Elméleti összefoglaló a Valószínűségszámítás kurzushoz

Véletlen kísérletek, események valószínűsége

Definíció. Egy véletlen kísérlet lehetséges eredményeit **kimeneteleknek** nevezzük. A kísérlet kimeneteleinek a halmaza az **eseménytér**. Jele: Ω.

Definíció. **Eseményeknek** nevezzük a kísérlet eredményére vonatkozó állításokat. Azt mondjuk, hogy egy esemény **bekövetkezik**, ha a kísérlet aktuális végrehajtásakor olyan kimenetelt kapunk, melyre ez az állítás igaz. Egy adott kísérlet esetén a hozzá kapcsolódó összes esemény halmazát **eseményalgebrának** nevezzük. Jele: $\mathcal{A}$. Két nevezetes esemény:

- Egy eseményt **biztos eseménynek** nevezünk, ha a kísérlet minden lehetséges kimenetele esetén bekövetkezik.
- Egy eseményt **lehetetlen eseménynek** nevezünk, ha a kísérletnek nincs olyan kimenetele, melyre bekövetkezne.

Definíció. Legyen $A_1, A_2, \dots$ eseményeknek egy véges vagy végtelen sorozata. Azt mondjuk, hogy ezek **páronként kizáróak**, ha a halmazok **diszjunktak**, tehát bármely kettőt kiválasztva azoknak üres a metszete. Kizáró események közül legfeljebb egy következhet be egyszerre, hiszen nincs olyan kimenetel, melyet két vagy több esemény is tartalmazna.

Definíció. Azt mondjuk, hogy a B esemény **maga után vonja** az A eseményt, ha $B \subset A$, tehát B minden eleme az A halmaznak is eleme. Ez azt jelenti, hogy ha a B esemény bekövetkezik, akkor az A esemény is feltétlenül bekövetkezik.

Definíció. Azt mondjuk, hogy egy $P : \mathcal{A} \to [0,1]$ függvény **valószínűség** vagy **valószínűségi mérték**, ha teljesíti az alábbi két tulajdonságot:

- A biztos esemény valószínűsége $P(\Omega) = 1$.
- **Additivitás**: Ha $A_1, A_2, \dots$ páronként kizáró eseményeknek egy véges vagy végtelen sorozata, akkor
$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$$

Az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ hármast **valószínűségi mezőnek** hívjuk. A véletlen kísérleteket mindig egy megfelelő valószínűségi mezővel írjuk le.

Tétel (A nagy számok Borel-féle törvénye)**.** Tekintsünk egy véletlen kísérletet, és legyen A egy tetszőleges esemény! Jelölje $k_n(A)$ az A esemény bekövetkezési gyakoriságát a kísérlet n alkalommal való független megismétlése során! Ekkor:

$$\frac{k_n(A)}{n} \to P(A)\,, \qquad n \to \infty\,.$$

Tétel. A valószínűség általános tulajdonságai:

- A lehetetlen esemény valószínűsége: $P(\emptyset) = 0$.
- A komplementer esemény valószínűsége: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
- **Kivonási szabály**: tetszőleges A és B esemény mellett $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$. Speciálisan, ha B maga után vonja az A eseményt, akkor $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$.
- **Monotonitás**: ha B maga után vonja az A eseményt, akkor $P(B) \leq P(A)$.
- **Szubadditivitás**: Ha $A_1, A_2, \ldots$ tetszőleges eseményeknek egy véges vagy végtelen sorozata, akkor
$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) \leq P(A_1) + P(A_2) + \ldots$$
- Két esemény uniójának a valószínűsége: tetszőleges A és B esemény mellett
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)\,.$$
- Három esemény uniójának a valószínűsége: tetszőleges A, B és C esemény mellett
$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$
- **Poincaré-formula** avagy **szitaformula**: tetszőleges $A_1, \ldots, A_n$ események mellett
$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n \\ \text{különböző egészek}}} P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k})$$

  A Poincaré-formula részletesebben:
$$\begin{aligned} P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = {} & P(A_1) + \ldots + P(A_n) \\ & - \text{ketteses metszetek valószínűsége} \\ & + \text{hármas metszetek valószínűsége} \\ & - \text{négyes metszetek valószínűsége} \\ & \qquad \vdots \\ & \pm P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) \end{aligned}$$

Diszkrét és geometriai valószínűségi mezők

Definíció. Azt mondjuk, hogy egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező **diszkrét valószínűségi mező**, ha a kísérletnek megszámlálhatóan sok kimenetele van, tehát a lehetséges kimenetelek egy véges vagy végtelen sorozatot alkotnak.

Tétel. Diszkrét valószínűségi mezőn egy A esemény valószínűsége: $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)$.

Definíció. Azt mondjuk, hogy egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező **klasszikus valószínűségi mező**, ha az eseménytérnek csak véges sok eleme van van, és minden kimenetelnek azonos a valószínűsége.

Tétel. Klasszikus valószínűségi mezőn egy tetszőleges A esemény valószínűsége

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{kedvező kimenetelek száma}}{\text{összes kimenetel száma}}.$$

Definíció. Azt mondjuk, hogy egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező **geometriai valószínűségi mező**, ha rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

- Az Ω eseménytér egy geometriai alakzat, és $0 < \mu(\Omega) < \infty$.
- **Egyenletességi hipotézis:** Az események valószínűsége egyenesen arányos az események mértékével. Tehát minden $A \subset \Omega$ eseményre

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{\text{kedvező hosszúság/terület/térfogat}}{\text{összes hosszúság/terület/térfogat}}$$

Feltételes valószínűség és események függetlensége

Definíció. Tegyük fel, hogy $P(B) > 0$. Ekkor az A eseménynek a B eseményre vett **feltételes valószínűsége**

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

A feltételes valószínűség megmutatja, hogy mennyi az A esemény valószínűsége, ha tudjuk, hogy a B esemény bekövetkezik.

Tétel. Legyen B pozitív valószínűségű esemény. Ekkor a B eseményre vett feltételes valószínűség valószínűségi mérték. Ebből következik, hogy a feltételes valószínűségre teljesülnek a valószínűség általános tulajdonságai.

Tétel (Láncszabály)**.** Legyen $A_1, \ldots, A_n$ olyan esemény, melyre $P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) > 0$. Ekkor

$$P\big(A_1 \cap \ldots \cap A_n\big) = P(A_1)P\big(A_2 \mid A_1\big)P\big(A_3 \mid A_1 \cap A_2\big) \ldots P\big(A_n \mid A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}\big)\,.$$

Tétel (Bayes-formula)**.** Legyen A és B pozitív valószínűségi esemény. Ekkor

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}\,.$$

Definíció. Azt mondjuk, hogy a $B_1, \ldots, B_n$ események **teljes eseményrendszert** alkotnak, ha teljesítik az alábbi tulajdonságokat:

- páronként kizáróak;
- együttesen lefedik az eseményteret;
- mindegyik eseménynek pozitív a valószínűsége.

Tétel (Teljes valószínűség tétele)**.** Legyen $B_1, \ldots, B_n$ teljes eseményrendszer, és tekintsünk egy tetszőleges A eseményt. Ekkor

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i) = P(A|B_1)P(B_1) + \ldots + P(A|B_n)P(B_n)\,.$$

Definíció. Legyenek A és B tetszőleges események. Azt mondjuk, hogy a két esemény **független** egymástól, ha $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Tétel (A függetlenség ekvivalens definíciói)**.** Ha A és B pozitív valószínűségű események, akkor az alábbiak ekvivalensek:

- A és B független egymástól.
- $P(A|B) = P(A)$.
- $P(B|A) = P(B)$.

Definíció. Legyen $A_1, A_2, \ldots$ eseményeknek egy véges vagy végtelen sorozata. Azt mondjuk, hogy az események **(teljesen) függetlenek**, ha közülük tetszőleges $A_{i_1}, \ldots, A_{i_n}$ különböző eseményeket kiválasztva

$$P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_n}) = P(A_{i_1}) \ldots P(A_{i_n})\,.$$

Valószínűségi változók

Definíció. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ egy tetszőleges véletlen kísérletet leíró valószínűségi mező! A $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ függvényeket **valószínűségi változóknak** vagy **véletlen változóknak** nevezzük. Az **értékkészlet** a értékeknek a halmaza. Jele: R_ξ.

Definíció. Egy ξ valószínűségi változó **diszkrét**, ha értékkészlete egy megszámlálható halmaz, tehát egy véges vagy végtelen sorozat: $R_\xi = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Egy diszkrét valószínűségi változó **valószínűségeloszlása** a lehetséges értékek valószínűségei:

$$p_{x_k} = P(\xi = x_k), \qquad x_k \in R_\xi.$$

Egy diszkrét valószínűségi változó **módusza** az az érték, melyet a legnagyobb valószínűséggel vesz fel. Ha több ilyen érték is létezik, akkor azok mind móduszok.

Tétel (Valószínűségeloszlások karakterizációja)**.** Egy $p_0, p_1, \ldots$ véges vagy végtelen elemszámú sorozat pontosan akkor egy nemnegatív egész értékű diszkrét valószínűségi változó eloszlása, ha teljesül az alábbi két feltétel:

- a sorozat elemei nemnegatívak: $p_1, p_2, \ldots \geq 0$;
- a sorozat elemeinek az összege 1: $p_0 + p_1 + \ldots = 1$.

Definíció. Egy ξ valószínűségi változó **folytonos**, ha létezik olyan $f_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, hogy tetszőleges $a \leq b$ valós számok esetén

$$P\big(a \leq \xi \leq b\big) = \int_a^b f_\xi(x)\,dx\,.$$

Ekkor az f_ξ függvényt a ξ változó **sűrűségfüggvényének** nevezzük.

Tétel (A sűrűségfüggvények karakterizációja)**.** Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor egy folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye, ha teljesíti az alábbi két feltételt:

- $f(x) \geq 0$ minden x valós szám esetén;
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Definíció. A **várható érték** definíciója:

- diszkrét valószínűségi változó esetén:

$$E(\xi) = \sum_{x \in R_\xi} xP(\xi = x) = x_1 P(\xi = x_1) + x_2 P(\xi = x_2) + \ldots$$

- folytonos valószínűségi változó esetén:

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)\,dx$$

Tétel (A nagy számok Kolmogorov-féle törvénye)**.** Legyen ξ tetszőleges valószínűségi változó, és legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots$ a ξ egymástól független megfigyelései! Ekkor

$$\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} \to E(\xi)\,, \qquad n \to \infty\,.$$

Definíció. Legyen ξ olyan valószínűségi változó, melynek véges a várható értéke!

- **Variancia** avagy **szórásnégyzet**: $\mathrm{Var}(\xi) = D^2(\xi) = E\big([\xi - E(\xi)]^2\big)$.
- **Szórás**: $D(\xi) = \sqrt{\mathrm{Var}(\xi)}$. Jelentése: a várható értéktől való átlagos eltérés.

Tétel. Legyen ξ valószínűségi változó, és legyen $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény! Ekkor a $h(\xi)$ transzformált változó várható értéke az alábbi módon határozható meg:

- Ha ξ diszkrét, akkor

$$E\big(h(\xi)\big) = \sum_{x \in R_\xi} xP(\xi = x) = h(x_1)P(\xi = x_1) + h(x_2)P(\xi = x_2) + \ldots$$

  Például: $E(\xi^2) = \sum_{x \in R_\xi} x^2 P(\xi = x)$.

- Ha ξ folytonos, és f_ξ a sűrűségfüggvénye, akkor

$$E\big(h(\xi)\big) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f_\xi(x)\, dx\,,$$

  Például: $E(\xi^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_\xi(x) dx$.

Tétel. Ha ξ olyan valószínűségi változó, melynek véges a várható értéke, akkor

$$\mathrm{Var}(\xi) = E(\xi^2) - \big(E(\xi)\big)^2.$$

Definíció. Egy tetszőleges ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye:

$$F_\xi : \mathbb{R} \to [0, 1], \qquad F_\xi(t) = P(\xi < t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Tétel.

- Egy ξ diszkrét változó eloszlásfüggvénye egy olyan lépcsős függvény, mely pontosan a változó lehetséges értékeiben ugrik, és egy $x \in R_\xi$ helyen az ugrás nagysága $P(\xi = x)$.
- Egy ξ folytonos változó eloszlásfüggvénye mindehol folytonos. Az eloszlásfüggvény és a sűrűségfüggvény kapcsolata:

$$F_\xi(t) = \int_{-\infty}^{t} f_\xi(x) dx \qquad \text{és} \qquad f_\xi(t) = F'_\xi(t).$$

Tétel. Legyen ξ tetszőleges valószínűségi változó, és legyen F_ξ az eloszlásfüggvénye! Ekkor tetszőleges $a \leq b$ valós számok esetén

$$P\big(a \leq \xi < b\big) = F_\xi(b) - F_\xi(a).$$

Speciálisan ha a ξ változó folytonos eloszlású, akkor

$$P\big(a \leq \xi \leq b\big) = P\big(a < \xi < b\big) = P\big(a < \xi \leq b\big) = F_\xi(b) - F_\xi(a).$$

Definíció. Legyen ξ tetszőleges valószínűségi változó, és legyen $\alpha \in (0,1)$. A q_α valós számot a ξ változó **$\boldsymbol{\alpha}$-kvantilisének** nevezzük, ha $P(\xi < q_\alpha) = \alpha$. Nevezetes kvantilisek:

- **Medián:** $q_{50\%}$
- **Alsó és felső kvartilis:** $q_{25\%}$ és $q_{75\%}$
- **Decilisek:** $q_{10\%}, q_{20\%}, \ldots, q_{90\%}$

Tétel (de Moivre–Laplace-tétel)**.** Legyen ξ binomiális eloszlású változó n és p paraméterrel, továbbá legyen η normális eloszlású változó $\mu = np$ és $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$ paraméterrel. Ekkor tetszőleges $a \leq b$ számok esetén

$$P\big(a \leq \xi \leq b\big) \approx P\big(a \leq \eta \leq b\big)\,,$$

és a közelítés annál pontosabb, minál nagyobb az n paraméter értéke.

Tétel (Centrális határeloszlás-tétel (CHT))**.** Legyen ξ tetszőleges valószínűségi változó, és legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots$ a ξ egymástól független megfigyelései! Legyen továbbá η normális eloszlású változó $\mu = nE(\xi)$ és $\sigma = \sqrt{n}D(\xi)$ paraméterrel! Ekkor tetszőleges $a \leq b$ valós számok esetén

$$P\big(a \leq \xi_1 + \ldots + \xi_n \leq b\big) \approx P\big(a \leq \eta \leq b\big)\,,$$

és a közelítés annál pontosabb, minél nagyobb az n értéke.

Definíció. Legyenek ξ és η diszkrét valószínűségi változók!

- A két változó **együttes eloszlása**: $P(\xi = x, \eta = y), \quad x \in R_\xi, \quad y \in R_\eta$.
- **Marginális eloszlások**: a két változó külön-külön vett eloszlása.
- Akkor mondjuk, hogy a két diszkrét valószínűségi változó **független** egymástól, ha tetszőleges $x \in R_\xi$ és $y \in R_\eta$ értékek esetén:

$$P(\xi = x, \eta = y) = P(\xi = x)P(\eta = y)\,.$$

A várható érték, a szórás és a kovariancia tulajdonságai

Definíció. Legyen ξ és η olyan valószínűségi változó, melynek véges a szórása. Ekkor a két változó **kovarianciája**:

$$\mathrm{Cov}(\xi, \eta) = E\Big(\big[\xi - E(\xi)\big]\big[\eta - E(\eta)\big]\Big)$$

A két változó **korrelációja** avagy **korrelációs együtthatója**:

$$\mathrm{corr}(\xi, \eta) = \frac{\mathrm{Cov}(\xi, \eta)}{D(\xi)D(\eta)}$$

Ha $\mathrm{corr}(\xi, \eta) = 0$, akkor azt mondjuk, hogy a két változó **korrelálatlan**.

Tétel (A várható érték és a szórás tulajdonságai)**.** Legyen ξ tetszőleges valószínűségi változó, és legyen a valós szám!

- Ha $P(\xi = a) = 1$, akkor $E(\xi) = a$ és $D(\xi) = 0$.
- Egy ξ valószínűségi változónak pontosan akkor 0 a szórása, ha a változó konstans, tehát $P(\xi = a) = 1$ valamilyen a valós számra.
- Konstansszoros: $E(a\xi) = aE(\xi)$ és $D^2(a\xi) = a^2 D^2(\xi)$.

Tétel. Legyenek $\xi, \eta, \xi_1, \ldots, \xi_m$ tetszőleges valószínűségi változók, és legyenek $a, b, a_1, \ldots, a_m$ tetszőleges valós számok! Ekkor teljesülnek az alábbi azonosságok.

- A változók összegének a várható értéke:

$$E\big(a_1\xi_1 + \ldots + a_m\xi_m\big) = a_1E(\xi_1) + \ldots + a_mE(\xi_m)\,.$$

- A változók összegének a varianciája: ha $\xi_1, \ldots, \xi_m$ függetlenek, akkor

$$D^2\big(a_1\xi_1 + \ldots + a_m\xi_m\big) = a_1^2 D^2(\xi_1) + \ldots + a_m^2 D^2(\xi_m)\,.$$

- Két változó összegének a varianciája az általános esetben:

$$D^2\big(a\xi + b\eta\big) = a^2D^2(\xi) + b^2D^2(\eta) + 2abD(\xi)D(\eta)\mathrm{corr}(\xi, \eta)\,.$$

Tétel (A kovariancia és a korreláció fontosabb tulajdonságai)**.** Legyenek ξ és η véges szórású valószínűségi változók!

- Lehetséges értékek: $\mathrm{Cov}(\xi, \eta) \in \mathbb{R}$, $\mathrm{corr}(\xi, \eta) \in [-1, 1]$.
- Szimmetria: $\mathrm{Cov}(\xi, \eta) = \mathrm{Cov}(\eta, \xi)$, $\mathrm{corr}(\xi, \eta) = \mathrm{corr}(\eta, \xi)$.
- $\mathrm{Cov}(\xi, \xi) = \mathrm{Var}(\xi)$.
- Ha változók függetlenek, akkor korrelálatlanok is, azaz $\mathrm{corr}(\xi, \eta) = 0$. Ennek megfordítása nem igaz, a korrelálatlanságból nem következik a függetlenség.