

DISZKRÉT MATEMATIKA II ELŐADÁS

Waldhauser Tamás

SZTE Bolyai Intézet

2026. március 5.

Tartalom

Bemelegítés

Gráfok

Fák és erdők

Hamilton-út

Euler-vonal

Síkgráfok

CS teszt: 3. előadás - 7^{101}

Mit ad 7^{101} maradékul 9-cel osztva?

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	4	8	7	5	1	2	4	8	7	5	1	2	4	8	7	5	1	2
4	1	4	7	1	4	7	1	4	7	1	4	7	1	4	7	1	4	7	1	4
5	1	5	7	8	4	2	1	5	7	8	4	2	1	5	7	8	4	2	1	5
7	1	7	4	1	7	4	1	7	4	1	7	4	1	7	4	1	7	4	1	7
8	1	8	1	8	1	8	1	8	1	8	1	8	1	8	1	8	1	8	1	8

- wifi hálózat (SSID): Kiss Arpad terem GUEST
- jelszó: 12345678
- coospace: Diszkrét matematika 2. ea. szintér



Tartalom

Bemelegítés

Gráfok

Fák és erdők

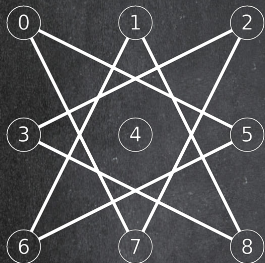
Hamilton-út

Euler-vonal

Síkgráfok

Informális definíció

Gráf = csúcsok + élek. Minden él két csúcsot köt össze. Mindegy, hogyan van lerajzolva, csak az számít, hogy mely csúcsok vannak összekötve.



csúcsok: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

élek: 0-5, 0-7, 1-6, 1-8, 2-3, 2-7, 3-8, 5-6

JavaScript:

```
vertices = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]
```

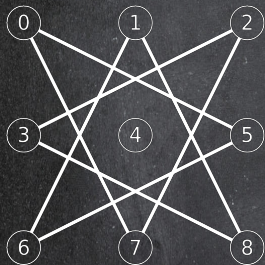
```
edges = [[0,7],[0,5],[1,6],[1,8],[2,7],[2,3],[3,8],[5,6]]
```

Definíció

Egyszerű gráfnak olyan $G = (V; E)$ párt nevezünk, ahol

- $V = V(G)$ nemüres halmaz — csúcsok;
- $E = E(G)$ a V halmaz kételemű részhalmazainak egy halmaza — élek.

Példa



$G = (V; E)$, ahol

$$V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$E = \{\{0, 5\}, \{0, 7\}, \{1, 6\}, \{1, 8\}, \{2, 3\}, \{2, 7\}, \{3, 8\}, \{5, 6\}\}$$

Egyszerű gráf megadási módjai

- rajz:



- csúcsok és élek: $V = \{a, b, c, d\}$, $E = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}\}$

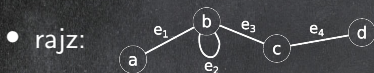
- adjacenciamátrix (szomszédsági mátrix):

	a	b	c	d
a	0	1	0	0
b	1	0	1	0
c	0	1	0	1
d	0	0	1	0

- incidenciamátrix (illeszkedési mátrix):

	a	b	c	d
e_1	1	1	0	0
e_2	0	1	1	0
e_3	0	0	1	1

Nem egyszerű gráfok: hurokélek



- csúcsok és élek: $V = \{a, b, c, d\}$, $E = \{\{a, b\}, \{b\}, \{b, c\}, \{c, d\}\}$

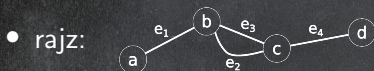
- adjacenciamátrix (szomszédsági mátrix):

	a	b	c	d
a	0	1	0	0
b	1	1	1	0
c	0	1	0	1
d	0	0	1	0

- incidenciamátrix (illeszkedési mátrix):

	a	b	c	d
e_1	1	1	0	0
e_2	0	1	0	0
e_3	0	1	1	0
e_4	0	0	1	1

Nem egyszerű gráfok: többszörös élek



- csúcsok és élek: $V = \{a, b, c, d\}$, $E = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{b, c\}, \{c, d\}\}$

- adjacenciamátrix (szomszédsági mátrix):

	a	b	c	d
a	0	1	0	0
b	1	0	2	0
c	0	2	0	1
d	0	0	1	0

- incidenciamátrix (illeszkedési mátrix):

	a	b	c	d
e_1	1	1	0	0
e_2	0	1	1	0
e_3	0	1	1	0
e_4	0	0	1	1

Nem egyszerű gráfok: irányított élek

- rajz:

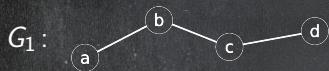


- csúcsok és élek: $V = \{a, b, c, d\}$, $E = \{(a, b), (c, b), (c, d), (d, c)\}$

- adjacenciamátrix (szomszédsági mátrix):

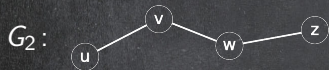
	a	b	c	d
a	0	1	0	0
b	0	0	0	0
c	0	1	0	1
d	0	0	1	0

Melyik két gráf ugyanaz?



$$V_1 = \{a, b, c, d\}$$

$$E_1 = \{ab, bc, cd\}$$



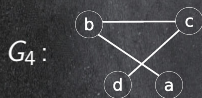
$$V_2 = \{u, v, w, z\}$$

$$E_2 = \{uv, vw, wz\}$$



$$V_3 = \{a, b, c, d\}$$

$$E_3 = \{ac, ad, bd\}$$



$$V_4 = \{a, b, c, d\}$$

$$E_4 = \{ab, bc, cd\}$$

Tehát $G_1 = G_4$; a másik két gráf különbözik ettől a gráftól, és egymástól is.

Viszont ezek a gráfok mind **izomorfak** egymással.

Definíció

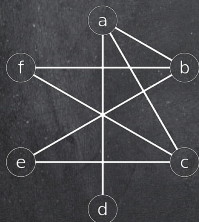
Azt mondjuk, hogy a $G_1 = (V_1; E_1)$ és $G_2 = (V_2; E_2)$ gráfok **izomorfak**, ha létezik közöttük **izomorfizmus**, vagyis olyan

$\varphi: V_1 \rightarrow V_2$ bijekció, amelyre $\{v_1, w_1\} \in E_1 \iff \{v_1\varphi, w_1\varphi\} \in E_2$

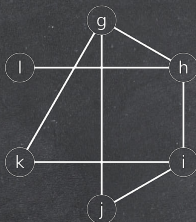
minden $v_1, w_1 \in V_1$ esetén. Jelölés: $G_1 \cong G_2$.

Példa

Izomorf-e ez a két gráf?



G_1



G_2

Definíció

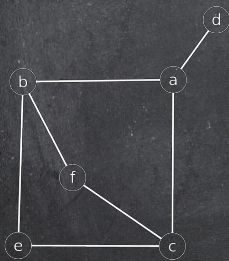
Azt mondjuk, hogy a $G_1 = (V_1; E_1)$ és $G_2 = (V_2; E_2)$ gráfok **izomorfak**, ha létezik közöttük **izomorfizmus**, vagyis olyan

$\varphi: V_1 \rightarrow V_2$ bijekció, amelyre $\{v_1, w_1\} \in E_1 \iff \{v_1\varphi, w_1\varphi\} \in E_2$

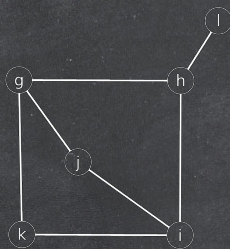
minden $v_1, w_1 \in V_1$ esetén. Jelölés: $G_1 \cong G_2$.

Megoldás

Igen, izomorfak.



G_1

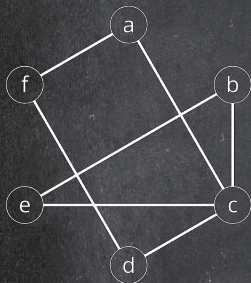


G_2

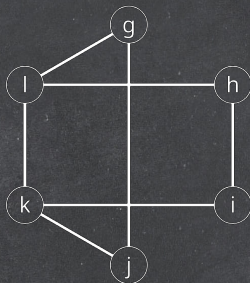
a	$\mapsto$	h
b	$\mapsto$	g
c	$\mapsto$	i
d	$\mapsto$	l
e	$\mapsto$	k
f	$\mapsto$	j

CS teszt: 3. előadás - izomorfia

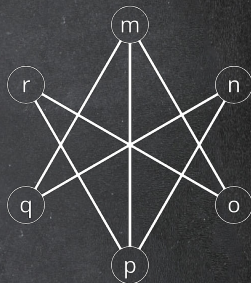
Melyek izomorfak egymással az alábbi gráfok közül?



G_1



G_2



G_3

Definíció

A G gráf v csúcsának **fokszámán** a v -re illeszkedő élek számát értjük (az esetleges hurokéleket kétszer számolva, hiszen az „kétszer illeszkedik” a csúcsra). Jelölés $d(v)$. Ha $d(v) = 0$, akkor v -t **izolált csúcsnak** nevezzük.

Trivialitás

Izomorfizmusnál az egymásnak megfelelő csúcsok azonos fokszámúak. Ezért izomorf gráfoknál a fokszámok (multi)halmazai megegyeznek.

Tétel

Bármely gráfban a csúcsok fokszámainak összege páros szám, mégpedig az élek számának kétszerese:

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2 \cdot |E(G)|.$$

Bizonyítás.

Ha mindenkit megkérdezünk, hogy hány emberrel fogott kezét, akkor minden kézfogásról két „bejelentést” kapunk.



Definíció

A G gráfban a v csúcsból a w csúcsba vezető **séta**: olyan

$$v = v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{\ell-1}, e_\ell, v_\ell = w$$

sorozat, ahol az e_i él két végpontja v_{i-1} és v_i minden i -re.

Ha $v_0 = v_\ell$, akkor **zárt sétáról** beszélünk.

Ha G egyszerű gráf, akkor az éleket nem kell feltüntetni, elég megadni a $v_0, v_1, \dots, v_\ell$ csúcssorozatot, ahol $\{v_{i-1}, v_i\} \in E(G)$ minden i -re.

Definíció

Ha egy sétában csupa különböző csúcsok szerepelnek (és így persze élek sem ismétlődhetnek), akkor **útnak** nevezzük. (Következésképp egy zárt séta sosem lehet út.)

Definíció

Körnek nevezzük az olyan zárt sétát, amelyben nem ismétlődnek sem csúcsok sem élek (a kezdőpont és a végpont egybeesésétől eltekintve).

Definíció

Egy gráf **összefüggő**, ha bármely két csúcsa között vezet séta. (Ezzel ekvivalens, hogy bármely két csúcs között van út.)

Trivialitás

Az összefüggőség izomorfiainvariáns tulajdonság: ha G_1 összefüggő de G_2 nem az, akkor biztos, hogy $G_1 \not\cong G_2$.

Tétel

Definiáljuk a G gráf csúcshalmazán a $\sim$ elérhetőségi relációt a következőképpen:

$$v \sim w \iff \exists v \rightsquigarrow w \text{ séta.}$$

Ekkor $\sim$ ekvivalenciareláció a $V(G)$ halmazon.

Minden $\sim$ szerinti ekvivalenciaosztály kifeszít egy részgráfot; ezeket nevezzük a G gráf **összefüggő komponenseinek**.

Tartalom

Bemelegítés

Gráfok

Fák és erdők

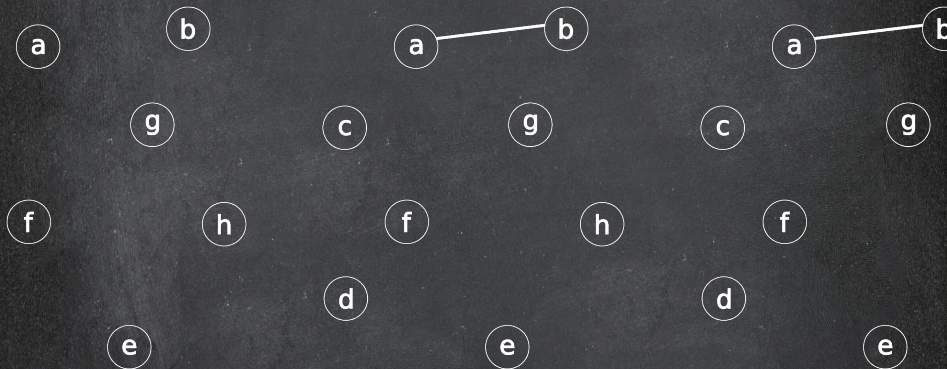
Hamilton-út

Euler-vonal

Síkgráfok

Kihívás

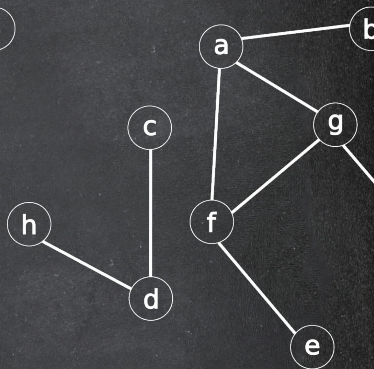
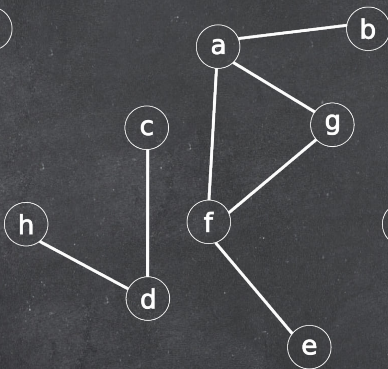
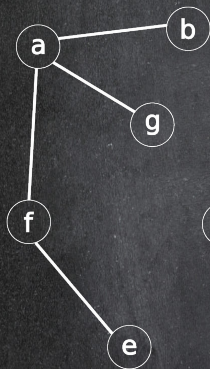
Legalább hány összeköttetést kell létesíteni, hogy bárhonnan el lehessen jutni bárhova? (Legalább hány éle kell legyen egy 8-csúcsú összefüggő gráfnak?)



Minden lépésben **csak** eggyel tudjuk csökkenteni az összefüggő komponensek számát, ezért legalább 7 élt kell behúzni.

Kihívás

Legalább hány összeköttetést kell létesíteni, hogy bárholnan el lehessen jutni bárhova? (Legalább hány éle kell legyen egy 8-csúcsú összefüggő gráfnak?)



Ha valamelyik lépésben két olyan csúcs közé rajzolunk be élt, amelyek ugyanabban az összefüggő komponensben vannak, akkor kör keletkezik. Ez pazarlás!

Definíció

A körmentes összefüggő gráfokat **fáknak** nevezzük.

A körmentes gráfokat **erdőknek** nevezzük (hiszen összefüggő komponenseik fák).

Tétel

Minden n -csúcsú fának $n - 1$ éle van.

Tétel (Kettőt fizet, hármát vihet!)

Bármely n -csúcsú G gráfra az alábbi három állításból bármely kettő maga után vonja a harmadikat:

1. G összefüggő;
2. G körmentes;
3. G -nek $n - 1$ éle van.

Tétel

Ha egy n -csúcsú erdő f darab fából áll, akkor $n - f$ éle van.

Tartalom

Bemelegítés

Gráfok

Fák és erdők

Hamilton-út

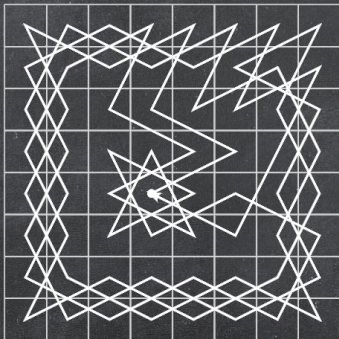
Euler-vonal

Síkgráfok

Definíció

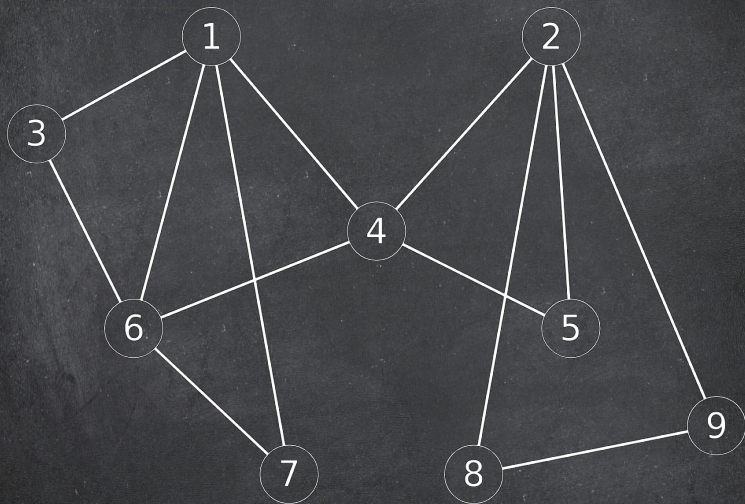
- Az olyan utat, ami egy gráf minden csúcsán áthalad (és, út lévén, minden csúcson *csak egyszer* halad át), **Hamilton-útnak** nevezzük.
- Az olyan kört, ami egy gráf minden csúcsán áthalad (és, kör lévén, minden csúcson *csak egyszer* halad át, a kezdőpont és a végpont egybeesésétől eltekintve), **Hamilton-körnek** nevezzük.

Huszártúra a sakktáblán



CS teszt: 3. előadás - Hamilton

Adjon meg egy Hamilton-utat az alábbi gráfban.



Trivialitás

- Ha egy gráfban van Hamilton-kör, akkor egy csúcsot elhagyva, a gráf összefüggő marad (általánosabban: k csúcsot elhagyva, legfeljebb k összefüggő komponensre „esik szét” a gráf).
- Ha egy gráfban van Hamilton-út, akkor egy csúcsot elhagyva, a gráf legfeljebb két összefüggő komponensre esik szét (általánosabban: k csúcsot elhagyva legfeljebb $k + 1$ összefüggő komponensre esik szét).

Tétel (Dirac, 1952)

Ha egy egyszerű gráfnak $n \geq 3$ csúcsa van, és minden csúcs foka legalább $n/2$, akkor a gráfban van Hamilton-kör.

Megjegyzés

A Dirac-tétel feltétele elegendő, de nem szükséges a Hamilton-kör létezéséhez.

Hamilton-utat találni nehéz

Legyen a gráfunak n csúcsa.

- „Nyers erőszak”: minden lehetséges sorrendben leírom a csúcsokat, hátha valamelyik sorrend egy Hamilton-utat ad.

$\rightsquigarrow n!$

Sakktábla: $64! \approx 1,27 \cdot 10^{89}$

- Dinamikus programozás: Bellman–Held–Karp-algoritmus (1962).

$\rightsquigarrow 2^n \cdot n^2$.

Sakktábla: $2^{64} \cdot 64^2 \approx 7,56 \cdot 10^{22}$

Hamilton-út/kör keresése **NP-teljes probléma**, azaz maximális nehézségű az NP problémaosztályban.

Tegyük még nehezebbé!

Utazóügynök-probléma (Travelling Salesman Problem): minden élnek van egy költsége, és minimális költségű Hamilton-kört keresünk.

Tartalom

Bemelegítés

Gráfok

Fák és erdők

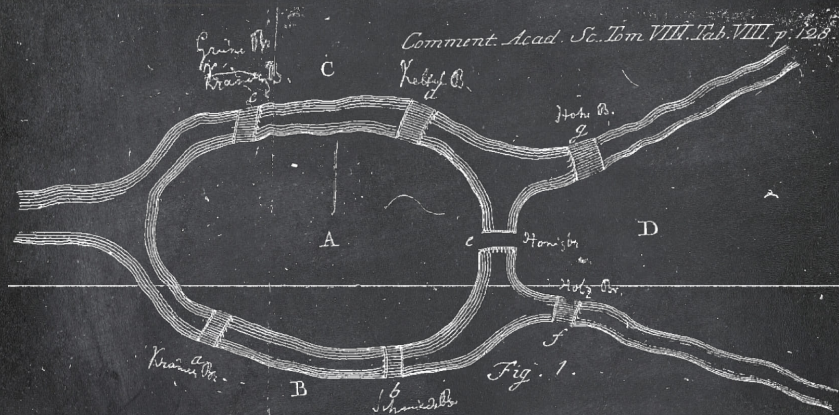
Hamilton-út

Euler-vonal

Síkgráfok

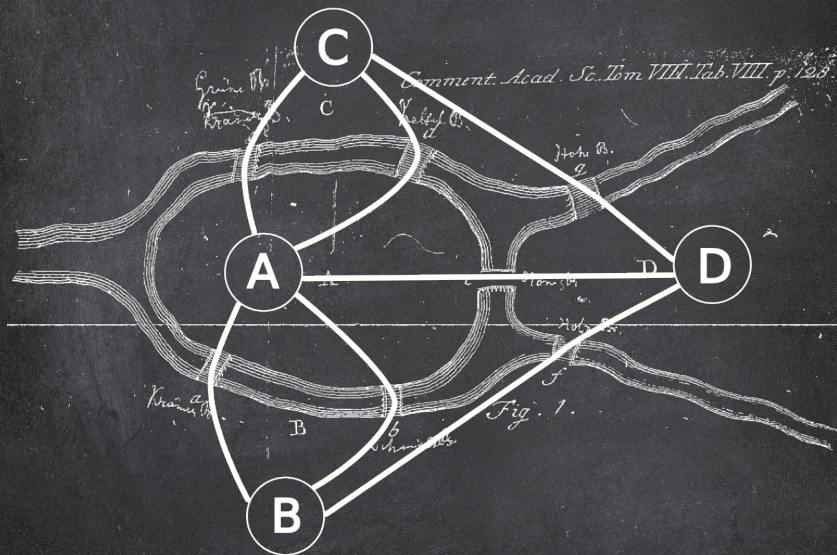
Königsberg hídjai

Sétáljunk át minden hídon pontosan egyszer!



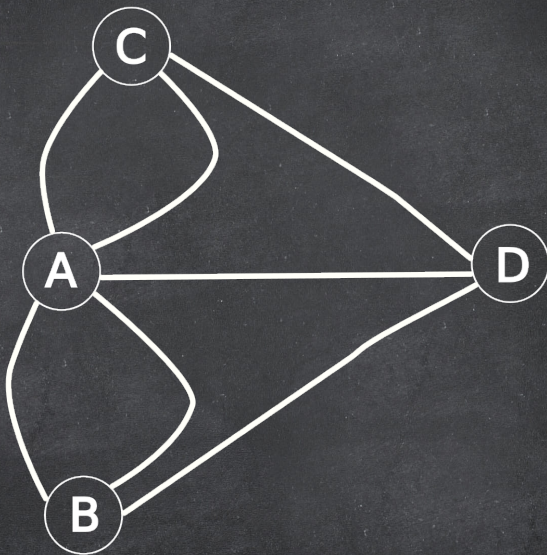
Königsberg hídjai

Sétáljunk át minden hídon pontosan egyszer!



Königsberg-gráf

Rajzoljuk le a gráfot egy vonallal!



Definíció

Az olyan sétát, amely egy gráf minden élén pontosan egyszer halad át, **Euler-vonalnak** nevezzük. Ha ez a séta zárt, akkor **zárt Euler-vonalról**, ellenkező esetben **nyílt Euler-vonalról** beszélünk.

Tétel (Euler, 1736 és Hierholzer, 1871)

Egy izolált csúcsokat nem tartalmazó gráfban akkor és csak akkor van Euler-vonal, ha a gráf összefüggő, és legfeljebb két páratlan fokú csúcsa van.

Tehát tetszőleges G **összefüggő** gráf esetén az alábbi három eset lehetséges:

- Minden csúcs foka páros. Ekkor van zárt Euler-vonal (és nyílt Euler-vonal nincs).
- Pontosán két páratlan fokú csúcs van. Ekkor van nyílt Euler-vonal (és zárt Euler-vonal nincs). Minden nyílt Euler-vonal szükségképpen a két páratlan fokú csúcsot köti össze.
- Több, mint két páratlan fokú csúcs van. Ekkor nincs Euler-vonal (se zárt, se nyílt).

Euler-vonalat találni könnyű: Hierholzer-algoritmus

Adott egy összefüggő gráf, amelyben minden csúcs fokszáma páros.

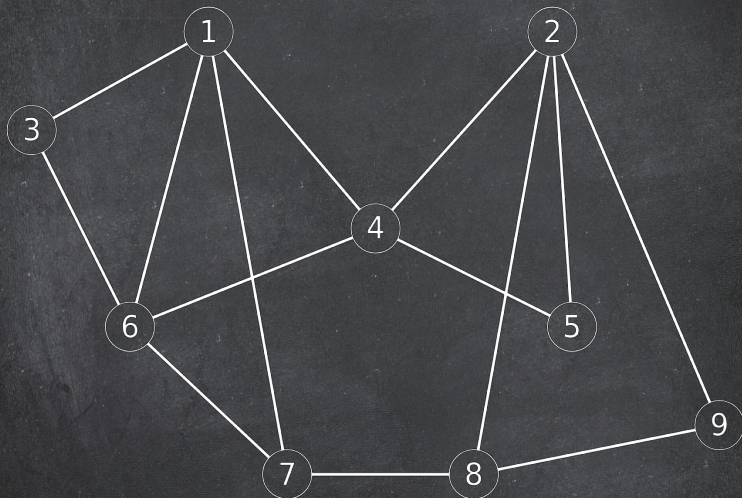
- Tetszőlegesen sétálunk a gráfban, amíg el nem akadunk.
- A fokszámok párossága miatt csak a kezdőpontban akadhatunk el.
- Ha van még bejáratlan él, akkor az összefüggőség miatt van olyan bejáratlan él is, aminek az egyik végpontjában már jártunk.
- Innen indítunk egy új zárt sétát. (A bejáratlan élek alkotta gráfban is páros minden csúcs fokszáma, ezért elakadni csak akkor tudunk, amikor visszaértünk az új séta kezdőpontjába.)
- A régi sétába a megfelelő helyre beillesztjük az új sétát.
- Ezt folytatjuk mindaddig, amíg van még bejáratlan él. Végül egy zárt Euler-vonalat kapunk.

Megjegyzés

Ha két páratlan fokú csúcs van, kössük őket össze egy új éllel (nem baj, ha így többszörös él keletkezik), és erre a gráfra alkalmazzuk az algoritmust.

CS teszt: 3. előadás - Euler

Keressen Euler-vonalat az alábbi gráfban.



Tartalom

Bemelegítés

Gráfok

Fák és erdők

Hamilton-út

Euler-vonal

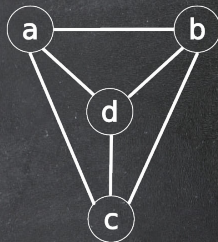
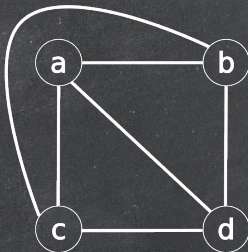
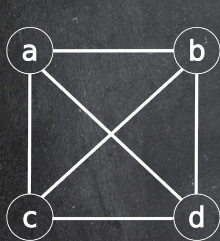
Síkgráfok

Definíció

Az olyan gráfot, amelyet le lehet rajzolni úgy, hogy a csúcsok síkbeli pontoknak felelnek meg, az élek pedig olyan görbéknek, amelyek nem metszik egymást (csak a végpontjaikban találkozhatnak), **síkbarajzolható gráfnak** vagy röviden **síkgráfnak** nevezzük.

Példa

A négypontú **teljes gráf** (K_4) síkgráf:



Tétel (Wagner, 1936 és Fáry István, 1948)

Minden egyszerű síkgráf lerajzolható úgy, hogy az élek egyenes szakaszok.

Állítás (nem triviális!)

A K_5 teljes gráf és a $K_{3,3}$ teljes páros gráf nem síkgráfok:



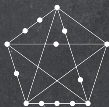
K_5



$K_{3,3}$

Következmény (triviális)

A K_5 teljes gráf és a $K_{3,3}$ teljes páros semelyik felosztása sem síkgráf:



Ha G tartalmazza K_5 vagy $K_{3,3}$ egy felosztását, akkor G nem síkgráf.

Tétel (Kuratowski, 1930)

Egy gráf akkor és csak akkor síkgráf, ha nem tartalmazza részgráfként K_5 vagy $K_{3,3}$ valamely felosztását.

Definíció

Egy gráf **jó színezésén** a csúcsok olyan színezését értjük, éllel összekötött csúcsok mindig különböző színt kapnak.

A legkisebb olyan k értéket, amelyre G jól színezhető k színnel, a gráf **kromatikus számának** nevezzük, és $\chi(G)$ -vel jelöljük.

Tehát $\chi(G) = k$ azt jelenti, hogy k színnel jól színezhető G , de $k - 1$ színnel már nem.

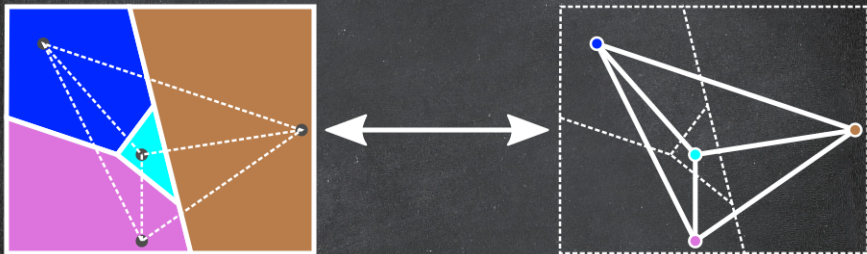
Tétel (négyszíntétel, Appel és Haken, 1976)

Ha G síkgráf, akkor $\chi(G) \leq 4$.

Megjegyzés

A négyszíntétel volt az (egyik) első tétel, amelynek bizonyításához számítógépet használtak. Először „kézzel” (pontosabban aggyal) 1834 eset vizsgálatára redukálták a dolgot, majd ezeket számítógéppel megvizsgálták (több, mint ezer óra).

A négyszíntételből következik, hogy minden térképet ki lehet színezni legfeljebb négy színt használva úgy, hogy a szomszédos országok különböző színűek legyenek:

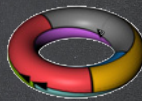
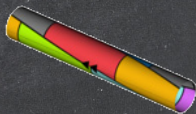
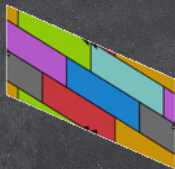


Ezt már 1852-ben megfogalmazta sejtésként Francis Guthrie.

Fun facts

- A tóruszra már le lehet rajzolni a $K_{3,3}$ gráfot,
- sőt, a K_7 gráfot is,
- ezért a tóruszon hét szín is kellhet a térképek színezéséhez,
- de ennyi mindig elegendő is.

Hét, páronként szomszédos ország a tóruszon:



Szilassi-poliéder:

