

DISZKRÉT MATEMATIKA II ELŐADÁS

Waldhauser Tamás

SZTE Bolyai Intézet

2026. március 26.

Tartalom

Leképezések

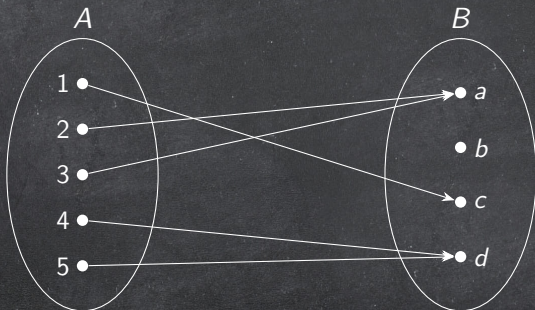
Összeszámlálás

Szitaformula

Injektív és szürjektív leképezések

Definíció

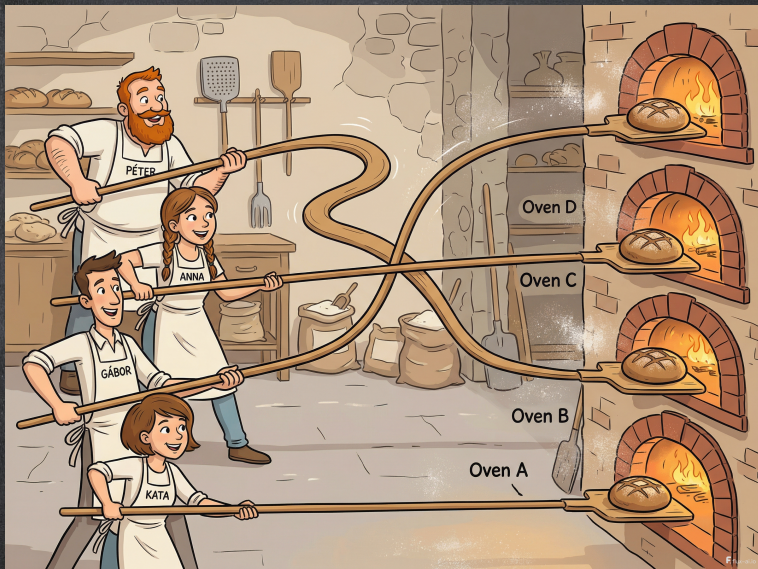
- **megfeleltetés**: A -ból B -be: $f \subseteq A \times B$.
- $f \subseteq A \times B$ **leképezés**, ha $\forall a \in A \exists! b \in B: (a, b) \in f$. Jelölés: $b = af$.
- $f: A \rightarrow B$ **injektív** leképezés, ha $\forall a_1, a_2 \in A: a_1 \neq a_2 \implies a_1f \neq a_2f$.
- $f: A \rightarrow B$ **szürjektív** leképezés ha $\forall b \in B \exists a \in A: b = af$.
- $f: A \rightarrow B$ **bijektív** leképezés, ha injektív is és szürjektív is.



Injektív/szürjektív-e ez a lépékezés?



Injektív/szürjektív-e ez a lépékezés?



Injektív/szürjektív-e ez a lépékezés?



Injektív/szürjektív-e ez a lépékezés?



Leképezések szorzása

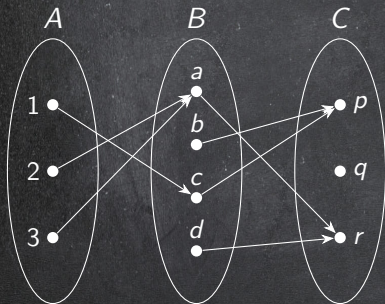
Definíció

Az $f: A \rightarrow B$ és $g: B \rightarrow C$ leképezések **szorzata**:

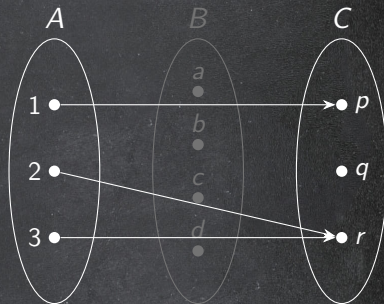
$$fg: A \rightarrow C, \quad a \rightarrow (af)g.$$

Példa

$$f = \{(1, c), (2, a), (3, a)\}, \quad g = \{(a, r), (b, p), (c, p), (d, r)\}$$



$\rightsquigarrow$



$$fg = \{(1, p), (2, r), (3, r)\}$$

A leképezésszorzás tulajdonságai

Jól jegyezd meg!

A leképezések szorzása asszociatív, de NEM kommutatív!

$$fg \neq gf$$

Definíciók + tételek

- **Identikus leképezés:** $\text{id}_A: A \rightarrow A, a \mapsto a$.
- Ha $f: A \rightarrow B$, akkor $\text{id}_A f = f = f \text{id}_B$.
- $f: A \rightarrow B$ és $g: B \rightarrow A$ egymás **inverzei**, ha $fg = \text{id}_A$ és $gf = \text{id}_B$.
- Létezik inverze f -nek $\iff f$ bijektív.
- $(f^{-1})^{-1} = f$
- $(fg)^{-1} = g^{-1}f^{-1}$

CS teszt: 6. előadás - injektivitás

Legyenek $f: A \rightarrow B$ és $g: B \rightarrow C$ leképezések.

1. Ha f injektív és g injektív, akkor fg
2. Ha f nem injektív és g nem injektív, akkor fg
3. Ha f nem injektív és g injektív, akkor fg
4. Ha f injektív és g nem injektív, akkor fg

- wifi hálózat (SSID): Kiss Arpad terem GUEST
- jelszó: 12345678

CS teszt: 6. előadás - injektivitás

Legyenek $f: A \rightarrow B$ és $g: B \rightarrow C$ leképezések.

1. Ha f injektív és g injektív, akkor fg injektív
2. Ha f nem injektív és g nem injektív, akkor fg nem injektív
3. Ha f nem injektív és g injektív, akkor fg nem injektív
4. Ha f injektív és g nem injektív, akkor fg ???
lehet, hogy injektív, lehet, hogy nem

Szorzás és ...jektivitás

Tétel

Legyenek $f: A \rightarrow B$ és $g: B \rightarrow C$ leképezések.

- (1) Ha f és g injektív, akkor fg is injektív.
- (2) Ha fg injektív, akkor f injektív.
- (3) Ha f és g szürjektív, akkor fg is szürjektív.
- (4) Ha fg szürjektív, akkor g szürjektív.
- (5) Ha f és g bijektív, akkor fg is bijektív.
- (6) Ha fg bijektív, akkor f injektív és g szürjektív.

Tartalom

Leképezések

Összeszámlálás

Szitaformula

CS teszt: 6. előadás - összeszámlálás

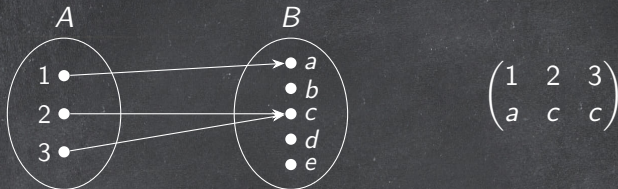
1. Összesen hány $f: \{1, 2\} \rightarrow \{a, b, c\}$ leképezés van?
2. Hány **injektív** $f: \{1, 2\} \rightarrow \{a, b, c\}$ leképezés van?
3. Hány **szürjektív** $f: \{1, 2\} \rightarrow \{a, b, c\}$ leképezés van?
4. Összesen hány $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{a, b\}$ leképezés van?
5. Hány **injektív** $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{a, b\}$ leképezés van?
6. Hány **szürjektív** $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{a, b\}$ leképezés van?

CS teszt: 6. előadás - összeszámlálás

1. Összesen hány $f: \{1, 2\} \rightarrow \{a, b, c\}$ leképezés van? 9
2. Hány **injektív** $f: \{1, 2\} \rightarrow \{a, b, c\}$ leképezés van? 6
3. Hány **szürjektív** $f: \{1, 2\} \rightarrow \{a, b, c\}$ leképezés van? 0
4. Összesen hány $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{a, b\}$ leképezés van? 8
5. Hány **injektív** $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{a, b\}$ leképezés van? 0
6. Hány **szürjektív** $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{a, b\}$ leképezés van? 6

Az összes leképezés

Példa



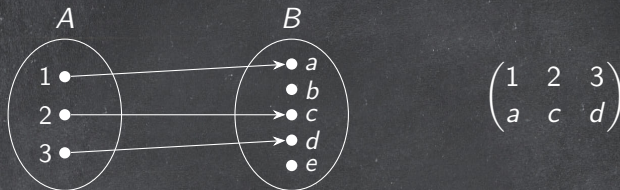
Minden leképezés leírható egy 3-betűs szóval, amiben csak az a, b, c, d, e betűk szerepelhetnek. Ezek száma $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3$.
(5 elem 3-tagú **ismétléses variációi**).

Tétel

Ha $|A| = k$ és $|B| = n$, akkor az összes $A \rightarrow B$ leképezések száma n^k .

Injektív leképezések

Példa



Minden leképezés leírható egy 3-betűs szóval, amiben csak az a, b, c, d, e betűk szerepelhetnek, és nincs benne ismétlődés. Ezek száma $5 \cdot 4 \cdot 3$. (5 elem 3-tagú **ismétlés nélküli variációi**).

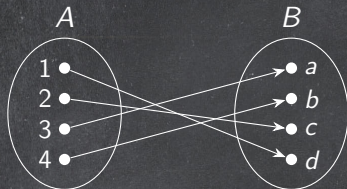
Tétel

Ha $|A| = k$ és $|B| = n$, akkor az injektív $A \rightarrow B$ leképezések száma:

$$n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 1) = \frac{n!}{(n - k)!} \quad (\text{ha } k \leq n).$$

Bijektív leképezések

Példa



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ d & c & a & b \end{pmatrix}$$

Minden leképezés leírható az a, b, c, d betűk egy sorrendjével.

Ezek száma $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

(4 elem **ismétlés nélküli permutációi**).

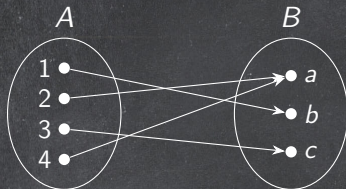
Tétel

Ha $|A| = |B| = n$, akkor a bijektív/injektív/szürjektív $A \rightarrow B$ leképezések száma:

$$n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 1 = n!.$$

Szürjektív leképezések

Példa



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ b & a & c & a \end{pmatrix}$$

Minden leképezés leírható egy 4-betűs szóval, amiben csak az a, b, c betűk szerepelhetnek, és mindegyik fel is lép. Ezek száma $3^4 - 3 \cdot 2^4 + 3 \cdot 1^4$. (Szitaformula kell hozzá.)

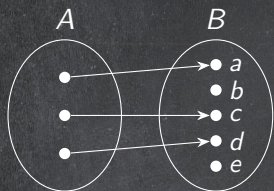
Tétel

Ha $|A| = k$ és $|B| = n$, akkor a szürjektív $A \rightarrow B$ leképezések száma:

$$n^k - \binom{n}{1}(n-1)^k + \binom{n}{2}(n-2)^k - \dots \quad (\text{ha } k \geq n).$$

Injektív leképezések, ha A elemei egyformák

Példa



$\{a, c, d\}$

a	b	c	d	e
1	0	1	1	0

Minden leképezés leírható az $\{a, b, c, d, e\}$ halmaz egy 3-elemű részhalmazával. Ezek száma $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!}$. (5 elem 3-tagú **ismétlés nélküli kombinációi**, avagy 3 db egyes és 2 db nulla **ismétléses permutációi**).

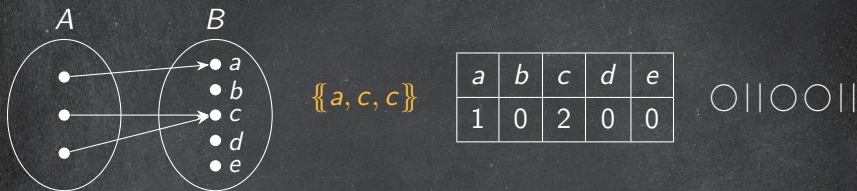
Tétel

Ha $|A| = k$ és $|B| = n$, **és az A halmaz elemei egyformák**, akkor az injektív $A \rightarrow B$ leképezések száma:

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k} \quad (\text{ha } k \leq n).$$

Az összes leképezés, ha A elemei egyformák

Példa



Minden leképezés leírható az a, b, c, d, e betűkből álló 3-elemű **multihalmaz**-sal. Ezek száma $\frac{7!}{3! \cdot 4!} = \binom{7}{3}$. (5 elem 3-tagú **ismétléses kombinációi**).

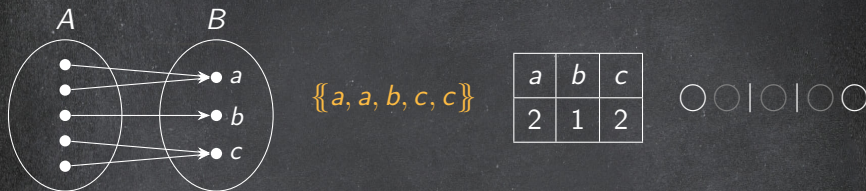
Tétel

Ha $|A| = k$ és $|B| = n$, és az A halmaz elemei egyformák, akkor az összes $A \rightarrow B$ leképezések száma (k db karika és $n - 1$ db pálcika):

$$\frac{(k + n - 1)!}{k! \cdot (n - 1)!} = \binom{n + k - 1}{k}.$$

Szürjektív leképezések, ha A elemei egyformák

Példa



Minden leképezés leírható az a, b, c betűkből álló 5-elemű **multihalmazzal**, amiben minden elem legalább egyszer fellép.

Ezek száma $\frac{4!}{2! \cdot 2!} = \binom{4}{2}$.

Tétel

Ha $|A| = k$ és $|B| = n$, és az A halmaz elemei egyformák, akkor a szürjektív $A \rightarrow B$ leképezések száma ($k - n$ db karika és $n - 1$ db pálcika):

$$\frac{(k-1)!}{(k-n)! \cdot (n-1)!} = \binom{k-1}{n-1} \quad (\text{ha } k \geq n).$$

Tartalom

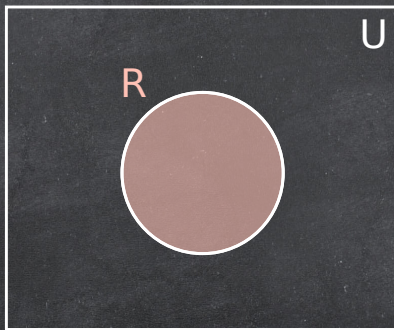
Leképezések

Összeszámlálás

Szitaformula

Időnként könnyebb a „rossz” eseteket megszámolni, mint a „jókat”:

- összes: $|U|$
- rosszak: $|R|$
- jók: $|\overline{R}| = |U| - |R|$



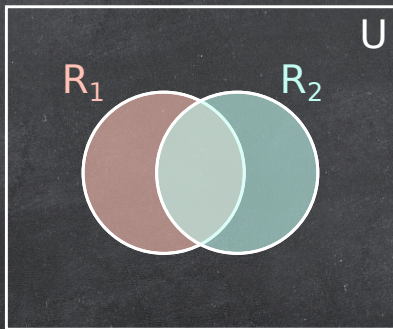
Ha a rossz esetek két csoportba oszthatók:

- összes: $|U|$
- rosszak:

$$|R_1 \cup R_2| = |R_1| + |R_2| - |R_1 \cap R_2|$$

- jók:

$$|\overline{R_1} \cap \overline{R_2}| = |\overline{R_1 \cup R_2}| = |U| - |R_1| - |R_2| + |R_1 \cap R_2|$$



Zita épp csomagol, táborba készül a Mátrába. Az összes ruháját kiszórta a szekrényből: 62 ruhadarab hever az ágyon. Ebből tizenötöt tud magával vinni. Július van, de anyukája ragaszkodik hozzá, hogy vigyen legalább egy sapkát és legalább egy sálát, mert sosem lehet tudni, ott fenn a hegyen akár hideg is lehet hajnalban. Hányféleképpen csomagolhat Zita, ha szót fogad anyukájának, és a 62 ruhadarab között 4 sapka és 3 sál van?

Leltár: 4 sapka, 3 sál, 55 egyéb ruhadarab.

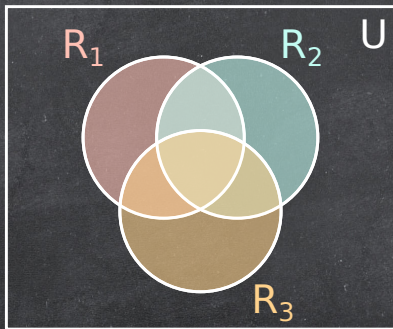
- U : összes lehetőség (Anya kérését ignorálva) $\rightsquigarrow |U| = \binom{62}{15}$
- R_1 : Zita nem visz sapkát $\rightsquigarrow |R_1| = \binom{58}{15}$
- R_2 : Zita nem visz sálát $\rightsquigarrow |R_2| = \binom{59}{15}$
- $R_1 \cap R_2$: Zita nem visz se sapkát, se sálát $\rightsquigarrow |R_1 \cap R_2| = \binom{55}{15}$

A (s)zitaformula szerint

$$|\overline{R_1 \cup R_2}| = |U| - |R_1| - |R_2| + |R_1 \cap R_2| = \binom{62}{15} - \binom{58}{15} - \binom{59}{15} + \binom{55}{15}.$$

Ha a rossz esetek három csoportba oszthatók:

- összes: $|U|$
- rosszak: $|R_1 \cup R_2 \cup R_3| =$
 $= |R_1| + |R_2| + |R_3| - |R_1 \cap R_2| - |R_1 \cap R_3| - |R_2 \cap R_3| + |R_1 \cap R_2 \cap R_3|$
- jók: $|\overline{R_1} \cap \overline{R_2} \cap \overline{R_3}| = |\overline{R_1 \cup R_2 \cup R_3}| =$
 $= |U| - |R_1| - |R_2| - |R_3| + |R_1 \cap R_2| + |R_1 \cap R_3| + |R_2 \cap R_3| - |R_1 \cap R_2 \cap R_3|$



Tétel (szitaformula)

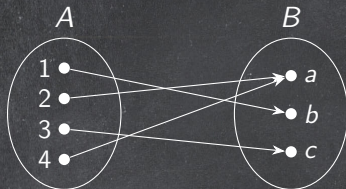
Ha U egy véges halmaz és $R_1, \dots, R_n \subseteq U$, akkor

$$|R_1 \cup \dots \cup R_n| = \sum_{\substack{s=1, \dots, n \\ 1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq n}} (-1)^{s-1} \cdot |R_{i_1} \cap \dots \cap R_{i_s}|;$$

$$|\overline{R_1 \cup \dots \cup R_n}| = \sum_{\substack{s=0, \dots, n \\ 1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq n}} (-1)^s \cdot |R_{i_1} \cap \dots \cap R_{i_s}|.$$

Szürjektív leképezések

Példa



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ b & a & c & a \end{pmatrix}$$

Minden leképezés leírható egy 4-betűs szóval, amiben csak az a, b, c betűk szerepelhetnek, és mindegyik fel is lép. Ezek száma $3^4 - 3 \cdot 2^4 + 3 \cdot 1^4$. (Szitaformula kell hozzá.)

Tétel

Ha $|A| = k$ és $|B| = n$, akkor a szürjektív $A \rightarrow B$ leképezések száma:

$$n^k - \binom{n}{1}(n-1)^k + \binom{n}{2}(n-2)^k - \dots \quad (\text{ha } k \geq n).$$