

Van fogalmad?

fogalom = tartalom + terjedelem

Van fogalmad?

fogalom = tartalom + terjedelem

- tartalom: a fogalmat meghatározó tulajdonságok
- terjedelem: a fogalomhoz tartozó „dolgok”

Van fogalmad?

fogalom = tartalom + terjedelem

- tartalom: a fogalmat meghatározó tulajdonságok
- terjedelem: a fogalomhoz tartozó „dolgozok”

Példa

A **macska** fogalma:

Van fogalmad?

fogalom = tartalom + terjedelem

- tartalom: a fogalmat meghatározó tulajdonságok
- terjedelem: a fogalomhoz tartozó „dolgozok”

Példa

A **macska** fogalma:

- tartalom: állat, emlős, négylábú, szőrös, nyávog, dorombol, cuki, ...

Van fogalmad?

fogalom = tartalom + terjedelem

- tartalom: a fogalmat meghatározó tulajdonságok
- terjedelem: a fogalomhoz tartozó „dolgozok”

Példa

A **macska** fogalma:

- tartalom: állat, emlős, négylábú, szőrös, nyávog, dorombol, cuki, ...
- terjedelem:

Van fogalmad?

fogalom = tartalom + terjedelem

- tartalom: a fogalmat meghatározó tulajdonságok
- terjedelem: a fogalomhoz tartozó „dolgok”

Példa

A **macska** fogalma:

- tartalom: állat, emlős, négylábú, szőrös, nyávog, dorombol, cuki, ...
- terjedelem:



Matematikai modell

Kontextus:

1. objektumok egy G halmaza (németül Gegenstand)
2. tulajdonságok egy M halmaza (németül Merkmal)
3. minden $g \in G$ és $m \in M$ esetén meg van határozva, hogy g rendelkezik-e az m tulajdonsággal

Matematikai modell

Kontextus:

1. objektumok egy G halmaza (németül Gegenstand)
2. tulajdonságok egy M halmaza (németül Merkmal)
3. minden $g \in G$ és $m \in M$ esetén meg van határozva, hogy g rendelkezik-e az m tulajdonsággal

Példa

$$G = \{T, K, Ny\}, \quad M = \{f, d, g, h, l\}$$

	f	d	g	h	l
T		×		×	
K	×	×	×	×	
Ny	×			×	

Galois-kapcsolat: objektumok $\longleftrightarrow$ tulajdonságok

- objektumok egy X halmaza $\rightsquigarrow$ közös tulajdonságok X' halmaza
- tulajdonságok egy Y halmaza $\rightsquigarrow$ a megfelelő objektumok Y' halmaza

Galois-kapcsolat: objektumok $\longleftrightarrow$ tulajdonságok

- objektumok egy X halmaza $\rightsquigarrow$ közös tulajdonságok X' halmaza
- tulajdonságok egy Y halmaza $\rightsquigarrow$ a megfelelő objektumok Y' halmaza

Példa

	f	d	g	h	l
T		×		×	
K	×	×	×	×	
Ny	×			×	

Galois-kapcsolat: objektumok $\longleftrightarrow$ tulajdonságok

- objektumok egy X halmaza $\rightsquigarrow$ közös tulajdonságok X' halmaza
- tulajdonságok egy Y halmaza $\rightsquigarrow$ a megfelelő objektumok Y' halmaza

Példa

	f	d	g	h	l
T		×		×	
K	×	×	×	×	
Ny	×			×	

H

Galois-kapcsolat: objektumok $\longleftrightarrow$ tulajdonságok

- objektumok egy X halmaza $\rightsquigarrow$ közös tulajdonságok X' halmaza
- tulajdonságok egy Y halmaza $\rightsquigarrow$ a megfelelő objektumok Y' halmaza

Példa

	f	d	g	h	l
T		×		×	
K	×	×	×	×	
Ny	×			×	

$$H \rightsquigarrow H'$$

Galois-kapcsolat: objektumok $\longleftrightarrow$ tulajdonságok

- objektumok egy X halmaza $\rightsquigarrow$ közös tulajdonságok X' halmaza
- tulajdonságok egy Y halmaza $\rightsquigarrow$ a megfelelő objektumok Y' halmaza

Példa

	f	d	g	h	l
T		×		×	
K	×	×	×	×	
Ny	×			×	

$$H \rightsquigarrow H' \rightsquigarrow H''$$

Galois-kapcsolat: objektumok $\longleftrightarrow$ tulajdonságok

- objektumok egy X halmaza $\rightsquigarrow$ közös tulajdonságok X' halmaza
- tulajdonságok egy Y halmaza $\rightsquigarrow$ a megfelelő objektumok Y' halmaza

Példa

	f	d	g	h	l
T		×		×	
K	×	×	×	×	
Ny	×			×	

$$H \rightsquigarrow H' \rightsquigarrow H'' \rightsquigarrow H''' \rightsquigarrow \dots$$

Galois-kapcsolat: objektumok $\longleftrightarrow$ tulajdonságok

- objektumok egy X halmaza $\rightsquigarrow$ közös tulajdonságok X' halmaza
- tulajdonságok egy Y halmaza $\rightsquigarrow$ a megfelelő objektumok Y' halmaza

Példa

	f	d	g	h	l
T		×		×	
K	×	×	×	×	
Ny	×			×	

$$\begin{array}{ccccccc} H & \rightsquigarrow & H' & \rightsquigarrow & H'' & \rightsquigarrow & H''' & \rightsquigarrow & \dots \\ \hline \{T\} & & & & & & & & \end{array}$$

Galois-kapcsolat: objektumok $\longleftrightarrow$ tulajdonságok

- objektumok egy X halmaza $\rightsquigarrow$ közös tulajdonságok X' halmaza
- tulajdonságok egy Y halmaza $\rightsquigarrow$ a megfelelő objektumok Y' halmaza

Példa

	f	d	g	h	l
T		×		×	
K	×	×	×	×	
Ny	×			×	

$$\begin{array}{ccccccc} H & \rightsquigarrow & H' & \rightsquigarrow & H'' & \rightsquigarrow & H''' & \rightsquigarrow & \dots \\ \hline \{T\} & \rightsquigarrow & \{d, h\} & & & & & & \end{array}$$

Galois-kapcsolat: objektumok $\longleftrightarrow$ tulajdonságok

- objektumok egy X halmaza $\rightsquigarrow$ közös tulajdonságok X' halmaza
- tulajdonságok egy Y halmaza $\rightsquigarrow$ a megfelelő objektumok Y' halmaza

Példa

	f	d	g	h	l
T		×		×	
K	×	×	×	×	
Ny	×			×	

H	$\rightsquigarrow$	H'	$\rightsquigarrow$	H''	$\rightsquigarrow$	H'''	$\rightsquigarrow$	$\dots$
$\{T\}$	$\rightsquigarrow$	$\{d, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{T, K\}$				

Galois-kapcsolat: objektumok $\rightsquigarrow$ tulajdonságok

- objektumok egy X halmaza $\rightsquigarrow$ közös tulajdonságok X' halmaza
- tulajdonságok egy Y halmaza $\rightsquigarrow$ a megfelelő objektumok Y' halmaza

Példa

	f	d	g	h	l
T		×		×	
K	×	×	×	×	
Ny	×			×	

H	$\rightsquigarrow$	H'	$\rightsquigarrow$	H''	$\rightsquigarrow$	H'''	$\rightsquigarrow$	$\dots$
$\{T\}$	$\rightsquigarrow$	$\{d, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{T, K\}$	$\rightsquigarrow$	$\{d, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\dots$

Galois-kapcsolat: objektumok $\longleftrightarrow$ tulajdonságok

- objektumok egy X halmaza $\rightsquigarrow$ közös tulajdonságok X' halmaza
- tulajdonságok egy Y halmaza $\rightsquigarrow$ a megfelelő objektumok Y' halmaza

Példa

	f	d	g	h	l
T		×		×	
K	×	×	×	×	
Ny	×			×	

H	$\rightsquigarrow$	H'	$\rightsquigarrow$	H''	$\rightsquigarrow$	H'''	$\rightsquigarrow$	$\dots$
$\{T\}$	$\rightsquigarrow$	$\{d, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{T, K\}$	$\rightsquigarrow$	$\{d, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\dots$
$\{K, Ny\}$								

Galois-kapcsolat: objektumok $\longleftrightarrow$ tulajdonságok

- objektumok egy X halmaza $\rightsquigarrow$ közös tulajdonságok X' halmaza
- tulajdonságok egy Y halmaza $\rightsquigarrow$ a megfelelő objektumok Y' halmaza

Példa

	f	d	g	h	l
T		×		×	
K	×	×	×	×	
Ny	×			×	

H	$\rightsquigarrow$	H'	$\rightsquigarrow$	H''	$\rightsquigarrow$	H'''	$\rightsquigarrow$	$\dots$
$\{T\}$	$\rightsquigarrow$	$\{d, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{T, K\}$	$\rightsquigarrow$	$\{d, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\dots$
$\{K, Ny\}$	$\rightsquigarrow$	$\{f, h\}$						

Galois-kapcsolat: objektumok $\longleftrightarrow$ tulajdonságok

- objektumok egy X halmaza $\rightsquigarrow$ közös tulajdonságok X' halmaza
- tulajdonságok egy Y halmaza $\rightsquigarrow$ a megfelelő objektumok Y' halmaza

Példa

	f	d	g	h	l
T		×		×	
K	×	×	×	×	
Ny	×			×	

H	$\rightsquigarrow$	H'	$\rightsquigarrow$	H''	$\rightsquigarrow$	H'''	$\rightsquigarrow$	$\dots$
$\{T\}$	$\rightsquigarrow$	$\{d, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{T, K\}$	$\rightsquigarrow$	$\{d, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\dots$
$\{K, Ny\}$	$\rightsquigarrow$	$\{f, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{K, Ny\}$				

Galois-kapcsolat: objektumok $\longleftrightarrow$ tulajdonságok

- objektumok egy X halmaza $\rightsquigarrow$ közös tulajdonságok X' halmaza
- tulajdonságok egy Y halmaza $\rightsquigarrow$ a megfelelő objektumok Y' halmaza

Példa

	f	d	g	h	l
T		×		×	
K	×	×	×	×	
Ny	×			×	

H	$\rightsquigarrow$	H'	$\rightsquigarrow$	H''	$\rightsquigarrow$	H'''	$\rightsquigarrow$	$\dots$
$\{T\}$	$\rightsquigarrow$	$\{d, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{T, K\}$	$\rightsquigarrow$	$\{d, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\dots$
$\{K, Ny\}$	$\rightsquigarrow$	$\{f, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{K, Ny\}$	$\rightsquigarrow$	$\{f, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\dots$

Galois-kapcsolat: objektumok $\longleftrightarrow$ tulajdonságok

- objektumok egy X halmaza $\rightsquigarrow$ közös tulajdonságok X' halmaza
- tulajdonságok egy Y halmaza $\rightsquigarrow$ a megfelelő objektumok Y' halmaza

Példa

	f	d	g	h	l
T		×		×	
K	×	×	×	×	
Ny	×			×	

H	$\rightsquigarrow$	H'	$\rightsquigarrow$	H''	$\rightsquigarrow$	H'''	$\rightsquigarrow$	$\dots$
$\{T\}$	$\rightsquigarrow$	$\{d, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{T, K\}$	$\rightsquigarrow$	$\{d, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\dots$
$\{K, Ny\}$	$\rightsquigarrow$	$\{f, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{K, Ny\}$	$\rightsquigarrow$	$\{f, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\dots$
$\{f, d\}$								

Galois-kapcsolat: objektumok $\longleftrightarrow$ tulajdonságok

- objektumok egy X halmaza $\rightsquigarrow$ közös tulajdonságok X' halmaza
- tulajdonságok egy Y halmaza $\rightsquigarrow$ a megfelelő objektumok Y' halmaza

Példa

	f	d	g	h	l
T		×		×	
K	×	×	×	×	
Ny	×			×	

H	$\rightsquigarrow$	H'	$\rightsquigarrow$	H''	$\rightsquigarrow$	H'''	$\rightsquigarrow$	$\dots$
$\{T\}$	$\rightsquigarrow$	$\{d, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{T, K\}$	$\rightsquigarrow$	$\{d, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\dots$
$\{K, Ny\}$	$\rightsquigarrow$	$\{f, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{K, Ny\}$	$\rightsquigarrow$	$\{f, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\dots$
$\{f, d\}$	$\rightsquigarrow$	$\{K\}$						

Galois-kapcsolat: objektumok $\rightsquigarrow$ tulajdonságok

- objektumok egy X halmaza $\rightsquigarrow$ közös tulajdonságok X' halmaza
- tulajdonságok egy Y halmaza $\rightsquigarrow$ a megfelelő objektumok Y' halmaza

Példa

	f	d	g	h	l
T		×		×	
K	×	×	×	×	
Ny	×			×	

H	$\rightsquigarrow$	H'	$\rightsquigarrow$	H''	$\rightsquigarrow$	H'''	$\rightsquigarrow$	$\dots$
$\{T\}$	$\rightsquigarrow$	$\{d, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{T, K\}$	$\rightsquigarrow$	$\{d, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\dots$
$\{K, Ny\}$	$\rightsquigarrow$	$\{f, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{K, Ny\}$	$\rightsquigarrow$	$\{f, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\dots$
$\{f, d\}$	$\rightsquigarrow$	$\{K\}$	$\rightsquigarrow$	$\{f, d, g, h\}$				

Galois-kapcsolat: objektumok $\rightsquigarrow$ tulajdonságok

- objektumok egy X halmaza $\rightsquigarrow$ közös tulajdonságok X' halmaza
- tulajdonságok egy Y halmaza $\rightsquigarrow$ a megfelelő objektumok Y' halmaza

Példa

	f	d	g	h	l
T		×		×	
K	×	×	×	×	
Ny	×			×	

H	$\rightsquigarrow$	H'	$\rightsquigarrow$	H''	$\rightsquigarrow$	H'''	$\rightsquigarrow$	$\dots$
$\{T\}$	$\rightsquigarrow$	$\{d, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{T, K\}$	$\rightsquigarrow$	$\{d, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\dots$
$\{K, Ny\}$	$\rightsquigarrow$	$\{f, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{K, Ny\}$	$\rightsquigarrow$	$\{f, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\dots$
$\{f, d\}$	$\rightsquigarrow$	$\{K\}$	$\rightsquigarrow$	$\{f, d, g, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{K\}$	$\rightsquigarrow$	$\dots$

Galois-kapcsolat: objektumok $\longleftrightarrow$ tulajdonságok

- objektumok egy X halmaza $\rightsquigarrow$ közös tulajdonságok X' halmaza
- tulajdonságok egy Y halmaza $\rightsquigarrow$ a megfelelő objektumok Y' halmaza

Példa

	f	d	g	h	l
T		×		×	
K	×	×	×	×	
Ny	×			×	

H	$\rightsquigarrow$	H'	$\rightsquigarrow$	H''	$\rightsquigarrow$	H'''	$\rightsquigarrow$	$\dots$
$\{T\}$	$\rightsquigarrow$	$\{d, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{T, K\}$	$\rightsquigarrow$	$\{d, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\dots$
$\{K, Ny\}$	$\rightsquigarrow$	$\{f, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{K, Ny\}$	$\rightsquigarrow$	$\{f, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\dots$
$\{f, d\}$	$\rightsquigarrow$	$\{K\}$	$\rightsquigarrow$	$\{f, d, g, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{K\}$	$\rightsquigarrow$	$\dots$
$\{d, h\}$								

Galois-kapcsolat: objektumok $\rightsquigarrow$ tulajdonságok

- objektumok egy X halmaza $\rightsquigarrow$ közös tulajdonságok X' halmaza
- tulajdonságok egy Y halmaza $\rightsquigarrow$ a megfelelő objektumok Y' halmaza

Példa

	f	d	g	h	l
T		×		×	
K	×	×	×	×	
Ny	×			×	

H	$\rightsquigarrow$	H'	$\rightsquigarrow$	H''	$\rightsquigarrow$	H'''	$\rightsquigarrow$	$\dots$
$\{T\}$	$\rightsquigarrow$	$\{d, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{T, K\}$	$\rightsquigarrow$	$\{d, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\dots$
$\{K, Ny\}$	$\rightsquigarrow$	$\{f, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{K, Ny\}$	$\rightsquigarrow$	$\{f, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\dots$
$\{f, d\}$	$\rightsquigarrow$	$\{K\}$	$\rightsquigarrow$	$\{f, d, g, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{K\}$	$\rightsquigarrow$	$\dots$
$\{d, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{T, K\}$						

Galois-kapcsolat: objektumok $\rightsquigarrow$ tulajdonságok

- objektumok egy X halmaza $\rightsquigarrow$ közös tulajdonságok X' halmaza
- tulajdonságok egy Y halmaza $\rightsquigarrow$ a megfelelő objektumok Y' halmaza

Példa

	f	d	g	h	l
T		×		×	
K	×	×	×	×	
Ny	×			×	

H	$\rightsquigarrow$	H'	$\rightsquigarrow$	H''	$\rightsquigarrow$	H'''	$\rightsquigarrow$	$\dots$
$\{T\}$	$\rightsquigarrow$	$\{d, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{T, K\}$	$\rightsquigarrow$	$\{d, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\dots$
$\{K, Ny\}$	$\rightsquigarrow$	$\{f, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{K, Ny\}$	$\rightsquigarrow$	$\{f, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\dots$
$\{f, d\}$	$\rightsquigarrow$	$\{K\}$	$\rightsquigarrow$	$\{f, d, g, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{K\}$	$\rightsquigarrow$	$\dots$
$\{d, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{T, K\}$	$\rightsquigarrow$	$\{d, h\}$				

Galois-kapcsolat: objektumok $\rightsquigarrow$ tulajdonságok

- objektumok egy X halmaza $\rightsquigarrow$ közös tulajdonságok X' halmaza
- tulajdonságok egy Y halmaza $\rightsquigarrow$ a megfelelő objektumok Y' halmaza

Példa

	f	d	g	h	l
T		×		×	
K	×	×	×	×	
Ny	×			×	

H	$\rightsquigarrow$	H'	$\rightsquigarrow$	H''	$\rightsquigarrow$	H'''	$\rightsquigarrow$	$\dots$
$\{T\}$	$\rightsquigarrow$	$\{d, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{T, K\}$	$\rightsquigarrow$	$\{d, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\dots$
$\{K, Ny\}$	$\rightsquigarrow$	$\{f, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{K, Ny\}$	$\rightsquigarrow$	$\{f, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\dots$
$\{f, d\}$	$\rightsquigarrow$	$\{K\}$	$\rightsquigarrow$	$\{f, d, g, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{K\}$	$\rightsquigarrow$	$\dots$
$\{d, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{T, K\}$	$\rightsquigarrow$	$\{d, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{T, K\}$	$\rightsquigarrow$	$\dots$

Galois-kapcsolat: objektumok $\rightsquigarrow$ tulajdonságok

- objektumok egy X halmaza $\rightsquigarrow$ közös tulajdonságok X' halmaza
- tulajdonságok egy Y halmaza $\rightsquigarrow$ a megfelelő objektumok Y' halmaza

Példa

	f	d	g	h	l
T		×		×	
K	×	×	×	×	
Ny	×			×	

H	$\rightsquigarrow$	H'	$\rightsquigarrow$	H''	$\rightsquigarrow$	H'''	$\rightsquigarrow$	$\dots$
$\{T\}$	$\rightsquigarrow$	$\{d, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{T, K\}$	$\rightsquigarrow$	$\{d, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\dots$
$\{K, Ny\}$	$\rightsquigarrow$	$\{f, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{K, Ny\}$	$\rightsquigarrow$	$\{f, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\dots$
$\{f, d\}$	$\rightsquigarrow$	$\{K\}$	$\rightsquigarrow$	$\{f, d, g, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{K\}$	$\rightsquigarrow$	$\dots$
$\{d, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{T, K\}$	$\rightsquigarrow$	$\{d, h\}$	$\rightsquigarrow$	$\{T, K\}$	$\rightsquigarrow$	$\dots$

A fogalom fogalma

fogalom = (X, Y)

A fogalom fogalma

fogalom = (X, Y)

- X : terjedelem (objektumok)
- Y : tartalom (tulajdonságok)
- $X' = Y$ és $Y' = X$

A fogalom fogalma

fogalom = (X, Y)

- X : terjedelem (objektumok)
- Y : tartalom (tulajdonságok)
- $X' = Y$ és $Y' = X$

Ha (X, Y) fogalom, akkor X és Y **Galois-zárt** halmazok:

$$X'' = X \text{ és } Y'' = Y.$$

A fogalom fogalma

$$\text{fogalom} = (X, Y)$$

- X : terjedelem (objektumok)
- Y : tartalom (tulajdonságok)
- $X' = Y$ és $Y' = X$

Ha (X, Y) fogalom, akkor X és Y **Galois-zárt** halmazok:

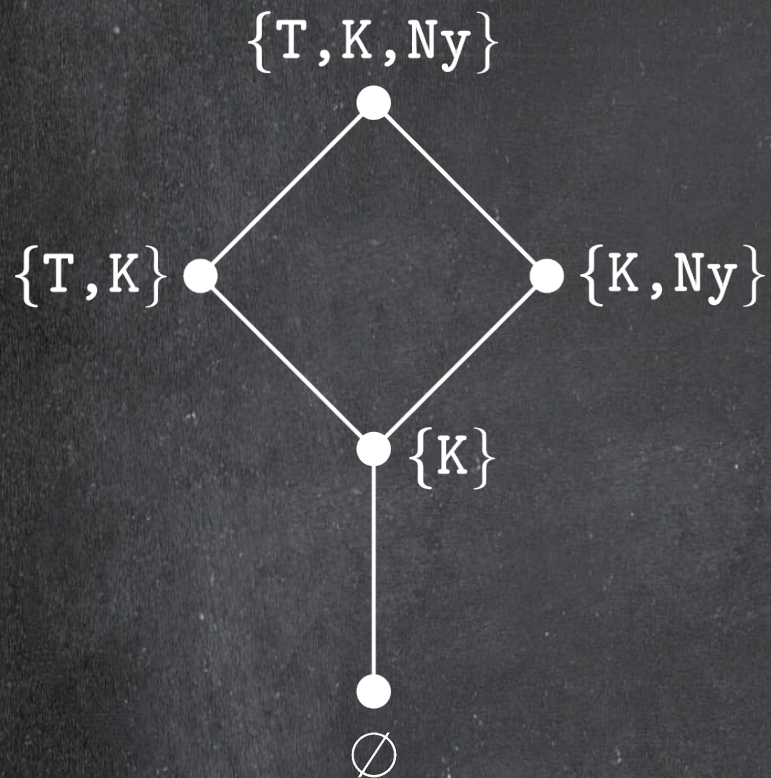
$$X'' = X \text{ és } Y'' = Y.$$

Példa

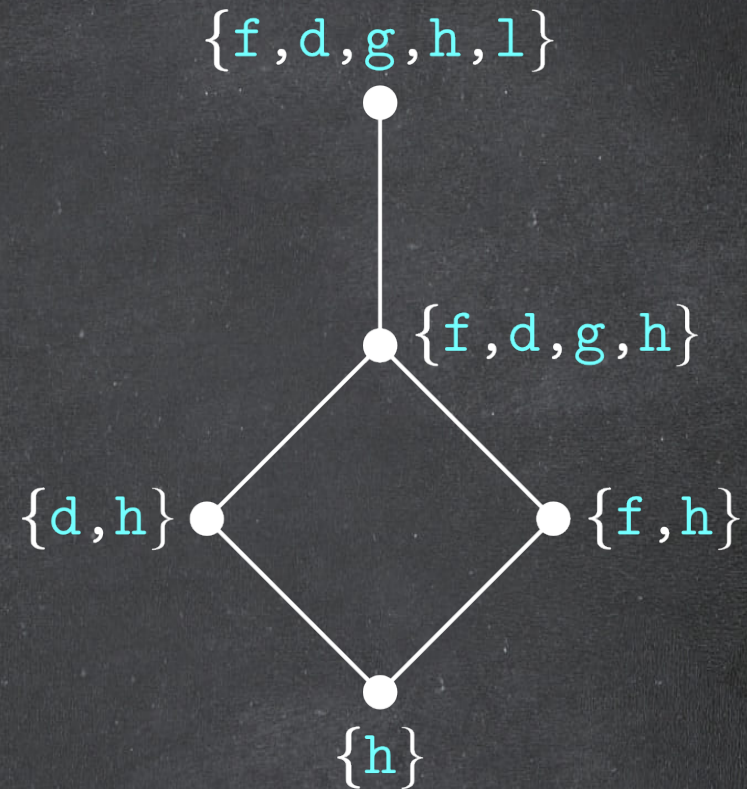
A mi kis példánkban mindössze 5 fogalom van:

1. $(\{\emptyset\}, \{f, d, g, h, l\})$
2. $(\{K\}, \{f, d, g, h\})$
3. $(\{T, K\}, \{d, h\})$
4. $(\{K, N_y\}, \{f, h\})$
5. $(\{T, K, N_y\}, \{h\})$

A zárt halmazok hálói



zárt objektumhalmazok



zárt tulajdonsághalmazok

A Galois-elmélet főtétele

Legyen $N \mid K$ Galois-bővítés és $G = \text{Gal}(N \mid K) = \text{Aut}_K N$.

Tekintsük az $I = \{(\alpha, \sigma) : \alpha\sigma = \alpha\} \subseteq N \times G$ „illeszkedési reláció” által indukált Galois-kapcsolatot:

$$\mathcal{P}(N) \rightarrow \mathcal{P}(G), \quad E \mapsto \{\sigma \in G \mid \forall \alpha \in E : \alpha\sigma = \alpha\} = E' = \text{Gal}(N \mid E);$$

$$\mathcal{P}(G) \rightarrow \mathcal{P}(N), \quad H \mapsto \{\alpha \in N \mid \forall \sigma \in H : \alpha\sigma = \alpha\} = H' = \text{Fix}(H).$$

(1) $\forall E \subseteq N : E'' = E \iff K \leq E \leq N$ (azaz $E \in \text{Sub}_K N$).

(2) $\forall H \subseteq G : H'' = H \iff H \leq G$ (azaz $H \in \text{Sub } G$).

(3) A $\text{Sub}_K N$ és $\text{Sub } G$ hálók között duális izomorfizmust létesítenek az

$$E \mapsto E' = \text{Gal}(N \mid E) \quad \text{és} \quad H \mapsto H' = \text{Fix}(H)$$

leképezések (amelyek egymás inverzei).

(4) Legyen $E \in \text{Sub}_K N$ és $H \in \text{Sub } G$ egymásnak megfelelő résztest és részcsoporthoz:

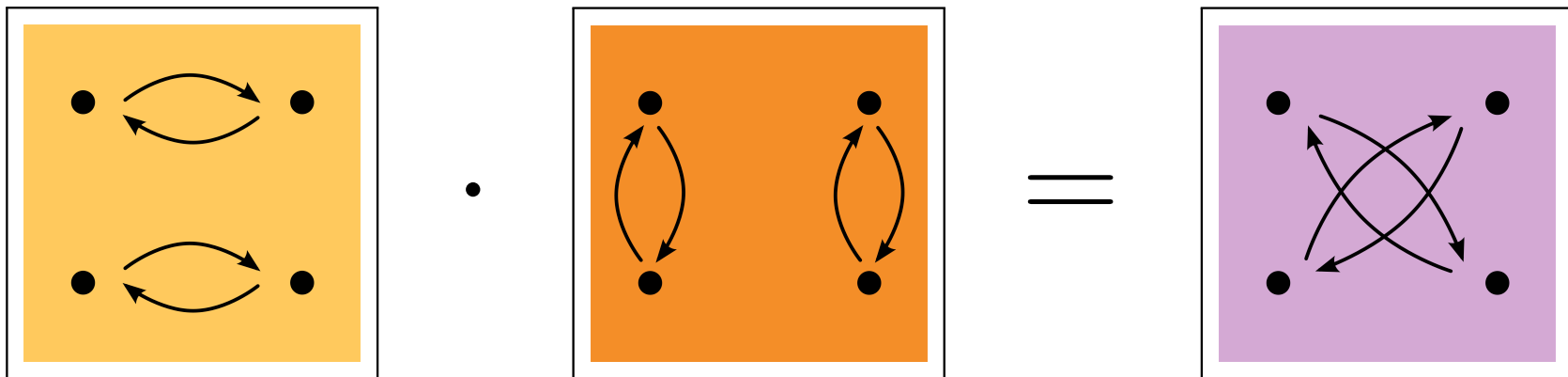
$$E = H' = \text{Fix}(H) \quad \text{és} \quad H = E' = \text{Gal}(N \mid E).$$

a) $[N : E] = |H|$ és $[E : K] = [G : H]$.

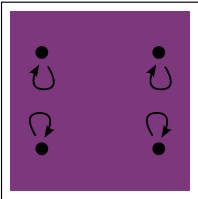
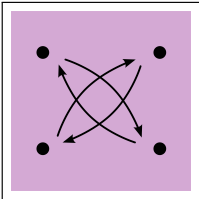
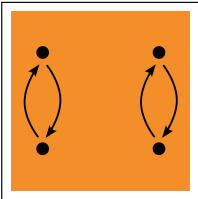
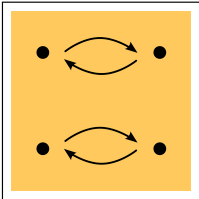
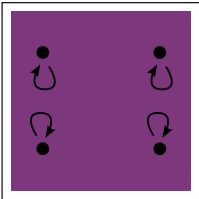
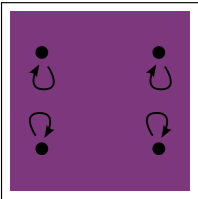
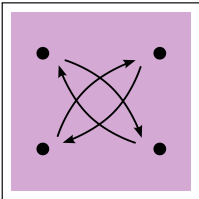
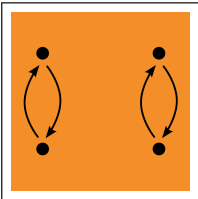
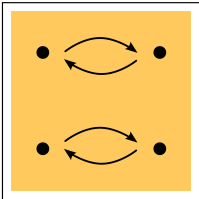
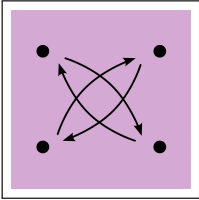
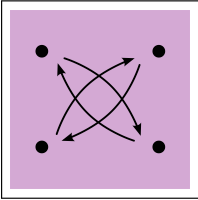
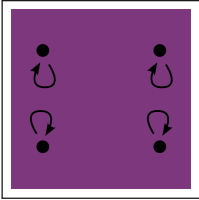
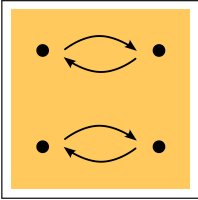
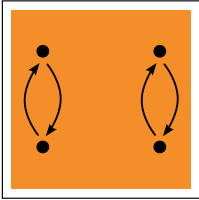
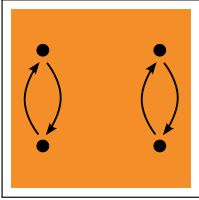
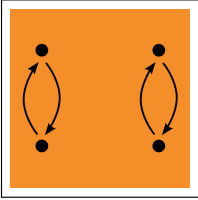
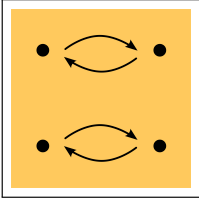
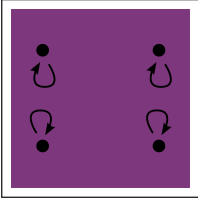
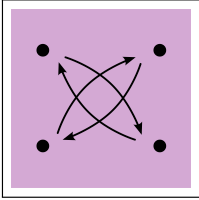
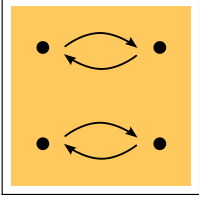
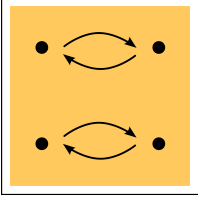
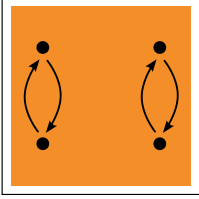
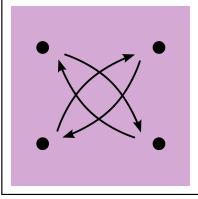
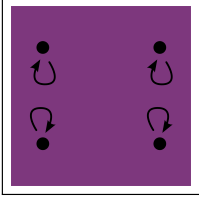
b) $E \mid K$ normális $\iff H \triangleleft G$, és ha ez teljesül, akkor $\text{Gal}(E \mid K) \cong G/H$, azaz

$$\text{Gal}(E \mid K) \cong \text{Gal}(N \mid K) / \text{Gal}(N \mid E).$$

szimmetriák szorzása:



a szimmetriák szorzótáblája (Galois-csoport):

.				
				
				
				
				

$$D = (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2$$

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3$$

$$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$$

$$\sigma_3 = x_1x_2x_3$$

$$\begin{aligned}
 D = & \textcolor{red}{x}_1^4 \textcolor{red}{x}_2^2 - 2x_1^4 x_2 x_3 + x_1^4 x_3^2 - 2x_1^3 x_2^3 + 2x_1^3 x_2^2 x_3 + 2x_1^3 x_2 x_3^2 - \\
 & 2x_1^3 x_3^3 + x_1^2 x_2^4 + 2x_1^2 x_2^3 x_3 - 6x_1^2 x_2^2 x_3^2 + 2x_1^2 x_2 x_3^3 + x_1^2 x_3^4 - \\
 & 2x_1 x_2^4 x_3 + 2x_1 x_2^3 x_3^2 + 2x_1 x_2^2 x_3^3 - 2x_1 x_2 x_3^4 + x_2^4 x_3^2 - 2x_2^3 x_3^3 + x_2^2 x_3^4
 \end{aligned}$$

$$D - \textcolor{red}{\sigma}_1^2 \textcolor{red}{\sigma}_2^2 = \dots$$

$$\begin{aligned}
 D - \sigma_1^2 \sigma_2^2 = & -4x_1^4 x_2 x_3 - 4x_1^3 x_2^3 - 6x_1^3 x_2^2 x_3 - 6x_1^3 x_2 x_3^2 - 4x_1^3 x_3^3 - \\
 & 6x_1^2 x_2^3 x_3 - 21x_1^2 x_2^2 x_3^2 - 6x_1^2 x_2 x_3^3 - 4x_1 x_2^4 x_3 - 6x_1 x_2^3 x_3^2 - \\
 & 6x_1 x_2^2 x_3^3 - 4x_1 x_2 x_3^4 - 4x_2^3 x_3^3
 \end{aligned}$$

$$D - \sigma_1^2 \sigma_2^2 + 4\sigma_1^3 \sigma_3 = \dots$$

$$D - \sigma_1^2 \sigma_2^2 + 4\sigma_1^3 \sigma_3 = -4x_1^3 x_2^3 + 6x_1^3 x_2^2 x_3 + 6x_1^3 x_2 x_3^2 - 4x_1^3 x_3^3 + 6x_1^2 x_2^3 x_3 + 3x_1^2 x_2^2 x_3^2 + 6x_1^2 x_2 x_3^3 + 6x_1 x_2^3 x_3^2 + 6x_1 x_2^2 x_3^3 - 4x_2^3 x_3^3$$

$$D - \sigma_1^2 \sigma_2^2 + 4\sigma_1^3 \sigma_3 + 4\sigma_2^3 = \dots$$

$$D - \sigma_1^2 \sigma_2^2 + 4\sigma_1^3 \sigma_3 + 4\sigma_2^3 = 18x_1^3 x_2^2 x_3 + 18x_1^3 x_2 x_3^2 + 18x_1^2 x_2^3 x_3 + 27x_1^2 x_2^2 x_3^2 + 18x_1^2 x_2 x_3^3 + 18x_1 x_2^3 x_3^2 + 18x_1 x_2^2 x_3^3$$

$$D - \sigma_1^2 \sigma_2^2 + 4\sigma_1^3 \sigma_3 + 4\sigma_2^3 - 18\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = \dots$$

$$D - \sigma_1^2 \sigma_2^2 + 4\sigma_1^3 \sigma_3 + 4\sigma_2^3 - 18\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = -27x_1^2 x_2^2 x_3^2$$

$$D - \sigma_1^2 \sigma_2^2 + 4\sigma_1^3 \sigma_3 + 4\sigma_2^3 - 18\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 + 27\sigma_3^2 = \dots$$

$$D - \sigma_1^2 \sigma_2^2 + 4\sigma_1^3 \sigma_3 + 4\sigma_2^3 - 18\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 + 27\sigma_3^2 = 0$$

Tétel

$$\begin{aligned} D &= (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2 \\ &= \sigma_1^2 \sigma_2^2 - 4\sigma_1^3 \sigma_3 - 4\sigma_2^3 + 18\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 - 27\sigma_3^2 \end{aligned}$$

Ha $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) = x^3 + px + q$, akkor a Viéte-formulák szerint

- $\sigma_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0$,
- $\sigma_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = p$,
- $\sigma_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = -q$,

és így

$$D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = -4\sigma_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^3 - 27\sigma_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^2 = -4p^3 - 27q^2.$$

Tétel

Az $x^3 + px + q$ polinom diszkriminánsa

$$-4p^3 - 27q^2 = -108 \left(\left(\frac{q}{2} \right)^2 + \left(\frac{p}{3} \right)^3 \right).$$

Az $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ harmadfokú egyenlet megoldóképlete:

$$x = -\frac{a}{3} + \sqrt[3]{\frac{-2a^3 + 9ab - 27c + \sqrt{(2a^3 - 9ab + 27c)^2 + 4(-a^2 + 3b)^3}}{54}} + \sqrt[3]{\frac{-2a^3 + 9ab - 27c - \sqrt{(2a^3 - 9ab + 27c)^2 + 4(-a^2 + 3b)^3}}{54}}$$

Forrás: <http://planetmath.org/encyclopedia/CubicFormula.html>

a megoldóképletek durva szerkezete:

másodfokú egyenlet

$$\sqrt{\quad} \sim \sqrt[2]{\quad}$$

harmadfokú egyenlet

$$\sqrt[3]{\sqrt{\quad}} \sim \sqrt[6]{\quad}$$

negyedfokú egyenlet

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{\quad}}}} \sim \sqrt[24]{\quad}$$

ötödfokú egyenlet

$$? \sim \sqrt[120]{\quad}$$

