Gyakorló feladatok a Valószínűségszámítás kurzushoz

1. Kombinatorikus valószínűség

Házi feladatok

1.1. **a.** Három barátnő, Anna, Bori és Cili véletlenszerű sorrendben leül egymás mellé egy padra. Hány lehetséges kimenetele van a kísérletnek? Mennyi annak a valószínűsége, hogy Anna és Bori a pad két szélére kerül? Mennyi az esélye annak, hogy Anna és Cili egymás mellé kerül?

b. A három lányhoz csatlakozik Dóri és Emma is, és most már öten ülnek a padon. A sorrend továbbra is véletlenszerű. Most mennyi az esélye annak, hogy Anna és Bori a pad két szélére kerül? És annak, hogy Anna és Dóri között pontosan ketten ülnek? Mekkora valószínűséggel fog Anna, Cili és Emma egymás mellé kerülni?

1.2. Véletlenszerűen felírunk egy valódi ötjegyű számot, tehát egy olyan ötjegyű számot, melynek nem 0 az első jegye. Mi annak a valószínűsége, hogy a szám jegyei különböző páratlan számok? Mekkora eséllyel lesznek a számban azonos számjegyek?

1.3. Egy vendéglő egyik asztalánál 9 vendég ül, és mindenki rendel egy italt, összesen 3 sört, 4 vörös és 2 fehér bort. A pincér véletlenszerűen osztja ki az italokat. Mennyi a valószínűsége, hogy mindenki olyan italt kap, amilyet kért? Mennyi az esélye annak, hogy a pincér a söröket jól osztja ki, de legalább egy bort rossz vendégnek ad?

1.4. Többször egymás után feldobunk egy szabályos dobókockát.

a. Mennyi az esélye, hogy az első hatos pontosan a negyedik dobásra jön? Mi annak a valószínűsége, hogy az első hatost pontosan az n-edik dobásra kapjuk?

b. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az első négy dobás során kapunk legalább egy hatost? Mekkora eséllyel kapunk legalább egy hatost az első n dobás során?

c. Hányszor dobjuk fel a kockát, ha az a célunk, hogy legalább 90% valószínűséggel legyen hatos a dobások között?

További gyakorló feladatok

1.5. Két szabályos dobókockát feldobva mennyi annak a valószínűsége, hogy

a. két azonos számot dobunk;

b. két különböző számot dobunk;

c. a dobott számok összege 7;

d. valamelyik kockával 6-ost dobunk;

e. pontosan az egyik kockával dobunk 6-ost?

1.6. Egy ételautomatából négyféle szendvics (sonkás, szalámis, tonhalas és vegetáriánus) illetve háromféle innivaló (tej, kakaó és tea) vásárolható. Anna a szendvicsek közül a sonkásat és a szalámisat, az italok közül pedig a kakaót szereti. Anna véletlenszerűen vásárol egy ételt és egy italt a gépből. Mennyi annak az esélye, hogy

a. a kapott ételt és a kapott italt is szeretni fogja;

b. a kettő közül valamelyiket szeretni fogja;

c. a kettő közül pontosan az egyiket fogja majd szeretni?

1.7. Két testvér ugyanabba a 27 fős osztályba jár. Egy gyors sorakozónál mindenki találomra áll be. Mi a valószínűsége, hogy a két testvér egymás mellé kerül? Mennyi az esélye annak, hogy pontosan tizen állnak közöttük?

1.8. Betűkockákból kirakjuk a KÖRÖMPÖRKÖLT szót, majd a betűket véletlenszerűen összekeverjük. Mennyi annak a valószínűsége, hogy visszakapjuk az eredeti szót? Mi annak az esélye, hogy a PÖRKÖLT szó részszóként kiolvasható?

1.9. Magyarországon az autók rendszáma három betűből és három számjegyből áll. A betűk az angol ábécé 26 betűjéből kerülnek ki, de az első betű nem lehet U, X és Y. (Ezen betűk a motorkerékpároknak, az utánfutóknak és a lassú járműveknek vannak fenntartva.) A számjegyekre nincsen korlátozás. Hány különböző rendszám írható fel ezen szabályok szerint? Ha véletlenszerűen választunk egy lehetséges rendszámot, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy minden betű mássalhangzó és minden számjegy páratlan? Mennyi az esélye, hogy a rendszámban található magánhangzó vagy páros számjegy?

1.10. Feldobunk 6 dobókockát. Mekkora valószínűséggel lesz a dobott számok összege pontosan 36? Mennyi az esélye, hogy a dobott számok összege nagyobb, mint 34? Mekkora a valószínűsége annak, hogy a dobott számok között vannak azonosak?

1.11. **A születésnap paradoxon.** A Valószínűségszámítás gyakorlaton a csoportok 30 főre lettek meghirdetve. Mennyi annak az esélye, hogy egy 30 fős csoportban mindenki az évnek ugyanazon a napján született? Mennyi annak a valószínűsége, hogy a csoportban lesz két ember, aki azonos napon született? (A szökőnapoktól és az ikertestvérektől most tekintsünk el.)

1.12. Visszatevéssel húzunk egy olyan urnából, melyben 3 piros és 5 zöld golyó található.

a. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az első piros golyót harmadikra húzzuk ki? Mennyi az esélye, hogy az n-edik húzásra kapjuk az első pirosat?

b. Mennyi annak az esélye, hogy három húzás során kapunk legalább egy pirosat? Mi annak a valószínűsége, hogy n húzásból kapunk pirosat?

c. Hányat húzzunk, ha az a célunk, hogy 95 százalékos valószínűséggel a kihúzott golyók között legyen piros?

2. Mintavételezési feladatok

Házi feladatok

2.1. A 32 lapos magyar kártyapakliból kihúzunk véletlenszerűen 6 lapot visszatevés nélkül. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kihúzott lapok között

a. pontosan 2 ász lesz;

b. pontosan 3 piros, 2 zöld és 1 makk lesz;

c. lesz legalább egy ász;

d. lesz piros vagy lesz ász?

2.2. Oldjuk meg az előző feladatot azzal a módosítással, hogy a lapokat visszatevéssel húzzuk ki.

2.3. Egy óvodás csoportba 9 gyerek jár, köztük egy testvérpár. Hányféleképpen lehet a gyerekeket egy négy-, egy három- és egy kétfős csoportba besorolni? Ha véletlenszerű a besorolás, akkor milyen valószínűséggel fog a két testvér ugyanabba a csoportba kerülni?

2.4. Egy vizsgán egy hallgató a 100 lehetséges kérdésből n-re tudja a választ. A hallgató két kérdést kap véletlenszerűen. Mekkora eséllyel fogja teljesíteni a vizsgát, ha

a. megbukik, ha valamelyik kérdésre nem tud válaszolni;

b. a kérdések közül elég az egyikre válaszolni?

Az egyes vizsgáztatási módok esetén a vizsgázó hány kérdésre tanulja meg a választ, ha az a célja, hogy legalább 80% valószínűséggel teljesítse a vizsgát?

További gyakorló feladatok

2.5. Piri néni nagyon szereti a kertjét, különösen a tulipánjait. Ősszel a legszebb tulipánok közül kiválaszt 5 pirosat, 4 narancssárgát és 2 fehéret, és felszedi a hagymákat. Sajnos a hagymák a téli tárolás során összekeverednek. A következő tavasszal Piri néni véletlenszerűen kiválaszt 7 hagymát, és kiülteti őket. Mennyi az esélye annak, hogy a kiválasztot hagymák között

a. pontosan 4 piros lesz;

b. pontosan 4 piros, 2 narancssárga és 1 fehér lesz;

c. lesz fehér;

d. lesz piros;

e. pontosan két különböző szín fog majd előfordulni, és ezek 4 illetve 3 tulipánon jelennek meg?

2.6. Egy gyárban a makaront úgy csomagolják, hogy egy-egy dobozba két csokis, egy málnás és egy narancsos sütemény kerül. Anna a három barátnőjével öt napon keresztül minden nap vásárol egy doboz makaront, és a süteményeket véletlenszerűen kiosztják egymás között. Mennyi annak az esélye, hogy Anna az öt nap folyamán

a. hétfőn, szerdán és csütörtökön csokis, a többi napon nem csokis makaront kap;

b. pontosan 3 csokis makaront kap;

c. összesen 2 csokis, 2 málnás és 1 narancsos makaront kap;

d. egyszer sem kap málnás makaront;

e. legalább egyszer kap csokis vagy narancsos makaront?

2.7. Az ötöslottón mennyi az esélye annak, hogy

a. minden nyerőszám páratlan;

b. két páros és három páratlan számot húznak ki;

c. kihúzzák a 12-es és a 80-as számot;

d. kihúzzák a 12-es és a 80-as számot, és a 12 a második legkisebb nyerőszám;

e. öt egymást követő számot húznak ki?

2.8. Egy urnában 4 piros és n zöld golyó található. Kihúzunk két golyót az urnából.

a. Mennyi annak az esélye, hogy a kiválasztott golyók mindegyike piros? Mekkora legyen n értéke, ha az a cél, hogy ez a valószínűség kisebb legyen, mint 0,1?

b. Mennyi annak az esélye, hogy a kiválasztott golyók között van piros? Mekkora legyen n értéke, ha az a cél, hogy ez a valószínűség kisebb legyen, mint 0,1?

Oldjuk meg a feladatot visszatevéses és visszatevés nélküli húzásra is.

2.9. Az 52 lapos francia kártyapakliból kihúzunk 5 lapot visszatevés nélkül. Mennyi annak az esélye, hogy az alábbi lapkombinációkat kapjuk?

a. egy pár (két egyforma figura, és három tőle és egymástól is különböző figura)

b. két pár (két különböző pár, és az ötödik lap egy tőlük is különböző figura)

c. drill (három egyforma figura, továbbá két tőle és egymástól is különböző figura)

d. full (három egyforma figura, és mellettük még két egyforma figura)

e. póker (négy egyforma figura, továbbá egy tetszőleges ötödik lap)

3. A valószínűség általános tulajdonságai

Házi feladatok

3.1. Egy hedge fund három cégbe fekteti pénzét, melyek rendre 19%, 25% illetve 28% valószínűséggel mennek tönkre az elkövetkező öt évben. 1/20 annak az esélye, hogy az első és a második cég is csődbe megy; 1/10 a valószínűsége, hogy az első és a harmadik is elveszti a vagyonát; és 1/10 az esélye annak is, hogy a második és a harmadik is becsődöl. Annak az esélye, hogy mindhárom vállalat csődbe megy, 2%. Mennyi a valószínűsége, hogy az elkövetkező öt évben

- **a.** az első vagy a második vállalat csődbe megy;
- **b.** az első becsődöl, de a harmadik nem;
- **c.** pontosan két vállalat megy csődbe, és közöttük lesz a harmadik;
- **d.** legalább két vállalat becsődöl;
- **e.** egyik vállalat sem megy csődbe?

3.2. Kiválasztunk egy végzős hallgatót, és megnézzük, hogy hány kurzusfelvétellel tudta teljesíteni a tárgyait. Jelölje A_n azt, hogy a Kalkulust az n-edik kurzusfelvételkor teljesítette, tehát például A_3 az az esemény, hogy a tárgyat a harmadik alkalommal sikerült abszolválnia. Hasonló módon jelölje B_n azt, hogy a Lineáris algebrához pontosan n felvétel volt szükséges, C_n pedig az az esemény, hogy a Valószínűségszámítás az n-edik alkalommal sikerült. Formalizáljuk a következő eseményeket:

- **a.** a Kalkulust az első, a Lineáris algebrát a második felvételkor sikerült teljesíteni;
- **b.** a Kalkulus sikerült elsőre, de a Valószínűségszámítás nem;
- **c.** a három közül legalább egy kurzust sikerült az első alkalommal teljesíteni;
- **d.** a három közül legalább egy kurzust nem sikerült az első alkalommal teljesíteni;
- **e.** a Kalkulushoz és a Valószínűségszámításhoz összesen négy felvétel kellett.

3.3. Legyenek A és B olyan események, melyek valószínűsége 0,7 illetve 0,8. Ezen információ birtokában meg tudjuk határozni egyértelműen a $P(A \cup B)$ és a $P(A \cap B)$ valószínűséget? Ha nem, akkor adjunk alsó és felső korlátot ezekre a valószínűségekre. A megoldást illusztráljuk Venn-diagrammal.

További gyakorló feladatok

3.4. Öt héten keresztül játszunk az ötöslottón. Jelölje A_i azt az eseményt, hogy az i-edik héten nyerünk valamennyi pénzt. Fejezzük ki az alábbi eseményeket az $A_1, \ldots, A_5$ események segítségével. Fogalmazzuk meg a B_1, B_2, B_4 események tagadását is.

- **a.** $B_1 =$ minden héten nyerünk;
- **b.** $B_2 =$ egyik héten sem nyerünk;

c. $B_3 =$ az utolsó héten nyerünk először;

d. $B_4 =$ a második héten nyerünk, de a negyedik héten nem;

e. $B_5 =$ pontosan négyszer nyerünk.

3.5. Próbagyártás után két szempontból vizsgáljuk a késztermékeket. Tudjuk, hogy 0,25 annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott gyártmány anyaghibás, míg 0,4 annak az esélye, hogy mérethibás. A gyártmányok 10 százaléka nem felel meg egyik szabványnak sem. Ha véletlenszerűen kiválasztunk egy gyártmányt, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy

a. a gyártmány anyaghibás, de megfelel a méretszabványnak;

b. a gyártmánynak van valamilyen hibája;

c. a gyártmánynak pontosan egyfajta hibája van?

d. a gyártmány hibátlan?

3.6. Egy faluban három sportolási lehetőség van, foci, kosárlabda és pingpong. A lakosok 25%-a focizik, 40%-a kosárlabdázik, és 45%-a pingpongozik. Az emberek tizede szokott focizni és kosárlabdázni is, ötödük szokott focizni és pingpongozni is, továbbá negyedük szokott kosárlabdázni és pingpongozni is. Mindhárom sportot a lakosság 5%-a űzi. Véletlenszerűen kiválasztunk egy lakost, és megkérdezzük tőle, hogy melyik sporttevékenységet szokta végezni. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a megkérdezett ember

a. focizik vagy pingpongozik;

b. focizik, de nem kosárlabdázik;

c. pontosan kettő sportot űz;

d. semmit sem sportol?

3.7. Egy cég három különböző változatot szállít egy adott termékből a vele szerződésben álló boltoknak. Ebben a hónapban a boltok fele rendelt az 1. típusból, és 57% nem rendelt a 2. típusból. A boltok 22%-a rendelt az 1. és a 2. változatból is, továbbá negyedrészük rendelt az 1. és a 3. típusú termékekből is. A boltok 14%-a mindegyik típusból rendelt, míg 0,12 részük egyikből sem. A boltok 6%-a olyan, hogy rendelt a 2. és 3. típusból is, de az 1.-ből nem. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott boltba kell szállítani a 3. változatból? A boltok hányad része rendelt csak az 1. típusból? Egy véletlenszerű bolt esetén mennyi az esélye, hogy pontosan egy típust rendeltek a termékből?

3.8. **a.** Tízszer feldobunk egy szabályos dobókockát. Mennyi a valószínűsége, hogy a tíz dobás során az $1, 2, 3, 4, 5, 6$ értékek mindegyike előfordul?

b. Tízszer feldobunk két szabályos dobókockát. Mennyi annak az esélye, hogy a tíz dobás során az $(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)$ számpárok mindegyike előfordul?

4. Geometriai valószínűségi mezők, feltételes valószínűség

Házi feladatok

4.1. Ejtőernyős ugrást hajtanak végre egy 500 m^2 területű mezőn. Az ugrás akkor sikeres, ha az ugró a mezőn kijelölt 10 m oldalhosszúságú négyzetben ér földet. Különdíjat kap az, aki a négyzet közepén megrajzolt 2 m sugarú körön belül érkezik. Feltehető, hogy az érkezés helye a mezőn megfelel az egyenletességi hipotézisnek. Mekkora valószínűséggel lesz sikeres az ugrás? Mennyi az esélye annak, hogy az ugró különdíjat kap feltéve, hogy az ugrás sikeres? Milyen kapcsolat van az ugrás sikeressége és a különdíj megszerzése között: kizárják egymást, vagy valamelyik maga után vonja a másikat?

4.2. Adott egy kör alakú céltábla, melynek 10 centiméter a sugara. A céltáblára felrajzolunk egy vízszintes és egy függőleges egyenest úgy, hogy mindkettő átmenjen a kör középpontján. Ilyen módon a táblát négy tartományra osztjuk fel. Véletlenszerűen rálövünk a céltáblára. Adjuk meg a következő események valószínűségét:

$A =$ a céltáblát a középponttól legalább 5 centiméterre találjuk el

$B =$ a találat a bal alsó tartományba esik

Mennyi az A esemény valószínűsége, ha tudjuk, hogy B bekövetkezik? Független a két esemény egymástól? Kizárják egymást? Valamelyik maga után vonja a másikat?

4.3. Véletlenszerűen választunk egy x értéket a $[0, 1]$ intervallumon. Ez az érték egy x és egy $1 - x$ hosszúságú szakaszra bontja az egységnyi hosszúságú intervallumot. Mennyi annak az esélye, hogy a szakaszok hosszának szorzata nagyobb, mint 5/36?

4.4. Legyen A és B két esemény, és legyen $P(B) > 0$. Mennyi az $P(A|B)$ feltételes valószínűség értéke, ha **a.** A és B kizáró események; **b.** B maga után vonja az A eseményt; **c.** A és B független események?

4.5. A Monty Hall-paradoxon, részletekért lásd a Wikipediat. Csak szorgalmi feladat.

a. Egy tévés vetélkedőben három egyforma ajtó mögött egy főnyeremény és két kis értékű ajándék van véletlenszerűen elhelyezve. A játékos megjelöl egyet az ajtók közül, de azt most még nem nyitják ki neki. Ehelyett a műsorvezető nyit ki egyet véletlenszerűen a megmaradt ajtók közül. Tegyük fel, hogy a kinyitott ajtó mögött nem a főnyeremény található. A játékosnak ezen a ponton lehetősége van módosítani a választásán, és az eredetileg megjelölt ajtó helyett a harmadik, kimaradt ajtót kinyitni. Figyelembe véve, hogy a műsorvezető kis értékű ajándékot talált, a főnyeremény mekkora eséllyel van a játékos által megjelölt ajtó illetve a kimaradt ajtó mögött? Ezek alapján a játékosnak érdemes módosítania az eredeti választásán?

b. Módosítsuk a feladat **a.** részét annyiban, hogy a műsorvezető tudja, melyik ajtó mögött mi található, és mindig egy olyan ajtót nyit ki, mely mögött kis értékű nyeremény van. Ha két ilyen ajtó is rendelkezésre áll, akkor véletlenszerűen választ. Ebben az esetben milyen választ adhatunk az **a.** pont kérdéseire?

További gyakorló feladatok

4.5. A vihar véletlenszerű helyen elszakít egy 20 km hosszú légvezetéket, ezért a vezeték két végéről egy-egy keresőcsapat indul, hogy felderítsék a szakadás helyét. A nehéz terep miatt az egyik csapat 4 km/h, a másik 6 km/h sebességgel halad. Tekintsük a következő eseményeket:

$A =$ a szakadás helyét a lasabban haladó csapat találja meg

$B =$ valamelyik csapat fél órán belül megtalálja a szakadás helyét

Mennyi az A illetve a B esemény valószínűsége? Mennyi az A esemény valószínűsége, ha a B esemény bekövetkezik? Független egymástól az A és a B esemény?

4.6. Egy metróvonalon 10 perces követési idővel járnak a szerelvények. Ha egy véletlenszerű időpontban megyünk ki az állomásra, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy legfeljebb 5 percet kell várni? Mennyi az esélye ugyanennek, ha tudjuk, hogy a legutóbbi szerelvény már legalább 3 perce elment. Milyen kapcsolatban van az az esemény, hogy legfeljebb 5 percet kell várni, és az, hogy az előző metró már legalább 3 perce elment: kizáróak, függetlenek, vagy valamelyik maga után vonja a másikat?

4.7. Véletlenszerűen választunk egy pontot az 5 egység oldalhosszúságú négyzetben. Mennyi annak az esélye, hogy a pont a legközelebbi oldaltól legfeljebb 1 egységnyire esik? Mennyi az esélye ugyanennek, ha tudjuk, hogy a pont a négy oldal közül az északihoz van a legközelebb? Független egymástól az, hogy a pont a legközelebbi oldaltól legfeljebb 1 egységnyire esik, illetve az, hogy a pont az északi oldalhoz van a legközelebb.

4.8. Autóval végig akarunk menni egy 30 km hosszú egyenes útszakaszon, de balesetet szenvedünk egy véletlenszerű helyen. A közelben egyetlen egy mobiltelefon átjátszó torony van, ez az út felénél az úttól 6 km távolságra található. A torony egy 10 km sugarú kör alakú területet képes kiszolgálni. Mennyi annak az esélye, hogy a baleset helye ebbe a körbe esik, és ezáltal telefonon segítséget tudunk hívni? Mennyi a valószínűsége ugyanennek, ha a baleset az út első 5 kilométeres szakaszán történik?

4.9. Egy porcelánmanufakturában három fajta tányért gyártanak, levesest, laposat és salátásat. A heti termelést a következő táblázat foglalja össze:

	leveses	lapos	salátás	összesen
hibátlan	470	540	380	1390
selejtes	30	60	20	110
összesen	500	600	400	1500

Véletlenszerűen kiválasztunk egy tányért minőségellenőrzésre. Jelölje A_i azt az eseményt, hogy az i-edik típusú termékből választottunk, és legyen B az az esemény, hogy a kiválasztott tányér selejtes. Értelmezzük és határozzuk meg a következő valószínűségeket: $P(A_2|B)$; $P(A_1 \cup A_3|\overline{B})$; $P(B|A_2)$; $P(B|\overline{A}_2)$.

5. Feltételes valószínűség, a teljes valószínűség tétele

Házi feladatok

5.1. Egy óvodás csoportba 9 gyerek jár, köztük egy testvérpár, egy fiú és egy lány. Egy foglalkozáson véletlenszerűen kiválasztanak 4 gyereket. Mennyi a valószínűsége annak, hogy

- **a.** a testvérpár mindkét tagját kiválasztják;
- **b.** a testvérpár mindkét tagját kiválasztják, feltéve, hogy a fiú ki lett választva;
- **c.** a testvérpár mindkét tagját kiválasztják, feltéve, hogy legalább az egyikük ki lett választva?

5.2. Stephen Curry, a Golden Gate Warriors kosárlabdázója a 2016/17-es szezonban a kétpontos, a hárompontos illetve a büntető dobásokat rendre 54, 41 és 90 százalékos hatékonysággal értékesítette. A próbálkozásainak 44, 36 és 20 százaléka volt kétpontos, hárompontos illetve büntető dobás.

- **a.** Curry összes próbálkozásának hány százaléka volt sikeres hárompontos dobás? Az összes próbálkozásának mekkora hányadát értékesítette?
- **b.** A sikertelen próbálkozások milyen arányban voltak kétpontos, hárompontos illetve büntető dobások?

5.3. Egy vizsgán egy tesztkérdéshez négy lehetséges válasz van megadva, melyek közül egy helyes. A vizsgázó $2/3$ valószínűséggel tudja a helyes választ, és ebben az esetben meg is jelöli azt. Ha nem tudja a helyes választ, akkor a vizsgázó tippel, tehát véletlenszerűen jelöl egyet a négy válasz közül. A javítás során azt látjuk, hogy a vizsgázó helyes választ adott a kérdésre. Mennyi a valószínűsége, hogy csak tippelt?

További gyakorló feladatok

5.4.
- **a.** Háromgyerekes családok körében vizsgáljuk, hogy hány fiú és lány van a családban. Jelölje A azt az eseményt, hogy a vizsgált családban legfeljebb egy lány van, és legyen B az, hogy van fiú és lány is. Feltehető, hogy a gyerekek azonos eséllyel születnek fiúnak vagy lánynak. Mennyi az A esemény valószínűsége? Mennyi A valószínűsége, ha tudjuk, hogy B bekövetkezik? Ezek alapján mit mondhatunk a két esemény kapcsolatáról?
- **b.** Válaszoljuk az előző pont kérdéseire négygyerekes családok esetén.

5.5. Egy városban tíz autókölcsönző működik, ebből háromnál lehet kisbuszt is bérelni. Egy ember kisbuszt szeretne bérelni, de nem tudja, hogy ezt melyik kölcsönzőnél teheti meg, ezért elkezdi véletlenszerű sorrendben felhívni őket. Mekkora annak a valószínűsége, hogy pontosan három hívásra lesz majd szüksége? Mennyi az esélye ugyanennek, ha tudjuk, hogy az első hívás nem volt sikeres?

5.6. Egy feladat a mobiltelefonok előtti időkből. Egy barátunk egy adott estén 2/3 valószínűséggel tartózkodik kocsmában. Ha kocsmában van, akkor egyenlő eséllyel található meg az öt környékbeli kocsma mindegyikében. Tegyük fel, hogy négyet már megnéztünk, de nem találtuk. Mennyi az esélye, hogy az ötödikben lesz?

5.7. Egy üzemben három gép van, az első adja a termelés 20%-át, a második pedig a 30%-át. Az első gépnél 5% a selejtarány, a másodiknál és a harmadiknál 10%. Véletlenszerűen kiválasztunk egy gyártmányt az üzem termeléséből. Mennyi az esélye annak, hogy a kiválasztott termék a harmadik gépen készült és selejtes? Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott termék selejtes? Ha a gyártmány selejtes, akkor mennyi annak az esélye, hogy az első, a második illetve a harmadik gépen készült?

5.8. Egy csomagolóüzembe négy termelő szállít almát. A leadott gyümölcs tizede származik az első, három tizede a második, és két ötöde a harmadik termelőtől. Az egyes termelők esetén a leadott mennyiség 40, 50, 20 illetve 100 százaléka elsőosztályú. Ha véletlenszerűen kiválasztunk egy almát, akkor mi annak a valószínűsége, hogy az alma másodosztályú? Feltéve, hogy az alma másodosztályú, mennyi a valószínűsége, hogy az első, a második, a harmadik, illetve a negyedik termelő szállította?

5.9. Lajosnak lejárt a bérlete, mégis felszáll az első járműre, ami hazaviszi. A megállóban 25% valószínűséggel érkezik először busz, 40% valószínűséggel troli, a többi esetben pedig villamos. A buszon 45% eséllyel jön ellenőr, a trolin 10% eséllyel, a villamoson pedig 30% eséllyel. Mennyi annak az esélye, hogy hazafelé utazva találkozik ellenőrrel? Ha otthon szomorúan meséli el, hogy megbüntették, akkor mennyi a valószínűsége, hogy busszal utazott?

5.10. A hűtőben négy doboz tej van: egy friss; egy, ami egy hete lejárt, és biztosan romlott; továbbá van két doboz, ami egy napja járt le, és 0,3 valószínűséggel romlottak. Véletlenszerűen kiválasztunk egy doboz tejet. Mekkora az esélye, hogy ez a tej nem romlott? Ha megkóstoljuk a kivett tejet, és az romlottnak bizonyul, akkor mi a valószínűsége annak, hogy az egy hete lejárt tejet vettük ki?

5.11. Van két pénzérménk, egy szabályos, és egy olyan, ami 1/4 valószínűséggel ad fejet. Véletlenszerűen kiválasztok egy érmét, és feldobom. Mennyi annak az esélye, hogy fejet kapok? Feltéve, hogy fejet kaptam, mennyi a valószínűsége, hogy a szabályos érmét választottam?

5.12. Egy ritka betegséget tízezer emberből átlagosan egy kap el. A szűrőteszt csak 97%-os megbízhatóságú, azaz ekkora a valószínűsége, hogy helyes eredményt ad, akár beteg valaki, akár egészséges. Egy ember megvizsgáltatja magát, és a teszt eredménye pozitív. Mennyi a valószínűsége, hogy tényleg beteg?

5.13. Egy üzemben három gép van, az első adja a termelés felét, a második a 40%-át. Az első és a második gépnél is a termékek 3%-a selejtes. A harmadik gép esetében hány százalék a selejtarány, ha tudjuk, hogy az üzemben termelt selejtes termékek közül 32,5% készült a harmadik gépnél?

6. A láncszabály, események függetlensége

Házi feladatok

6.1. A fogadóirodák szerint amerikai kosárlabdabajnokságban (NBA) a Chicago Bulls, a San Antonio Spurs illetve a Los Angeles Lakers rendre 0,5, 0,8 és 0,3 valószínűséggel nyeri meg a következő meccsét. (A csapatok nem egymással játszanak.) Feltehető, hogy a három mérkőzés eredménye független egymástól. Határozzuk meg az alábbi események valószínűségét:

- **a.** mindhárom csapat megnyeri a következő mérkőzését;
- **b.** a Bulls nyer, viszont a Lakers veszít;
- **c.** a három csapat közül pontosan egy nyer;
- **d.** a három csapat közül legfeljebb egy nyer.

Feltéve, hogy a három csapat közül pontosan egy nyer, mennyi annak az esélye, hogy a Bulls, a Spurs illetve a Lakers éri el a győzelmet?

6.2. Adott egy urna, benne pedig 4 piros és 2 zöld golyó. Kihúzunk három golyót visszatevés nélkül.

- **a.** Mennyi annak a valószínűsége, hogy sorban egy pirosat, egy zöldet, és még egy pirosat kapunk? Mennyi az esélye, hogy a kihúzott golyók között pontosan egy zöld lesz?
- **b.** Mennyi annak az esélye, hogy a második golyó zöld? Feltéve, hogy a második golyó zöld, mi annak a valószínűsége, hogy az első golyó piros volt? Függ az első golyó színe attól, hogy milyen színű a második?

Miben változik a megoldás menete akkor, ha a golyókat visszatevéssel húzzuk ki.

6.3. Egy 120 km hosszú autópályán a 40. és a 100. kilométernél van mentőállomás, nevezzük ezeket X-nek és Y-nak. Ha baleset történik, akkor azt az állomást riasztják, amelyik közelebb esik a baleset helyszínéhez.

- **a.** Egy véletlenszerű baleset esetén mennyi az esélye annak, hogy az X állomást riasztják?
- **b.** Tegyük fel, hogy négy baleset történik egymástól függetlenül. Mennyi annak a valószínűsége, hogy időrendben az első két esethez az X, a második kettőhöz pedig az Y állomást riasztják? Mennyi az esélye, hogy pontosan két alkalommal riasztják az X állomást? Mi a valószínűsége annak, hogy a négyből legalább egy esethez az X állomást riasztják?
- **c.** Hány baleset esetén teljesül az, hogy legalább 99% eséllyel valamelyik esethez az X állomást fogják majd riasztani?

További gyakorló feladatok

6.4. Egy vizsgán a hallgatók 10%-a bukott meg. A sikeres vizsgát tevő hallgatók negyedrésze kapott jelest. Mekkora az esélye, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott hallgató jelest kapott?

6.5. Egy adott területen vegyszeres szúnyogirtást végeznek három egymást követő alkalommal. Az első permetezés után a szúnyogok 80%-a elpusztul, de az életben maradt rovaroknak nő az ellenálló képessége a szerrel szemben. Ennek az a következménye, hogy a második permetezéskor az életben maradt szúnyogoknak már csak a 40%-a pusztul el, a harmadik irtásnál pedig csak a maradék 20%-a. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy szúnyog túléli mindhárom permetezést? Feltéve, hogy egy szúnyog túlélte az első permetezést, mennyi a valószínűsége annak, hogy a másodikat és a harmadikat is túléli?

6.6. Egy útszakaszon egymás után három jelzőlámpa irányítja a forgalmat. Az egyes lámpáknál egymástól függetlenül rendre 1/2, 2/3 illetve 3/4 valószínűséggel kapunk pirosat. Mennyi az alábbi események valószínűsége?

- **a.** Mindhárom lámpánál pirosat kapunk.
- **b.** Az első lámpánál pirosat kapunk, de a harmadiknál nem.
- **c.** Pontosan két lámpánál kapunk pirosat.
- **d.** Legalább két lámpánál pirosat kapunk.

Feltéve, hogy pontosan két pirosat kapunk, mennyi annak az esélye, hogy a zöldet az első, a második, illetve a harmadik lámpánál kapjuk?

6.7. Egy csatában az egyik harcoló fél ejtőernyőkkel próbál utánpótlást eljuttatni egy körbevett alakulathoz. Az erős szél miatt az ejtőernyők egymástól függetlenül és véletlenszerű helyen érnek földet a 15 km^2 területű csatatéren. Az alakulat egy 1 km^2 területű magaslaton védekezik, és az utánpótlást csak akkor kapják meg, ha az ernyő ezen a magaslaton ér földet. Ha két ejtőernyőnyi utánpótlást dobnak le, akkor mennyi annak az esélye, hogy ezek közül pontosan egy fog eljutni az alakulathoz? Hány ejtőernyőt dobjanak le ahhoz, hogy ezek közül az alakulat 95 százalékos eséllyel megszerezzen legalább egyet?

6.8. Egy 5×8 kilométeres téglalap alakú város egyik sarkában egy tűzoltó állomás található. Az állomást akkor riasztják, ha a tűz a városon belül és az állomástól légvonalban legfeljebb 4 kilométer távolságra üt ki. Egy adott napon két tűzeset történik, ezek helye egymástól független és véletlenszerű a városon belül. Mennyi annak az esélye, hogy az állomást a második esethez riasztják, de az elsőhöz nem? Hány független tűzesetre mellett teljesül, hogy az állomást 90% eséllyel legalább egyszer riasztják?

6.9. Oldjuk meg az **1.4.** feladatot annak alkalmazásával, hogy a kockadobások függetlenek egymástól.

7. Diszkrét valószínűségi változók

Házi feladatok

7.1. Magyarországon minden autótulajdonosnak kötnie kell kötelező gépjármű felelősségbiztosítást. Ezen biztosítás esetében úgynevezett bonus-malus rendszert alkalmaznak. Ez azt jelenti, hogy a biztosítók az autósokat különböző fokozatokba sorolják attól függően, hogy azok a múltban hányszor okoztak balesetet. A fokozatokat egész számokkal jelölik, tipikusan -4-től $+10$-ig, és a biztosítási díj fokozatonként eltérő.

Újdonsült autótulajdonosként biztosítást kötök, és ezzel a 0 fokozatba sorolnak. A szerződés értelmében ha egy adott évben nem okozok balesetet, akkor a következő évben eggyel magasabb fokozatba kerülök; ha egynél több balesetet okozok, akkor eggyel alacsonyabb fokozatba sorolnak; míg ha pontosan egy belesetet okozok, akkor maradok a fokozatban. Tegyük fel, hogy egy adott évben 0,5 eséllyel nem okozok balesetet, 0,4 valószínűséggel okozok pontosan egy balesetet, és 0,1 eséllyel okozok egynél több balesetet. Feltehető, hogy a különböző évek eseményei függetlenek egymástól. Az alábbi táblázat azt tartalmazza, hogy az egyes fokozatokban mennyi az éves biztosítási díj.

Fokozat	-2	-1	0	$+1$	$+2$
Éves díj (ezer Ft)	200	130	100	90	85

Jelölje ξ azt, hogy két év múlva mennyi biztosítási díjat kell fizetnem. Adjuk meg a ξ valószínűségi változó értékkészletét, eloszlását, várható értékét és szórását.

7.2. Adott egy vírusos megbetegedés, melyet az emberek 1% eséllyel kapnak el. A betegségre kifejlesztettek egy tesztet, mely a vérben található antitestek alapján mutatja ki a betegség jelenlétét, de az eljárás drága, egy-egy tesztelés ezer dollárba kerül. Egy kórházban a következő módon végzik el a páciensek vizsgálatát. Nem egyesével tesztelik le őket, hanem összevárnak tíz pácienst, és összeöntik a mintáikat. Ha az eredmény negatív, akkor egyik mintában sincs antitest, tehát mindeki egészséges. Ha a teszt eredménye pozitív, akkor ismét elvégzik a tesztet, de ezúttal már mind a tíz emberen külön-külön, hogy kiderüljön, kik betegek közülük. Határozzuk meg, hogy ezzel a módszerrel átlagosan mennyibe kerül egy páciens letesztelése.

7.3. Biztosítást szeretnénk kötni egy 9 millió forint értékű lakóházra. Tegyük fel, hogy az elkövetkezendő egy évben 99,9% valószínűséggel nem lesz kárunk, és 0,1% eséllyel teljesen leég a ház. Ha van biztosításunk, akkor a biztosító a keletkezett kárt teljes mértékben megtéríti. Mi az a minimális biztosítási díj, amit a biztosító ki fog majd szabni ránk? Ha a vagyoni helyzetünket az $u(x) = \sqrt{x}$ hasznossági függvényen keresztül értékeljük, akkor racionálisan gondolkodó fogyasztóként mi az a maximális összeg, amit még hajlandóak vagyunk kifizetni ezért a biztosításért?

További gyakorló feladatok

7.4. Mennyi legyen az a valós paraméter értéke, hogy az alábbi értékek valószínűségeloszlást alkossanak? Adjuk meg az eloszlás várható értékét és szórását is.

a. $p_1 = 0{,}15a$, $p_2 = 0{,}55a$, $p_3 = 0{,}25a$, $p_4 = 0{,}3a$;

b. $p_0 = 0{,}25$, $p_2 = a$, $p_{10} = a^2$.

7.5. Anna, Bori és Cili pizzát rendelnek, három különböző fajtát. Amikor a pizza megérkezik, véletlenszerűen osztják ki egymás között a dobozokat. Jelölje ξ azt, hogy a lányok közül hányan kaptak olyan pizzát, amilyet rendeltek. Határozzuk meg a ξ változó eloszlását, várható értékét és szórását. Írjuk fel az eloszlásfüggvényt is!

7.6. Egy gyárban három nagyteljesítményű dízelmotor üzemel, melyek egy adott időpontban egymástól függetlenül 0,5, 0,6 illetve 0,7 valószínűséggel működnek. Jelölje ξ azt, hogy egy adott időpontban hány dízelmotor üzemel.

a. Adjuk meg a ξ változó eloszlását, várható értékét és szórását! Írjuk fel és ábrázoljuk az eloszlásfüggvényt is!

b. Amennyiben egy adott időpillanatban x dízelmotor üzemel, akkor a dolgozókat $50 + 20x$ dB zajterhelés éri. Határozzuk meg a zajterhelés átlagos értékét.

7.7. Anna két mozijegyet kap egy vetítésre, ezért egymás után felhívja a három barátnőjét, hogy kísérőt szerezzen maga mellé. Egészen addig hívja fel őket egymás után, míg valaki bele nem egyezik, hogy elkíséri, vagy míg el nem fogynak a barátnők. A három barátnője egymástól függetlenül 0,4 valószínűséggel mond igent Anna meg hívására.

a. Adjuk meg a lefolytatott telefonhívások számának eloszlását, várható értékét és szórását. Mennyi annak az esélye, hogy Annának legfeljebb két barátnőjét kell majd felhívnia? Írjuk fel és ábrázoljuk az eloszlásfüggvényt is!

b. Annának egy-egy telefonhívás 30 forintba kerül. Határozzuk meg, hogy várhatóan mennyi pénzbe kerül kísérőt szereznie a vetítésre.

7.8. Egy kaszinóban a következő játékot lehet játszani. A játékos feldob egy szabályos pénzérmét, és ha fejet kap, akkor nyer 1 millió forintot, míg ha írást, akkor nem nyer semmit.

a. Mennyi a játék igazságos ára? A kaszinó milyen árat fog kérni ezért a játékért?

b. Tegyük fel, hogy a kaszinó 450 ezer forintban állapítja meg a játék árát. Az olvasó hajlandó lenne ezt a játékot játszani a kaszinó ellen, ha tetszőleges sokszor játszhatna, és átmenetileg hitelt is felvehetne? És ha csak egyetlen egy játékot lehetne játszani, akkor érdemes lenne beszállni? Az olvasó milyen áron szállna be, ha csak egy játékra lenne lehetősége?

c. Tegyük fel, hogy egy játékos a vagyoni helyzetét az $u(x) = \sqrt{x}$ hasznossági függvénnyel értékeli. Egyetlen egy játék esetén mi az elfogadható ár?

8. A nevezetesebb diszkrét eloszlások

Házi feladatok

8.1. **a.** Tízszer feldobunk egy szabályos dobókockát. Jelölje ξ azt, hogy hányszor kapunk páratlan számot. Határozzuk meg ξ eloszlását, várható értékét és szórását. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a 10 dobásból pontosan annyi páratlan értéket kapunk, mint párosat?

b. Ötször feldobunk két dobókockát. Jelölje η azt, hogy hányszor dobtunk két páratlan számot. Határozzuk meg η eloszlását és várható értékét.

8.2. Egy csatában az egyik harcoló fél ejtőernyőkkel próbál utánpótlást eljuttatni egy körbevett alakulathoz. Az erős szél miatt az ejtőernyők egymástól függetlenül és véletlenszerű helyen érnek földet a 15 km^2 területű csatatéren. Az alakulat egy 1 km^2 területű magaslaton védekezik, és az utánpótlást csak akkor kapják meg, ha az ernyő ezen a magaslaton ér földet. Éppen ezért a vezérkar addig dob le újabb és újabb ejtőernyőket, míg valamelyiket meg nem szerzi az alakulat. Mennyi annak az esélye, hogy pontosan öt ejtőernyőt kell majd ledobni? Mi a valószínűsége annak, hogy ötnél több ledobásra lesz majd szükség? Várhatóan hány ejtőernyőt kell ledobni?

8.3. Egy szelvénnyel játszunk a Skandináv lottón, ahol 35 számból 7-et kell megjelölni. A szabályok szerint a számok két sorsoláson is részt vesznek, egy gépin és egy kézin, ez az úgynevezett ikersorsolás. Mindkét számsorsolás alkalmával 7 számot húznak ki, és akkor nyerünk pénzt, ha valamelyik sorsoláson elérünk legalább 4 találatot.

a. Mennyi annak az esélye, hogy a gépi sorsoláson pontosan 4 találatot érünk el? Mekkora valószínűséggel érünk el legalább 4 találatot? Mennyi a gépi sorsoláson a találatok számának a várható értéke?

b. Mennyi annak az esélye, hogy a két sorsolás közül az egyiken nincs találatunk, a másikon pedig pontosan 1 találatot érünk el? Mekkora annak a valószínűsége, hogy valamelyik soroláson lesz legalább 4 találatunk, tehát nyerünk pénzt?

8.4. Orvosi kutatások szerint az egységnyi nagyságú rádioaktív besugárzás véletlen számú mutációt okoz egy kromoszomán. A mutációk száma Poisson-eloszlást követ, és a besugárzások 13,5 százalékában nem történik egy mutáció sem. Az egységnyi nagyságó besugárzás átlagosan hány mutációt okoz? Mennyi annak az esélye, hogy a besugárzás hatására a várható értéknél több mutáció történik?

További gyakorló feladatok

8.5. **a.** Egy ingatlanügynökségnél az eladott lakások 30%-át szokták a vevők hitel felvétele mellett fizetni. A következő hétre 6 lakás van eladásra előjegyezve. A ξ valószínűségi változó jelölje a hitelkonstrukcióban értékesített lakások számát. Adjuk meg ξ eloszlását, várható értékét és szórását. Mi annak a valószínűsége, hogy egynél több, de ötnél kevesebb lakáseladáshoz vesznek majd fel hitelt?

b. Egy másik ingatlanügynökségnél a lakások 40%-át szokták eladni hitelfelvétel mellett, és náluk 8 eladás van előjegyezve a jövő hétre. Mennyi annak az esélye, hogy az első ügynökségnél pontosan 2, a másodiknál pedig pontosan 4 lakást adnak el hitelkonstrukcióban? (A két cégnél a lakáseladások száma független.)

8.6. Lajos kulcscsomóján három kulcs van, ezek közül az egyik a lakásának a bejárati ajtaját nyitja. Egy este elmegy a barátaival italozni, és hazaérve azt tapasztalja, hogy nem tudja megkülönböztetni a kulcsait. Elhatározza, hogy addig választ véletlenszerűen újabb és újabb kulcsot, míg végül sikerül kinyitnia a lakás ajtaját.

a. Adjuk meg a szükséges próbálkozások számának az eloszlását, ha Lajos nem jegyzi meg, hogy melyik kulccsal próbálkozott már korábban, hanem minden egyes alkalommal a három közül választ egyet véletlenszerűen? Mennyi annak az esélye, hogy legfeljebb három próbálkozásra lesz majd szükség? Mennyi a próbálkozások számának a várható értéke és szórása?

b. Miben változik az a. pont megoldása, ha Lajos minden egyes próbálkozás során $1/2$ valószínűséggel fejjel lefelé próbálja meg beleerőltetni a kulcsot a zárba? (Fejjel lefelé a jó kulccsal sem tudja kinyitni az ajtót.)

c. Miben változik az a. pont megoldása, ha Lajos megjegyzi, hogy melyik kulccsal próbálkozott már korábban?

8.7. Egy gyárban minden nap 50 terméket készítenek, és ebből 15 darab mindig selejtes. Minőségellenőrzéskor véletlenszerűen kivesznek egyszerre 5 terméket.

a. Jelölje ξ a mintában talált selejtes termékek számát egy adott napon. Határozzuk meg a ξ valószínűségi változó eloszlását és várható értékét. Mennyi annak az esélye, hogy legfeljebb egy selejtes termék lesz a mintában?

b. Mennyi az esélye annak, hogy három egymást követő napot vizsgálva valamelyik alkalommal egynél több selejtet találnak a mintában? (Feltehető, hogy az egyes napok termelése független egymástól.)

8.8. Adott egy urna, benne pedig 4 piros és 6 zöld golyó.

a. Visszatevéssel kihúzunk 3 golyót. Határozzuk meg a kihúzott piros golyók számának eloszlását és várható értékét. Mennyi annak az esélye, hogy pontosan két piros golyót húzunk majd ki ?

b. Oldjuk meg az a. feladatot visszatevés nélküli mintavételezéssel is.

c. Addig húzunk visszatevéssel, míg piros golyót nem kapunk. Adjuk meg a szükséges húzások számának eloszlását és várható értékét. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az első piros pontosan a második húzásra jön majd?

8.9. Egy adatszerverre óránként véletlen számú, átlagosan 5 lekérdezés érkezik. Feltehető, hogy az egy órára eső lekérdezések száma Poisson-eloszlást követ. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy adott óraban pontosan három lekérdezés történik? Mennyi az egy órára jutó lekérdezések számának a szórása?

9. Folytonos valószínűségi változók

Házi feladatok

9.1. A biztosítótársaságok valószínűségi változókkal modellezik azt, hogy mekkora a kár nagysága, ha bekövetkezik a káresemény. Egy speciális biztosítás esetén a kár millió forintban kifejezett nagysága egy olyan folytonos valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} a/x^3\,, & x \geq 1\,, \\ 0\,, & x < 1\,. \end{cases}$$

a. Ábrázoljuk a sűrűségfüggvényt és adjuk meg az a paraméter értékét! Mi a valószínűségi változó értékkészlete?

b. Határozzuk meg a kárnagyság várható értékét és szórását!

9.2. Véletlenszerűen kiválasztunk egy egyedet egy állatpopulációból. A korábbi kutatások alapján ismert, hogy ekkor a kiválasztott egyed testtömege egy olyan valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{3}{14}\sqrt{x}\,, & 1 \leq x \leq 4\,, \\ 0\,, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

a. Határozzuk meg a változó értékkészletét! Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott egyed tömege legfeljebb 2? Mennyi annak az esélye, hogy az egyed tömege legalább 3? Mekkora valószínűséggel kapunk 2 egységnél kisebb tömegű egyedet?

b. Írjuk fel a változó eloszlásfüggvényét! Határozzuk meg a változó mediánját illetve alsó és felső kvartilisét! Mi a jelentése ennek a három értéknek a populációra nézve?

9.3. Roger Federer a világ legsikeresebb teniszezője. Amikor szervál, a labda sebessége egy olyan valószínűségi változó, mely egyenletes eloszlást követ 48 és 60 m/s között. (Tehát 173 és 216 km/h között.)

a. Federer szerváinál mennyi a labda sebességének várható értéke illetve szórása? A szervák mekkora hányada gyorsabb, mint 50 m/s?

b. A teniszpályák 24 méter hosszúak. Jelölje η azt, hogy Federer adogatásainál a labda mennyi idő alatt teszi meg ezt az utat! Adjuk meg az η valószínűségi változó értékkészletét! Mennyi annak az esélye, hogy az η kisebb, mint 0,48 másodperc? Ezek alapján az η változó egyenletes eloszlást követ?

c. Határozzuk meg az η változó várható értékét és szórását!

d. Írjuk fel az η változó eloszlásfüggvényét illetve sűrűségfüggvényét!

9.4. Lásd a feladatsor **10.4.** feladatát!

További gyakorló feladatok

9.5. Egy ξ folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}\sqrt{x}, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ábrázoljuk a sűrűségfüggvényt és adjuk meg a ξ változó értékkészletét! Mennyi a $P(0{,}5 \le \xi \le 1{,}5)$ és a $P(\xi > 0{,}5)$ valószínűségek értéke? Adjuk meg a ξ változó várható értékét és szórását is!

9.6. Egy ξ folytonos változó sűrűségfüggvénye $f_\xi(x) = 1/(x \ln 2)$, ha $1 \le x \le 2$, és $f_\xi(x) = 0$ minden más x esetén. Ábrázoljuk a sűrűségfüggvényt és adjuk meg a ξ változó értékkészletét! Mennyi a $P(0{,}5 \le \xi \le 1{,}5)$ és a $P(\xi < 1{,}5)$ valószínűségek értéke? Adjuk meg a ξ változó várható értékét és szórását is!

9.7. Jelölje a ξ egy befektetési alap értéknövekedését az elkövetkezendő egy évben. Egy elemzés szerint a ξ változó az alábbi sűrűségfüggvénnyel írható le, az értékek millió dollárban értendőek:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0{,}08 + ax, & -1 \le x \le 4, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Határozzuk meg az a paraméter értékét és adjuk meg az értékkészletet! Írjuk fel és ábrázoljuk a változó eloszlásfüggvényét is! Ennek segtségével adjuk meg a ξ változó 1%-os kvantilisét!

9.8. Amikor telefonálok, a beszélgetéseim percekben kifejezett hosszúsága egy ξ valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye $f_\xi(x) = a/x^2$, ha $1 \le x \le 5$, és $f_\xi(x) = 0$ egyébként. Határozzuk meg az a paraméter értékét és a ξ változó értékkészletét! Írjuk fel és ábrázoljuk a változó eloszlásfüggvényét! Adjuk meg a telefonhívásaim hosszának mediánját.

9.9. A TESCO-ban a narancsot a minőségtől függően változó áron árulják. Feltehető, hogy az ár egyenletes eloszlást követ 300 és 500 forint között.

a. Jelölje ξ a narancs árát egy véletlenszerűen választott napon. Írjuk fel és ábrázoljuk a ξ sűrűségfüggvényét. Átlagosan mennyibe kerül a narancs a TESCO-ban? Mennyi az ár szórása? Mennyi annak az esélye, hogy a kilónkénti ár 375 forint alatt marad?

b. Jelölje η azt, hogy 1500 forintból hány kiló narancsot tudok vásárolni. Fejezzük ki az η valószínűségi változót a ξ segítségével. Mennyi annak az esélye, hogy a pénzem elég 4 kiló narancsra? Mennyi az η várható értéke, és mit fejez ki ez a várható érték? Teljesül az az egyenlőség, hogy $E(\eta) = 1500/E(\xi)$?

c. Határozzuk meg az η változó eloszlásfüggvényét illetve sűrűségfüggvényét! Számoljuk ki az η változó várható értékét közvetlenül a sűrűségfüggvényből is! Azt az eredményt kapjuk, amit az előző pontban?

10. A normális és az exponenciális eloszlás

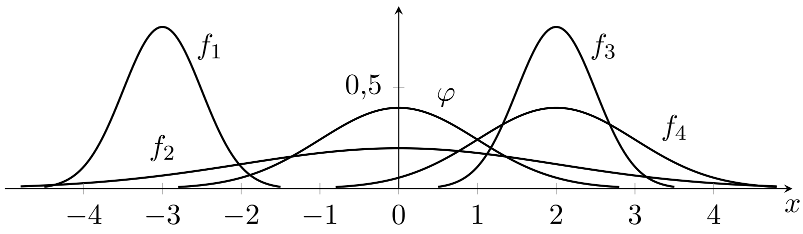
Házi feladatok

10.1. Az alábbi ábrán φ a standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye. Határozzuk meg, hogy az f_1, f_2, f_3, f_4 sűrűségfüggvények közül melyik tartozik az alábbi μ várható értékkel és σ szórással definiált normális eloszlásokhoz. Adjuk meg a kimaradt sűrűségfüggvényhez tartozó várható értéket és szórást is.

a. $\mu = 2, \sigma = 0{,}5$

b. $\mu = 2, \sigma = 1$

c. $\mu = 0, \sigma = 2$



10.2. Legyen ξ egy véletlenszerűen kiválasztott felnőtt ember szisztolés vérnyomása higanymilliméterben (mmHg) kifejezve. A statisztikai adatok alapján ξ egy-egy földrajzi területen lognormális eloszlást követ, ami azt jelenti, hogy az $\ln \xi$ valószínűségi változó normális eloszlású. A paraméterek országonként változóak, például az Egyesült Államokban az $\ln \xi$ változó várható értéke és szórása $\mu = 4{,}78$ illetve $\sigma = 0{,}16$. (Forrás: National Health and Nutrition Examination Survey, 2006.)

a. Az orvosi szakirodalom a 140 mmHg feletti vérnyomást tekinti kórosan magasnak. Ez az amerikai felnőtt népesség mekkora hányadát érinti?

b. Az emberek mekkora hányadának esik a vérnyomása az egészségesnek tekintett tartományba, tehát 90 és 130 mmHg közé?

c. Adjunk meg egy olyan intervallumot, melyre teljesül, hogy a felnőtt népesség 95 százalékának a szisztolés vérnyomása ide esik.

10.3. A valószínűségszámítás kurzust ebben a félévben körülbelül 280 hallgató vette fel, és a korábbi tapasztalatok alapján az egyes hallgatók 65% eséllyel teljesítik a kurzust. Várhatóan hányan fognak majd megbukni? Mennyi a bukott hallgatók számának a szórása? Mennyi a valószínűsége, hogy ebben a félévben legalább 90, de legfeljebb 106 bukás lesz? Milyen t értékre teljesül, hogy 0,9 eséllyel legfeljebb t hallgató bukik meg?

10.4. Egy internetes áruházban az egymást követő vásárlások között véletlen hosszúságú idő telik el, és ez az idő exponenciális eloszlást követ. Azt is tudjuk, hogy a vásárlások átlagosan 2 percenként követik egymást. A webáruházban éppen most vásárolt valaki, és arra vagyunk kíváncsiak, hogy mikor érkezik be a következő rendelés. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a következő rendelés 1 percen belül megérkezik? Mennyi annak az esélye, hogy a következő rendelésre legalább 1, de legfeljebb 2 percet kell várni? Tegyük fel, hogy már 1 órája várunk a következő rendelésre! Mennyi az esélye, hogy ezek után a rendelés 1 percen belül meg fog majd érkezni? (A feladat megoldása **9.4.** sorszámmal szerepel a Youtube-on.)

További gyakorló feladatok

10.5. Az IQ teszteket úgy állítják össze, hogy az eredmény a felnőtt populáción belül normális eloszlást kövessen 100 pont várható értékkel és 15 pont szórással. A felnőtt népesség mekkora hányadának esik az IQ pontszáma 90 és 120 közé? A Mensa egy nemzetközi egyesület, ahol a belépés feltétele a legalább 131 pontos IQ. A népesség hány százaléka felel meg ennek a követelménynek? Mondjunk egy olyan intervallumot, melyre teljesül, hogy az emberek 95 százalékának ebbe az intervallumba esik az IQ pontszáma.

10.6. A ropigyárban a készülő ropik hossza normális eloszlást követ 12 cm várható értékkel és 3 mm szórással. Mennyi az esélye, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott ropi hossza legfeljebb 2 milliméterrel tér el az átlagos értéktől? Mennyi az esélye, hogy a ropi rövidebb 11,5 cm-nél? Mondjunk egy olyan intervallumot, melyre teljesül, hogy a ropik 99 százalékának a hossza ebbe az intervallumba esik.

10.7. Angol tudósok azt vizsgálták, hogy a szavannán élő majmok reggelente milyen eloszlás szerint ébrednek fel, és másznak le a fáról. A megfigyelések alapján azt találták, hogy az ébredési idő egy olyan valószínűségi változó, mely normális eloszlást követ 7 óra várható értékkel és 30 perc szórással. A majmok mekkora hányada kel fel 8 óra után? Adjunk meg egy olyan időintervallumot, melyre teljesül, hogy a majmok 90 százaléka ebben az időintervallumban mászik le a fáról. (Valós kutatás alapján.)

10.8. Feldobok 500 szabályos dobókockát. Mennyi a kapott hatosok számának a várható értéke és szórása? Mennyi annak a valószínűsége, hogy 100-nál több hatos kapok? Adjunk meg egy olyan intervallumot, melyre teljesül, hogy a hatosok száma 95% százalék valószínűséggel ebbe az intervallumba esik.

10.9. Egyes házimacska fajtáknál előfordul a kalikó (fekete-vörös-fehér) színkombináció, ami elég népszerű a macskatartók körében. Egy tenyésztőnek egy fekete színű hím és egy kalikó nőstény macskája van, és az elmúlt évek folyamán 60 kismacska született. A macskák színe genetikai úton öröklődik, és egy fekete hím és egy kalikó nőstény esetén az utódok egymástól függetlenül rendre $1/4$ valószínűséggel lesznek kalikók. Jelölje ξ a tenyésztőnél született kalikó kismacskák számát. Adjuk meg a ξ változó eloszlását, várható értékét és szórását. Mennyi az esélye, hogy a 60 utódból legalább 18 kalikó lett? Milyen t értékre teljesül, hogy $P(\xi \leq t) = 0{,}99$. (Bónusz feladat: hogyan változik a feladat megoldása, ha a hím a kalikó és a nőstény a fekete?)

10.10. Egy biztosítónak 10 ezer ügyfele van, akik egymástól függetlenül 1% valószínűséggel szenvednek el káreseményt egy adott évben. Jelölje ξ a káresemények számát a biztosítottak körében. Határozzuk meg a ξ valószínűségi változó eloszlását, várható értékét és szórását. Mennyi annak az esélye, hogy a káresemények száma 85 és 115 közé esik? Adjunk meg egy olyan t értéket, melyre teljesül, hogy $P(\xi \geq t) = 10\%$.

10.11. Alkalmazható a normális eloszlással való közelítés a **8.1.** vagy a **8.5.** feladatban?

11. A várható érték és a szórás tulajdonságai

Házi feladatok

11.1. Egy játékautomatából egy mozgatható karral lehet plüsállatokat kiemelni, de ez egy kis szerencsét igényel. Az automatában 50 plüsállat van, egy játék 100 forintba kerül, és a próbálkozások egymástól függetlenül 20% valószínűséggel lesznek sikeresek.

a. Várhatóan hány játék alatt fogynak el a plüsállatok az automatából? Mennyi a játékok számának a szórása?

b. Várhatóan mennyi pénz lesz az automatában, mire elfogynak a plüsállatok? Mennyi az automatában összegyűlt pénz szórása?

11.2. Egy vállalat egy hónapra eső nyeresége a havi teljes bevétel és a havi teljes kiadás különbségeként áll elő, ahol a bevétel és a kiadás is valószínűségi változó. A bevétel várható értéke 120 millió forint 30 millió forint szórással, míg a kiadás várható értéke 80 millió forint 20 millió forint szórással. Határozzuk meg az egy hónapra jutó nyereség várható értékét és szórását akkor, ha a bevétel és a kiadás független, illetve akkor, ha a közöttük lévő korrelációs együttható 0,8. A korreláció függvényében írjuk fel formulával és ábrázoljuk grafikonon a nyereség várható értékét és varianciáját.

11.3. Adott egy kötvény és egy részvény. A kötvény a mai napon 1000 forintba kerül, és 8%-os éves hozamot fizet. A részvény jelenlegi ára 2000, és egy év múlva 1900, 2300 vagy 2700 forintot érhet rendre 0,3, 0,5 és 0,2 valószínűségekkel. 3 millió forint áll a rendelkezésünkre, ebből állítunk össze egy portfóliót.

a. Ha a darab részvényt vásárolunk, akkor ez az értékpapírcsomag várhatóan mennyit fog majd érni egy év múlva? Mennyi a portfólió értékének a szórása? Ábrázoljuk a várható értéket és a szórást az a mennyiség függvényében.

b. Hogyan állítsuk össze a portfoliónkat, ha az a célunk, hogy várható értékben 400 ezer forint hozamot realizáljunk?

c. Hány darab részvényt vásároljunk, ha azt szeretnénk, hogy a portfólió jövőbeli értékének a szórása legfeljebb 200 ezer forint legyen? Mennyi ebben az esetben a hozam várható értéke?

További gyakorló feladatok

11.4. Szegeden az éves csapadékmennyiség átlagos értéke 490 mm, szórása 100 mm. Feltehető, hogy a csapadék mennyisége az egyes években független egymástól. Várhatóan mennyi csapadék fog hullani Szegeden a következő három évben összesen? Mennyi a hároméves csapadékmennyiség szórása? Ennyi információ alapján meg tudjuk azt mondani, hogy milyen valószínűséggel fog a három év alatt összesen legalább 1600 mm csapadék lehullani?

11.5. A magyar egyetemisták testtömegének az átlaga 80 kg, a szórása 15 kg. A Károlyi Kollégiumban beszáll a liftbe 8 ember, akikről feltehető, hogy egymástól független a tömegük. Határozzuk meg a 8 egyetemista együttes testtömegének várható értékét és szórását. Ennyi információ birtokában meg tudjuk azt mondani, hogy a 8 ember össztömege mekkora eséllyel éri el a 800 kg-ot, ami a lift maximális teherbírása?

11.6. Egy család 4 kg narancsot és 2 kg banánt vásárol. A két gyümölcs ára tekinthető valószínűségi változónak. A narancs árának a várható értéke 300 Ft, szórása 30 Ft, míg a banán árának a várható értéke 400 Ft, szórása 50 Ft. Várhatóan hány forintot fog majd a család gyümölcsre költeni? Mennyi az elköltött összeg szórása, ha a két gyümölcs ára független egymástól? A korreláció függvényében írjuk fel formulával és ábrázoljuk az elköltött összeg várható értékét és varianciáját.

11.7. Egy tervezett építkezésnél 50 tonna acélra és 10 tonna rézre lesz majd szükség. Az acél és a réz jövőbeli ára valószínűségi változó, melyeknek a várható értéke 700 illetve 1500 dollár/tonna, szórása pedig 20 illetve 80 dollát/tonna. Várhatóan mekkora költséget jelent az építkezéshez szükséges anyagok megvásárlása? Határozzuk meg a költség szórását abban az esetben, ha az acél és a réz ára független egymástól. A korreláció függvényében írjuk fel formulával és ábrázoljuk a teljes költség várható értékét és varianciáját.

11.8. Egy gazdánál 100 mázsa burgonya termett a nyáron, és azon gondolkodik, hogy mit is kezdjen vele. Egyrészt holnap a nagybani piacon el tudja adni akár az egészet is fix 9.000 forintos mázsánkénti áron, és akkor nem kell tovább kínlódnia vele. Másrészt el is tárolhatja a burgonyát, hogy majd tavasszal értékesítse, de ez kockázatos, hiszen nem tudja előre az árakat. A gazda úgy ítéli meg, hogy a burgonya mázsánkénti ára tavasszal várható értékben 12.000 forint lesz 2.500 forintos szórással.

a. Tegyük fel, hogy a gazda a mázsa burgonyát tárol el, a maradékot eladja holnap a nagybanin. Várható értékben mennyi bevétele lesz a 100 mázsa burgonyából? Mennyi a bevétel szórása? Ábrázoljuk a várható értéket és a szórást az a paraméter függvényében. (A pénz időértékétől most tekintsünk el.)

b. Hány mázsa burgonyát tároljon el a gazda tavaszig, ha várható értékben legalább 1.050.000 forint bevételt szeretne elérni?

c. Mennyi burgonyát tároljon el tavaszig, ha a bevétel szórása legfeljebb 75.000 ezer forint lehet? Ekkor mennyi a bevétel várható értéke?

12. A centrális határeloszlás-tétel. Diszkrét valószínűségi változók együttes eloszlása. Lineáris regresszió

Házi feladatok

12.1. Egy Coca-Cola autómatában 50 doboz jéghideg üdítő található. Egy forró nyári napon az emberek átlagosan 5 percenként vásárolnak egy doboz üdítőt, a vásárlások között eltelt idő szórása 3 perc. Várhatóan mennyi idő alatt fogy el az üdítő az autómatából? Mennyi ennek az időnek a szórása? Mennyi a valószínűsége, hogy ez az idő 220 és 270 perc közé esik? Adjunk meg egy olyan t értéket, melyre teljesül, hogy az autómata 99% eséllyel kifogy ennyi idő alatt.

12.2. Feldobok egy szabályos dobokóckát, és legyen ξ a dobott érték kettővel, η pedig a dobott érték hárommal vett maradéka. Adjuk meg a két változó együttes eloszlását és korrelációs együtthatóját. Független egymástól a ξ és az η változó?

12.3. Tekintsük a **11.2.** feladatot, és tegyük fel, hogy a bevétel és a kiadás közötti korrelációs együttható értéke +0,8. Lineáris regresszió segítségével fejezzük ki a bevételt a kiadás függvényeként. A regressziós modellben mennyi a hibatag szórása? Milyen becslést adhatunk a havi bevételre akkor, ha a havi kiadás 70 millió forint, illetve akkor, ha 90 millió forint volt?

További gyakorló feladatok

12.4. **a.** Feldobok egy szabályos dobókockát. Határozzuk meg a dobott szám várható értékét és szórását.

b. Feldobok 500 szabályos dobókockát. Mennyi a dobott számok összegének a várható értéke és a szórása? Ennek ismeretében meg tudjuk azt mondani, hogy az összeg mekkora valószínűséggel fog mondjuk 1700 és 1800 közé esik? Adjunk meg egy olyan t értéket, melyre teljesül, hogy a dobások összege 95% eséllyel meghaladja a t számot.

12.5. Egy biztosítótársaságnál egy adott típusú biztosítás esetében az egyedi kárértékek egyenletes eloszlást követnek 200 és 400 ezer forint között. Egy adott hónapban 100 egymástól független kárbejelentés érkezik. Mennyi az össz kárérték várható értéke és szórása? Ennyi információ alapján meg tudjuk azt mondani, hogy az össz kárérték mekkora valószínűséggel esik 29 és 31 millió forint közé? Adjunk meg egy olyan t értéket, melyre teljesül, hogy a teljes kárérték 90% eséllyel t alatt marad.

12.6. A repülőgépeknél fontos tényező az utasok és a poggyász teljes tömege. A statisztikai adatok szerint egy-egy utasnak és a személyes poggyászának az együttes tömege egy olyan valószínűségi változó, melynek a várható értéke 100 kg, szórása pedig 25 kg. (A különböző utasok tömege független egymástól.) Tegyük fel, hogy egy repülőgépre 120 utas száll fel. Adjuk meg az utasok és a poggyász teljes tömegének a várható értékét és szórását. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ez a tömeg 12,8 tonna alatt marad? Adjunk meg egy olyan intervallumot, mely 99% valószínűséggel tartalmazza az utasok és a poggyász teljes tömegét.

12.7. Alkalmazhatjuk a centrális határeloszlás-tételt a **11.4.** és a **11.5.** feladatban az utolsó kérdések megválaszolására?

12.8. Adott egy tíz- és egy húszforintos pénzérme. A tízforintos két oldalára 1-et illetve 0-t írnuk, a húszforintos két oldalára pedig 2-t illetve 0-t. Feldobva a két pénzérmét jelölje ξ a dobott értékek közül a nagyobbat, η pedig a kisebbet. (Ha két 0-t dobunk, akkor legyen $\xi = \eta = 0$.) Határozzuk meg a két változó értékkészletét, együttes eloszlását és a marginális eloszlásokat. Mennyi a két változó várható értéke, szórása és korrelációs együtthatója? Független egymástól a két változó?

12.9. A **11.7.** feladatban tegyük fel, hogy az acél és a réz ára közötti korrelációs együttható +0,6. Lineáris regresszió alkalmazásával fejezzük ki a réz árát az acél árának függvényében. A regressziós modellben mennyi a hibatag szórása? Milyen becslést adhatunk a réz árára, ha az acél tonnánkénti ára 650 dollár? És ha az acél ára 800 dollár tonnánként?

Megoldások

1.1. **a.** 6; $2/6$; $4/6$; **b.** $2\cdot 3!/5!$; $2\cdot 2\cdot 3!/5!$; $3\cdot 3!\cdot 2!/5!$

1.2. $5!/(9\cdot 10^4)$; $(9\cdot 10^4 - 9\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6)/(9\cdot 10^4)$.

1.3. $3!\cdot 4!\cdot 2!/9!$; $(3!\cdot 4\cdot 2\cdot 4! + 3!\cdot 2\cdot 4\cdot 4! + 3!\cdot 4\cdot 3\cdot 4!)/9!$

1.4. **a.** $(5^3\cdot 1)/6^4$; $(5^{n-1}\cdot 1)/6^n$; **b.** $(6^4-5^4)/6^4$; $(6^n-5^n)/6^n$; **c.** 13.

1.5. **a.** $1/6$; **b.** $5/6$; **c.** $1/6$; **d.** $11/36$; **e.** $10/36$.

1.6. **a.** $2/12$; **b.** $8/12$; **c.** $6/12$.

1.7. $(26\cdot 2)\cdot 25!/27!$; $(16\cdot 2)\cdot 25!/27!$.

1.8. $2!\cdot 4!\cdot 2!/12!$; $6\cdot(1\cdot 4\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 1)\cdot 5!/12!$

1.9. összes eset $= (23\cdot 26\cdot 26)\cdot 10^3 = 15.548.000$;
mind mássalhangzó és mind páratlan $= (19\cdot 21\cdot 21)\cdot 5^3 = 1.047.375$;
P(mind mássalhangzó és mind páratlan) $= 1.047.375/15.548.000 \approx 0{,}067$;
P(van magánhanzó vagy van páros) $= (15.548.000 - 1.047.375)/15.548.000 = 0{,}933$.

1.10. $1/6^6$; $7/6^6$; $(6^6-6!)/6^6$.

1.11. $365/365^{30}$; $(365^{30} - 365\cdot 364\cdot\ldots\cdot 336)/365^{30} \approx 0{,}706 = 70{,}6\%$.

1.12. **a.** $(5\cdot 5\cdot 3)/8^3$; $(5^{n-1}\cdot 3)/8^n$; **b.** $(8^3-5^3)/8^3$; $(8^n-5^n)/8^n$; **c.** 7.

2.1. **a.** $\binom{4}{2}\binom{28}{4}/\binom{32}{6}$; **b.** $\binom{8}{3}\binom{8}{2}\binom{8}{1}/\binom{32}{6}$; **c.** $\left[\binom{32}{6}-\binom{28}{6}\right]/\binom{32}{6}$; **d.** $\left[\binom{32}{6}-\binom{21}{6}\right]/\binom{32}{6}$.

2.2. **a.** $\binom{6}{2}4^2 28^4/32^6$; **b.** $\binom{6}{3}\binom{3}{2}8^3 8^2 8/32^6$; **c.** $(32^6-28^6)/32^6$; **d.** $(32^6-21^6)/32^6$.

2.3. $\binom{9}{4}\binom{5}{3}\binom{2}{2} = 1260$; $\left[\binom{7}{2}\binom{5}{3}\binom{2}{2} + \binom{7}{4}\binom{3}{1}\binom{2}{2} + \binom{7}{4}\binom{3}{3}\right]/1260$.

2.4. **a.** $\binom{n}{2}/\binom{100}{2}$; 90; **b.** $\left[\binom{100}{2}-\binom{100-n}{2}\right]/\binom{100}{2}$; 55.

2.5. **a.** $\binom{5}{4}\binom{6}{3}/\binom{11}{7}$; **b.** $\binom{5}{4}\binom{4}{2}\binom{2}{1}/\binom{11}{7}$; **c.** $\left[\binom{11}{7}-\binom{9}{7}\right]/\binom{11}{7}$; **d.** 1; **e.** $\left[\binom{5}{4}\binom{4}{3}+\binom{5}{3}\binom{4}{4}\right]/\binom{11}{7}$.

2.6. **a.** $2^3 2^2/4^5$; **b.** $\binom{5}{3}2^3 2^2/4^5$; **c.** $\binom{5}{2}\binom{3}{2}2^2 1^2 1/4^5$; **d.** $3^5/4^5$; **e.** $(4^5-1^5)/4^5$.

2.7. **a.** $\binom{45}{5}/\binom{90}{5}$; **b.** $\binom{45}{2}\binom{45}{3}/\binom{90}{5}$; **c.** $\binom{88}{3}/\binom{90}{5}$; **d.** $\binom{11}{1}\binom{77}{2}/\binom{90}{5}$; **e.** $86/\binom{90}{5}$.

2.8. visszatevés nélkül: **a.** $\binom{4}{2}/\binom{4+n}{2}$; $n\geq 8$; **b.** $\left[\binom{4+n}{2}-\binom{n}{2}\right]/\binom{4+n}{2}$; $n\geq 75$.
visszatevéssel: **a.** $4^2/(4+n)^2$; $n\geq 9$; **b.** $\left[(4+n)^2-n^2\right]/(4+n)^2$; $n\geq 74$.

2.9. **a.** $13\binom{12}{3}\binom{4}{2}4^3/\binom{52}{5}$; **b.** $\binom{13}{2}11\binom{4}{2}\binom{4}{2}4/\binom{52}{5}$; **c.** $13\binom{12}{2}\binom{4}{3}4^2/\binom{52}{5}$; **d.** $13\cdot 12\binom{4}{3}\binom{4}{2}/\binom{52}{5}$;
e. $13\cdot 12\binom{4}{4}4/\binom{52}{5} = 13\cdot 48/\binom{52}{5}$.

3.1. **a.** 0,39; **b.** 0,09; **c.** 0,16; **d.** 0,21; **e.** 0,51.

3.2. **a.** $A_1 \cap B_2$; **b.** $A_1 \setminus C_1$; **c.** $A_1 \cup B_1 \cup C_1$; **d.** $\overline{A_1} \cup \overline{B_1} \cup \overline{C_1}$; **e.** $(A_1 \cap C_3) \cup (A_2 \cap C_2) \cup (A_3 \cap C_1)$.

3.3. A kettő közül egyik esemény valószínűsége sem határozható meg egyértelműen, az események valószínűsége az alábbi korlátok között bármilyen értéket felvehet:

$0{,}5 \leq P(A \cap B) \leq 0{,}7$; $0{,}8 \leq P(A \cup B) \leq 1$.

3.4. **a.** $B_1 = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5$;

$\overline{B_1}$ = valamelyik héten nem nyerünk = $\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3} \cup \overline{A_4} \cup \overline{A_5}$;

b. $B_2 = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4} \cap \overline{A_5}$;

$\overline{B_2}$ = valamelyik héten nyerünk = $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5$;

c. $B_3 = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4} \cap A_5$;

d. $B_4 = A_1 \setminus A_4 = A_1 \cap \overline{A_4}$;

$\overline{B_4}$ = a második héten nem nyerünk vagy a negyediken igen = $\overline{A_1} \cup A_4$;

e. $B_5 = (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap \overline{A_5}) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \overline{A_4} \cap A_5) \cup \cdots \cup (\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5)$.

3.5. **a.** 0,15; **b.** 0,55; **c.** 0,45; **d.** 0,45.

3.6. **a.** 0,5; **b.** 0,15; **c.** 0,4; **d.** 0,4.

3.7. 0,48; 0,17; 0,49.

3.8. **a.** $P(\text{mind előfordul}) = 1 - P(\text{valamelyik nem fordul elő})$

$= 1 - \left[6\left(\frac{5}{6}\right)^{10} - \binom{6}{2}\left(\frac{4}{6}\right)^{10} + \binom{6}{3}\left(\frac{3}{6}\right)^{10} - \binom{6}{4}\left(\frac{2}{6}\right)^{10} + \binom{6}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^{10} - 0\right] \approx 27{,}2\%$;

b. $P(\text{mind előfordul}) = 1 - P(\text{valamelyik nem fordul elő})$

$= 1 - \left[6\left(\frac{35}{36}\right)^{10} - \binom{6}{2}\left(\frac{34}{36}\right)^{10} + \binom{6}{3}\left(\frac{33}{36}\right)^{10} - \binom{6}{4}\left(\frac{32}{36}\right)^{10} + \binom{6}{5}\left(\frac{31}{36}\right)^{10} - \left(\frac{30}{36}\right)^{10}\right] \approx 0{,}00005$.

4.1. 0,2; $\pi/25 \approx 0{,}126$; a különdíj maga után vonja azt, hogy az ugrás sikeres.

4.2. $P(A) = 0{,}75$; $P(B) = 0{,}25$; $P(A|B) = 0{,}75$; nem zárják ki egymást, egyik sem vonja maga után a másikat, de függetlenek egymástól.

4.3. $P(x(1-x) > 5/36) = P(1/6 < x < 5/6) = 2/3$.

4.4. **a.** 0; **b.** 1; **c.** $P(A)$.

4.5. **a.** A főnyeremény 1/2-1/2 eséllyel található az eredetileg megjelölt illetve a kimaradt ajtó mögött. Mindegy, hogy a játékos kitart a választása mellett vagy módosít.

b. A főnyeremény 1/3 eséllyel található az eredetileg megjelölt ajtó, és 2/3 eséllyel a kimaradt ajtó mögött. Érdemes módosítani a választáson.

4.5. $P(A) = 0{,}4$; $P(B) = 0{,}25$; $P(A|B) = 0{,}4$; függetlenek egymástól.

4.6. 0,5; 5/7; az, hogy legfeljebb 5 percet kell várni, maga után vonja azt, hogy az előző szerelvény már legalább 3 perce element.

4.7. 16/25; 16/25; függetlenek egymástól.

4.8. 16/30; 0.

4.9. A lapos tányérok aránya a selejtesek között: $P(A_2|B) = 60/110$.

A leveses és a salátás tányérok együttes aránya a hibátlanok között: $P(A_1 \cup A_3|\overline{B}) = (470 + 380)/1390$.

A selejtesek aránya a lapos tányérok között: $P(B|A_2) = 60/600$.

A selejtesek aránya a nem lapos tányérok között: $P(B|\overline{A}_2) = (30 + 20)/(500 + 400)$.

5.1. **a.** $\binom{7}{2}/\binom{9}{4}$; **b.** $\binom{7}{2}/\binom{8}{3}$; **c.** $\binom{7}{2}/\left[\binom{9}{4} - \binom{7}{4}\right]$.

5.2. **a.** 14,76%; 56,52%; **b.** 46,55%; 48,85%; 4,5%.

5.3. 1/9.

5.4. **a.** $P(A) = 1/2 = P(A|B)$; A és B független egymástól;

b. $P(A) = 5/16$; $P(A|B) = 2/7$; A és B nem független.

5.5. $(7 \cdot 6 \cdot 3)/(10 \cdot 9 \cdot 8)$; $(6 \cdot 3)/(9 \cdot 8)$.

5.6. 2/7.

5.7. **a.** 0,05; 0,09; **b.** $\approx 0{,}111$; $\approx 0{,}333$; $\approx 0{,}555$.

5.8. 0,53; 0,06/0,53; 0,15/0,53; 0,32/0,53; 0.

5.9. 0,2575; $\approx$0,437.

5.10. 0,6; 0,625.

5.11. 3/8; 2/3.

5.12. $\approx$0,32%

5.13. 13%

6.1. **a.** 0,12; **b.** 0,35; **c.** 0,38; **d.** 0,45; utolsó kérdés: $\approx 0{,}184$; $\approx 0{,}737$; $\approx 0{,}079$.

6.2. Visszatevés nélkül: **a.** $4/6 \cdot 2/5 \cdot 3/4$; 3/5; **b.** 2/6; 4/5; igen, függ.

Visszatevéssel: **a.** $4/6 \cdot 2/6 \cdot 4/6$; 4/9; **b.** 2/6; 4/6; nem függ.

6.3. **a.** 7/12; **b.** $(7/12)^2 \cdot (5/12)^2$; $6 \cdot (7/12)^2 \cdot (5/12)^2$; $1 - (5/12)^4$; **c.** 6.

6.4. 0,225.

6.5. 0,096; 0,48.

6.6. **a.** 1/4; **b.** 1/8; **c.** 11/24; **d.** 17/24; utolsó kérdés: 6/11; 3/11; 2/11.

6.7. 28/225; 44.

6.8. 0,31; 0,21; 7.

6.9. **a.** $(5/6)^3 \cdot 1/6$; $(5/6)^{n-1} \cdot 1/6$; **b.** $1 - (5/6)^4$; $1 - (5/6)^n$; **c.** 13.

7.1. Mindent összeget ezer forintban értünk: $R_\xi = \{85, 90, 100, 130, 200\}$, az eloszlás:

k	200	130	100	90	85
$P(\xi = k)$	0,01	0,08	0,26	0,4	0,25

$E(\xi) = 95{,}65$; $D(\xi) = 15{,}79$.

7.2. Jelölje ξ azt, hogy egy 10 fős betegcsoportot hány vizsgálattal lehet letesztelni.

$P(\xi = 1) = P(\text{mindenki egészséges}) = 0{,}99^{10} \approx 0{,}9$,

$P(\xi = 11) = P(\text{van közöttük beteg}) = 1 - P(\text{mindenki egészséges}) \approx 0{,}1$,

$E(\xi) \approx 2$, tehát a 10 fős betegcsoportok átlagosan 2 vizsgálattal tesztelhetőek le, ami átlagosan 2000 dollár költség. Ez 1 főre vetítve átlagosan 200 dollárt jelent.

7.3. Legyen ξ a keletkezett kár nagysága: $P(\xi = 0) = 0{,}999$, $P(\xi = 9.000.000) = 0{,}001$.
A biztosító által kiszabott minimális díj = átlagos kárérték = $E(\xi) = 9.000$.
Legyen c a számunkra elfogadható maximális biztosítási díj. Ekkor:
$u(9.000.000) = 0.999u(9.000.000 + c) + 0.001u(c)$
Az egyenletet megoldva: $c = 17.238$.

7.4. **a.** $a = 0{,}8$; $E(\xi) = 2{,}56$, $D(\xi) \approx 0{,}98$;

b. $a = 0{,}5$; $E(\xi) = 3{,}5$, $D(\xi) \approx 3{,}84$.

7.5. $P(\xi = 0) = 2/6$, $P(\xi = 1) = 3/6$, $P(\xi = 3) = 1/6$, $E(\xi) = 1$, $D(\xi) = 1$.

7.6. **a.** $P(\xi = 0) = 0{,}06$, $P(\xi = 1) = 0{,}29$, $P(\xi = 2) = 0{,}44$, $P(\xi = 3) = 0{,}21$,
$E(\xi) = 1{,}8$, $D(\xi) = \sqrt{0{,}7} \approx 0{,}84$; **b.** $E(50 + 20\xi) = 86$.

7.7. **a.** $P(\xi = 1) = 0{,}4$, $P(\xi = 2) = 0{,}24$, $P(\xi = 3) = 0{,}36$, $E(\xi) = 1,96$, $D(\xi) \approx 0{,}87$,
$P(\xi \leq 2) = 0{,}66$; **b.** $E(30\xi) = 58{,}8$ Ft.

7.8. **a.** Az igazságos ár 500 ezer forint; a kaszínó a működési költségek és a profitcélok miatt ennél magasabb árat fog majd kérni.

b. Ha több játékot is lehet játszani, akkor 450 ezer forintos áron megéri játszani. Ha csak egy játékot lehet játszani, akkor minden a játékos egyéni kockázatvállalási preferenciáin múlik.

c. 250 ezer forint.

8.1. **a.** A ξ binomiális eloszlású $n = 10$ és $p = 0{,}5$ paraméterrel: $R_\xi = \{0, 1, \dots, 10\}$, $P(\xi = k) = \binom{10}{k} 0{,}5^k 0{,}5^{10-k}$, $E(\xi) = 5$, $D(\xi) \approx 1{,}58$, $P(\xi = 5) \approx 0{,}246$.

b. Az η binomiális eloszlású $n = 5$ és $p = 0{,}25$ paraméterrel: $R_\eta = \{0, 1, \dots, 5\}$, $P(\eta = k) = \binom{5}{k} 0{,}25^k 0{,}75^{5-k}$, $E(\xi) = 1{,}25$.

8.2. Legyen ξ a ledobott ejtőernyők száma, ami geometriai eloszlást követ $p = 1/15$ paraméterrel: $R_\xi = \{1, 2, 3, \dots\}$, $P(\xi = 5) = (14/15)^4 \cdot (1/15)$, $P(\xi > 5) = (14/15)^5$, $E(\xi) = 15$.

8.3. Legyen ξ és η a találatok száma a gépi illetve a kézi sorsoláson. A két változó független egymástól és hipergeometrikus eloszlású $N = 35$, $M = 7$ és $n = 7$ paraméterrel: $R_\xi = R_\eta = \{0, 1, \dots, 7\}$, $P(\xi = k) = P(\eta = k) = \binom{7}{k}\binom{28}{7-k} / \binom{35}{7}$.

a. $P(\xi = 4) \approx 0{,}017$, $P(\xi \geq 4) \approx 0{,}018$, $E(\xi) = 7 \cdot 7/35 = 1{,}4$.

b. $P(\xi = 0, \eta = 1 \text{ vagy } \xi = 1, \eta = 0) = P(\xi = 0)P(\eta = 1) + P(\xi = 1)P(\eta = 0) = 0{,}138$,

$P(\xi \geq 4 \text{ vagy } \eta \geq 4) = 1 - P(\xi < 4 \text{ és } \eta < 4) \approx 1 - (1 - 0{,}018)^2 \approx 0{,}034$.

Másik megoldás: $P(\xi \geq 4 \text{ vagy } \eta \geq 4) = P(\xi \geq 4) + P(\eta \geq 4) - P(\xi \geq 4 \text{ és } \eta \geq 4)$ $\approx 2 \cdot 0{,}018 - 0{,}018^2 \approx 0{,}034$.

8.4. Legyen ξ a mutációk száma. Most $P(\xi = 0) = 0{,}135$ és $P(\xi = 0) = e^{-\lambda}$, amiből $\lambda = -\ln 0{,}135 \approx 2$. Ekkor $E(\xi) = 2$ és $P(\xi > 2) = 1 - P(\xi \leq 2) \approx 0{,}68$.

8.5. **a.** A ξ binomiális eloszlású $n = 6$ és $p = 0{,}3$ paraméterrel: $R_\xi = \{0, 1, \dots, 6\}$, $P(\xi = k) = \binom{6}{k} 0{,}3^k 0{,}7^{6-k}$, $E(\xi) = 1{,}8$, $D(\xi) \approx 1{,}12$, $P(1 < \xi < 5) \approx 0{,}57$.

b. $\binom{6}{2} 0{,}3^2 0{,}7^4 \binom{8}{4} 0{,}4^4 0{,}6^4 \approx 0{,}075$.

8.6. Jelölje ξ azt, hogy hanyadik próbálkozásra sikerül kinyitni az ajtót.

a. A változó geometriai eloszlású $p = 1/3$ paraméterrel: $R_\xi = \{1, 2, \dots\}$, $P(\xi = k) = (2/3)^{k-1}(1/3)$, $P(\xi \leq 3) = 1 - (2/3)^3 \approx 0{,}7$, $E(\xi) = 3$, $D(\xi) \approx 2{,}45$.

b. A változó geometriai eloszlású $p = 1/6$ paraméterrel: $R_\xi = \{1, 2, \dots\}$, $P(\xi = k) = (5/6)^{k-1}(1/6)$, $P(\xi \leq 3) = 1 - (5/6)^3 \approx 0{,}42$, $E(\xi) = 6$, $D(\xi) \approx 5{,}48$.

c. A ξ változó nem nevezetes eloszlást követ: $R_\xi = \{1, 2, 3\}$, $P(\xi = 1) = P(\xi = 2) = P(\xi = 3) = 1/3$, $P(\xi \leq 3) = 1$, $E(\xi) = 2$, $D(\xi) \approx 0{,}82$.

8.7. **a.** A ξ változó hipergeometrikus eloszlású $N = 50$, $M = 15$ és $n = 5$ paraméterrel: $R_\xi = \{0, 1, \dots, 5\}$, $P(\xi = k) = \binom{15}{k}\binom{35}{5-k} / \binom{50}{5}$, $E(\xi) = 1{,}5$, $P(\xi \leq 1) = 0{,}52$.

b. Legyen ξ_1, ξ_2, ξ_3 a selejtes darabok száma az egyes napokon. Ezek független és azonos eloszlású változók, tehát

$P(\xi_1 \leq 1, \xi_2 \leq 1, \xi_3 \leq 1) = P(\xi_1 \leq 1)P(\xi_2 \leq 1)P(\xi_3 \leq 1) = 0{,}52^3$,

$P(\text{valamelyik napon 1-nél több selejt}) = 1 - 0{,}52^3$.

8.8. Legyen ξ a kihúzott piros golyók száma, η pedig annak a húzásnak a sorszáma, amikor először kapunk piros golyót.

a. A ξ binomiális eloszlású $n = 3$ és $p = 0{,}4$ paraméterrel: $R_\xi = \{0, 1, 2, 3\}$, $P(\xi = k) = \binom{3}{k} 0{,}4^k 0{,}6^{3-k}$, $E(\xi) = 1{,}2$, $P(\xi = 2) = 0{,}288$.

b. A ξ hipergeometrikus eloszlású $N = 10$, $M = 4$ és $n = 3$ paraméterrel: $R_\xi = \{0, 1, 2, 3\}$, $P(\xi = k) = \binom{4}{k}\binom{6}{3-k}/\binom{10}{3}$, $E(\xi) = 1{,}2$, $P(\xi = 2) = 0{,}3$.

c. Az η geometriai eloszlású $p = 0{,}4$ paraméterrel: $R_\xi = \{1, 2, \dots\}$, $P(\xi = k) = 0{,}6^{k-1} 0{,}4$, $E(\xi) = 1/0{,}4 = 2{,}5$, $P(\xi = 2) = 0{,}24$.

8.9. Legyen ξ az egy órára jutó lekérdezések száma. Most $E(\xi) = 5$, tehát $\lambda = 5$. Ekkor $P(\xi = 3) \approx 0{,}14$ és $D(\xi) = \sqrt{5}$.

9.1. **a.** $a = 2$; $R_\xi = [1, \infty)$.

b. $E(\xi) = 2$; $D(\xi) = \infty$.

9.2. **a.** $R_\xi = [1, 4]$; $P(\xi \le 2) \approx 0{,}26$; $P(\xi \ge 3) \approx 0{,}4$; $P(\xi \le 2) = P(\xi < 2)$.

b.

$$F_\xi(t) = \begin{cases} 0\,, & t < 1\,, \\ \big(x^{3/2} - 1\big)/7\,, & 1 \le t \le 4\,, \\ 1\,, & t > 4\,. \end{cases}$$

$q_{25\%} = 1{,}96$; $q_{50\%} = 2{,}73$; $q_{75\%} = 3{,}39$; ezek az értékek négy azonos létszámú részre bontják fel a teljes populációt.

9.3. **a.** Legyen ξ a szerva sebessége! $E(\xi) = 54$; $D(\xi) = \sqrt{12}$; $P(\xi > 50) = 5/6$.

b. $R_\eta = [0{,}4, 0{,}5]$; $P(\eta < 0{,}48) = P(\xi > 50) = 5/6$.

Ha az η változó egyenletes eloszlású lenne a $[0{,}4, 0{,}5]$ intervallumon, akkor teljesülne a $P(\eta < 0{,}48) = 0{,}8$ egyenlőség. Ez nem teljesül, tehát η nem egyenletes eloszlású.

c. $E(\eta) = 0{,}446$; $D(\eta) = 0{,}029$.

d.

$$F_\eta(t) = \begin{cases} 0\,, & t < 0{,}4\,, \\ 5 - 2/t\,, & 0{,}4 < t < 0{,}5\,, \\ 1\,, & t > 0{,}5\,. \end{cases} \qquad f_\eta(t) = \begin{cases} 0\,, & t < 0{,}4\,, \\ 2/t^2\,, & 0{,}4 < t < 0{,}5\,, \\ 0\,, & t > 0{,}5\,. \end{cases}$$

9.4. Lásd a **10.4.** feladat megoldását!

9.5. $R_\xi = [0, 1]$; $P(0{,}5 \le \xi \le 1{,}5) = P(\xi > 0{,}5) \approx 0{,}65$; $E(\xi) = 0{,}6$; $D(\xi) \approx 0{,}26$.

9.6. $R_\xi = [1, 2]$; $P(0{,}5 \le \xi \le 1{,}5) = P(\xi < 1{,}5) \approx 0{,}58$; $E(\xi) = 1/\ln 2$; $D(\xi) \approx 0{,}29$.

9.7. $a = 0{,}08$; $R_\xi = [-1, 4]$;

$$F_\xi(t) = \begin{cases} 0, & t < -1, \\ 0{,}04(t+1)^2 & -1 \le t \le 4, \\ 1, & t > 4. \end{cases}$$

$q_{1\%} = -0{,}5$.

9.8. $a = 1{,}25$; $R_\xi = [1, 5]$;

$$F_\xi(t) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ 1{,}25 - 1{,}25/t, & 1 \le t \le 5, \\ 1, & t > 5. \end{cases}$$

$q_{50\%} = 5/3$.

9.9. **a.**

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 1/200, & 300 \le x \le 500, \\ 0, & \text{különben}; \end{cases}$$

$E(\xi) = 400$; $D(\xi) \approx 57{,}74$; $P(\xi < 375) = 37{,}5\%$.

b. $\eta = 1500/\xi$; $P(\eta \ge 4) = P(\xi \le 375) = 37{,}5\%$;
$E(\eta) = E(1500/\xi) = 7{,}5 \ln(5/3) \approx 3{,}83$;
1500 forintból átlagosan 3,83 kiló narancsot vehetünk; $1500/E(\xi) = 3{,}75 \ne E(\eta)$.

c.

$$F_\eta(t) = \begin{cases} 0, & t < 3, \\ 2{,}5 - 7{,}5/t, & 3 \le t \le 5, \\ 1, & t > 5. \end{cases} \qquad f_\eta(t) = \begin{cases} 0, & t < 3, \\ 7{,}5/t^2, & 3 \le t \le 5, \\ 0, & t > 5. \end{cases}$$

10.1. **a.** f_3; **b.** f_4; **c.** f_2. Kimaradt sűrűségfüggvény (f_1): $\mu = -3$, $\sigma = 0{,}5$.

10.2. 16%; 67%; $[87, 163]$.

10.3. 98; 8; 0,68; 108.

10.4. $1 - e^{-1/2}$; $e^{-1/2} - e^{-1}$; $1 - e^{-1/2}$.

10.5. 65,6%; 2%; $[70{,}6, 129{,}4]$.

10.6. 0,495; 0,048; $[11{,}23 \text{ cm}, 12{,}77 \text{ cm}]$.

10.7. 2,23%; $[6{,}18, 7{,}82] = [6 \text{ óra } 11 \text{ perc}, 7 \text{ óra } 49 \text{ perc}]$.

10.8. 83,3; 8,3; 0,023; $[67, 100]$;

10.9. Binomiális $n = 60$ és $p = 1/4$ paraméterrel; 15; 3,35; 18,6%; $t \approx 23$.

10.10. Binomiális $n = 10.000$ és $p = 0{,}01$ paraméterrel; 100; 9,95; 87%; $t \approx 112{,}7$.

10.11. Nem, ugyanis túl alacsony az n paraméter értéke.

11.1. **a.** Jelölje ξ_i azt, hogy hanyadik próbálkozásra vették ki az i-dik plüsállatot. Most $\xi_1, \dots, \xi_{50}$ független és geometriai eloszlást követ $p = 0{,}2$ paraméterrel, ezért:

$E(\xi_1) = \cdots = E(\xi_{50}) = 1/p = 5$; $D(\xi_1) = \cdots = D(\xi_{50}) = \sqrt{1-p}/p \approx 4{,}47$.

Legyen $\eta = \xi_1 + \cdots + \xi_{50}$ a játékok össz száma. Ekkor: $E(\eta) = 250$; $D(\eta) \approx 31{,}6$.

b. A teljes árbevétel 100η, és $E(100\eta) = 25.000$; $D(100\eta) \approx 3160$.

11.2. A profit $\xi - \eta$, ahol legyen ξ és η a bevétel illetve a kiadás millió forintban számolva.

$E(\xi - \eta) = E(\xi) - E(\eta) = 40$; a várható érték nem függ a korrelációs együtthatótól.

$D^2(\xi - \eta) = D^2(\xi) + D^2(\eta) - 2D(\xi)D(\eta)\operatorname{corr}(\xi, \eta) = 1300 - 1200\operatorname{corr}(\xi, \eta)$.

Ha ξ és η független, akkor $\operatorname{corr}(\xi, \eta) = 0$, tehát $D(\xi - \eta) = \sqrt{1300}$.

Ha $\operatorname{corr}(\xi, \eta) = 0{,}8$, akkor $D(\xi - \eta) = \sqrt{340}$.

11.3. Legyen ξ és η a részvény illetve a kötvény ára egy év múlva. Ekkor:

$E(\xi) = 2260$; $D(\xi) = 280$; $E(\eta) = 1080$; $D(\eta) = 0$; $\operatorname{corr}(\xi, \eta) = 0$.

a. A portfolió értéke egy év múlva: $a\xi + (3000 - 2a)\eta$;

$E(a\xi + (3000 - 2a)\eta) = a \cdot 2260 + (3000 - 2a) \cdot 1080 = 100a + 3.240.000$;

$D^2(a\xi + (3000 - 2a)\eta) = a^2 \cdot 280^2 + (3000 - 2a)^2 \cdot 0^2 = 78.400a^2$;

$D(a\xi + (3000 - 2a)\eta) = 280a$.

b. $a = 1600$ darab részvényt és $3000 - 2a = -200$ kötvényt kell vásárolni, azaz fel kell venni 200 ezer forint hitelt.

c. $a \leq 714$; $a = 714$ esetén $E(a\xi + (3000 - 2a)\eta) = 3.311.400$.

11.4. 1470 mm; $\approx$173 mm; nem tudjuk.

11.5. 640 kg; $\approx$42,43 kg; nem tudjuk.

11.6. Legyen ξ és η a narancs és a banán kilónkénti ára. Ekkor a család $4\xi + 2\eta$ forintot fizet a kasszánál.

$E(4\xi + 2\eta) = 4 \cdot 300 + 2 \cdot 400 = 2000$;

$D^2(4\xi + 2\eta) = 4^2 \cdot 30^2 + 2^2 \cdot 50^2 + 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 30 \cdot 50 \cdot \operatorname{corr}(\xi, \eta) = 24.400 + 24.000\operatorname{corr}(\xi, \eta)$.

Ha az árak függetlenek, akkor $\operatorname{corr}(\xi, \eta) = 0$, tehát $D(4\xi + 2\eta) \approx 156$.

11.7. Legyen ξ és η az acél és a réz ára (dollát/tonna). A teljes anyagköltség $50\xi + 10\eta$.

$E(50\xi + 10\eta) = 50 \cdot 700 + 10 \cdot 1500 = 50.000$;

$D^2(50\xi + 10\eta) = 50^2 \cdot 20^2 + 10^2 \cdot 80^2 + 2 \cdot 50 \cdot 10 \cdot 20 \cdot 80 \cdot \operatorname{corr}(\xi, \eta)$
$= 1.640.000 + 1.600.000\operatorname{corr}(\xi, \eta)$.

Ha az árak függetlenek, akkor $\operatorname{corr}(\xi, \eta) = 0$, tehát $D(50\xi + 10\eta) \approx 1280$.

11.8. Legyen ξ és η a burgonya mázsánkénti ára tavasszal illetve most. Ekkor:

$E(\xi) = 12.000$; $D(\xi) = 2.500$; $E(\eta) = 9.000$; $D(\eta) = 0$; $\operatorname{corr}(\xi, \eta) = 0$.

a. A bevétel nagysága: $a\xi + (100 - a)\eta$;

$E(a\xi + (100 - a)\eta) = a \cdot 12.000 + (100 - a) \cdot 9.000 = 3.000a + 900.000$;

$D^2(a\xi + (100 - a)\eta) = a^2 \cdot 2.500^2 + (100 - a)^2 \cdot 0^2 = 6.250.000a^2$;

$D(a\xi + (100 - a)\eta) = 2.500a$.

b. $a \geq 50$.

c. $a \leq 30$; $a = 30$ esetén $E(a\xi + (100 - a)\eta) = 990.000$.

12.1. 250 perc; $\approx$21,21 perc; 0,75; $t = 299{,}3$.

12.2. Az együttes eloszlás és a marginális eloszlások:

$\xi \backslash \eta$	0	1	2	ξ
0	1/6	1/6	1/6	1/2
1	1/6	1/6	1/6	1/2
η	1/3	1/3	1/3	1

$E(\xi) = 0{,}5$; $D(\xi) = 0{,}5$; $E(\eta) = 1$; $D(\eta) = 0{,}82$; $\operatorname{Cov}(\xi, \eta) = 0$; $\operatorname{corr}(\xi, \eta) = 0$; függetlenek.

12.3. bevétel $\approx 1{,}2 \cdot$ kiadás $+ 24$; 12; 108; 132.

12.4. **a.** Legyen ξ a dobott érték, $E(\xi) = 3{,}5$, $D(\xi) = 1{,}71$.

b. Legyenek $\xi_1, \ldots, \xi_{500}$ a dobott értékek. $E(\xi_1 + \cdots + E\xi_{500}) = 500E(\xi_1) = 1750$;

$D^2(\xi_1 + \cdots + \xi_{500}) = 500D^2(\xi_1) = 1458$, $D(\xi_1 + \cdots + \xi_{500}) = \sqrt{500}D(\xi_1) = 38{,}2$;

$P(1700 \leq \xi_1 + \cdots + \xi_{500} \leq 1800) \approx 0{,}81$, $t = 1687$.

12.5. Jelölje ξ_i az i-dik kárértéket ezer forintban kifejezve.

$E(\xi_i) = (400 + 200)/2 = 300$; $D(\xi_i) = (400 - 200)/\sqrt{12} \approx 57{,}74$.

$E(\xi_1 + \cdots + \xi_{100}) = 100 \cdot 300 = 30.000 = 30$ millió;

$D(\xi_1 + \cdots + \xi_{100}) \approx \sqrt{100} \cdot 57{,}74 = 577{,}4$ ezer;

$P(29.000 \leq \xi_1 + \cdots + \xi_{100} \leq 31.000) \approx 0{,}92$, $t = 30.740 = 30{,}74$ millió.

12.6. 12.000 kg; 273,86 kg; 0,998; $[11.295 \text{ kg}, 12.705 \text{ kg}]$.

12.7. Nem, ugyanis túl alacsony az összegek tagszáma.

12.8. Az együttes eloszlás és a marginális eloszlások:

$\eta\backslash\xi$	0	1	2	η
0	1/4	1/4	1/4	3/4
1	0	0	1/4	1/4
ξ	1/4	1/4	1/2	1

$E(\xi) = 1{,}25$; $D(\xi) = 0{,}83$; $E(\eta) = 0{,}25$; $D(\eta) = 0{,}43$; $\mathrm{Cov}(\xi, \eta) = 0{,}19$; $\mathrm{corr}(\xi, \eta) = 0{,}53$; nem függetlenek.

12.9. réz ára $\approx 2{,}4 \cdot$ acél ára $- 180$; 16; 1380; 1740.