
ALGERBA ÉS SZÁMELMÉLET

MBNK13G

1. FELADATSOR

MŰVELETEK ÉS ALGEBRÁK

Jelölje $\mathbb{Z}$ az egész számok halmazát, $\mathbb{N}$ a pozitív egészek halmazát, $\mathbb{N}_0$ a nem negatív egészek halmazát, $\mathbb{Q}$ a racionális számok halmazát, $\mathbb{R}$ a valós számok halmazát, $\mathbb{R}^+$ a pozitív valós számok halmazát, $\mathbb{C}$ a komplex számok halmazát, $\mathbb{Z}_n$ a modulo n maradékosztályok halmazát, $\mathbb{Z}_n^*$ a modulo n redukált maradékosztályok halmazát, $\mathbb{R}^n$ az n komponensű valós vektorok halmazát, $\mathbb{R}^{m \times n}$ az $m \times n$ -es valós mátrixok halmazát, $\text{GL}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathbb{R}^{n \times n} : |M| \neq 0\}$, azaz az $n \times n$ -es invertálható valós mátrixok halmazát, továbbá B^A az A halmazból B halmazba menő leképezések halmazát jelöli. Valamint tetszőleges pozitív n egész esetén jelölje S_n az $\{1, \dots, n\}$ halmaz összes permutációinak halmazát, D_n az n -edfokú diédercsoportot, E_n pedig az n -edik komplex egységgyökök halmazát.

1.1. Feladat. Művelet-e

- (a) az S_n halmazon a szorzás;
- (b) az összeadás a 3-jegyű pozitív egész számok halmazán;
- (c) az osztás a $\mathbb{Q}$ halmazon;
- (d) $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ halmazon a mátrixok szorzása.
- (e) $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ halmazon a mátrixok összeadása.
- (f) az összeadás az $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}^+\}$ halmazon.
- (g) a szorzás az $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}^+\}$ halmazon.
- (h) az összeadás a $\mathbb{Z}_4$ halmazon.
- (i) az összeadás a $\{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}\}$ halmazon, ahol $\bar{0}, \bar{3}, \bar{6} \in \mathbb{Z}_9$.

1.2. Feladat. Készítsük el az alábbi grupoidok művelet tábláját, és ennek alapján állapítsuk meg, hogy melyik grupoid kommutatív, melyekben van zéruselem, illetve egységelem. Az egységelemes grupoidokban határozzuk meg, hogy mely elemeknek van inverze.

- (a) $(S_2; \cdot)$;
- (b) $(\{-1, 0, 1\}; \cdot)$;
- (c) $(\{-1, 0, 1\}; \max)$;
- (d) $(\{a, b, c\}; \circ)$, ahol $x \circ y = y$.

1.3. Feladat. Az alábbi művelet táblázatok alapján döntsük el, hogy kommutatív-e, kancellatív-e a művelet, van-e a grupoidban zéruselem, illetve egységelem? Ha van egységelem, akkor mely elemeknek van inverze?

	$*$	a	b	c	d		$*$	a	b	c	d
	a	a	a	a	a		a	a	b	c	d
(a)	b	a	b	c	d	(b)	b	b	c	a	a
	c	b	c	b	b		c	c	a	b	a
	d	d	d	a	a		d	d	d	d	d

1.4. Feladat. Vizsgáljuk meg, hogy a következők grupoidok-e és közülük melyek félcsoportok, melyek monoidok, melyek csoportok, és melyek Abel-csoportok.

- (a) $(\mathbb{N}; +)$;
- (b) $(\mathbb{N}_0; +)$;
- (c) $(\mathbb{Z}; +)$;
- (d) $(\mathbb{Q}; +)$;
- (e) $(S_4; \cdot)$;
- (f) $(\mathbb{Z}; \cdot)$;
- (g) $(\mathbb{Q}; \cdot)$;
- (h) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}; \cdot)$;
- (i) $(\mathbb{R}^+; \cdot)$;
- (j) $(A^A; \cdot)$;
- (k) $(\mathbb{R}^{2 \times 2}; +)$;
- (l) $(\mathbb{R}^{2 \times 2}; \cdot)$;
- (m) $(\mathbb{Z}; -)$;
- (n) $(\text{GL}_n(\mathbb{R}); \cdot)$;
- (o) $(\mathbb{C}; \cdot)$;
- (p) $(\mathbb{R}^4; +)$;
- (q) $(\mathbb{Z}_6; \cdot)$;
- (r) $(\mathbb{Z}_6 \setminus \{\bar{0}\}; \cdot)$;
- (s) $(\mathcal{P}(\{a, b\}); \cap)$.

1.5. Feladat. Az alábbi állítások közül melyek érvényesek tetszőleges csoport minden a, b, x, y elemére?

- (a) Ha $a^{-1} = b^{-1}$, akkor $a = b$.
 (b) Ha $xa = ay$, akkor $x = y$.
 (c) Ha $abx = 1$, akkor $x = a^{-1}b^{-1}$.
 (d) Ha $(ab)^2 = a^2b^2$, akkor $ab = ba$.

1.6. Feladat. Határozzuk meg a G csoportban a megadott elem rendjét.

- (a) $G = GL_2(\mathbb{R})$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$;
 (b) $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, i ;
 (c) $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$;
 (d) $G = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, -2 ;
 (e) $G = S_8$, $(1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6\ 7)$;
 (f) $G = S_5$, $(1\ 2\ 4\ 5)(2\ 3\ 4)$;
 (g) $G = \mathbb{Z}_6$, $\bar{2}$;
 (h) $G = \mathbb{Z}_4$, $\bar{3}$;
 (i) $G = \mathbb{Z}_9^*$, $\bar{4}$;
 (j) $G = \mathbb{Z}_{12}^*$, $\bar{5}$;
 (k) $G = D_4$, a^3t ;
 (l) $G = D_{24}$, a^9 .

1.7. Feladat. Adjunk meg n -edrendű elemet az alábbi csoportokban (ha létezik).

- (a) $\mathbb{Q}^*$, $n = 3$; (b) $\mathbb{Z}_{12}$, $n = 3$; (c) D_6 , $n = 3$; (d) S_5 , $n = 6$
 (e) $\mathbb{Q}^*$, $n = 2$; (f) $\mathbb{Z}_{15}^*$, $n = 4$; (g) D_5 , $n = 2$; (h) A_4 , $n = 4$
 (i) $\mathbb{C}^*$, $n = 12$; (j) $\mathbb{Z}_{15}^*$, $n = 4$; (k) D_6 , $n = 4$; (l) A_6 , $n = 4$.

1.8. Feladat. Hány n -edrendű elem van az alábbi csoportokban?

- (a) $\mathbb{C}^*$, $n = 12$; (b) $\mathbb{Z}_{100}$, $n = 10$; (c) D_{24} , $n = 2$; (d) S_4 , $n = 2$;
 (e) S_4 , $n = 6$; (f) $\mathbb{Z}_9^*$, $n = 3$; (g) D_{24} , $n = 5$; (h) $\mathbb{Q}$, $n = 2$.

1.9. Feladat. Döntsük el, hogy a G csoportban részcsoportot alkot-e a megadott H részhalmaz.

- (a) $G = S_4$, $H = \{\text{id}, (1\ 3), (2\ 4), (1\ 3)(2\ 4)\}$; (b) $G = D_6$, $H = \{\text{id}, t, a^2, a^2t\}$;
 (c) $G = \mathbb{Z}$, $H = \mathbb{N}$; (d) $G = \mathbb{C}^*$, $H = (\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}, \cdot)$;
 (e) $G = S_5$, $H = \{\text{id}, (1\ 3\ 5), (1\ 5\ 3)\}$; (f) $G = \mathbb{Z}_6$, $H = \mathbb{Z}_6^*$.

1.10. Feladat. Az $\mathbf{A} = (\{0, 1, 2\}; \circ)$, $\mathbf{B} = (\{a, b, c\}; *)$, $\mathbf{C} = (\{p, q, r\}; \square)$ és $\mathbf{D} = (\{-1, 0, 1\}; \cdot)$ grupoidok műveletábrázatai az alábbiak. Döntsük el, hogy mely grupoidok izomorfak. (Adjuk meg az izomorfizmusokhoz tartozó leképezést.)

$\circ$	0	1	2	$*$	a	b	c	$\square$	p	q	r	$\cdot$	-1	0	1
0	0	1	2	a	a	b	c	p	p	p	p	-1	1	0	-1
1	1	0	2	b	b	c	a	q	p	q	r	0	0	0	0
2	2	2	2	c	c	a	b	r	p	r	q	1	-1	0	1

1.11. Feladat. Döntsük el izomorfak-e a következő grupoidok. A válaszokat indokoljuk!

- (a)

$\cdot$	u	v	x	y
u	y	u	v	x
v	u	v	x	y
x	v	x	y	u
y	x	y	u	v

 és $(\mathbb{Z}_4; +)$;

- (b)

$\circ$	α	β	γ	δ
α	δ	β	α	γ
β	β	β	β	β
γ	α	β	γ	δ
δ	γ	β	δ	δ

 és $(\mathbb{Z}_5^*; \cdot)$;
- (c)

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

 és $(\{1, i, -1, -i\}; \cdot)$;
- (d)

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

 és $(\{\text{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}; \cdot)$;
- (e) D_3 és S_3 ;
- (f) D_4 és $(\mathbb{Z}_{15}^*; \cdot)$;
- (g) A_4 és $(\mathbb{Z}_{13}^*; \cdot)$;
- (h) $(\mathbb{Z}_{13}^*; \cdot)$ és $(\mathbb{Z}_{12}; +)$;
- (i) $(E_8; \cdot)$ és $(\mathbb{Z}_{13}^*; \cdot)$.

1.12. Feladat. Egészítse ki az alábbi műveletábrázolókat úgy, hogy csoportokat kapjon (az asszociativitást nem kell ellenőrizni), és állapítsa meg, melyik nevezetes csoporttal izomorfak.

- (a)

$\cdot$	a	b	c
a	a		
b			
c			a
- (b)

$\cdot$	a	b	c	d
a	a			
b		c		
c			c	
d				c
- (c)

$\cdot$	a	b	c	d
a	a			
b		d		
c			c	
d				c

1.13. Feladat. Végezzük el a megadott G csoportban a kijelölt műveleteket. (S_n esetén adjuk meg idegen ciklusok szorzataként a permutációt, D_n -nél pedig a^k vagy $a^k t$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) alakban adjuk meg a műveletek eredményét.)

- (a) $G = S_7$, $((1342)(237))^{126}(3476)^{-1}$;
- (b) $G = S_8$, $(345)((7451)^{-1}(4256))^{83}$;
- (c) $G = D_8$, $a^{22}t \cdot a^{12}$, $(a^3ta)^4$;
- (d) $G = D_{15}$, $a^{23}t \cdot a^{18}$, $(at \cdot a^{-5}t)^{-3}$;
- (e) $G = \mathbb{Z}_{17}$, $\bar{9} + \bar{12}$, $\bar{9} - \bar{12}$;
- (f) $G = \mathbb{Z}_{15}^*$, $\bar{2} \cdot \bar{11}$, $\frac{\bar{8}}{\bar{11}}$;
- (g) $G = \mathbb{Z}_{13}^*$, $\bar{6} \cdot \bar{11}$, $\frac{\bar{4}}{\bar{3}}$.

1.14. Feladat. Határozzuk meg a G csoport A részhalmaza által generált részcsoportot.

- (a) $G = \mathbb{Z}_4$, $A = \{\bar{2}\}$; (b) $G = \mathbb{Z}_4$, $A = \{\bar{3}\}$; (c) $G = \mathbb{Z}_6$, $A = \{\bar{2}\}$;
- (d) $G = \mathbb{Z}_{12}$, $A = \{\bar{8}, \bar{10}\}$; (e) $G = \mathbb{Q}$, $A = \mathbb{N}$; (f) $G = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $A = \mathbb{Q}^-$;
- (g) $G = \mathbb{Z}_{15}^*$, $A = \{\bar{2}, \bar{11}\}$; (h) $G = D_{12}$, $A = \{a^3, a^2t\}$; (i) $G = S_4$, $A = \{(123)\}$;
- (j) $G = \mathbb{Z}_{28}^*$, $A = \{\bar{25}, \bar{27}\}$; (k) $G = D_{10}$, $A = \{a^4, a^5t\}$; (l) $G = \mathbb{C}^*$, $A = \{i, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\}$.

1.15. Feladat. Legyen G csoport, H részcsoport és $x, y \in G$. Határozzuk meg az x elem H szerinti baloldali mellékosztályát, és döntsük el, hogy eleme-e ennek a mellékosztálynak az y elem.

- (a) $G = \mathbb{Z}_6$, $H = [\bar{3}]$, $x = \bar{1}$, $y = \bar{2}$;
- (b) $G = \mathbb{Z}$, $H = \{3k : k \in \mathbb{Z}\}$, $x = 2$, $y = -4$;
- (c) $G = \mathbb{R}^2$, $H = \{(k, k) : k \in \mathbb{R}\}$, $x = (3, 4)$, $y = (-8, -7)$;

- (d) $G = \mathbb{Z}^2$, $H = \{(5k, -2k) : k \in \mathbb{Z}\}$, $x = (2, -1)$, $y = (17, -5)$;
 (e) $G = S_3$, $H = [(12)]$, $x = (123)$, $y = (23)$;
 (f) $G = D_4$, $H = [a]$, $x = t$, $y = a^2t$.

1.16. Feladat. Melyek alkotnak gyűrűt, integritástartományt, testet az alábbiakban megadott algebraik közül?

- (a) $(\mathbb{N}; +; \cdot)$; (b) $(\mathbb{Z}; +; \cdot)$; (c) $(\mathbb{Q}; +; \cdot)$; (d) $(\mathbb{R}; +; \cdot)$
 (e) $(\mathbb{C}; +; \cdot)$; (f) $(\mathbb{R}^{2 \times 2}; +; \cdot)$; (g) $(\mathbb{C}^{3 \times 3}; +; \cdot)$; (h) $(\mathbb{Z}^{2 \times 2}; +; \cdot)$;
 (i) $(\mathbb{Z}_4; +; \cdot)$; (j) $(\mathbb{Z}_{13}; +; \cdot)$; (k) $(\mathbb{Z}[i]; +; \cdot)$.

1.17. Feladat. Végezzük el a következő műveleteket a $\mathbb{Z}_{17}$ testben.

$$(a) \bar{9} + \bar{12}; \quad (b) \bar{2} \cdot \bar{11}; \quad (c) \frac{\bar{2}}{\bar{9}}; \quad (d) \bar{16}^{20}.$$

1.18. Feladat. Végezzük el a következő műveleteket a $\mathbb{Z}_{15}$ gyűrűben.

$$(a) \bar{8} + \bar{9}; \quad (b) \bar{3} \cdot \bar{8}; \quad (c) \frac{\bar{2}}{\bar{7}}; \quad (d) \frac{\bar{1}}{\bar{5}}; \quad (e) \bar{14}^{11}.$$

SZORGALMI FELADATOK

1.19. Feladat. Határozzuk meg, hány olyan művelet definiálható az $A = \{a, b\}$ halmazon, amellyel A grupoidot, monoidot, csoportot alkot. (Két művelet különböző az A halmazon, ha a művelet táblázatuk nem egyezik meg.)

1.20. Feladat. Legyen az A halmaz n -elemű. Határozzuk meg, hány olyan művelet definiálható A -n, amellyel A grupoidot, kommutatív grupoidot, egységelemes grupoidot alkot. (Két művelet különböző az A halmazon, ha a művelet táblázatuk nem egyezik meg.)

1.21. Feladat. Tekintsük az $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \cdot)$ grupoidot, ahol $\cdot$ a szokásos leképezésszorzás. Legyen $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, x \mapsto 2x$. Keressünk olyan $\psi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ elemet, melyre $\varphi\psi = \text{id}_{\mathbb{N}}$, illetve olyat is, melyre $\psi\varphi = \text{id}_{\mathbb{N}}$.

1.22. Feladat. Igaz-e minden A nem üres halmaz és minden asszociatív $\circ: A \times A \rightarrow A$ művelet esetén, hogy ha minden $x, y \in A$ -ra teljesül az $x \circ y \circ y = x$ egyenlőség, akkor $\circ$ kommutatív?

1.23. Feladat. Igazoljuk, hogy minden véges félcsoporthban van olyan elem, melynek a négyzete önmagá. (A félcsoport művelete szorzás a feladatban.)

1.24. Feladat. Igazoljuk, hogy ha egy csoport minden elemének az egységelem a négyzete, akkor a csoport kommutatív.

1.25. Feladat. Mutassuk meg, hogy ha egy véges csoport elemszáma páros, akkor a csoportban van másodrendű elem.

1.26. Feladat. Határozzuk meg, hogy hányféleképpen lehet definiálni a műveleteket az $A = \{a, b\}$ halmazon, hogy A a műveletekkel testet alkosson.

1.27. Feladat. Legyen S félcsoport, azt mondjuk, hogy

- létezik S -ben balegység, ha van olyan e elem, amire $ea = a$ minden $a \in S$ -re.
- minden elemnek van jobbinverze, ha minden $a \in S$ -re és e balegységre létezik egy olyan $a' \in S$, hogy $aa' = e$.

Adjunk meg egy olyan félcsoporthot, amiben végtelen sok balegyég létezik, és minden elemnek végtelen sok jobbinverze van (mindegyik balegységre nézve).

1.28. Feladat. Legyen $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ véges Abel-csoport, és legyen $h = g_1 g_2 \cdots g_n$. Bizonyítsd be, hogy $h^2 = 1$.

1.29. Feladat. Legyen G páros rendű csoport. Bizonyítsd be, hogy G 2-rendű elemeinek száma páratlan.

1.30. Feladat. Hány eleme van a kocka mozgás-, illetve szimmetriacsoportjának?

1.31. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges p prímszám esetén a $\mathbb{C}^*$ csoportban részcsoportot alkot a következő halmaz: $E_{p^\infty} = \{u \in \mathbb{C}^* : \text{van olyan } k \in \mathbb{N}_0, \text{ amelyre } u^{p^k} = 1\}$.

1.32. Feladat. Igazolja, hogy a szabályos tetraéder szimmetriacsoportja izomorf az S_4 csoporttal.

- 1.33. Feladat.** Igazolja, hogy S_n ($n \geq 2$) minden részcsoporthjában vagy minden permutáció páros, vagy a permutációknak pontosan a fele páros.
- 1.34. Feladat.** Adjon meg olyan végtelen Abel-csoportot és olyan végtelen nem Abel-féle csoportot is, amelynek minden eleme véges rendű. Van-e olyan csoport, amelynek véges sok végtelen rendű eleme van?
- 1.35. Feladat.** Bizonyítsuk be, hogy a $\mathbb{Q}$ csoport minden végesen generált részcsoporthja ciklikus, és adjon meg olyan valódi részcsoporthját, amely nem ciklikus.
- 1.36. Feladat.** Mutassuk meg, hogy ha egy G csoport nem Abel-féle, de minden valódi részcsoporthja Abel-féle, akkor G -nek van kételemű generátorrendszere.
- 1.37. Feladat.** Mutassuk meg, hogy az A_4 csoportnak nincs 6 rendű részcsoporthja.
- 1.38. Feladat.** Tegyük fel, hogy $g_1, \dots, g_n$ generátorrendszere a G csoportnak, és $h_1, \dots, h_n$ egy H csoport tetszőleges elemei. Mutassuk meg, hogy legfeljebb egy olyan $\varphi: G \rightarrow H$ homomorfizmus létezik, amelyre $\varphi(g_i) = h_i$ teljesül minden i -re.
- 1.39. Feladat.** Legyen S egy félcsoport, amire teljesül, hogy létezik S -ben balegység és minden elemnek van balinverze (ld. 1.27. Feladat). Bizonyítsuk be, hogy S csoport.
- 1.40. Feladat.** Melyik nevezetes csoporttal izomorf a kocka mozgáscsoportja?
- 1.41. Feladat.** Igazolja, hogy egy n ($n \geq 2$) hosszúságú ciklus nem írható fel $(n-1)$ -nél kevesebb transzpozíció szorzataként.
- 1.42. Feladat.** Adjon meg olyan csoportot és benne két olyan másodrendű elemet, amelyek szorzatának rendje végtelen.
- 1.43. Feladat.** Bizonyítsd be, hogy az E_{p^∞} csoport (ld. 1.31. Feladat) minden valódi részcsoporthja ciklikus.
- 1.44. Feladat.** Igazoljuk, hogy egy csoport akkor és csak akkor véges, ha véges sok részcsoporthja van.
- 1.45. Feladat.** Igazoljuk, hogy az S_n ($n \geq 2$) csoportot generálják az $(1\ 2)$ és $(1\ 2\ \dots\ n)$ permutációk.
- 1.46. Feladat.** Igazoljuk, hogy az A_n ($n \geq 3$) csoportot generálják az $(1\ 2\ k)$ ($3 \leq k \leq n$) alakú ciklusok.
- 1.47. Feladat.** Van-e olyan köbszám, ami 174443752266818590516662299-re végződik?

Loopnak nevezünk egy olyan $(M, \star)$ grupoidot, amelynek

- van (kétoldali) egységeleme, azaz létezik olyan $e \in M$, hogy minden $a \in M$ -re $e \star a = a \star e = a$ teljesül (láttuk, hogy ekkor valójában e egyértelmű), és
- minden $a, b \in M$ elemekre *egyértelműen* létezik olyan $x, y \in M$, hogy $a \star x = y \star a = b$.

(Vagyis lényegében egy loop egy csoport asszociativitás nélkül.)

- 1.48. Feladat.** Bizonyítsuk be, hogy minden legfeljebb 4 elemű loop csoport.
- 1.49. Feladat.** Bizonyítsuk be, hogy minden 5 elemű kommutatív loop csoport.