
ALGERBA ÉS SZÁMELMÉLET

MBNK13G

1. FELADATSOR

MŰVELETEK ÉS ALGEBRÁK

Jelölje $\mathbb{Z}$ az egész számok halmazát, $\mathbb{N}$ a pozitív egészek halmazát, $\mathbb{N}_0$ a nem negatív egészek halmazát, $\mathbb{Q}$ a racionális számok halmazát, $\mathbb{R}$ a valós számok halmazát, $\mathbb{R}^+$ a pozitív valós számok halmazát, $\mathbb{C}$ a komplex számok halmazát, $\mathbb{Z}_n$ a modulo n maradékosztályok halmazát, $\mathbb{Z}_n^*$ a modulo n redukált maradékosztályok halmazát, $\mathbb{R}^n$ az n komponensű valós vektorok halmazát, $\mathbb{R}^{m \times n}$ az $m \times n$ -es valós mátrixok halmazát, $\text{GL}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathbb{R}^{n \times n} : |M| \neq 0\}$, azaz az $n \times n$ -es invertálható valós mátrixok halmazát, továbbá B^A az A halmazból B halmazba menő leképezések halmazát jelöli. Valamint tetszőleges pozitív n egész esetén jelölje S_n az $\{1, \dots, n\}$ halmaz összes permutációinak halmazát, D_n az n -edfokú diédercsoportot, E_n pedig az n -edik komplex egységgyökök halmazát.

1.1. Feladat. Művelet-e

- (a) az S_n halmazon a szorzás;
- (b) az összeadás a 3-jegyű pozitív egész számok halmazán;
- (c) az osztás a $\mathbb{Q}$ halmazon;
- (d) $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ halmazon a mátrixok szorzása.
- (e) $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ halmazon a mátrixok összeadása.
- (f) az összeadás az $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}^+\}$ halmazon.
- (g) a szorzás az $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}^+\}$ halmazon.
- (h) az összeadás a $\mathbb{Z}_4$ halmazon.
- (i) az összeadás a $\{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}\}$ halmazon, ahol $\bar{0}, \bar{3}, \bar{6} \in \mathbb{Z}_9$.

MEGOLDÁS.

- (a) igen; (b) nem; (c) nem; (d) igen; (e) nem; (f) igen; (g) nem; (h) igen; (i) igen.

1.2. Feladat. Készítsük el az alábbi grupoidok művelettábláját, és ennek alapján állapítsuk meg, hogy melyik grupoid kommutatív, melyekben van zéruselem, illetve egységelem. Az egységelemes grupoidokban határozzuk meg, hogy mely elemeknek van inverze.

- (a) $(S_2; \cdot)$;
- (b) $(\{-1, 0, 1\}; \cdot)$;
- (c) $(\{-1, 0, 1\}; \max)$;
- (d) $(\{a, b, c\}; \circ)$, ahol $x \circ y = y$.

MEGOLDÁS.

- (a) A grupoid kommutatív, zéruseleme nincs, egységeleme: id, az invertálható elemek halmaza: id, (12).
- (b) A grupoid kommutatív, zéruseleme: 0, egységeleme: 1, az invertálható elemek halmaza: $\{1, -1\}$;
- (c) A grupoid kommutatív, zéruseleme: 1, egységeleme: -1 , az invertálható elemek halmaza: $\{-1\}$;
- (d) A grupoid nem kommutatív, zéruseleme nincs, egységeleme nincs.

1.3. Feladat. Az alábbi művelettáblázatok alapján döntsük el, hogy kommutatív-e, cancellatív-e a művelet, van-e a grupoidban zéruselem, illetve egységelem? Ha van egységelem, akkor mely elemeknek van inverze?

	*	a	b	c	d
(a)	a	a	a	a	a
	b	a	b	c	d
	c	b	c	b	b
	d	d	d	a	a

	*	a	b	c	d
(b)	a	a	b	c	d
	b	b	c	a	a
	c	c	a	b	a
	d	d	d	d	d

MEGOLDÁS.

- (a) A grupoid nem kommutatív, nem cancellatív, zéruselem nincs, a b elem egységelem, a b és c elemeknek van inverze: $b^{-1} = b$, $c^{-1} = c$;
- (b) A grupoid nem kommutatív, nem cancellatív, zéruselem nincs, az a elem egységelem, az a, b és c elemeknek van inverze: $a^{-1} = a$, $b^{-1} = c$, $c^{-1} = b$.

1.4. Feladat. Vizsgáljuk meg, hogy a következők grupoidok-e és közülük melyek félcsoporthok, melyek monoidok, melyek csoportok, és melyek Abel-csoportok.

- | | | | |
|-------------------------------|---|---------------------------------------|---|
| (a) $(\mathbb{N}; +)$; | (b) $(\mathbb{N}_0; +)$; | (c) $(\mathbb{Z}; +)$; | (d) $(\mathbb{Q}; +)$; |
| (e) $(S_4; \cdot)$; | (f) $(\mathbb{Z}; \cdot)$; | (g) $(\mathbb{Q}; \cdot)$; | (h) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}; \cdot)$; |
| (i) $(\mathbb{R}^+; \cdot)$; | (j) $(A^A; \cdot)$; | (k) $(\mathbb{R}^{2 \times 2}; +)$; | (l) $(\mathbb{R}^{2 \times 2}; \cdot)$; |
| (m) $(\mathbb{Z}; -)$; | (n) $(GL_n(\mathbb{R}); \cdot)$; | (o) $(\mathbb{C}; \cdot)$; | (p) $(\mathbb{R}^4; +)$; |
| (q) $(\mathbb{Z}_6; \cdot)$; | (r) $(\mathbb{Z}_6 \setminus \{\bar{0}\}; \cdot)$; | (s) $(\mathcal{P}(\{a, b\}); \cap)$. | |

MEGOLDÁS.

- | | | | |
|-------------------|------------------|-------------------|-------------------|
| (a) félcsoporth; | (b) monoid; | (c) Abel-csoport; | (d) Abel-csoport; |
| (e) csoport; | (f) monoid; | (g) monoid; | (h) Abel-csoport; |
| (i) Abel-csoport; | (j) monoid; | (k) Abel-csoport; | (l) monoid; |
| (m) grupoid; | (n) csoport; | (o) monoid; | (p) Abel-csoport; |
| (q) monoid; | (r) nem grupoid; | (s) monoid. | |

1.5. Feladat. Az alábbi állítások közül melyek érvényesek tetszőleges csoport minden a, b, x, y elemére?

- (a) Ha $a^{-1} = b^{-1}$, akkor $a = b$.
- (b) Ha $xa = ay$, akkor $x = y$.
- (c) Ha $abx = 1$, akkor $x = a^{-1}b^{-1}$.
- (d) Ha $(ab)^2 = a^2b^2$, akkor $ab = ba$.

MEGOLDÁS.

- (a) érvényes;
- (b) nem érvényes;
- (c) nem érvényes;
- (d) érvényes.

1.6. Feladat. Határozzuk meg a G csoportban a megadott elem rendjét.

- (a) $G = GL_2(\mathbb{R})$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$;
- (b) $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, i;
- (c) $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$;
- (d) $G = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, -2;
- (e) $G = S_8$, (1 2 3)(4 5 6 7);
- (f) $G = S_5$, (1 2 4 5)(2 3 4)
- (g) $G = \mathbb{Z}_6$, $\bar{2}$;
- (h) $G = \mathbb{Z}_4$, $\bar{3}$;

- (i) $G = \mathbb{Z}_9^*$, $\bar{4}$;
 (j) $G = \mathbb{Z}_{12}^*$, $\bar{5}$;
 (k) $G = D_4$, a^3t ;
 (l) $G = D_{24}$, a^9 .

MEGOLDÁS.

- (a) 4; (b) 4; (c) 3; (d) ∞ ; (e) 12; (f) 4;
 (g) 3; (h) 4; (i) 3; (j) 2; (k) 2; (l) 8.

1.7. Feladat. Adjunk meg n -edrendű elemet az alábbi csoportokban (ha létezik).

- (a) $\mathbb{Q}^*$, $n = 3$; (b) $\mathbb{Z}_{12}$, $n = 3$; (c) D_6 , $n = 3$; (d) S_5 , $n = 6$
 (e) $\mathbb{Q}^*$, $n = 2$; (f) $\mathbb{Z}_{15}^*$, $n = 4$; (g) D_5 , $n = 2$; (h) A_4 , $n = 4$
 (i) $\mathbb{C}^*$, $n = 12$; (j) $\mathbb{Z}_{15}^*$, $n = 4$; (k) D_6 , $n = 4$; (l) A_6 , $n = 4$.

MEGOLDÁS.

- (a) nincs; (b) pl. $\bar{4}$; (c) pl. a^2 ; (d) pl. (12)(345);
 (e) -1 ; (f) pl. $\bar{2}$; (g) pl. t ; (h) nincs;
 (i) pl. $\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}$; (j) pl. $\bar{2}$; (k) nincs; (l) pl. (1234)(56).

1.8. Feladat. Hány n -edrendű elem van az alábbi csoportokban?

- (a) $\mathbb{C}^*$, $n = 12$; (b) $\mathbb{Z}_{100}$, $n = 10$; (c) D_{24} , $n = 2$; (d) S_4 , $n = 2$;
 (e) S_4 , $n = 6$; (f) $\mathbb{Z}_9^*$, $n = 3$; (g) D_{24} , $n = 5$; (h) $\mathbb{Q}$, $n = 2$.

MEGOLDÁS.

- (a) 4; (b) 4; (c) 25; (d) 9;
 (e) 0; (f) 2; (g) 0; (h) 0.

1.9. Feladat. Döntsük el, hogy a G csoportban részcsoportot alkot-e a megadott H részhalmaz.

- (a) $G = S_4$, $H = \{\text{id}, (13), (24), (13)(24)\}$; (b) $G = D_6$, $H = \{\text{id}, t, a^2, a^2t\}$;
 (c) $G = \mathbb{Z}$, $H = \mathbb{N}$; (d) $G = \mathbb{C}^*$, $H = (\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}, \cdot)$;
 (e) $G = S_5$, $H = \{\text{id}, (135), (153)\}$; (f) $G = \mathbb{Z}_6$, $H = \mathbb{Z}_6^*$.

MEGOLDÁS.

- (a) igen; (b) nem; (c) nem; (d) igen; (e) igen; (f) nem.

1.10. Feladat. Az $\mathbf{A} = (\{0, 1, 2\}; \circ)$, $\mathbf{B} = (\{a, b, c\}; *)$, $\mathbf{C} = (\{p, q, r\}; \square)$ és $\mathbf{D} = (\{-1, 0, 1\}; \cdot)$ grupoidok művelettáblázatai az alábbiak. Döntsük el, hogy mely grupoidok izomorfak. (Adjuk meg az izomorfizmusokhoz tartozó leképezést.)

$\circ$	0	1	2	$*$	a	b	c	$\square$	p	q	r	$\cdot$	-1	0	1
0	0	1	2	a	a	b	c	p	p	p	p	-1	1	0	-1
1	1	0	2	b	b	c	a	q	p	q	r	0	0	0	0
2	2	2	2	c	c	a	b	r	p	r	q	1	-1	0	1

MEGOLDÁS. $\mathbf{A} \cong \mathbf{C} \cong \mathbf{D}$.

- $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C}$; $0 \mapsto q, 1 \mapsto r, 2 \mapsto p$.
 $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$; $p \mapsto 0, q \mapsto 1, r \mapsto -1$.
 $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{D}$; $0 \mapsto 1, 1 \mapsto -1, 2 \mapsto 0$.

1.11. Feladat. Döntsük el izomorfak-e a következő grupoidok. A válaszokat indokoljuk!

- (a)

$\cdot$	u	v	x	y
u	y	u	v	x
v	u	v	x	y
x	v	x	y	u
y	x	y	u	v

 és $(\mathbb{Z}_4; +)$;
- (b)

$\circ$	α	β	γ	δ
α	δ	β	α	γ
β	β	β	β	β
γ	α	β	γ	δ
δ	γ	β	δ	δ

 és $(\mathbb{Z}_5^*; \cdot)$;
- (c)

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

 és $(\{1, i, -1, -i\}; \cdot)$;
- (d)

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

 és $(\{\text{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}; \cdot)$;
- (e) D_3 és S_3 ;
- (f) D_4 és $(\mathbb{Z}_{15}^*; \cdot)$;
- (g) A_4 és $(\mathbb{Z}_{13}^*; \cdot)$;
- (h) $(\mathbb{Z}_{13}^*; \cdot)$ és $(\mathbb{Z}_{12}; +)$;
- (i) $(E_8; \cdot)$ és $(\mathbb{Z}_{13}^*; \cdot)$.

MEGOLDÁS.

- (a) izomorfak, pl. $u \mapsto \bar{3}, v \mapsto \bar{0}, x \mapsto \bar{1}, y \mapsto \bar{2}$;
- (b) nem izomorfak, egyik cancellatív, a másik nem;
- (c) nem izomorfak, egyikben minden elem inverze önmaga, a másikban nem;
- (d) izomorfak, pl. $a \mapsto \text{id}, b \mapsto (12)(34), c \mapsto (13)(24), d \mapsto (14)(23)$;
- (e) izomorfak, pl. $\text{id} \mapsto \text{id}, a \mapsto (123), t \mapsto (12)$;
- (f) nem izomorfak, D_4 nem kommutatív csoport, $\mathbb{Z}_{15}^*$ Abel-csoport;
- (g) nem izomorfak, $\mathbb{Z}_{13}^*$ ciklikus csoport, A_4 nem;
- (h) izomorfak, mindkettő ciklikus csoport, pl. $\mathbb{Z}_{13}^* = [\bar{7}], \mathbb{Z}_{12} = [\bar{1}], \bar{7}^k \mapsto k \cdot \bar{1} (k = 0, 1, \dots, 12)$;
- (i) nem izomorfak, E_8 ciklikus csoport, $\mathbb{Z}_{15}^*$ nem ciklikus.

1.12. Feladat. Egészítse ki az alábbi műveletábrázolókat úgy, hogy csoportokat kapjon (az asszociativitást nem kell ellenőrizni), és állapítsa meg, melyik nevezetes csoporttal izomorfak.

- (a)

$\cdot$	a	b	c
a		a	
b			
c			a
- (b)

$\cdot$	a	b	c	d
a				
b		c		
c			c	
d				c
- (c)

$\cdot$	a	b	c	d
a				
b		d		
c			c	
d				c

MEGOLDÁS.

- (a)

$\cdot$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	c
c	c	b	a
- (b)

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	c	d
c	c	b	a	d
d	d	b	a	c
- (c)

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	c	d
c	c	b	a	d
d	d	b	a	c
- (a) $\mathbb{Z}_3$, (b) V , (c) $\mathbb{Z}_4$.

1.13. Feladat. Végezzük el a megadott G csoportban a kijelölt műveleteket. (S_n esetén adjuk meg idegen ciklusok szorzataként a permutációt, D_n -nél pedig a^k vagy $a^k t$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) alakban adjuk meg a műveletek eredményét.)

- (a) $G = S_7$, $((1342)(237))^{126}(3476)^{-1}$;
 (b) $G = S_8$, $(345)((7451)^{-1}(4256))^{83}$;
 (c) $G = D_8$, $a^{22}t \cdot a^{12}$, $(a^3ta)^4$
 (d) $G = D_{15}$, $a^{23}t \cdot a^{18}$, $(at \cdot a^{-5}t)^{-3}$;
 (e) $G = \mathbb{Z}_{17}$, $\bar{9} + \bar{12}$, $\bar{9} - \bar{12}$;
 (f) $G = \mathbb{Z}_{15}^*$, $\bar{2} \cdot \bar{11}$, $\frac{\bar{8}}{\bar{11}}$;
 (g) $G = \mathbb{Z}_{13}^*$, $\bar{6} \cdot \bar{11}$, $\frac{\bar{4}}{\bar{3}}$.

MEGOLDÁS.

- (a) (3674) ;
 (b) (3617425) ;
 (c) a^2t, id ;
 (d) a^5t, a^{12} ;
 (e) $\bar{4}, \bar{14}$;
 (f) $\bar{7}, \bar{13}$;
 (g) $\bar{1}, \bar{10}$.

1.14. Feladat. Határozzuk meg a G csoport A részhalmaza által generált részcsoportot.

- (a) $G = \mathbb{Z}_4$, $A = \{\bar{2}\}$; (b) $G = \mathbb{Z}_4$, $A = \{\bar{3}\}$; (c) $G = \mathbb{Z}_6$, $A = \{\bar{2}\}$;
 (d) $G = \mathbb{Z}_{12}$, $A = \{\bar{8}, \bar{10}\}$; (e) $G = \mathbb{Q}$, $A = \mathbb{N}$; (f) $G = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $A = \mathbb{Q}^-$;
 (g) $G = \mathbb{Z}_{15}^*$, $A = \{\bar{2}, \bar{11}\}$; (h) $G = D_{12}$, $A = \{a^3, a^2t\}$; (i) $G = S_4$, $A = \{(123)\}$;
 (j) $G = \mathbb{Z}_{28}^*$, $A = \{\bar{25}, \bar{27}\}$; (k) $G = D_{10}$, $A = \{a^4, a^5t\}$; (l) $G = \mathbb{C}^*$, $A = \{i, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\}$.

MEGOLDÁS.

- (a) $\{\bar{0}, \bar{2}\} \cong \mathbb{Z}_2$; (b) $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\} = \mathbb{Z}_4$; (c) $\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} \cong \mathbb{Z}_3$;
 (d) $\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}\} \cong \mathbb{Z}_6$; (e) $\mathbb{Z}$; (f) $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$;
 (g) $\mathbb{Z}_{15}^*$; (h) $\{\text{id}, a^3, a^6, a^9, a^2t, a^5t, a^8t, a^{11}t\} \cong D_4$; (i) $\{\text{id}, (123), (132)\} \cong \mathbb{Z}_3$;
 (j) $\{\bar{1}, \bar{3}, \bar{9}, \bar{27}, \bar{25}, \bar{19}\} = \bar{3}$; (k) $\{\text{id}, a^2, a^4, \dots, a^8, at, a^3t, \dots, a^9t\} \cong D_5$; (l) $E_{12} \cong \mathbb{Z}_{12}$.

1.15. Feladat. Legyen G csoport, H részcsoport és $x, y \in G$. Határozzuk meg az x elem H szerinti baloldali mellékosztályát, és döntsük el, hogy eleme-e ennek a mellékosztálynak az y elem.

- (a) $G = \mathbb{Z}_6$, $H = \{\bar{3}\}$, $x = \bar{1}$, $y = \bar{2}$;
 (b) $G = \mathbb{Z}$, $H = \{3k : k \in \mathbb{Z}\}$, $x = 2$, $y = -4$;
 (c) $G = \mathbb{R}^2$, $H = \{(k, k) : k \in \mathbb{R}\}$, $x = (3, 4)$, $y = (-8, -7)$;
 (d) $G = \mathbb{Z}^2$, $H = \{(5k, -2k) : k \in \mathbb{Z}\}$, $x = (2, -1)$, $y = (17, -5)$;
 (e) $G = S_3$, $H = [(12)]$, $x = (123)$, $y = (23)$;
 (f) $G = D_4$, $H = [a]$, $x = t$, $y = a^2t$.

MEGOLDÁS.

- (a) $\bar{1} + H = \{\bar{1}, \bar{4}\}$, $\bar{2}$ nem eleme;
 (b) $2 + H = \{3k + 2 : k \in \mathbb{Z}\}$, $-4 = 3(-2) + 2$ eleme;
 (c) $(3, 4) + H = \{(x + 3, x + 4) : x \in \mathbb{R}\}$, $(-8, -7) = (-11 + 3, -11 + 4)$ eleme;
 (d) $(2, -1) + H = \{(5x + 2, -2x - 1) : x \in \mathbb{Z}\}$, $(17, -5)$ nem eleme;
 (e) $(123)H = \{(123), (23)\}$, (23) eleme;
 (f) $tH = \{t, at, a^2t, a^3t\}$, a^2t eleme.

1.16. Feladat. Melyek alkotnak gyűrűt, integritástartományt, testet az alábbiakban megadott algebraik közül?

- (a) $(\mathbb{N}; +; \cdot)$; (b) $(\mathbb{Z}; +; \cdot)$; (c) $(\mathbb{Q}; +; \cdot)$; (d) $(\mathbb{R}; +; \cdot)$
 (e) $(\mathbb{C}; +; \cdot)$; (f) $(\mathbb{R}^{2 \times 2}; +; \cdot)$; (g) $(\mathbb{C}^{3 \times 3}; +; \cdot)$; (h) $(\mathbb{Z}^{2 \times 2}; +; \cdot)$;
 (i) $(\mathbb{Z}_4; +; \cdot)$; (j) $(\mathbb{Z}_{13}; +; \cdot)$; (k) $(\mathbb{Z}[\text{i}]; +; \cdot)$.

MEGOLDÁS.

- (a) nem gyűrű; (b) integritástartomány; (c) test;
 (d) test; (e) test; (f) gyűrű;
 (g) gyűrű; (h) gyűrű; (i) gyűrű;
 (j) test; (k) integritástartomány.

1.17. Feladat. Végezzük el a következő műveleteket a $\mathbb{Z}_{17}$ testben.

- (a) $\overline{9} + \overline{12}$; (b) $\overline{2} \cdot \overline{11}$; (c) $\frac{\overline{2}}{\overline{9}}$; (d) $\overline{16}^{20}$.

MEGOLDÁS.

- (a) $\overline{4}$; (b) $\overline{5}$; (c) $\overline{4}$; (d) $\overline{1}$.

1.18. Feladat. Végezzük el a következő műveleteket a $\mathbb{Z}_{15}$ gyűrűben.

- (a) $\overline{8} + \overline{9}$; (b) $\overline{3} \cdot \overline{8}$; (c) $\frac{\overline{2}}{\overline{7}}$; (d) $\frac{\overline{1}}{\overline{5}}$; (e) $\overline{14}^{11}$.

MEGOLDÁS.

- (a) $\overline{2}$; (b) $\overline{9}$; (c) $\overline{11}$; (d) nem végezhető el; (e) $\overline{14}$.

SZORGALMI FELADATOK

1.19. Feladat. Határozzuk meg, hány olyan művelet definiálható az $A = \{a, b\}$ halmazon, amellyel A grupoidot, monoidot, csoportot alkot. (Két művelet különböző az A halmazon, ha a művelet táblázatuk nem egyezik meg.)

1.20. Feladat. Legyen az A halmaz n -elemű. Határozzuk meg, hány olyan művelet definiálható A -n, amellyel A grupoidot, kommutatív grupoidot, egységelemes grupoidot alkot. (Két művelet különböző az A halmazon, ha a művelet táblázatuk nem egyezik meg.)

1.21. Feladat. Tekintsük az $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \cdot)$ grupoidot, ahol $\cdot$ a szokásos leképezésszorzás. Legyen $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, x \mapsto 2x$. Keressünk olyan $\psi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ elemet, melyre $\varphi\psi = \text{id}_{\mathbb{N}}$, illetve olyat is, melyre $\psi\varphi = \text{id}_{\mathbb{N}}$.

1.22. Feladat. Igaz-e minden A nem üres halmaz és minden asszociatív $\circ: A \times A \rightarrow A$ művelet esetén, hogy ha minden $x, y \in A$ -ra teljesül az $x \circ y \circ y = x$ egyenlőség, akkor $\circ$ kommutatív?

1.23. Feladat. Igazoljuk, hogy minden véges félcsoportban van olyan elem, melynek a négyzete önmaga. (A félcsoport művelete szorzás a feladatban.)

1.24. Feladat. Igazoljuk, hogy ha egy csoport minden elemének az egységelem a négyzete, akkor a csoport kommutatív.

1.25. Feladat. Mutassuk meg, hogy ha egy véges csoport elemszáma páros, akkor a csoportban van másodrendű elem.

1.26. Feladat. Határozzuk meg, hogy hányféleképpen lehet definiálni a műveleteket az $A = \{a, b\}$ halmazon, hogy A a műveletekkel testet alkosson.

1.27. Feladat. Legyen S félcsoport, azt mondjuk, hogy

- létezik S -ben balegység, ha van olyan e elem, amire $ea = a$ minden $a \in S$ -re.
- minden elemnek van jobbinverze, ha minden $a \in S$ -re és e balegységre létezik egy olyan $a' \in S$, hogy $aa' = e$.

Adjunk meg egy olyan félcsoporthat, amiben végtelen sok baleyég létezik, és minden elemnek végtelen sok jobbinverze van (mindegyik baleyégre nézve).

1.28. Feladat. Legyen $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ véges Abel-csoport, és legyen $h = g_1 g_2 \cdots g_n$. Bizonyítsd be, hogy $h^2 = 1$.

1.29. Feladat. Legyen G páros rendű csoport. Bizonyítsd be, hogy G 2-rendű elemeinek száma páratlan.

1.30. Feladat. Hány eleme van a kocka mozgás-, illetve szimmetriacsoportjának?

1.31. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges p prímszám esetén a $\mathbb{C}^*$ csoportban részcsoportot alkot a következő halmaz: $E_{p^\infty} = \{u \in \mathbb{C}^* : \text{van olyan } k \in \mathbb{N}_0, \text{ amelyre } u^{p^k} = 1\}$.

1.32. Feladat. Igazolja, hogy a szabályos tetraéder szimmetriacsoportja izomorf az S_4 csoporttal.

1.33. Feladat. Igazolja, hogy S_n ($n \geq 2$) minden részcsoportjában vagy minden permutáció páros, vagy a permutációknak pontosan a fele páros.

1.34. Feladat. Adjon meg olyan végtelen Abel-csoportot és olyan végtelen nem Abel-féle csoportot is, amelynek minden eleme véges rendű. Van-e olyan csoport, amelynek véges sok végtelen rendű eleme van?

1.35. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy a $\mathbb{Q}$ csoport minden végesen generált részcsoportja ciklikus, és adjon meg olyan valódi részcsoportját, amely nem ciklikus.

1.36. Feladat. Mutassuk meg, hogy ha egy G csoport nem Abel-féle, de minden valódi részcsoportja Abel-féle, akkor G -nek van kételemű generátorrendszere.

1.37. Feladat. Mutassuk meg, hogy az A_4 csoportnak nincs 6-rendű részcsoportja.

1.38. Feladat. Tegyük fel, hogy $g_1, \dots, g_n$ generátorrendszere a G csoportnak, és $h_1, \dots, h_n$ egy H csoport tetszőleges elemei. Mutassuk meg, hogy legfeljebb egy olyan $\varphi: G \rightarrow H$ homomorfizmus létezik, amelyre $\varphi(g_i) = h_i$ teljesül minden i -re.

1.39. Feladat. Legyen S egy félcsoport, amire teljesül, hogy létezik S -ben baleyég és minden elemnek van balinverze (ld. 1.27. Feladat). Bizonyítsuk be, hogy S csoport.

1.40. Feladat. Melyik nevezetes csoporttal izomorf a kocka mozgáscsoportja?

1.41. Feladat. Igazolja, hogy egy n ($n \geq 2$) hosszúságú ciklus nem írható fel $(n-1)$ -nél kevesebb transzpozíció szorzataként.

1.42. Feladat. Adjon meg olyan csoportot és benne két olyan másodrendű elemet, amelyek szorzatának rendje végtelen.

1.43. Feladat. Bizonyítsd be, hogy az E_{p^∞} csoport (ld. 1.31. Feladat) minden valódi részcsoportja ciklikus.

1.44. Feladat. Igazoljuk, hogy egy csoport akkor és csak akkor véges, ha véges sok részcsoportja van.

1.45. Feladat. Igazoljuk, hogy az S_n ($n \geq 2$) csoportot generálják az $(1\ 2)$ és $(1\ 2\ \dots\ n)$ permutációk.

1.46. Feladat. Igazoljuk, hogy az A_n ($n \geq 3$) csoportot generálják az $(1\ 2\ k)$ ($3 \leq k \leq n$) alakú ciklusok.

1.47. Feladat. Van-e olyan köbszám, ami 174443752266818590516662299-re végződik?

Loopnak nevezünk egy olyan $(M, \star)$ grupoidot, amelynek

- van (kétoldali) egységeleme, azaz létezik olyan $e \in M$, hogy minden $a \in M$ -re $e \star a = a \star e = a$ teljesül (láttuk, hogy ekkor valójában e egyértelmű), és
- minden $a, b \in M$ elemekre *egyértelműen* létezik olyan $x, y \in M$, hogy $a \star x = y \star a = b$.

(Vagyis lényegében egy loop egy csoport asszociativitás nélkül.)

1.48. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy minden legfeljebb 4 elemű loop csoport.

1.49. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy minden 5 elemű kommutatív loop csoport.