáris transzformáció mátrixát $\mathbb{R}^3$ standard $\mathcal{E}: \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ bázisában, majd az $\mathcal{F}: \mathbf{f}_1 = (1, 2, -1), \mathbf{f}_2 = (1, 1, 1), \mathbf{f}_3 = (0, 1, -1)$ bázisban is. Milyen geometriai transzformáció lehet ez?

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (5x - 3y - 2z, 6x - 3y - 2z, 2x - 2y - z).$$

62. feladat. Legyen $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ az $[(1, 1, -1)]$ egyenes körüli 180 fokos forgatás. Írjuk fel a φ transzformáció mátrixát először az $\mathcal{F}: \mathbf{f}_1 = (1, 1, -1), \mathbf{f}_2 = (-2, 3, 1), \mathbf{f}_3 = (1, -1, 0)$ bázisban, majd a standard $\mathcal{E}: \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ bázisban is.

63. feladat. Legyen V egy kétdimenziós vektortér és $\varphi: V \rightarrow V$ nem azonosan nulla lineáris transzformáció. Bizonyítsuk be, hogy ha $\varphi^2 = \underline{0}$ (azonosan nulla transzformáció), akkor van V -nek olyan $\mathcal{B}$ bázisa, amelyre

$$[\varphi]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

64. feladat. Általánosítsuk az előző feladatot: Legyen V egy végesdimenziós vektortér és $\varphi: V \rightarrow V$ nem azonosan nulla lineáris transzformáció. Bizonyítsuk be, hogy ha $\varphi^2 = \underline{0}$ (azonosan nulla transzformáció), akkor van V -nek olyan $\mathcal{B}$ bázisa, amelyben φ mátrixa csak nullákból és egyesekből áll, és egyesek csak közvetlenül a főátló fölött lehetnek.

65. feladat. $\heartsuit$ Határozzuk meg az alábbi A mátrix sajátértékeit, adjunk meg bázist mindegyik sajátaltérben, és hozzuk a mátrixot diagonális alakra (azaz adjunk meg olyan nemelfajuló $Q \in \mathbb{Z}_3^{3 \times 3}$ mátrixot, amelyre $Q A Q^{-1}$ diagonális mátrix).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3^{3 \times 3}$$

66. feladat. $\heartsuit$ Határozzuk meg az alábbi A mátrix sajátértékeit, minden sajátérték algebrai és geometriai multiplicitását, és diagonalizáljuk a mátrixot, amennyire lehet (azaz adjunk meg bázist mindegyik sajátaltérben, majd ezen bázisok egyesítését egészítsük ki $\mathbb{Z}_3^4$ egy $\mathcal{B}$ bázisává, végül a standard bázisról áttérve a $\mathcal{B}$ bázisra írjuk fel a $\varphi: \mathbb{Z}_3^4 \rightarrow \mathbb{Z}_3^4, \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}A$ lineáris transzformáció mátrixát a $\mathcal{B}$ bázisban).

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3^{4 \times 4}$$

67. feladat. $\heartsuit$ Határozzuk meg az alábbi A mátrix sajátértékeit, minden sajátérték algebrai és geometriai multiplicitását, és diagonalizáljuk a mátrixot, amennyire lehet (azaz adjunk meg bázist mindegyik sajátaltérben, majd ezen bázisok egyesítését egészítsük ki $\mathbb{R}^3$ egy $\mathcal{B}$ bázisává, végül a standard bázisról áttérve a $\mathcal{B}$ bázisra írjuk fel a $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}A$ lineáris transzformáció mátrixát a $\mathcal{B}$ bázisban).

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -12 & -5 \\ 4 & -3 & -2 \\ 11 & -18 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

68. feladat. $\heartsuit$ Tekintsük az előző feladatbeli mátrixot a komplex számtest felett, azaz vizsgáljuk a $\psi: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3, \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}A$ lineáris transzformációt. Diagonalizálható-e ez a transzformáció? Ha igen, akkor diagonalizáljuk, azaz adjunk meg egy sajátbázist, és írjuk fel ψ mátrixát ebben a sajátbázisban, valamint adjunk meg olyan $Q \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ mátrixot, amelyre $Q A Q^{-1}$ diagonális.

69. feladat. Diagonalizálható-e az alábbi A mátrix $\mathbb{R}$, illetve $\mathbb{C}$ felett? Ha igen, akkor adjunk meg egy olyan nemelfajuló $Q \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, illetve $Q \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ mátrixot, amelyre $Q A Q^{-1}$ diagonális.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

70. feladat. Diagonalizálható-e az alábbi A mátrix $\mathbb{R}$, illetve $\mathbb{C}$ felett? Ha igen, akkor adjunk meg egy olyan nemelfajuló $Q \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$, illetve $Q \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$ mátrixot, amelyre $Q A Q^{-1}$ diagonális.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$$

71. feladat. Diagonalizálható-e az alábbi A mátrix? Ha igen, akkor adjunk meg egy olyan nemelfajuló $Q \in \mathbb{Z}_5^{4 \times 4}$ mátrixot, amelyre $Q A Q^{-1}$ diagonális.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_5^{4 \times 4}$$

72. feladat. Diagonalizálható-e az alábbi A mátrix? Ha igen, akkor adjunk meg egy olyan nemelfajuló $Q \in \mathbb{Z}_5^{4 \times 4}$ mátrixot, amelyre $Q A Q^{-1}$ diagonális.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_5^{4 \times 4}$$

73. feladat. Határozzuk meg az alábbi A mátrix sajátértékeit, minden sajátérték algebrai és geometriai multiplicitását, és adjunk meg bázist mindegyik sajátaltérben. Diagonalizálható-e a mátrix $\mathbb{R}$, illetve $\mathbb{C}$ felett?

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$$

74. feladat. Adjunk meg $\mathbb{R}^3$ -ban egy olyan $\mathcal{F}$ bázist, amelyben az 67. feladatbeli φ lineáris transzformáció mátrixa ilyen szép:

$$[\varphi]_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Milyen geometriai transzformáció lehet ez? (Érdemes ezen a kérdésen elgondolkozni már a feladat megoldása előtt, mert adhat ötletet a megoldáshoz.) A megoldáshoz szabad számítógépet használni, ellenőrizni pedig mindenképp célszerű számítógéppel.

75. feladat. Tegyük fel, hogy $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ is sajátvektora a $\varphi \in \text{Hom}(V, V)$ lineáris transzformációnak (mondjuk λ és μ sajátértékekkel). Mi a szükséges és elegendő feltétele annak, hogy $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ is sajátvektor legyen?

76. feladat. Adjunk meg egy olyan $A \in \mathbb{R}^{7 \times 7}$ mátrixot, melynek egyetlen sajátértéke $\lambda = 2$, és ennek a sajátértéknek az algebrai multiplicitása 7, a geometriai multiplicitása viszont csak 3.

77. feladat. Határozzuk meg az alábbi A mátrix sajátértékeit, adjunk meg egy sajátbázist (sorvektorokkal!), majd ennek segítségével adjunk meg olyan $Q \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ nemelfajuló mátrixot, amelyre $Q A Q^{-1}$ diagonális mátrix.

$$A = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$

Ennek segítségével adjunk explicit képletet az A^n mátrixra, és határozzuk meg a $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$ határértéket. Mit jelent mindez az alábbi egyszerű időjárési modellben?

- Ha ma szép idő van, akkor 90% valószínűséggel holnap is az lesz, és 10% valószínűséggel elromlik az idő holnapra.
- Ha ma rossz idő van, akkor 50% valószínűséggel holnap is az lesz, és 50% valószínűséggel kiderül az idő holnapra.

78. feladat. Osztályozzuk a 2×2 -es valós mátrixokat aszerint, hogy hány valós és hány nemvalós komplex sajátértékük van, és mekkora ezek algebrai és geometriai multiplicitása. Hányféle típusú lehet egy mátrix ezen szempontok alapján? Minden típushoz adjunk meg egy konkrét példát (minél egyszerűbbet).

79. feladat. [♥] Határozzuk meg az alábbi $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mátrix minimálpolinomját:

$$A = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

80. feladat. Határozzuk meg az alábbi $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mátrix minimálpolinomját és karakterisztikus polinomját, majd ellenőrizzük a Cayley–Hamilton-tételt.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 6 & -2 \\ -3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

81. feladat. Tekintsük az alábbi mátrixszal megadott Markov-láncot:

$$A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.2 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

- Határozzuk meg A sajátértékeit és a sajátértékek algebrai multiplicitásait.
- Adjunk meg bázist mindegyik sajátaltérben.
- A $\lambda = 1$ sajátértékhez tartozó sajátaltérben olyan bázisvektorokat adjunk meg, melyekben csak nemnegatív számok szerepelnek, melyek összege 1. (A (b) részben talált sajátvektorokból egy alkalmas skalárral való szorzással kaphatunk ilyeneket.) Az ilyen sajátvektorok adják a Markov-lánc stacionárius eloszlásait.
- Adjunk meg egy olyan Q mátrixot, melyre $D := Q A Q^{-1}$ diagonális mátrix. Ellenőrizzük, hogy valóban diagonális mátrixot kapunk.
- A $D := Q A Q^{-1}$ összefüggésből következik, hogy $A = Q^{-1} D Q$ és így $A^k = Q^{-1} D^k Q$ minden k pozitív egész kitevőre. Ennek segítségével határozzuk meg a $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k$ határértéket. Ellenőrizzük, hogy pl. A^{10} közel van-e a kiszámított határértékhez.
- Milyen kapcsolat van a $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k$ határérték és a (c) részben talált stacionárius eloszlások között? Mit jelent ez az A mátrix által leírt véletlen bolyongás szempontjából? A <http://markov.yoriz.co.uk/> weboldalon kísérletileg ellenőrizzük válaszaink helyességét.

82. feladat. Legyen $A \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ a csupa 1-esekből álló mátrix.

- Határozzuk meg A sajátértékeit és a sajátértékek algebrai multiplicitásait.
- Adjunk meg bázist mindegyik sajátaltérben.
- Ellenőrizzük „kézzel”, közvetlenül a definíció alapján, hogy valóban sajátvektorokat kaptunk a megfelelő sajátértékekkel.
- Diagonalizálható-e az A mátrix? Ha nem, miért nem? Ha igen, akkor adjunk meg egy olyan Q mátrixot, melyre $D := Q A Q^{-1}$ diagonális mátrix, és ellenőrizzük, hogy valóban diagonális mátrixot kapunk.

- (e) Határozzuk meg A minimálpolinomját, és ellenőrizzük a Cayley–Hamilton-tételt.
- (f) Általánosítsuk a fentieket az $n \times n$ -es, csupa 1-esekből álló mátrixra. Sejtsük meg a válaszokat (ha szükséges, kísérletezzünk számítógéppel különböző n -ekre), majd igazoljuk is sejtéseink helyességét.

83. feladat. Tekintsük a $\varphi: \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$, $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_4, x_1, x_2, x_3)$ lineáris transzformációt.

- (a) Írjuk fel az $A := \llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{E}}$ mátrixot ($\mathcal{E}$ a standard bázis).
- (b) Határozzuk meg A sajátértékeit és a sajátértékek algebrai multiplicitásait.
- (c) Adjunk meg bázist mindegyik sajátaltérben.
- (d) Ellenőrizzük „kézzel”, közvetlenül a definíció alapján, hogy valóban sajátvektorokat kaptunk a megfelelő sajátértékekkel.
- (e) Diagonalizálható-e az A mátrix? Ha nem, miért nem? Ha igen, akkor adjunk meg egy olyan Q mátrixot, melyre $D := QAQ^{-1}$ diagonális mátrix, és ellenőrizzük, hogy valóban diagonális mátrixot kapunk.
- (f) Határozzuk meg A minimálpolinomját, és ellenőrizzük a Cayley–Hamilton-tételt.
- (g) Általánosítsuk a feladatot $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ lineáris transzformációra (mi legyen a hozzárendelési szabály?). Sejtsük meg a válaszokat (ha szükséges, kísérletezzünk számítógéppel különböző n -ekre), majd igazoljuk is sejtéseink helyességét.

84. feladat. Tekintsük az alábbi $A \in \mathbb{R}^{9 \times 9}$ mátrixot:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Határozzuk meg A sajátértékeit és a sajátértékek algebrai multiplicitásait.
- (b) Adjunk meg bázist mindegyik sajátaltérben.
- (c) Ellenőrizzük „kézzel”, közvetlenül a definíció alapján, hogy valóban sajátvektorokat kaptunk a megfelelő sajátértékekkel.
- (d) Diagonalizálható-e az A mátrix? Ha nem, miért nem? Ha igen, akkor adjunk meg egy olyan Q mátrixot, melyre $D := QAQ^{-1}$ diagonális mátrix, és ellenőrizzük, hogy valóban diagonális mátrixot kapunk.
- (e) Határozzuk meg A minimálpolinomját, és ellenőrizzük a Cayley–Hamilton-tételt.
- (f) Figyeljük meg, hogy milyen az A mátrix szerkezete, és hogy ez hogyan függ össze a sajátértékekkel és azok algebrai, illetve geometriai multiplicitásaival. Ezen megfigyelés segítségével konstruáljunk olyan mátrixot, melynek egyetlen sajátértéke $\lambda = 5$, és ennek algebrai multiplicitása 7, geometriai multiplicitása pedig 3.

85. feladat. Tekintsük a legfeljebb 4-edfokú valós polinomok V vektorterén a $\varphi: V \rightarrow V$, $f \mapsto f'$ lineáris transzformációt.

- (a) Írjuk fel az $A := \llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{E}}$ mátrixot ($\mathcal{E}: 1, x, x^2, \dots, x^n$ a standard bázis).
- (b) Határozzuk meg A sajátértékeit és a sajátértékek algebrai multiplicitásait.
- (c) Adjunk meg bázist mindegyik sajátaltérben.
- (d) Ellenőrizzük „kézzel”, közvetlenül a definíció alapján, hogy valóban sajátvektorokat kaptunk a megfelelő sajátértékekkel.
- (e) Diagonalizálható-e az A mátrix? Ha nem, miért nem? Ha igen, akkor adjunk meg egy olyan Q mátrixot, melyre $D := QAQ^{-1}$ diagonális mátrix, és ellenőrizzük, hogy valóban diagonális mátrixot kapunk.
- (f) Határozzuk meg A minimálpolinomját, és ellenőrizzük a Cayley–Hamilton-tételt.
- (g) Általánosítsuk a fentieket n -edfokú polinomokra. Sejtsük meg a válaszokat (ha szükséges, kísérletezzünk számítógéppel különböző n -ekre), majd igazoljuk is sejtéseink helyességét.

86. feladat. Tekintsük az alábbi $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mátrixot:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

- (a) Határozzuk meg az A^n hatványt. (A megsejtett képletet természetesen bizonyítani is kell, pl. teljes indukcióval.)
- (b) Határozzuk meg az $f(A)$ mátrixot tetszőleges $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ polinom esetén. (Ezt fel lehet írni elegánsan, úgy, hogy az f polinom együtthatói nem is szerepelnek a végeredményben.)
- (c) Hogyan lehetne értelmezni az A mátrix szinuszt?

87. feladat. $\heartsuit$ Bilineáris-e az alábbi $\ell: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ leképezés? Ha igen, adjuk meg a mátrixát a standard bázisban; ha nem, mutassunk egy konkrét ellenpéldát.

$$\ell(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \ell((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + x_2y_2 + 3x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2.$$

88. feladat. Bilineárisak-e az alábbi leképezések? Ha igen, adjuk meg a mátrixukat a standard bázis(ok)ban; ha nem, mutassunk egy konkrét ellenpéldát.

(a) $\ell: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \ell((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = (2x_1 + x_2)(y_2 + 3y_3) + x_3y_1$

(b) $\ell: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \ell((a, b, c), (d, e)) = ad + 2bd + 3be + 4cd$

(c) $\ell: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \ell((a, b), (c, d, e)) = ad + 2bd + 3be + 4cd$

89. feladat. Hozzuk nemelfajuló lineáris helyettesítéssel kanonikus alakra az alábbi q kvadratikus alakot. Írjuk fel a helyettesítés C mátrixát, és ellenőrizzük, hogy SAS^T valóban a kapott kanonikus alaknak megfelelő diagonális mátrix (itt $S = C^{-1}$). A kanonikus alakból határozzuk meg a normálalakot is, és állapítsuk meg q definitiségi osztályát.

$$q = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

90. feladat. Hozzuk nemelfajuló lineáris helyettesítéssel kanonikus alakra az alábbi q kvadratikus alakot. Írjuk fel a helyettesítés C mátrixát, és ellenőrizzük, hogy SAS^T valóban a kapott kanonikus alaknak megfelelő diagonális mátrix (itt $S = C^{-1}$). A kanonikus alakból határozzuk meg a normálalakot is, és állapítsuk meg q definitiségi osztályát.

$$q = 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$$

91. feladat. Hozzuk nemelfajuló lineáris helyettesítéssel kanonikus alakra az alábbi q kvadratikus alakot. Írjuk fel a helyettesítés C mátrixát, és ellenőrizzük, hogy SAS^T valóban a kapott kanonikus alaknak megfelelő diagonális mátrix (itt $S = C^{-1}$). A kanonikus alakból határozzuk meg a normálalakot is, és állapítsuk meg q definitiségi osztályát.

$$q = -x_1^2 - 5x_2^2 - 6x_3^2 - 14x_4^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_1x_4 + 8x_2x_3 - 4x_2x_4$$

92. feladat. Hozzuk nemelfajuló lineáris helyettesítéssel kanonikus alakra az alábbi q kvadratikus alakot. Írjuk fel a helyettesítés C mátrixát, és ellenőrizzük, hogy SAS^T valóban a kapott kanonikus alaknak megfelelő diagonális mátrix (itt $S = C^{-1}$). A kanonikus alakból határozzuk meg a normálalakot is, és állapítsuk meg q definitiségi osztályát.

$$q = x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$$

93. feladat. Hozzuk nemelfajuló lineáris helyettesítéssel kanonikus alakra az alábbi q kvadratikus alakot. Írjuk fel a helyettesítés C mátrixát, és ellenőrizzük, hogy SAS^T valóban a kapott kanonikus alaknak megfelelő diagonális mátrix (itt $S = C^{-1}$). A kanonikus alakból határozzuk meg a normálalakot is, és állapítsuk meg q definitiségi osztályát.

$$q = -x_1^2 - 4x_2^2 - x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 - 6x_2x_4 + 2x_3x_4$$

94. feladat. Hozzuk nemelfajuló lineáris helyettesítéssel kanonikus alakra az alábbi q kvadratikus alakot. Írjuk fel a helyettesítés C mátrixát, és ellenőrizzük, hogy SAS^T valóban a kapott kanonikus alaknak megfelelő diagonális mátrix (itt $S = C^{-1}$). A kanonikus alakból határozzuk meg a normálalakot is, és állapítsuk meg q definitiségi osztályát.

$$q = 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_1x_4 + 4x_2x_3 + 4x_2x_4 + 4x_3x_4$$

(Ennek a feladatnak van a tanult módszernél szebb megoldása is, ahol a sok mechanikus számolást egy kis kreativitással helyettesítjük. Érdemes erre utazni!)

95. feladat. Mutassuk meg, hogy ha a nem azonosan nulla q valós kvadratikus alakban nincsenek négyzetes tagok (azaz a mátrix főátlóján végig nullák vannak), akkor q indefinit.

96. feladat. Határozzuk meg az $\mathbb{R}^4$ euklideszi térben az $\mathbf{u} = (1, 1, 1, 1)$ és $\mathbf{v} = (3, -1, 3, -1)$ vektorok hosszát és az általuk bezárt szöget.

97. feladat. Határozzuk meg az $\mathbb{R}^4$ euklideszi térben az $\mathbf{u} = (-2, 1, 3, 4)$ és $\mathbf{v} = (3, -1, 2, 4)$ vektorok hosszát, belső szorzatukat és az általuk bezárt szöget.

98. feladat. Határozzuk meg az $\mathbb{R}^4$ euklideszi térben az x paraméter értékét úgy, hogy az $\mathbf{u} = (3, -2, 4, 1)$ és $\mathbf{v} = (2, 3, 4, x)$ vektorok 60 fokos szöget zárnak be.

99. feladat. Igazoljuk, hogy ha a $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ egységvektorok páronként 60 fokos szöget zárnak be, akkor lineárisan függetlenek.

100. feladat. Mutassuk meg, hogy semmilyen n esetén sem lehet az $\mathbb{R}^n$ euklideszi térben megadni 4 egységvektort, amelyek páronként 120 fokos szöget zárnak be.

101. feladat. Mekkora szöget zárnak be az n -dimenziós kocka egy csúcsából kiinduló élei az ugyenebből a csúcsból kiinduló testátlóval? Mi ennek a szögnek a határértéke, ha n tart végtelenbe? Mekkora a 3, 4, illetve 10-dimenziós egységkocka körülírt, illetve beírt gömbjének térfogata? Segítség: https://en.wikipedia.org/wiki/Volume_of_an_n-ball.

102. feladat. Bontsuk az $\mathbf{u}$ vektort egy $\mathbf{v}$ -vel párhuzamos $\mathbf{u}_{\parallel}$ és egy $\mathbf{v}$ -re merőleges $\mathbf{u}_{\perp}$ vektor összegére, ahol

$$\mathbf{u} = (3, 5, 5), \quad \mathbf{v} = (1, 2, 3).$$

103. feladat. Bontsuk az $\mathbf{u}$ vektort egy S -beli $\mathbf{u}_{\parallel}$ és egy S -re merőleges $\mathbf{u}_{\perp}$ vektor összegére, ahol

$$\mathbf{u} = (9, 1, 1), \quad S = [(1, 2, 3), (3, 5, 5)].$$

104. feladat. Bontsuk az $\mathbf{u} = (9, -8, 7)$ vektort az $S = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$ síkba eső $\mathbf{u}_{\parallel}$ és S -re merőleges $\mathbf{u}_{\perp}$ vektor összegére, ahol

$$\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3), \quad \mathbf{v}_2 = (1, 1, -1).$$

105. feladat. Bontsuk az $\mathbf{u} = (1, -4, 4, 0, 14)$ vektort egy S -beli $\mathbf{u}_{\parallel}$ és egy S -re merőleges $\mathbf{u}_{\perp}$ vektor összegére, ahol

$$S = [(1, 2, 3, 2, 1), (-2, 3, 1, -3, -1), (-3, -4, 4, -1, 1)].$$

106. feladat. Tekintsük az $\mathbb{R}^3$ térben az alábbi S síkot:

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = 2x_2\}.$$

(a) Bontsuk az $\mathbf{u} = (2, 6, 3)$ vektort egy S -beli $\mathbf{u}_{\parallel}$ és egy S -re merőleges $\mathbf{u}_{\perp}$ vektor összegére, majd határozzuk meg az $\mathbf{u}$ vektor S -re való merőleges vetületét, illetve S -re vonatkozó tükörképét.

(b) Bontsuk a $\mathbf{w} = (6, 3, 1)$ vektort egy S -beli $\mathbf{w}_{\parallel}$ és egy S -re merőleges $\mathbf{w}_{\perp}$ vektor összegére, majd határozzuk meg a $\mathbf{w}$ vektor S -re való merőleges vetületét, illetve S -re vonatkozó tükörképét.

107. feladat. Hajtsuk végre a Gram–Schmidt-féle ortogonalizációs eljárást az alábbi $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \in \mathbb{R}^3$ vektorokra:

$$\mathbf{u}_1 = (1, 2, 3), \quad \mathbf{u}_2 = (3, 5, 5), \quad \mathbf{u}_3 = (9, 1, 1).$$

108. feladat. Hajtsuk végre a Gram–Schmidt-féle ortogonalizációs eljárást az $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \in \mathbb{R}^3$ vektorokra.

(a) $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 2), \quad \mathbf{u}_2 = (0, 1, 5), \quad \mathbf{u}_3 = (1, 6, 2)$

(b) $\mathbf{u}_1 = (1, 6, 2), \quad \mathbf{u}_2 = (0, 1, 5), \quad \mathbf{u}_3 = (1, 0, 2)$

109. feladat. Legyen $S \leq \mathbb{R}^4$ az alábbi $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ vektorok által kifeszített altér:

$$\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1, 1), \quad \mathbf{u}_2 = (3, -1, 3, -1), \quad \mathbf{u}_3 = (6, 2, 2, -2).$$

Adjunk meg egy ortonormált bázist az S altérben.

110. feladat. Adjunk meg egy ortonormált bázist az $S = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3] \leq \mathbb{R}^4$ altérben, ahol

$$\mathbf{u}_1 = (1, 1, -1, 1), \quad \mathbf{u}_2 = (0, 3, 0, 1), \quad \mathbf{u}_3 = (0, -3, 0, 7).$$

111. feladat. Adjunk meg egy ortonormált bázist az alábbi $S \leq \mathbb{R}^4$ altérben

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 - 4x_3 - 18x_4 = 0\}.$$

112. feladat. Bontsuk az $\mathbf{u}$ vektort egy S -beli $\mathbf{u}_{\parallel}$ és egy S -re merőleges $\mathbf{u}_{\perp}$ vektor összegére, ahol

$$\mathbf{u} = (2, 6, 4, -5) \quad \text{és} \quad S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 = x_2 + 2x_3 - 6x_4\}$$

113. feladat. Legyen $S \leq \mathbb{R}^3$ az $x + 2y - z = 0$ egyenletű sík, és legyen a $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció az S -re való tükrözés. Határozzuk meg a $\mathbf{v}\varphi$ vektort tetszőleges $\mathbf{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ esetén. (Ezzel lényegében ekvivalens feladat felírni φ mátrixát a standard bázisban.)

114. feladat. Legyen V végesdimenziós euklideszi tér, $S \leq V$ és $\mathbf{u} \in V$. Legyen $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\parallel} + \mathbf{u}_{\perp}$ az $\mathbf{u}$ vektor szokásos felbontása egy S -beli és egy S -re merőleges vektor összegére. Bizonyítsa be, hogy ekkor $\mathbf{u}$ és S távolsága $\|\mathbf{u}_{\perp}\|$, azaz

$$\min_{\mathbf{v} \in S} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}_{\perp}\|.$$

115. feladat. Legyen V a legfeljebb harmadfokú valós polinomok euklideszi tere az alábbi belső szorzattal:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx.$$

Ortogonalizáljuk a Gram–Schmidt-eljárás segítségével az $1, x, x^2, x^3$ vektorrendszert (így kapunk egy ortogonális bázist V -ben).

116. feladat. Adjunk meg $\mathbb{R}^2$ -ben az alábbi A szimmetrikus mátrix sajátvektoraiból álló ortonormált bázist, és ennek segítségével ábrázoljuk a $4x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 = 1$ másodrendű görbét.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

117. feladat. Adjunk meg $\mathbb{R}^2$ -ben az alábbi A szimmetrikus mátrix sajátvektoraiból álló ortonormált bázist, és ennek segítségével ábrázoljuk a $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 = 1$ másodrendű görbét.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

118. feladat. Adjunk meg $\mathbb{R}^3$ -ban az alábbi A szimmetrikus mátrix sajátvektoraiból álló ortonormált bázist, és ennek segítségével ábrázoljuk (képzeletben) a $16x_1^2 + 8x_1x_2 + 10x_2^2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3 + 16x_3^2 = 10$ másodrendű felületet.

$$A = \begin{pmatrix} 16 & 4 & 2 \\ 4 & 10 & -4 \\ 2 & -4 & 16 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

Számolás és ábrázolás SageMath-ben:

http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/linalg2bsc_2024osz/kvadr-sage.html

119. feladat. Adjunk meg $\mathbb{R}^3$ -ban az alábbi A szimmetrikus mátrix sajátvektoraiból álló ortonormált bázist.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$