

DISZKRÉT MATEMATIKA II ELŐADÁS

Waldhauser Tamás

SZTE Bolyai Intézet

2026. március 12.

Tartalom

Bemelegítő feladat

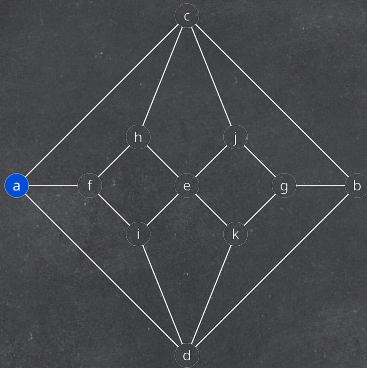
Páros gráfok

Párosítások

Magyar módszer

CS teszt: 4. előadás - színezés

Színezd ki két színnel!



- wifi hálózat (SSID): Kiss Arpad terem GUEST
- jelszó: 12345678
- coospace: Diszkrét matematika 2. ea. színtér

Tartalom

Bemelegítő feladat

Páros gráfok

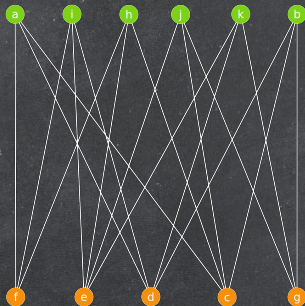
Párosítások

Magyar módszer

Definíció

A G gráfot **páros gráfnak** nevezzük, ha csúcshalmazát két diszjunkt részre lehet osztani úgy, hogy az egyes részeken belül nincsenek élek (azaz minden él „keresztben” megy).

Ezzel ekvivalens, hogy a gráf **2-színezhető**, azaz a csúcsait ki lehet színezni két színnel úgy, hogy éllel összekötött csúcsok különböző színűek legyenek.



Tétel

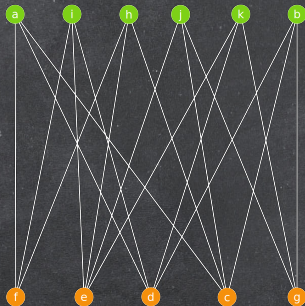
Tetszőleges G egyszerű gráf esetén

G páros $\iff$ nincs G -ben páratlan hosszúságú kör.

Bizonyítás.

Feltehető, hogy G összefüggő (mert a párosság is és a páratlan kör létezése is a komponensekben dől el).

$\implies$: Triviális.



Tétel

Tetszőleges G egyszerű gráf esetén

G páros $\iff$ nincs G -ben páratlan hosszúságú kör.

Bizonyítás.

Feltehető, hogy G összefüggő (mert a párosság is és a páratlan kör létezése is a komponensekben dől el).

$\Leftarrow$: Tfh. nincs ptl. kör. Rögzítsünk egy u „origót”, és színezzük a pontokat két színnel aszerint, hogy u -ból páros vagy páratlan hosszú úttal érhetőek el.

Tfh. ez a színezés nem jó: v és w ugyanolyan színű, pedig megy köztük él.

Legyen az $u \rightarrow v$ út hossza k , az $u \rightarrow w$ út hossza ℓ .

Ez a két út az uv éllel együtt egy $k + \ell + 1$ hosszúságú zárt sétát alkot.

Mivel v és w ugyanolyan színű, $k \equiv \ell \pmod{2}$, és így $k + \ell + 1$ páratlan.

Tehát G -ben van páratlan hosszúságú zárt séta. A(z egyik) legrövidebb zárt séta egy páratlan hosszúságú zárt kör. $\downarrow$

Főnök: Itt egy gráf, színezd ki 2 színnel!



Én:

1. ☺ Ha páros a gráf, akkor gyorsan ki tudom színezni („mohó” színezési algoritmussal).
2. ☺ Ha nem páros, akkor gyorsan találok egy páratlan hosszúságú kört, és ezzel meggyőzőm a főnököt, hogy nem lehet 2 színnel színezni.

Főnök: Itt egy gráf, színezd ki 3 színnel!



Én:

1. ☹ ???
2. ☹ ???

Tartalom

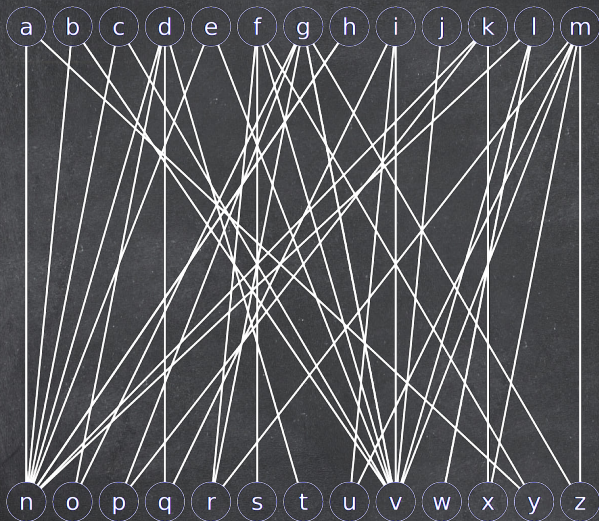
Bemelegítő feladat

Páros gráfok

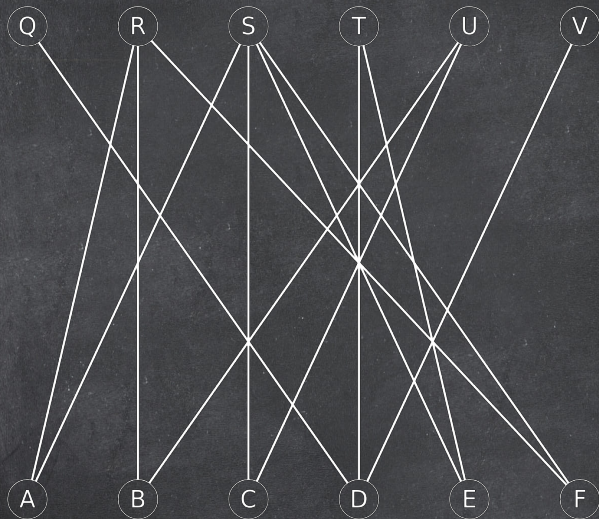
Párosítások

Magyar módszer

Hány házasságot lehet összehozni?



CS teszt: 4. előadás - párosítás



Definíció

Élek egy M halmazát **párosításnak** nevezzük, ha semelyik két M -beli élnek nincs közös végpontja. Maximális elemszám: $\nu(G)$.

Definíció

Egy párosítást **teljes párosításnak** nevezünk, ha minden csúcsnak van párja.

Definíció

Tetszőleges G gráf és $X \subseteq V(G)$ csúcshalmaz esetén X **szomszédsága** az X -beli csúcsokkal éllel összekötött csúcsok halmaza:

$$N(X) = \left\{ y \in V(G) : \{x, y\} \in E(G) \text{ valamely } x \in X \text{ csúcsra} \right\}.$$

Definíció

Azt mondjuk, hogy egy páros gráfban fölső csúcsok egy X halmaza **Kőnig-akadály**, ha $|N(X)| < |X|$.

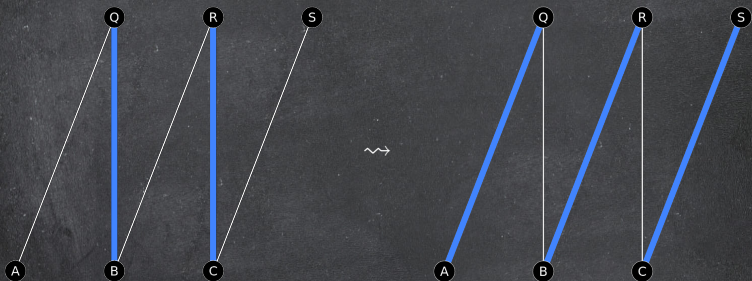
Trivialitás

Ha van Kőnig-akadály, akkor nem létezhet teljes párosítás, sőt, legalább $|X| - |N(X)|$ fölső csúcsnak nem lesz párja.

Definíció

Legyen G egy gráf és $M \subseteq E(G)$ egy párosítás.

- Egy G -beli utat **alternáló útnak** nevezünk (M -re nézve), ha benne felváltva következnek párosított és párosítatlan élek.
- Javító útnak** nevezzük az olyan alternáló utat, amelynek mindkét végpontja párosítatlan.



Berge-tétel

Egy párosítás akkor és csak akkor maximális elemszámú, ha nincs javító út.

Tartalom

Bemelegítő feladat

Páros gráfok

Párosítások

Magyar módszer

Magyar módszer

Adott véges páros gráfban keresünk maximális elemszámú párosítást.

1. Kiindulunk egy tetszőleges M párosításból (lehet akár $M = \emptyset$ is).
2. Az összes alsó párosítatlan csúcsból minden lehetséges módon alternáló utakat „növesztünk”.
 - Az alsó párosítatlan pontok 0 címkét kapnak.
 - Fölfelé az összes lehetséges élet megnézzük, és a felső végponthoz 1-gyel nagyobb számot írunk, mint ami az alsóhoz van írva (ha nincs még megcímkézve).
 - Lefelé mindig csak párosított élen megyünk, és az alsó végponthoz 1-gyel nagyobb számot írunk, mint ami a felsőhöz van írva (garantáltan nincs még megcímkézve).
3. Ha valamelyik alternáló út elér egy felső párosítatlan csúcsot, akkor az javító út. Ekkor javítjuk a párosítást, és visszatérünk a 2. lépésre.
4. Ha nem lehet alternáló úttal elérni egyik felső párosítatlan csúcsot sem, akkor M maximális elemszámú párosítás.

CS teszt: 4. előadás - címkék

Tfh. a magyar módszer véget ért: nincs javító út.

1. Meg vannak-e címkézve az alsó párosítatlan csúcsok?
2. Meg vannak-e címkézve a felső párosítatlan csúcsok?
3. Mehet-e él alsó címkézett csúcsból felső címkétlen csúcsba?
4. Mehet-e él felső címkézett csúcsból alsó címkétlen csúcsba?

CS teszt: 4. előadás - címkék

Tfh. a magyar módszer véget ért: nincs javító út.

- | | |
|--|------|
| 1. Meg vannak-e címkézve az alsó párosítatlan csúcsok? | Igen |
| 2. Meg vannak-e címkézve a felső párosítatlan csúcsok? | Nem |
| 3. Mehet-e él alsó címkézett csúcsból felső címkétlen csúcsba? | Nem |
| 4. Mehet-e él felső címkézett csúcsból alsó címkétlen csúcsba? | Igen |

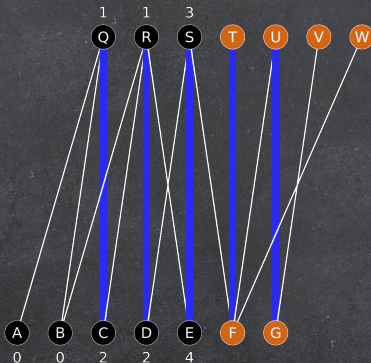
Tétel

Ha a magyar módszer véget ért (nincs már javító út), akkor M maximális elemszámú párosítás, és ezt igazolja a következő Kőnig-akadály:

$$X = \{\text{fölső címkézetlen csúcsok}\}.$$

Bizonyítás.

$|X| - |N(X)|$ pont annyi, mint ahány fölső csúcsnak nem lett párja.



Magyar módszer

Adott véges páros gráfban keresünk maximális elemszámú párosítást.

1. Kiindulunk egy tetszőleges M párosításból (lehet akár $M = \emptyset$ is).
2. Az összes alsó párosítatlan csúcsból minden lehetséges módon alternáló utakat „növesztünk”. Eközben megcímkézzük a csúcsokat: minden csúcshoz, amibe eljutunk, odaírjuk, hogy milyen hosszú alternáló úttal sikerült elérni.
3. Ha valamelyik alternáló út elér egy felső párosítatlan csúcsot, akkor az javító út. Ekkor javítjuk a párosítást, és visszatérünk a 2. lépésre.
4. Ha nem lehet alternáló úttal elérni egyik felső párosítatlan csúcsot sem, akkor M maximális elemszámú párosítás, és ezt igazolja az alábbi König-akadály:

$$X = \{ \text{felső címkézetlen csúcsok} \}.$$

Főnök: Itt egy gráf, keress benne minél nagyobb párosítást!



Én: 😊 Végrehajtom a magyar módszert. Ezzel kapok egy maximális elemszámú párosítást, és egy Kőnig-akadályt is, ami meggyőzi a főnököt, hogy nincs nagyobb párosítás.

Kőnig–Hall-tétel

Egy páros gráfban akkor és csak akkor van teljes párosítás, ha az alsó és felső pontok száma ugyanannyi, és nincs Kőnig-akadály.

Tíz házasságot lehet összehozni

