

1. feladat. Egy nyúlpopuláció szaporodását fogjuk vizsgálni. Az egyszerűség kedvéért két korcsoportra osztjuk a nyulakat: fiatalokra (1 hónapnál nem idősebb) és felnőttekre (1 hónapnál idősebb). A fiatalok még nem szaporodnak és mindannyian megéri a felnőttkort. A felnőttek örökké élnek (és persze felnőttek maradnak), és minden felnőtt nyúl havonta 1 utódnak ad életet.

- (a) Jelölje x_1 a fiatal és x_2 a felnőtt nyulak számát a jelen pillanatban, x'_1 és x'_2 pedig az 1 hónappal későbbi állapotot. Írja fel x'_1 és x'_2 értékét x_1 és x_2 segítségével.
- (b) Adja meg a $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x_1, x_2) \mapsto (x'_1, x'_2)$ lineáris leképezés mátrixát, vagyis azt az $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mátrixot, amelyre $(x'_1, x'_2) = (x_1, x_2) \cdot A$.
- (c) Számítsa ki kézzel az A, A^2, A^3, A^4, A^5 mátrixokat (nem kell megjedni, könnyű számolás). Ennek alapján sejtse meg, hogy mi lesz az A^n mátrix.
- (d) Bizonyítsa be a sejtést teljes indukcióval.

2. feladat. Tekintsük az alábbi valós mátrixot:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Határozza meg A sajátértékeit.
- (b) Jelölje α és β a két sajátértéket (legyen $\alpha > \beta$). Írja fel a Viéte formulákat a karakterisztikus polinomra: $\alpha + \beta = \dots$ és $\alpha \cdot \beta = \dots$. A továbbiakban mindig az α és β szimbólumokkal számoljon (ne numerikus értékekkel vagy négyzetgyökös formulákkal). Minden számolás szépen kijön így, csak a fenti $\alpha + \beta = \dots$ és $\alpha \cdot \beta = \dots$ összefüggéseket használva.
- (c) Adjon meg bázist az S_α és S_β sajátalterekben.
- (d) Adjon meg egy olyan Q mátrixot, amelyre $QAQ^{-1} = D$ diagonális, és számítsa is ki a D mátrixot.

3. feladat. Az α és β valós számokról annyit tudunk, hogy $\alpha + \beta = 1$ és $\alpha \cdot \beta = -1$. (Ezekből éppen ki is lehetne számolni őket, de ezt ne tegye meg, számoljon mindig betűkkel, csak a megadott összefüggéseket használva.) Az ismeretlen $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mátrixot sikerült diagonalizálni: $Q A Q^{-1} = D$, ahol

$$Q = \begin{pmatrix} -\beta & 1 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

- (a) Írja fel az A mátrixot (α és β segítségével).
- (b) Határozza meg az A^n hatványt (mind a négy elemét α , β és n segítségével kell kifejezni).

4. feladat. Egy nyúlpopuláció szaporodását fogjuk vizsgálni. Az egyszerűség kedvéért két korcsoportra osztjuk a nyulakat: fiatalokra (1 hónapnál nem idősebb) és felnőttekre (1 hónapnál idősebb). A fiatalok 40%-a szaporodik (fejenként 1 utódnak adva életet) és 10%-uk nem éri meg a felnőttkort. A felnőttek 2/3-a szaporodik (fejenként 1 utódnak adva életet) és 1 hónap múlva mindannyian elpusztulnak. (Tehát minden nyúl 1 vagy 2 hónapig él, és így legfeljebb kétszer tud szaporodni)

- (a) Jelölje x_1 a fiatal és x_2 a felnőtt nyulak számát a jelen pillanatban, x'_1 és x'_2 pedig az 1 hónappal későbbi állapotot. Írja fel x'_1 és x'_2 értékét x_1 és x_2 segítségével.
- (b) Adja meg a $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x_1, x_2) \mapsto (x'_1, x'_2)$ lineáris leképezés mátrixát, vagyis azt az $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mátrixot, amelyre $(x'_1, x'_2) = (x_1, x_2) \cdot A$.
- (c) Határozza meg A sajátértékeit.
- (d) Adjon meg bázist mindkét sajátaltérben.
- (e) Adjon meg egy olyan Q mátrixot, amelyre $Q A Q^{-1} = D$ diagonális.

5. feladat. Tekintsük az alábbi valós mátrixot:

$$A = \begin{pmatrix} 2/5 & 9/10 \\ c & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Határozza meg a c paraméter értékét úgy, hogy az A mátrix egyik sajátértéke 1 legyen.
- (b) Határozza meg ezen c paraméter esetén a másik sajátértéket is.
- (c) Adjon meg bázist mindkét sajátaltérben.
- (d) Adjon meg egy olyan Q mátrixot, amelyre $QAQ^{-1} = D$ diagonális.

6. feladat. Az ismeretlen $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mátrixot sikerült diagonalizálni: $Q A Q^{-1} = D$, ahol

$$Q = \begin{pmatrix} 10 & 9 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Itt a λ valós számról csak annyit tudunk, hogy $|\lambda| < 1$.

- (a) Írja fel az A^n mátrixot (λ segítségével).
- (b) Határozza meg a $H = \lim_{n \rightarrow \infty} A^n$ határértéket (ebben már nem lesz λ , csak konkrét számok).
- (c) Mennyi a rangja a kapott H határértéknek?
- (d) Milyen geometriai transzformációja a síknak az $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} \cdot H$ lineáris leképezés?

7. feladat. A feladatot tartalmazó interaktív SageMath weboldalt lásd itt:

https://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/linalg2bsc_2025osz/benetton.html