Valószínűségszámítás

Pap Gyula

Szegedi Tudományegyetem

2010/2011 tanév, II. félév

Ajánlott irodalom:

- RÉNYI ALFRÉD
  Valószínűségszámítás
  Tankönyvkiadó, 1968.
- CSÖRGŐ SÁNDOR
  Fejezetek a valószínűségelméletből
  Polygon, 2010.
- WILLIAM FELLER
  Bevezetés a valószínűségszámításba és alkalmazásaiba
  Műszaki Könyvkiadó, 1978.
- BOGNÁR JÁNOSNÉ, MOGYORÓDI JÓZSEF, PRÉKOPA ANDRÁS, RÉNYI ALFRÉD, SZÁSZ DOMOKOS
  Valószínűségszámítás feladatgyűjtemény
  Tankönyvkiadó, 1971.

Ajánlott irodalom:

- SOLT GYÖRGY
  Valószínűségszámítás
  Műszaki Könyvkiadó, 1969.
- DENKINGER GÉZA
  Valószínűségszámítás
  Tankönyvkiadó, 1982.
- DENKINGER GÉZA
  Valószínűségszámítás példatár
  Tankönyvkiadó, 1971.
- PAP GYULA
  Előadáskövető anyagok és feladatok
  http://www.math.u-szeged.hu/~papgy/

1. Véletlen kísérletek, eseményalgebrák

Véletlen események

Valószínűsége **véletlen eseményeknek** van,

- melyekről nem tudjuk előre megmondani, hogy bekövetkeznek-e, vagy sem;
- és amelyek
  - vagy **véletlen jelenségek** megfigyelésével kapcsolatosak (amikor a körülményeket nem tudjuk befolyásolni),
  - vagy pedig **véletlen kimenetelű kísérletekkel** kapcsolatosak (amikor befolyásolni tudjuk a körülményeket).

Példák:

- Minőségellenőrzés: n termékből kiválasztunk m darabot ($m \leqslant n$), és megszámoljuk, hogy hány selejtes van; **lehetséges kimenetelek:** az $\Omega := \{0, 1, 2, \ldots, m\}$ halmaz elemei;
- Hagyományos lottó: megjelölünk 5 számot 90-ből, és megszámoljuk, hogy hány találatunk van; **lehetséges kimenetelek:** az $\Omega := \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaz elemei;
- Ragályos fertőzés terjedése, csapadékmennyiség alakulása, szeizmográf mozgása, sorhosszúság alakulása pénztáraknál, szerencsejátékok, tőzsdei áringadozások.

1. Véletlen kísérletek, eseményalgebrák

- **Elemi események:** a kísérlet/megfigyelés lehetséges kimenetelei.
- **Eseménytér:** az elemi események halmaza; jelölés: Ω.
- **Esemény:** az eseménytér bizonyos $A \subset \Omega$ részhalmaza, amit úgy értünk, hogy ha az $\omega \in \Omega$ elemi esemény következik be, akkor
  - $\omega \in A$ esetén bekövetkezik az A esemény is,
  - $\omega \notin A$ esetén az A esemény nem következik be.
- **Biztos esemény:** amely mindig bekövetkezik; be lehet azonosítani az $\Omega \subset \Omega$ részhalmazzal.
- **Lehetetlen esemény:** amely sohasem következik be; be lehet azonosítani az $\emptyset \subset \Omega$ üres részhalmazzal.

Logikai műveletek eseményekkel

- Minden A eseménnyel kapcsolatban tekinthetjük az A **ellentett (komplementer) eseményét:** ez pontosan akkor következik be, amikor az A esemény nem következik be; jelölése: $\overline{A}$.
- Az A és B események **összege (uniója)** az az esemény, amely pontosan akkor következik be, amikor az A és B események közül legalább az egyik bekövetkezik; jelölése: $A+B$ vagy $A \cup B$.
- Az A és B események **szorzata (metszete)** az az esemény, amely pontosan akkor következik be, amikor az A és B események mindegyike bekövetkezik; jelölése: $A \cdot B$ vagy $A \cap B$.
- Az A és B események **különbsége** az az esemény, mely pontosan akkor következik be, amikor az A esemény bekövetkezik, a B esemény pedig nem; jelölése: $A - B$ vagy $A \setminus B$.

A logikai műveletek tulajdonságai

- kommutativitás: $$A + B = B + A,$$ $$A \cdot B = B \cdot A.$$
- asszociativitás: $$A + (B + C) = (A + B) + C,$$ $$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C.$$
- idempotencia: $$A + A = A,$$ $$A \cdot A = A.$$
- disztributivitás: $$A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C),$$ $$A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C).$$
- de Morgan-féle azonosságok: $$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B},$$ $$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}.$$
- különbség: $$A - B = A \cdot \overline{B}.$$

1. Véletlen kísérletek, eseményalgebrák

Diszjunkt események

Azt mondjuk, hogy az A és B események **diszjunktak (kizárják egymást)**, ha egyszerre nem következhetnek be.

Az A és B események akkor és csak akkor diszjunktak, ha $A \cdot B = \emptyset$.

$\Rightarrow$

Azt mondjuk, hogy az A esemény **maga után vonja** a B eseményt, ha az A esemény bekövetkezése esetén mindig bekövetkezik a B esemény is; jelölése: $A \Rightarrow B$.

A következő állítások ekvivalensek:

- $A \Rightarrow B$;
- $A \subset B$;
- $\overline{B} \subset \overline{A}$;
- $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$.

Eseményalgebra

Egy Ω eseménytér bizonyos eseményeiből álló $\mathcal{A}$ rendszert **eseményalgebrának** nevezünk, ha tartalmazza a biztos eseményt, és zárt a komplementerképzésre és a véges unióképzésre.

Például Ω összes részhalmazainak $\mathcal{A} := 2^{\Omega}$ rendszere

Ha $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ eseményalgebra, akkor $\mathcal{A}$ tartalmazza a lehetetlen eseményt is, és zárt a különbségképzésre és a véges metszetképzésre is.

Természetes az a feltevés, hogy egy kísérlettel kapcsolatos események rendszere eseményalgebrát alkot.

σ-algebra

Egy eseményalgebrát σ**-algebrának** nevezünk, ha zárt a megszámlálható unióképzésre.

Példák:

1. Egy pénzdarab feldobása esetén

$$\Omega = \{\text{fej}, \text{írás}\}.$$

De lehet a fejhez a 0, az íráshoz pedig az 1 számot hozzárendelni, és így

$$\Omega = \{0, 1\}.$$

Nyilván

$$\mathcal{A} = 2^{\Omega} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \Omega\}.$$

Ekkor az elemi események száma: $|\Omega| = 2$, az összes események száma pedig $|2^{\Omega}| = 4$.

1. Véletlen kísérletek, eseményalgebrák

2. n-szer **egymás után dobva** egy pénzdarabbal:

$$\Omega = \big\{\omega = (a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_1, a_2, \ldots, a_n \in \{0, 1\}\big\}.$$

Ekkor $|\Omega| = 2^n$, $|2^\Omega| = 2^{2^n}$.

Ha n darab egyforma pénzdarabot **egyidőben dobunk fel**, akkor is lehet ugyanezt az eseményteret tekinteni, hiszen a kísérlet kimenetelét nem változtatja meg, ha megszámozzuk a pénzdarabokat. De lehet csak a megkülönböztethető kimenetelekre szorítkozni: ezek száma $n + 1$. Az első eseménytér általában alkalmasabb, mert például szabályos pénzdarab esetén az elemi események egyforma esélyűek!

3. Egy zsákban n különböző színű golyó van. Kihúzunk ezek közül k darabot; négy lehetőség van aszerint, hogy **visszatevéssel** vagy **visszatevés nélkül** húzunk (az utóbbi esetben $k \leqslant n$ szükséges), és aszerint, hogy a **sorrend számít** vagy a **sorrend nem számít**.

   Ez a kísérlet ekvivalens azzal a kísérlettel, amikor n rekeszbe helyezünk el k tárgyat; az előbbi négy lehetőség annak felel meg, hogy egy rekeszbe több tárgy is kerülhet vagy csak egy, illetve a tárgyak meg vannak különböztetve, vagy nem.

1. Véletlen kísérletek, eseményalgebrák

	sorrend számít (variáció)	sorrend nem számít (kombináció)	
visszatevés nélkül (ismétlés nélkül)	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$	egy rekeszbe legfeljebb egy tárgy kerülhet
visszatevéssel (ismétléses)	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$	egy rekeszbe több tárgy is kerülhet
	a tárgyak különbözőek	a tárgyak nem különböznek	

- Ha n különböző elem közül húzunk visszatevés nélkül úgy, hogy a sorrend számít, és kihúzzuk az összes n elemet (ami azzal ekvivalens, hogy n elemet sorbaállítunk; ezeket **permutációknak** nevezzük), akkor a lehetőségek száma

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n,$$

hiszen az első húzásnál még n lehetőség van, a másodiknál $n-1$, stb., és ezek szorzata adja az eredményt.

- Ha n különböző elem közül k elemet húzunk visszatevés nélkül (ahol $k \leqslant n$) úgy, hogy a sorrend számít (ezeket **ismétlés nélküli variációknak** nevezzük), akkor a lehetőségek száma

$$n(n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!},$$

amit az előzőhöz hasonló gondolatmenettel bizonyíthatunk.

1. Véletlen kísérletek, eseményalgebrák

- Ha n különböző elem közül k elemet húzunk visszatevéssel úgy, hogy a sorrend számít (ezeket **ismétléses variációknak** nevezzük), akkor a lehetőségek száma
$$n^k,$$
hiszen minden húzásnál n lehetőség van.
- Ha n különböző elem közül k elemet húzunk visszatevés nélkül (ahol $k \leqslant n$) úgy, hogy a sorrend nem számít (ezeket **ismétlés nélküli kombinációknak** nevezzük), akkor a lehetőségek száma
$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!},$$
hiszen a megfelelő ismétlés nélküli variációkat úgy lehet megkapni, hogy a kihúzott k elemet az összes lehetséges módon sorbarakjuk; ezek száma pedig mindig $k!$.

- Ha n különböző elem közül k elemet húzunk visszatevéssel úgy, hogy a sorrend nem számít (ezeket **ismétléses kombinációknak** nevezzük), akkor a lehet?ségek száma

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

Ezt úgy lehet belátni, hogy a kísérlet kimeneteleihez egyértelműen hozzá lehet rendelni egy olyan sorozatot, mely $n-1$ darab egyesből és k darab nullából áll, mégpedig úgy, hogy az első egyes elé írt nullák száma (ami 0 is lehet) jelenti az első fajta elemből húzottak számát, az első és második egyes közé írt nullák száma jelenti a második fajta elemből húzottak számát, stb., az $(n-1)$-edik egyes után írt nullák száma jelenti az n-edik fajta elemből húzottak számát; az ilyen nulla–egy sorozatok száma pedig nyilván $\binom{n+k-1}{k}$, hiszen azt kell megmondani, hogy az $n+k-1$ hely közül melyik k helyre kerüljön nulla.

1. Véletlen kísérletek, eseményalgebrák

4. Adva van n kártya; ezeket osztjuk szét k játékos között úgy, hogy sorban $n_1, n_2, \ldots, n_k$ kártyát kapjanak, ahol $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$, és az egy játékoshoz kerülő lapok sorrendje nem számít (ezeket **ismétléses permutációknak** nevezzük). Ekkor az eseménytér elemeinek száma
$$|\Omega| = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_k!},$$
hiszen a kártyák $n!$ számú permutációit úgy lehet ezekből a leosztásokból megkapni, hogy az egy játékoshoz került n_1, n_2, $\ldots$, n_k kártyát tetszőleges sorrendbe helyezzük.
5. Addig dobálunk egy érmével, míg az első fejet sikerül elérni. Ekkor
$$\Omega = \{\mathrm{f}, \mathrm{if}, \mathrm{iif}, \mathrm{iiif}, \ldots, \mathrm{i}_\infty\},$$
ahol i_∞ azt a lehetséges kimenetelt jelöli, amikor csak írást dobunk a végtelenségig.

Gyakoriság, relatív gyakoriság

Ha egy A eseménnyel kapcsolatban n darab véletlen, független kísérletetet hajtunk végre, akkor A **gyakorisága** az a szám, ahányszor A bekövetkezik; ez egy **véletlen mennyiség**, melynek lehetséges értékei: $0, 1, \ldots, n$; jelölése: $k_n(A)$.

Az A esemény **relatív gyakorisága:** $r_n(A) := \dfrac{k_n(A)}{n}$; ez is **véletlen mennyiség**, melynek lehetséges értékei: $0, \dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, \ldots, 1$;

Tapasztalat:

ha n-et növeljük, azaz egyre több kísérletet hajtunk végre, akkor az A esemény relatív gyakorisága egyre kisebb kilengésekkel ingadozik egy $\mathrm{P}(A)$ szám körül; ezt nevezzük A **valószínűségének.**

Relatív gyakoriság tulajdonságai

- $0 \leqslant r_n(A) \leqslant 1$ tetszőleges A esemény esetén.
- $r_n(\emptyset) = 0$, $r_n(\Omega) = 1$.
- ha A és B egymást kizáró események, akkor
$$r_n(A \cup B) = r_n(A) + r_n(B).$$
- ha $A_1, A_2, \ldots$ páronként egymást kizáró események, akkor
$$r_n\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} r_n(A_j).$$
- $r_n(\overline{A}) = 1 - r_n(A)$ tetszőleges A esemény esetén.
- ha $A \subset B$ események, akkor $r_n(A) \leqslant r_n(B)$.

Valószínűségi mező

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ hármas, ahol

- Ω egy nemüres halmaz (az eseménytér);
- $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ az Ω bizonyos részhalmazaiból álló σ-algebra (az események rendszere);
- $\mathrm{P} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ olyan leképezés (halmazfüggvény), melyre
  1. $\mathrm{P}(A) \in [0, 1]$ tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ esetén,
  2. $\mathrm{P}(\Omega) = 1$,
  3. ha $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ páronként diszjunktak, akkor
  $$\mathrm{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_j).$$
  (Ezt a tulajdonságot σ**-additivitásnak** nevezzük).

Egy A esemény esetén a $\mathrm{P}(A)$ számot az A **valószínűségének**, a $\mathrm{P} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ leképezést pedig **valószínűségeloszlásnak** (valószínűségi mértéknek) nevezzük.

A valószínűségeloszlások tulajdonságai

- $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$. (Hiszen ha $\mathrm{P}(\emptyset) > 0$ volna, akkor a σ-additivitásban $A_1 = A_2 = \ldots = \emptyset$ választással ellentmondásra jutnánk.)
- Ha $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ páronként diszjunktak, akkor
$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{P}(A_j).$$
(Használjuk a σ-additivitást $A_{n+1} = A_{n+2} = \ldots = \emptyset$ esetére, és alkalmazzuk azt, hogy $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$.)
Ezt a tulajdonságot **véges additivitásnak** nevezzük.
- $\mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \mathrm{P}(A)$.
(Hiszen $\Omega = A \cup \overline{A}$ diszjunkt felbontás, így a véges additivitással $1 = \mathrm{P}(\Omega) = \mathrm{P}(A \cup \overline{A}) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(\overline{A})$.)

A valószínűségeloszlások tulajdonságai

- Ha $A \Rightarrow B$, azaz $A \subset B$, akkor

$$\mathrm{P}(A) \leqslant \mathrm{P}(B), \qquad \mathrm{P}(B \setminus A) = \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A).$$

  (Hiszen $A \subset B$ esetén $B = A \cup (B \setminus A)$ diszjunkt felbontás, ezért $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B \setminus A) \geqslant \mathrm{P}(A)$.)
  Ezt a tulajdonságot **monotonitásnak** nevezzük.

- Tetszőleges $A, B \in \mathcal{A}$ esetén

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B),$$

  hiszen

$$A \cup B = \big[A \setminus (A \cap B)\big] \cup \big[B \setminus (A \cap B)\big] \cup (A \cap B)$$

  diszjunkt felbontás, ezért $A \cap B \subset A$ és $A \cap B \subset B$ miatt

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \big[\mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A \cap B)\big] + \big[\mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)\big] + \mathrm{P}(A \cap B).$$

A valószínűségeloszlások tulajdonságai

- Tetszőleges $A, B, C \in \mathcal{A}$ esetén

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A \cup B \cup C) = {} & \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C) \\ & - \mathrm{P}(A \cap B) - \mathrm{P}(A \cap C) - \mathrm{P}(B \cap C) \\ & + \mathrm{P}(A \cap B \cap C),\end{aligned}$$

hiszen

$$\mathrm{P}\left((A \cup B) \cup C\right) = \mathrm{P}(A \cup B) + \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}\left((A \cup B) \cap C\right)$$

és

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left((A \cup B) \cap C\right) &= \mathrm{P}\left((A \cap C) \cup (B \cap C)\right) \\ &= \mathrm{P}(A \cap C) + \mathrm{P}(B \cap C) - \mathrm{P}\left((A \cap C) \cap (B \cap C)\right),\end{aligned}$$

ahol $(A \cap C) \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$.
Ez a tulajdonság a **szita-formula** speciális esete 3 eseményre.

Legyen Ω nemüres halmaz. Legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $A_n \subset \Omega$.

Ha $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ és $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, akkor azt írjuk, hogy $A_n \uparrow A$.

Ha $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ és $A := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, akkor azt írjuk, hogy $A_n \downarrow A$.

A valószínűségeloszlások tulajdonságai

- Tetszőleges $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$, $A_n \uparrow A$ és $A \in \mathcal{A}$ esetén
$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n) = \mathrm{P}(A)$$
ezt a tulajdonságot **alulról folytonosságnak** nevezzük
- Tetszőleges $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$, $A_n \downarrow A$ és $A \in \mathcal{A}$ esetén
$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n) = \mathrm{P}(A)$$
ezt a tulajdonságot **felülről folytonosságnak** nevezzük

Diszkrét valószínűségi mező

Ω véges vagy megszámlálhatóan végtelen, azaz

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}$$

vagy

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$$

alakú, és $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$.

Valószínűségek kiszámolása diszkrét valószínűségi mezőben

Tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ esemény előáll az

$$A = \bigcup_{i\,:\,\omega_i \in A} \{\omega_i\}$$

diszjunkt felbontás alakjában, így

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{i\,:\,\omega_i \in A} \mathrm{P}(\{\omega_i\}).$$

Ezért diszkrét valószínűségi mezőben elég megadni az elemi események valószínűségeit, a

$$p_i := \mathrm{P}(\{\omega_i\}), \qquad i = 1, 2, \ldots$$

számokat ahhoz, hogy tetszőleges esemény valószínűségét ki tudjuk számolni.

Nyilván szükséges az, hogy ezek a $\{p_1, p_2, \ldots\}$ számok nemnegatívak legyenek és összegük 1 legyen, hiszen

$$\sum_i p_i = \sum_i \mathrm{P}(\{\omega_i\}) = \mathrm{P}\left(\bigcup_i \{\omega_i\}\right) = \mathrm{P}(\Omega) = 1.$$

Ekkor azt mondjuk, hogy a $\{p_1, p_2, \ldots\}$ számok **eloszlást** alkotnak.

Egyenletes eloszlás véges halmazon

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\},$$

és az elemi események egyenlő esélyűek, azaz

$$\mathrm{P}(\{\omega_1\}) = \mathrm{P}(\{\omega_2\}) = \ldots = \mathrm{P}(\{\omega_N\}) = \frac{1}{N}$$

Valószínűségek véges halmazon egyenletes eloszlás esetén

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{i:\,\omega_i \in A} \mathrm{P}(\{\omega_i\}) = \frac{1}{N} \sum_{i:\,\omega_i \in A} 1 = \frac{|A|}{N},$$

vagyis

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\text{kedvező kimenetelek száma}}{\text{összes kimenetelek száma}}.$$

Ez a **valószínűség kiszámításának klasszikus képlete.**

Példák:

1. *Két érmét feldobva mennyi annak a valószínűsége, hogy egy fej és egy írás legyen az eredmény?*

   Ekkor a két érmét megkülönböztetve az

   $$\Omega = \{\mathrm{ff}, \mathrm{fi}, \mathrm{if}, \mathrm{ii}\}$$

   eseményteret kapjuk, amelyben a kimenetelek egyforma valószínűségűek, így az

   $$A = \{\mathrm{fi}, \mathrm{if}\}$$

   esemény valószínűsége

   $$\mathrm{P}(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Példák:

2. *Mennyi a valószínűsége, hogy egy n tagú társaságban van legalább két olyan személy, akiknek ugyanakkor van a születésnapja? (Feltesszük, hogy a szökőnap nem lehet.)*

   Nyilván $n > 365$ esetén (a „skatulya-elv” miatt) ez a biztos esemény, így ekkor a valószínűség 1.

   Ha pedig $n \leqslant 365$, akkor az ellentett eseménnyel számolva

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(A) &= 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdots (365 - n + 1)}{365^n} \\
&= 1 - \frac{365!}{(365-n)! \cdot 365^n} \approx \begin{cases} 0.284 & \text{ha } n = 16, \\ 0.476 & \text{ha } n = 22, \\ 0.507 & \text{ha } n = 23, \\ 0.891 & \text{ha } n = 40. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Egyenletes eloszlás $\mathbb{R}^k$ véges mértékű részhalmazain

$\Omega \subset \mathbb{R}^k$ véges mértékű, és „minden pont egyenlő esélyű”, azaz egy $A \subset \Omega$ részhalmaz valószínűsége A mértékével arányos, vagyis

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)},$$

ahol μ az illető halmaz mértékét jelöli:

- $k = 1$ esetén összhossz,
- $k = 2$ esetén terület,
- $k = 3$ esetén térfogat.

Ez a **valószínűségek geometriai kiszámítási módja.**

Példa: *Egy egységnyi hosszúságú szakaszt két, találomra kiválasztott ponttal három szakaszra bontunk fel. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a három szakaszból háromszöget lehet szerkeszteni?*

Az eredmény a $[0,1]\times[0,1]$ négyzet azon részhalmazának területe, melynek pontjaira fennállnak a következő egyenlőtlenségek:

$$\begin{cases} 0<x<y<1, \\ 1-y<y, \\ x<1-x, \\ y-x<1-y+x, \end{cases} \quad \text{vagy} \quad \begin{cases} 0<y<x<1, \\ 1-x<x, \\ y<1-y, \\ x-y<1-x+y, \end{cases}$$

azaz

$$\begin{cases} 0<x<\frac{1}{2}<y<1, \\ y-x<\frac{1}{2}, \end{cases} \quad \text{vagy} \quad \begin{cases} 0<y<\frac{1}{2}<x<1, \\ x-y<\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ezért a keresett valószínűség $1/4$.

Feltételes relatív gyakoriság

Ha n független kísérletet végzünk, akkor az A esemény **feltételes relatív gyakorisága azon feltétel mellett, hogy a B esemény bekövetkezett**

$$r_n(A \mid B) := \frac{k_n(A \cap B)}{k_n(B)} = \frac{r_n(A \cap B)}{r_n(B)}.$$

Feltételes valószínűség

Az A esemény **feltételes valószínűsége** a B feltétel mellett (azaz ha tudjuk, hogy a B esemény bekövetkezett)

$$\mathrm{P}(A \mid B) := \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)},$$

hacsak $\mathrm{P}(B) > 0$.

Példák:

1. *Mennyi a valószínűsége, hogy egy kétgyermekes családban mindkét gyerek fiú, ha feltételezzük, hogy egy gyerek egyenlő valószínűséggel lehet fiú vagy lány, és tudjuk, hogy*
   - *az idősebb gyerek fiú;*
   - *legalább az egyik gyerek fiú ?*

   Ekkor az eseménytér
   $$\Omega = \{\mathrm{FF}, \mathrm{FL}, \mathrm{LF}, \mathrm{LL}\},$$
   melynek elemei egyformán $1/4$ valószínűségűek. Legyen
   $$\begin{aligned} A &:= \{\text{mindkét gyerek fiú}\} = \{\mathrm{FF}\}, \\ B_1 &:= \{\text{az idősebb gyerek fiú}\} = \{\mathrm{FF}, \mathrm{FL}\}, \\ B_2 &:= \{\text{legalább az egyik gyerek fiú}\} = \{\mathrm{FF}, \mathrm{FL}, \mathrm{LF}\}. \end{aligned}$$
   Nyilván $A \cap B_1 = A \cap B_2 = \{\mathrm{FF}\}$, így
   $$\mathrm{P}(A \mid B_1) = 1/2, \qquad \mathrm{P}(A \mid B_2) = 1/3.$$

2. *Bridzsnél osztáskor 2 ászt kapott valaki. Mennyi a valószínűsége, hogy a másik 2 ász a partnerénél van?*

   Az összes leosztások száma $\dfrac{52!}{(13!)^4}$, ezek egyforma valószínűségűek. Ezekből $\dbinom{4}{2} \cdot \dbinom{48}{11} \cdot \dfrac{39!}{(13!)^3}$ olyan leosztás van, melynél az első játékos 2 ászt kap, és ezek között pedig

   $$\binom{4}{2} \cdot \binom{48}{11} \cdot \binom{37}{11} \cdot \frac{26!}{(13!)^2}$$

   olyan leosztás van, melynél a másik 2 ász a partnerénél van. Tehát a keresett feltételes valószínűség

   $$\frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{48}{11} \cdot \binom{37}{11} \cdot \frac{26!}{(13!)^2}}{\binom{4}{2} \cdot \binom{48}{11} \cdot \frac{39!}{(13!)^3}} = \frac{2}{19}.$$

Láncszabály

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$$
$$= P(A_1)\, P(A_2 \mid A_1)\, P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}),$$

hacsak $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$.

A jobb oldal

$$P(A_1)\, \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)}\, \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)} \cdots \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1} \cap A_n)}{P(A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_{n-1})}$$

Példa: *Húzzunk ki a 32 lapos magyar kártyából hármat visszatevés nélkül. Mennyi a valószínűsége, hogy az első és a harmadik kihúzott lap piros, a második pedig nem az?*

Jelölje $i = 1, 2, 3$ esetén A_i azt az eseményt, hogy az i-edik húzás eredménye piros. Ekkor

$$\mathrm{P}(A_1) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}, \qquad \mathrm{P}(\overline{A}_2 \mid A_1) = \frac{24}{31}, \qquad \mathrm{P}(A_3 \mid A_1 \cap \overline{A}_2) = \frac{7}{30},$$

így

$$\mathrm{P}(A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3) = \frac{1}{4} \cdot \frac{24}{31} \cdot \frac{7}{30} = \frac{7}{155}.$$

Persze lehetne használni azt az eseményteret is, amely az első három kihúzott lapból áll a sorrendet is figyelembe véve; ekkor $|\Omega| = 32{\cdot}31{\cdot}30$, és a kimenetelek egyenlő valószínűségűek. Mivel a kedvező esetek száma $8 \cdot 24 \cdot 7$, így a keresett valószínűség $\frac{8{\cdot}24{\cdot}7}{32{\cdot}31{\cdot}30} = \frac{7}{155}$.

3. Feltételes valószínűség, független események

Teljes eseményrendszer

Az eseménytér megszámlálható diszjunkt felbontása, azaz események $A_1, A_2, \ldots$ véges vagy végtelen sorozata, melyek egymást páronként kizárják, és uniójuk az egész eseménytér, vagyis

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{ha} \quad i \neq j, \qquad \text{és} \qquad \bigcup_i A_i = \Omega.$$

Egy teljes eseményrendszer eseményei közül mindig pontosan egy következik be, és

$$\sum_i \mathrm{P}(A_i) = 1.$$

Teljes valószínűség tétele

Ha az $A_1, A_2, \ldots$ pozitív valószínűségű események teljes eseményrendszert alkotnak, akkor tetszőleges B eseményre

$$\mathrm{P}(B) = \sum_i \mathrm{P}(B \mid A_i) \cdot \mathrm{P}(A_i).$$

Bizonyítás. Nyilván $B = \bigcup_i (B \cap A_i)$ diszjunkt felbontás, hiszen

$$B = B \cap \Omega = B \cap \big(\bigcup_k A_k\big) = \bigcup_k (B \cap A_k),$$

és $i \neq j$ esetén

$$(B \cap A_i) \cap (B \cap A_j) = B \cap A_i \cap A_j = \emptyset,$$

ugyanis $A_i \cap A_j = \emptyset$. Ezért

$$\mathrm{P}(B) = \sum_i \mathrm{P}(B \cap A_i) = \sum_i \mathrm{P}(B \mid A_i) \cdot \mathrm{P}(A_i).$$

Példa: *Három gép csavarokat gyárt. A selejt aránya az első gépnél* 1 %*, a másodiknál* 2 %*, a harmadiknál* 3 %*. Az össztermék* 50 %*-át az első gép,* 30 %*-át a második,* 20 %*-át pedig a harmadik állítja elő. Mi a valószínűsége annak, hogy az össztermékből véletlenszerűen választott csavar selejtes?*

Jelölje B azt az eseményt, hogy selejtet húzunk, $i = 1, 2, 3$ esetén pedig A_i azt, hogy a kihúzott csavar az i-edik gépen készült. Ekkor

$$\mathrm{P}(B|A_1) = 0.01, \qquad \mathrm{P}(B|A_2) = 0.02, \qquad \mathrm{P}(B|A_3) = 0.03,$$
$$\mathrm{P}(A_1) = 0.5, \qquad \mathrm{P}(A_2) = 0.3, \qquad \mathrm{P}(A_3) = 0.2,$$

így

$$\mathrm{P}(B) = 0.01 \cdot 0.5 + 0.02 \cdot 0.3 + 0.03 \cdot 0.2 = 0.017.$$

Bayes-formula

Ha A és B pozitív valószínűségű események, akkor

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B \mid A)}{\mathrm{P}(B)}.$$

Bizonyítás: $\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$ és $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B \mid A)$.

Bayes-tétel

Ha az $A_1, A_2, \ldots$ pozitív valószínűségű események teljes eseményrendszert alkotnak és $\mathrm{P}(B) > 0$, akkor

$$\mathrm{P}(A_i \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A_i) \cdot \mathrm{P}(B \mid A_i)}{\sum\limits_j \mathrm{P}(B \mid A_j) \cdot \mathrm{P}(A_j)}.$$

Bizonyítás: A Bayes-formulával $\mathrm{P}(A_i \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A_i) \cdot \mathrm{P}(B|A_i)}{\mathrm{P}(B)}$. A teljes valószínűség tételével $\mathrm{P}(B) = \sum\limits_j \mathrm{P}(B \mid A_j) \cdot \mathrm{P}(A_j)$.

Példa: *Mennyi a feltételes valószínűsége az előző példában annak, hogy az első, második, illetve harmadik gépen gyártották a kiválasztott csavart azon feltétel mellett, hogy az selejtesnek bizonyult?*

$$\mathrm{P}(A_1 \mid B) = \frac{0.01 \cdot 0.5}{0.017} = \frac{5}{17}, \qquad \mathrm{P}(A_2 \mid B) = \frac{6}{17}, \qquad \mathrm{P}(A_3 \mid B) = \frac{6}{17}.$$

Független események

Azt mondjuk, hogy az A és B események **függetlenek**, ha

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Ha A, B és $\overline{B}$ pozitív valószínűségű események, akkor a következő állítások ekvivalensek:

- A és B függetlenek;
- $P(A \mid B) = P(A)$;
- $P(B \mid A) = P(B)$;
- A és $\overline{B}$ függetlenek;
- $P(A \mid B) = P(A \mid \overline{B})$.

Ha $P(A) = 0$ vagy $P(A) = 1$, akkor A tetszőleges B eseménytől független.

Páronként független események

Azt mondjuk, hogy az $A_1, A_2, \ldots$ események **páronként függetlenek**, ha közülük bármely két esemény független.

(Teljesen) független események

Azt mondjuk, hogy az $A_1, A_2, \ldots$ események **(teljesen) függetlenek**, ha tetszőleges $i_1, i_2, \ldots, i_k$ **különböző** indexekre

$$\mathrm{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \mathrm{P}(A_{i_1})\,\mathrm{P}(A_{i_2}) \cdots \mathrm{P}(A_{i_k}).$$

Lehetséges, hogy például három esemény páronként független, de nem (teljesen) független.

Véletlen változó / véletlen mennyiség, eloszlásfüggvény

Ha $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ valószínűségi mező, akkor a $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ leképezés **véletlen változó** / **véletlen mennyiség**, ha tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén $\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \leqslant x\} \in \mathcal{A}$. Ekkor az $F_\xi : \mathbb{R} \to [0, 1]$,

$$F_\xi(x) := \mathrm{P}\{\xi \leqslant x\}$$

függvényt ξ **(kumulatív) eloszlásfüggvényének** nevezzük.

Eloszlásfüggvény jellemzése

Egy $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ függvény akkor és csak akkor lehet eloszlásfüggvénye valamely $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ véletlen változónak, ha

1. F monoton növekvő,
2. F jobbról folytonos,
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0, \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1.$

Eloszlásfüggvény

Legyen ξ véletlen változó F_ξ eloszlásfüggvénnyel.
Tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ esetén

$$\mathrm{P}\{\xi \leqslant c\} = F_\xi(c) = \lim_{x \downarrow c} F_\xi(x), \qquad \mathrm{P}\{\xi < c\} = \lim_{x \uparrow c} F_\xi(x),$$

így $\mathrm{P}\{\xi = c\}$ az F_ξ ugrása a c pontban, azaz

$$\mathrm{P}\{\xi = c\} = \lim_{x \downarrow c} F_\xi(x) - \lim_{x \uparrow c} F_\xi(x) = F_\xi(c) - \lim_{x \uparrow c} F_\xi(x).$$

Tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ esetén

$$\mathrm{P}\{a < \xi \leqslant b\} = F_\xi(b) - F_\xi(a).$$

Diszkrét véletlen változó

A $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ véletlen változó **diszkrét**, ha lehetséges értékeinek halmaza, a $\{\xi(\omega) : \omega \in \Omega\}$ értékkészlet megszámlálható.

A ξ diszkrét véletlen változó **eloszlása** az a P_ξ véletlen mérték a ξ lehetséges értékeinek $X := \{x_1, x_2, \dots\}$ halmazán, melyre $\mathrm{P}_\xi(\{x_i\}) = \mathrm{P}(\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) = x_i\}), \ x_i \in X$.

Diszkrét véletlen változó eloszlásfüggvénye

Egy ξ diszkrét véletlen változó eloszlásfüggvénye olyan lépcsős függvény, mely a lehetséges értékeknél ugrik, és az ugrás nagysága az illető érték valószínűsége. Ha a ξ lehetséges értékeinek halmaza $X := \{x_1, x_2, \dots\}$, akkor

$$F_\xi(x) = \sum_{\{i : x_i \leqslant x\}} \mathrm{P}_\xi(\{x_i\}), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Példák:

1. *Két kockát dobva a dobott számok összegét jelölje ξ. Határozzuk meg ξ eloszlását!*

   Ekkor ξ diszkrét véletlen változó; lehetséges értékeinek halmaza:

$$X = \{2, 3, \dots, 12\},$$

   eloszlása:

$$\mathrm{P}\{\xi = k\} = \begin{cases} \dfrac{k-1}{36} & \text{ha } 2 \leqslant k \leqslant 7, \\[2ex] \dfrac{13-k}{36} & \text{ha } 7 \leqslant k \leqslant 12. \end{cases}$$

2. **Binomiális eloszlás.**

   n független kísérlet
   A esemény, $p := \mathrm{P}(A)$
   A gyakorisága: $\xi := k_n(A)$
   diszkrét véletlen változó;
   lehetséges értékeinek halmaza:

$$X = \{0, 1, 2, \ldots, n\},$$

   eloszlása

$$\mathrm{P}\{\xi = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

   melyet (n, p) **paraméterű binomiális eloszlásnak** nevezünk.

3. **Elsőrendű negatív binomiális eloszlás.**

   A esemény, $p := \mathrm{P}(A)$
   Addig végzünk független kísérleteket, míg A először bekövetkezik.
   $\xi :=$ az ehhez szükséges kísérletek száma;
   lehetséges értékeinek halmaza:

$$X = \{1, 2, \ldots, \infty\},$$

   eloszlása: $k = 1, 2, \ldots$ esetén

$$\mathrm{P}\{\xi = k\} = p \cdot (1-p)^{k-1},$$

   így

$$\mathrm{P}\{\xi = \infty\} = 1 - \mathrm{P}\{\xi < \infty\} = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}\{\xi = k\} = 1 - p\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1} = 0.$$

   Ekkor ξ eloszlását **elsőrendű** p **paraméterű negatív binomiális eloszlásnak** (vagy geometriai eloszlásnak) nevezzük.

4. **Hipergeometrikus eloszlás.**

   Egy dobozban M piros és $N - M$ fekete golyó van $(M < N)$. Visszatevés nélkül húzunk ki n golyót $(n \leqslant N)$.
   $\xi :=$ a kihúzott piros golyók száma;
   lehetséges értékeinek halmaza: olyan k értékek, melyekre teljesül $0 \leqslant k \leqslant n$, $k \leqslant M$, és $n - k \leqslant N - M$,
   eloszlása:

$$\mathrm{P}\{\xi = k\} = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

   Ekkor ξ eloszlását $(n, M, N - M)$ **paraméterű hipergeometrikus eloszlásnak** nevezzük.

5. **Poisson eloszlás.**

Mazsolás kalácsot sütünk; 1000 gramm tésztába $n = 50$ darab mazsolát teszünk. Egy szelet súlya 25 gramm, tehát $N = 40$ szelet készül. Minden mazsola egyforma valószínűséggel kerülhet bele bármely szeletbe, és a mazsolák egymástól függetlenül „mozognak”. Jelölje ξ egy kiválasztott szeletbe kerülő mazsolák számát. Lehetséges értékeinek halmaza $X = \{0, 1, \ldots, 50\}$, eloszlása

$$\mathrm{P}\{\xi = k\} = \binom{50}{k} \left(\frac{1}{40}\right)^k \left(1 - \frac{1}{40}\right)^{50-k},$$

tehát ξ eloszlása n-edrendű $1/N$ paraméter? binomiális eloszlás.

Mi történik, ha növeljük a tészta mennyiségét?

Ha n mazsolát használunk fel $20 \cdot n$ gramm tésztába, akkor $N = 20 \cdot n/25$ szelet készül, így a binomiális eloszlás paramétere $p_n := 1/N = \lambda/n$, ahol $\lambda := 5/4$ az egy szeletre átlagosan jutó mazsolák száma. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}.$$

Ha egy η véletlen változó lehetséges értékei a nemnegatív egész számok és $k = 0, 1, \ldots$ esetén

$$\mathrm{P}(\eta = k) = \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda},$$

ahol $\lambda > 0$, akkor azt mondjuk, hogy η eloszlása λ **paraméterű Poisson-eloszlás.**

Véletlen változó sűrűségfüggvénye

Ha $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ valószínűségi mező, $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ véletlen változó és létezik olyan $f_\xi : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ függvény, melyre

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,\mathrm{d}t, \qquad x \in \mathbb{R},$$

akkor az f_ξ függvényt a ξ **sűrűségfüggvényének** nevezzük, és azt mondjuk, hogy a ξ véletlen változó, illetve ξ eloszlása **abszolút folytonos.**
(Abszolút folytonos véletlen változó esetén annak sűrűségfüggvénye nem egyértelműen meghatározott!)

Sűrűségfüggvény jellemzése

Egy $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ függvény akkor és csak akkor lehet sűrűségfüggvénye valamely $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ véletlen változónak, ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

Abszolút folytonos véletlen változó

Legyen ξ abszolút folytonos véletlen változó f_ξ sűrűségfüggvénnyel. Tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ esetén

$$\mathsf{P}\{a < \xi \leqslant b\} = F_\xi(b) - F_\xi(a) = \int_a^b f_\xi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Általánosabban: tetszőleges $B \subset \mathbb{R}$ (Borel-halmaz) esetén

$$\mathsf{P}\{\xi \in B\} = \int_B f_\xi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ esetén

$$\mathsf{P}\{\xi = c\} = 0.$$

Ha az f_ξ sűrűségfüggvény folytonos az $x \in \mathbb{R}$ pontban, akkor

$$F'_\xi(x) = f_\xi(x).$$

Egyenletes eloszlás az (a, b) intervallumon

Ha az (a, b) intervallumon választunk véletlenszerűen egy ξ pontot úgy, hogy egy $A \subset (a, b)$ részhalmazba esés valószínűsége az illető részhalmaz mértékével arányos, akkor ξ eloszlásfüggvénye nyilván

$$F_\xi(x) = \frac{x-a}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b)}(x) + \mathbb{1}_{[b,\infty)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{ha } a \leqslant x < b, \\ 1 & \text{ha } x \geqslant b. \end{cases}$$

Ekkor a ξ véletlen változót **egyenletes eloszlásúnak** nevezzük a (a, b) intervallumon. Továbbá

$$f_\xi(x) = \frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{(a,b)}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{ha } a < x < b, \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

függvény sűrűségfüggvénye ξ-nek.

Normális eloszlás

Ha a ξ véletlen változó sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

alakú, ahol $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, akkor azt mondjuk, hogy ξ **normális eloszlású** (m, σ^2) **paraméterekkel.**
Az, hogy $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$, abból következik, hogy

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\infty} r\mathrm{e}^{-r^2/2}\,\mathrm{d}r\right) \mathrm{d}\varphi = 2\pi \left[-\mathrm{e}^{-r^2/2}\right]_{r=0}^{r=\infty} = 2\pi.$$

Exponenciális eloszlás

Jelölje a ξ véletlen változó egy radioaktív atom élettartamát. Ez rendelkezik az úgynevezett **örökifjú tulajdonsággal:** ha $t, h > 0$, akkor

$$\mathrm{P}\{\xi > t + h \,|\, \xi > t\} = \mathrm{P}\{\xi > h\},$$

vagyis annak ellenére, hogy tudjuk, hogy az atom már megélt t időt, a még hátralevő élettartam eloszlása éppen olyan, mint a teljes élettartam eredeti eloszlása. Mivel

$$\mathrm{P}\{\xi > t + h \,|\, \xi > t\} = \frac{\mathrm{P}\{\xi > t + h,\, \xi > t\}}{\mathrm{P}\{\xi > t\}},$$

és $\mathrm{P}\{\xi > t + h,\, \xi > t\} = \mathrm{P}\{\xi > t + h\}$, ezért a $G(t) := \mathrm{P}\{\xi > t\}$ **túlélési függvényre** teljesül

$$\frac{G(t + h)}{G(t)} = G(h).$$

Be lehet látni, hogy ha G folytonos, akkor létezik olyan $\lambda > 0$, hogy

$$G(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t} \qquad \text{ha } t > 0.$$

Ezért ξ eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0, \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{ha } x \geqslant 0 \end{cases}$$

alakú, ahol $\lambda > 0$. Ezt az eloszlást λ **paraméterű exponenciális eloszlásnak** nevezzük. Van sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{ha } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Bomlási állandó:

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \mathrm{P}\{t < \xi \leqslant t + h \,|\, \xi > t\} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda h}) = \lambda.$$

Véletlen vektor

$$\xi : \Omega \to \mathbb{R}^k, \quad \text{azaz} \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_k),$$

ahol $\xi_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k$ véletlen változók;
eloszlásfüggvénye: $F_\xi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$,

$$F_\xi(x_1, \dots, x_k) := \mathsf{P}\{\xi_1 \leqslant x_1, \dots, \xi_k \leqslant x_k\}$$

Véletlen vektor sűrűségfüggvénye

Ha létezik olyan $f_\xi : \mathbb{R}^k \to [0, \infty)$ függvény, melyre

$$F_\xi(x_1, \dots, x_k) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_k} f_\xi(t_1, \dots, t_k) \,\mathrm{d}t_1 \dots \mathrm{d}t_k$$

teljesül minden $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ pontban, akkor az f_ξ függvényt ξ **sűrűségfüggvényének** nevezzük, és azt mondjuk, hogy a ξ véletlen vektor, illetve ξ eloszlása **abszolút folytonos.**

Véletlen vektor sűrűségfüggvénye

Legyen ξ abszolút folytonos véletlen vektor f_ξ sűrűségfüggvénnyel. Tetszőleges $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i < b_i$, $i = 1, \dots, k$ esetén

$$\mathrm{P}\{a_i < \xi_i \leqslant b_i,\ i = 1, \dots, k\} = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_k}^{b_k} f_\xi(t_1, \dots, t_k)\,\mathrm{d}t_1 \dots \mathrm{d}t_k.$$

Tetszőleges $B \subset \mathbb{R}^k$ (Borel-halmaz) esetén

$$\mathrm{P}\{(\xi_1, \dots, \xi_k) \in B\} = \underset{B}{\int \cdots \int} f_\xi(t_1, \dots, t_k)\,\mathrm{d}t_1 \dots \mathrm{d}t_k.$$

Ha F_ξ k-szor folytonosan differenciálható, akkor

$$f_\xi(x_1, \dots, x_k) = \frac{\partial^k F_\xi(x_1, \dots, x_k)}{\partial x_1 \dots \partial x_k}.$$

Diszkrét véletlen vektor

A $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^k$ véletlen vektor **diszkrét**, ha lehetséges értékeinek halmaza, a $\{\xi(\omega) : \omega \in \Omega\}$ értékkészlet megszámlálható.

Ha $(\xi, \eta) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ diszkrét, akkor ξ és η is diszkrét. Ha ξ és η lehetséges értékei $x_1, x_2, \ldots,$ illetve $y_1, y_2, \ldots,$ akkor (ξ, η) lehetséges értékeinek halmaza $\{(x_i, y_j) : i, j = 1, 2, \ldots\}$.
Ha ismerjük (ξ, η) eloszlását, azaz a

$$\mathrm{P}\{\xi = x_i,\, \eta = y_j\} \qquad i, j = 1, 2, \ldots$$

valószínűségeket, akkor ki tudjuk számolni ξ és η eloszlását is:

$$\mathrm{P}\{\xi = x_i\} = \sum_j \mathrm{P}\{\xi = x_i,\, \eta = y_j\}, \quad \mathrm{P}\{\eta = y_j\} = \sum_i \mathrm{P}\{\xi = x_i,\, \eta = y_j\}.$$

Ezek (ξ, η) **peremeloszlásai / marginális eloszlásai.**

Polinomiális eloszlás

n független kísérletet hajtunk végre egy $A_1, A_2, \ldots, A_r$ teljes eseményrendszerre, $p_i := \mathsf{P}(A_i)$ (ekkor $p_1 + p_2 + \cdots + p_r = 1$). Ekkor A_i gyakorisága: $\xi_i := k_n(A_i)$, és $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r)$ diszkrét véletlen vektor; lehetséges értékeinek halmaza:

$$\big\{(k_1, k_2, \ldots, k_r) \in \mathbb{Z}^r : k_i \geqslant 0,\ k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n\big\},$$

eloszlása

$$\mathsf{P}\{\xi_1 = k_1,\ \xi_2 = k_2, \ldots, \xi_r = k_r\} = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_r!}\, p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r},$$

melyet $(n, p_1, p_2, \ldots, p_r)$ **paraméterű polinomiális eloszlásnak** nevezünk. Peremeloszlásai binomiális eloszlások:

$$\mathsf{P}\{\xi_i = k_i\} = \frac{n!}{k_i!(n-k_i)!}\, p_i^{k_i} (1-p_i)^{n-k_i}.$$

Polihipergeometrikus eloszlás

Egy dobozban N darab színes golyó van; a színek száma r, az i-edik színből N_i golyó van $(N = N_1 + \cdots + N_r)$. Ha visszatevés nélkül húzunk ki n golyót ($n \leqslant N$), és ξ_i jelöli az i-edik színből húzott golyók számát, akkor $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r)$ olyan $(k_1, k_2, \ldots, k_r)$ értékeket vehet fel, melyekre minden $i = 1, 2, \ldots, r$ esetén teljesül $0 \leqslant k_i \leqslant N_i$ és $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$, továbbá

$$\mathrm{P}\{\xi_1 = k_1,\, \xi_2 = k_2, \ldots, \xi_r = k_r\} = \frac{\binom{N_1}{k_1}\binom{N_2}{k_2}\cdots\binom{N_r}{k_r}}{\binom{N}{n}}.$$

Ekkor ξ eloszlását $(n, N_1, \ldots, N_r)$ **paraméterű polihipergeometrikus eloszlásnak** nevezzük.
Peremeloszlásai hipergeometrikus eloszlások:

$$\mathrm{P}\{\xi_i = k_i\} = \frac{\binom{N_i}{k_i}\binom{N-N_i}{n-k_i}}{\binom{N}{n}}.$$

Ha a (ξ, η) véletlen vektornak létezik $f_{\xi,\eta}$ sűrűségfüggvénye, akkor a ξ, illetve η véletlen változónak is létezik sűrűségfüggvénye, mégpedig

$$f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}(x,y)\,\mathrm{d}y, \qquad f_\eta(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

Ezek (ξ, η) **peremeloszlásai / marginális eloszlásai.**

Független véletlen változók

A ξ és η véletlen változókat akkor nevezzük **függetleneknek**, ha tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$\mathrm{P}\{\xi \leqslant x,\ \eta \leqslant y\} = \mathrm{P}\{\xi \leqslant x\}\,\mathrm{P}\{\eta \leqslant y\},$$

azaz $F_{\xi,\eta}(x,y) = F_\xi(x)F_\eta(y)$.

Független véletlen változók

Ha ξ diszkrét véletlen változó $x_1, x_2, \ldots$ lehetséges értékekkel és η diszkrét véletlen változó $y_1, y_2, \ldots$ lehetséges értékekkel, akkor ξ és η függetlensége azzal ekvivalens, hogy

$$\forall i, j \qquad \mathsf{P}\{\xi = x_i,\, \eta = y_j\} = \mathsf{P}\{\xi = x_i\}\,\mathsf{P}\{\eta = y_j\}.$$

Ha létezik (ξ, η)-nak $f_{\xi,\eta}$ sűrűségfüggvénye, akkor ξ és η függetlensége azzal ekvivalens, hogy

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \qquad f_{\xi,\eta}(x, y) = f_\xi(x) f_\eta(y).$$

Valószínűségeloszlások konvolúciója

Ha a ξ és η véletlen változók függetlenek, akkor azt mondjuk, hogy $\xi + \eta$ eloszlása a ξ és η **eloszlásának konvolúciója.**

Valószínűségeloszlások konvolúciója

Ha ξ és η független diszkrét véletlen változók, és a lehetséges értékeik nemnegatív egész számok, akkor a

$$\{\xi + \eta = k\} = \bigcup_{j=0}^{k} (\{\xi = j\} \cap \{\eta = k - j\})$$

diszjunkt felbontás alapján

$$\mathsf{P}\{\xi + \eta = k\} = \sum_{j=0}^{k} \mathsf{P}\{\xi = j\}\,\mathsf{P}\{\eta = k - j\}, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

Ha a ξ és η független véletlen változóknak léteznek az f_ξ és f_η sűrűségfüggvényei, akkor

$$f_{\xi+\eta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(u) f_\eta(x - u)\,\mathrm{d}u, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Példák:

1. Ha ξ és η független binomiális eloszlásúak (n_1, p) illetve (n_2, p) paraméterekkel, akkor ezek konvolúciója ismét binomiális eloszlás, mégpedig $(n_1 + n_2, p)$ paraméterekkel:

$$\sum_{i,j\,:\,i+j=k} \binom{n_1}{i} p^i (1-p)^{n_1-i} \binom{n_2}{j} p^j (1-p)^{n_2-j} = \binom{n_1+n_2}{k} p^k (1-p)^{n_1+n_2-k}.$$

2. Ha ξ és η független normális eloszlásúak (m_1, σ_1^2) illetve (m_2, σ_2^2) paraméterekkel, akkor ezek konvolúciója ismét normális eloszlás, mégpedig $(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ paraméterekkel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \mathrm{e}^{-\frac{(u-m_1)^2}{2\sigma_1^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \mathrm{e}^{-\frac{(x-u-m_2)^2}{2\sigma_2^2}} \,\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-m_1-m_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}.$$

Intuíció:

Tekintsünk egy $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ diszkrét véletlen változót $x_1, \dots, x_N$ lehetséges értékekkel.

n független kísérletet hajtunk végre

$A_k := \{\xi = x_k\}$ relatív gyakorisága

$$r_n(A_k) \approx \mathsf{P}(A_k) = \mathsf{P}\{\xi = x_k\},$$

ezért az x_k értéket körülbelül $n \cdot \mathsf{P}\{\xi = x_k\}$ esetben kapjuk, így **a megfigyelt értékek átlaga körülbelül**

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N} x_k \cdot n \cdot \mathsf{P}\{\xi = x_k\} = \sum_{k=1}^{N} x_k \cdot \mathsf{P}\{\xi = x_k\}.$$

Véletlen változó várható értéke

Ha $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ diszkrét véletlen változó $x_1, x_2, \ldots$ lehetséges értékekkel, akkor az

$$E(\xi) := \sum_k x_k \cdot P\{\xi = x_k\}$$

mennyiséget a ξ **várható értékének** nevezzük, amennyiben ez a sor abszolút konvergens, azaz $\sum_k |x_k| \cdot P\{\xi = x_k\} < \infty$.

Ha $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ egy abszolút folytonos véletlen változó, melynek s?r?ségfüggvénye $f_\xi : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, akkor az

$$E(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_\xi(x)\, \mathrm{d}x$$

mennyiséget a ξ **várható értékének** nevezzük, amennyiben ez az improprius integrál abszolút konvergens, azaz $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_\xi(x)\, \mathrm{d}x < \infty$.

Példák:

1. Ha ξ binomiális eloszlású (n,p) paraméterekkel, akkor
$$\mathrm{E}(\xi)=\sum_{k=0}^{n}k\cdot\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=np.$$
2. Ha egy egységnyi oldalú négyzetben választunk egyenletes eloszlás szerint egy pontot, és ξ jelöli a pontnak a legközelebbi oldaltól való távolságát, akkor $\mathrm{E}(\xi)=\frac{1}{6}$, hiszen

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0 & \text{ha } x\leqslant 0,\\ 1-(1-2x)^2 & \text{ha } x\in[0,\frac{1}{2}],\\ 1 & \text{ha } x>\frac{1}{2},\end{cases}\qquad f_\xi(x)=\begin{cases}4-8x & \text{ha } x\in[0,\frac{1}{2}],\\ 0 & \text{egyébként},\end{cases}$$

$$\mathrm{E}(\xi)=\int_0^{1/2}x(4-8x)\,\mathrm{d}x=\left[2x^2-\frac{8}{3}x^3\right]_{x=0}^{x=1/2}=\frac{1}{6}.$$

3. *Az A és B játékosok a következő játékot játsszák. Felváltva dobnak egy szabályos érmét; A kezd, és az nyer, akinek először sikerül fejet dobnia. Az első dobásnál 2–2 forintot tesznek be, és minden dobás előtt duplázzák a tétet, azaz ha az n-edik dobásra sikerül fejet dobni és n páratlan, akkor A nyer 2^n forintot B-től, ha pedig n páros, akkor B nyer 2^n forintot A-tól. Mennyi az A illetve B játékos várható nyereménye?*

   Jelölje ξ az A játékos nyereményét (mely pozitív, ha A nyer, és negatív, ha A veszít). Ekkor ξ lehetséges értékei $2, -4, 8, -16, \ldots$ és $\mathrm{P}\{\xi = 2\} = \frac{1}{2}$, $\mathrm{P}\{\xi = -4\} = \frac{1}{4}$, $\ldots$ Mivel

$$2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 8 \cdot \frac{1}{8} + \cdots = 1 + 1 + 1 + \cdots = \infty,$$

   így ξ várható értéke nem létezik!

4. Legyen ξ olyan véletlen változó, melynek sűrűségfüggvénye $f_\xi(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Ekkor nem létezik $\mathrm{E}(\xi)$, mert $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|}{\pi(1+x^2)}\,\mathrm{d}x = \infty$

A várható érték tulajdonságai

Ha ξ és η véletlen változók és $a, b \in \mathbb{R}$, akkor

- $\mathrm{E}(a\xi) = a\,\mathrm{E}(\xi)$ (homogenitás)
- $\mathrm{E}(\xi + \eta) = \mathrm{E}(\xi) + \mathrm{E}(\eta)$ (additivitás)
- $\mathrm{E}(a\xi + b\eta) = a\,\mathrm{E}\,\xi + b\,\mathrm{E}\,\eta$ (linearitás)
- ha ξ és η függetlenek, akkor $\mathrm{E}(\xi\eta) = \mathrm{E}(\xi) \cdot \mathrm{E}(\eta)$
- ha $\xi \leqslant \eta$, akkor $\mathrm{E}(\xi) \leqslant \mathrm{E}(\eta)$ (monotonitás)
- ha $\xi \geqslant 0$, akkor $\mathrm{E}(\xi) \geqslant 0$ (pozitivitás)
- ha $\xi \geqslant 0$ és $\mathrm{E}(\xi) = 0$, akkor $\mathrm{P}(\xi = 0) = 1$
- $|\,\mathrm{E}(\xi)| \leqslant \mathrm{E}(|\xi|)$
- $\mathrm{E}(|\xi\eta|) \leqslant \sqrt{\mathrm{E}(\xi^2)\ \mathrm{E}(\eta^2)}$ (Cauchy-Schwartz egyenlőtlenség)

Véletlen változó függvényének várható értéke

Legyen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Ha ξ diszkrét véletlen változó $x_1, x_2, \ldots$ lehetséges értékekkel, akkor

$$\mathsf{E}(g(\xi)) = \sum_k g(x_k) \cdot \mathsf{P}\{\xi = x_k\},$$

amennyiben ez a sor abszolút konvergens.

Ha ξ abszolút folytonos véletlen változó f_ξ sűrűségfüggvénnyel, akkor

$$\mathsf{E}(g(\xi)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_\xi(x)\,\mathrm{d}x,$$

amennyiben ez az improprius integrál abszolút konvergens.

Véletlen vektor függvényének várható értéke

Legyen $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Ha ξ és η diszkrét véletlen változók $x_1, x_2, \ldots,$ illetve $y_1, y_2, \ldots$ lehetséges értékekkel, akkor

$$\mathsf{E}(g(\xi, \eta)) = \sum_{k,\ell} g(x_k, y_\ell) \cdot \mathsf{P}\{\xi = x_k, \eta = y_\ell\},$$

amennyiben ez a sor abszolút konvergens.

Ha (ξ, η) abszolút folytonos véletlen vektor $f_{\xi,\eta}$ sűrűségfüggvénnyel, akkor

$$\mathsf{E}(g(\xi, \eta)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) \cdot f_{\xi\,\eta}(x, y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y,$$

amennyiben ez az improprius integrál abszolút konvergens.

Véletlen változó varianciája / szórásnégyzete

$$\mathrm{var}(\xi) := \mathrm{D}^2(\xi) := \mathrm{E}\left[(\xi - \mathrm{E}(\xi))^2\right].$$

Variancia / szórásnégyzet kiszámolása

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(\xi) &= \mathrm{E}\left[\xi^2 - 2\xi\,\mathrm{E}(\xi) + (\mathrm{E}(\xi))^2\right] = \mathrm{E}(\xi^2) - 2\cdot\mathrm{E}(\xi)\cdot\mathrm{E}(\xi) + [\mathrm{E}(\xi)]^2 \\ &= \mathrm{E}(\xi^2) - [\mathrm{E}(\xi)]^2,\end{aligned}$$

így ha ξ diszkrét véletlen változó $x_1, x_2, \ldots$ lehetséges értékekkel, akkor

$$\mathrm{var}(\xi) = \sum_k x_k^2 \cdot \mathrm{P}\{\xi = k\} - \left(\sum_k x_k \cdot \mathrm{P}\{\xi = k\}\right)^2,$$

ha pedig ξ abszolút folytonos véletlen változó f_ξ sűrűségfüggvénnyel, akkor

$$\mathrm{var}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_\xi(x)\,\mathrm{d}x - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.$$

Variancia / szórásnégyzet tulajdonságai

Ha ξ és η véletlen változók és $a \in \mathbb{R}$, akkor

- $\mathrm{var}(\xi) \geqslant 0$
- ha $\mathrm{var}(\xi) = 0$, akkor $\mathrm{P}(\xi = 0) = 1$
- $\mathrm{var}(\xi + a) = \mathrm{var}(\xi)$ (eltolásinvariancia)
- $\mathrm{var}(c \cdot \xi) = c^2 \cdot \mathrm{var}(\xi)$ (homogenitás)
- ha ξ és η függetlenek, akkor $\mathrm{var}(\xi + \eta) = \mathrm{var}(\xi) + \mathrm{var}(\eta)$ (additivitás)

Véletlen változók kovarianciája

$$\mathrm{cov}(\xi, \eta) := \mathrm{E}\left[(\xi - \mathrm{E}\,\xi)(\eta - \mathrm{E}\,\eta)\right]$$

Addíciós képlet

Ha ξ és η véletlen változók, akkor

$$\mathrm{var}(\xi + \eta) = \mathrm{var}(\xi) + 2\,\mathrm{cov}(\xi, \eta) + \mathrm{var}(\eta)$$

p paraméterű Bernoulli-eloszlás

A esemény, $p := \mathrm{P}(A)$

$$\xi := k_1(A) = \begin{cases} 1 & \text{ha } A \text{ bekövetkezik,} \\ 0 & \text{ha } A \text{ nem következik be} \end{cases}$$

diszkrét véletlen változó; lehetséges értékei: 0 és 1, eloszlása

$$\mathrm{P}\{\xi = 1\} = p, \qquad \mathrm{P}\{\xi = 0\} = 1 - p.$$

Ezt az eloszlást p **paraméterű Bernoulli-eloszlásnak** nevezzük.

Nyilván

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(\xi) &= p \cdot 1 + (1 - p) \cdot 0 = p, \\ \mathrm{E}(\xi^2) &= p \cdot 1^2 + (1 - p) \cdot 0^2 = p, \\ \operatorname{var} \xi &= \mathrm{E}(\xi^2) - [\mathrm{E}(\xi)]^2 = p - p^2 = p(1 - p). \end{aligned}$$

(n,p) paraméterű binomiális eloszlás

A esemény, $p := \mathrm{P}(A)$; n független kísérlet; A gyakorisága: $\xi := k_n(A)$ diszkrét véletlen változó; lehetséges értékeinek halmaza: $\{0,1,2,\dots,n\}$, eloszlása

$$\mathrm{P}\{\xi = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Ha $\xi_i := \begin{cases} 1 & \text{ha } A \text{ beköv. az } i\text{-edik alkalommal,} \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$

akkor $\xi = \xi_1 + \cdots + \xi_n$, és $\xi_1, \dots, \xi_n$ független, p paraméterű Bernoulli-eloszlásúak. Ezért

$$\mathrm{E}(\xi) = \mathrm{E}(\xi_1) + \cdots + \mathrm{E}(\xi_n) = np,$$
$$\mathrm{var}(\xi) = \mathrm{var}(\xi_1) + \cdots + \mathrm{var}(\xi_n) = np(1-p).$$

Legyen η **standard normális eloszlású**, azaz normális eloszlású $(0,1)$ paraméterekkel. Ekkor

$$\mathsf{E}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \mathrm{e}^{-x^2/2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\substack{K \to -\infty \\ L \to +\infty}} \Big[-\mathrm{e}^{-x^2/2} \Big]_{x=K}^{x=L} = 0,$$

$$\begin{aligned} \mathsf{E}(\eta^2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \mathrm{e}^{-x^2/2} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big[-x\mathrm{e}^{-x^2/2} \Big]_{x=-\infty}^{x=\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2} \, \mathrm{d}x = 1, \end{aligned}$$

$$\operatorname{var}(\eta) = \mathsf{E}(\eta^2) - \big[\, \mathsf{E}(\eta) \big]^2 = 1.$$

5. Várható érték

Ha pedig ξ normális eloszlású (m, σ^2) paraméterekkel, akkor

$$\xi = \sigma \cdot \eta + m,$$

ahol

$$\eta = \frac{\xi - m}{\sigma}$$

standard normális eloszlású, hiszen η eloszlásfüggvénye

$$F_\eta(x) = \mathrm{P}\{\eta < x\} = \mathrm{P}\left\{\frac{\xi - m}{\sigma} \leqslant x\right\} = \mathrm{P}\{\xi \leqslant \sigma \cdot x + m\} = F_\xi(\sigma \cdot x + m),$$

így η sűrűségfüggvénye

$$f_\eta(x) = F_\eta'(x) = \sigma \cdot F_\xi'(\sigma x + m) = \sigma \cdot f_\xi(\sigma x + m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-x^2/2},$$

ezért

$$\mathrm{E}(\xi) = \sigma \cdot \mathrm{E}(\eta) + m = m, \qquad \mathrm{var}(\xi) = \sigma^2 \cdot \mathrm{var}(\eta) = \sigma^2.$$

Várható érték

Véletlen mátrix

$$\xi = (\xi_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant k,\,1\leqslant j\leqslant \ell} : \Omega \to \mathbb{R}^{k\times\ell},$$

ahol $\xi_{i,j} : \Omega \to \mathbb{R}$, $i \in \{1,\ldots,k\}$, $j \in \{1,\ldots,\ell\}$ véletlen változók.

Véletlen mátrix várható érték mátrixa

Legyen $\xi = (\xi_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant k,\,1\leqslant j\leqslant \ell} : \Omega \to \mathbb{R}^{k\times\ell}$ véletlen mátrix.
Ha tetszőleges $i \in \{1,\ldots,k\}$ és $j \in \{1,\ldots,\ell\}$ esetén $\mathsf{E}(|\xi_{i,j}|) < \infty$, akkor ξ **várható érték mátrixa**

$$\mathsf{E}(\xi) := \big(\mathsf{E}(\xi_{i,j})\big)_{1\leqslant i\leqslant k,\,1\leqslant j\leqslant \ell} \in \mathbb{R}^{k\times\ell}.$$

Várható érték mátrix tulajdonságai

Legyen $\xi = (\xi_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant k,\,1\leqslant j\leqslant \ell} : \Omega \to \mathbb{R}^{k\times\ell}$ véletlen mátrix. melyre tetszőleges $i \in \{1,\ldots,k\}$ és $j \in \{1,\ldots,\ell\}$ esetén $\mathsf{E}(|\xi_{i,j}|) < \infty$.
Ha $A \in \mathbb{R}^{r\times k}$ és $B \in \mathbb{R}^{\ell\times s}$, akkor $\mathsf{E}(A\xi B) = A\,\mathsf{E}(\xi)B$.

Várható érték

Véletlen vektor kovarianciamátrixa (szórásmátrixa)

Legyen $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_d) : \Omega \to \mathbb{R}^d$ véletlen vektor. Ha $\mathsf{E}(\|\xi\|^2) < \infty$, azaz $\mathsf{E}(\xi_1^2) < \infty, \ldots\ \mathsf{E}(\xi_d^2) < \infty$, akkor ξ **kovarianciamátrixa**

$$\operatorname{cov}(\xi) := \mathsf{E}\left[(\xi - \mathsf{E}(\xi))(\xi - \mathsf{E}(\xi))^\top\right] \in \mathbb{R}^{d\times d},$$

melynek elemei $\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) := \mathsf{E}\left[(\xi_i - \mathsf{E}(\xi_i))(\xi_j - \mathsf{E}(\xi_j))\right]$, $1 \leqslant i, j \leqslant d$.

Kovarianciamátrix tulajdonságai

Legyen $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_d) : \Omega \to \mathbb{R}^d$ véletlen vektor, $\mathsf{E}(\|\xi\|^2) < \infty$.

- $\operatorname{cov}(\xi)$ szimmetrikus: $\operatorname{cov}(\xi)^\top = \operatorname{cov}(\xi)$.
- $\operatorname{cov}(\xi)$ pozitív szemidefinit, azaz $\forall\, x \in \mathbb{R}^d$ esetén

$$x^\top \operatorname{cov}(\xi) x = \langle \operatorname{cov}(\xi)x, x\rangle = \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) x_i x_j \geqslant 0.$$

- Ha $A \in \mathbb{R}^{r\times d}$ és $b \in \mathbb{R}^r$, akkor $\operatorname{cov}(A\xi + b) = A \operatorname{cov}(\xi) A^\top$.

Véletlen változók korrelációs együtthatója

$$\mathrm{corr}(\xi,\eta) := \frac{\mathrm{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{\mathrm{var}(\xi)\cdot\mathrm{var}(\eta)}}.$$

Ha $\mathrm{corr}(\xi,\eta) = 0$ azaz $\mathrm{cov}(\xi,\eta) = 0$, akkor azt mondjuk, hogy ξ **és** η **korrelálatlanok.**

Ha

$$\mathrm{corr}(\xi,\eta) > 0 \quad \text{azaz} \quad \mathrm{cov}(\xi,\eta) > 0,$$

akkor ξ **és** η **pozitívan korreláltak**, ha pedig

$$\mathrm{corr}(\xi,\eta) < 0 \quad \text{azaz} \quad \mathrm{cov}(\xi,\eta) < 0,$$

akkor ξ **és** η **negatívan korreláltak.**

Ha ξ és η függetlenek, akkor ξ és η korrelálatlanok, de ez fordítva általában nem igaz.

Példa: Legyen a (ξ,η) véletlen vektor egyenletes eloszlású a $(-1,0)$, $(0,-1)$, $(0,1)$ és $(1,0)$ pontokon, azaz

$$\mathsf{P}\{\xi=-1,\eta=0\}=\mathsf{P}\{\xi=0,\eta=-1\}=\mathsf{P}\{\xi=0,\eta=1\}=\mathsf{P}\{\xi=1,\eta=0\}=\frac{1}{4}.$$

Ekkor $\mathsf{E}(\xi)=\mathsf{E}(\eta)=0$ és $\mathsf{E}(\xi\eta)=0$ miatt

$$\mathrm{cov}(\xi,\eta)=\mathsf{E}(\xi\eta)-\mathsf{E}(\xi)\cdot\mathsf{E}(\eta)=0,$$

azaz ξ és η korrelálatlanok, viszont a peremeloszlások

$$\mathsf{P}\{\xi=-1\}=\mathsf{P}\{\xi=1\}=\frac{1}{4},\quad \mathsf{P}\{\xi=0\}=\frac{1}{2},$$
$$\mathsf{P}\{\eta=-1\}=\mathsf{P}\{\eta=1\}=\frac{1}{4},\quad \mathsf{P}\{\eta=0\}=\frac{1}{2},$$

ezért ξ és η nem függetlenek, hiszen például

$$\mathsf{P}\{\xi=1,\ \eta=0\}=\frac{1}{4},\qquad \mathsf{P}\{\xi=1\}\cdot\mathsf{P}\{\eta=0\}=\frac{1}{8}.$$

Kovariancia és korrelációs együttható tulajdonságai

- $\operatorname{var}(\xi) = \operatorname{cov}(\xi, \xi)$
- Ha ξ és η véletlen változók, akkor
$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \operatorname{cov}(\eta, \xi), \qquad \operatorname{corr}(\xi, \eta) = \operatorname{corr}(\eta, \xi) \qquad \text{(szimmetria)}$$
- Ha $\xi_1, \ldots, \xi_n$ és $\eta_1, \ldots, \eta_m$ véletlen változók és $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$, akkor
$$\operatorname{cov}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \xi_i, \sum_{j=1}^{m} b_j \eta_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i b_j \operatorname{cov}(\xi_i, \eta_j) \qquad \text{(bilinearitás)}$$
- $|\operatorname{corr}(\xi, \eta)| \leqslant 1$, és $|\operatorname{corr}(\xi, \eta)| = 1$ akkor és csak akkor, ha valamely $a \neq 0$ és b valós számokkal $\mathrm{P}\{\eta = a \cdot \xi + b\} = 1$ teljesül; itt $a > 0$ illetve $a < 0$ aszerint, hogy $\operatorname{corr}(\xi, \eta) = 1$ illetve $\operatorname{corr}(\xi, \eta) = -1$.

Momentumok, ferdeség, csúcsosság / lapultság

Legyen ξ véletlen változó, k pozitív egész. Ekkor

- ***k*-adik momentum:** $\mathrm{E}(\xi^k)$
- ***k*-adik centrális momentum:** $\mathrm{E}\left[(\xi - \mathrm{E}\,\xi)^k\right]$
- ***k*-adik abszolút momentum:** $\mathrm{E}\left(|\xi|^k\right)$
- ***k*-adik abszolút centrális momentum:** $\mathrm{E}\left[|\xi - \mathrm{E}\,\xi|^k\right]$
- **ferdeség:** $\dfrac{\mathrm{E}\left[(\xi - \mathrm{E}\,\xi)^3\right]}{\left(\mathrm{E}\left[(\xi - \mathrm{E}\,\xi)^2\right]\right)^{3/2}}$
- **csúcsosság:** $\dfrac{\mathrm{E}\left[(\xi - \mathrm{E}\,\xi)^4\right]}{\left(\mathrm{E}\left[(\xi - \mathrm{E}\,\xi)^2\right]\right)^{2}} - 3$

Tehát $\mathrm{E}(\xi)$ az első momentum, $\mathrm{var}(\xi)$ pedig a második (abszolút) centrális momentum

Ha $a, b \in \mathbb{R}$ és $a \neq 0$, akkor ξ és $a\xi + b$ ferdesége, illetve ξ és $a\xi + b$ csúcsossága megegyezik.

Példa: Legyen η standard normális eloszlású. Ekkor $\mathsf{E}(\eta) = 0$, $\operatorname{var}(\eta) = 1$,

$$\mathsf{E}(\eta^3) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^3 \mathrm{e}^{-x^2/2} \, \mathrm{d}x = 0,$$

$$\begin{aligned} \mathsf{E}(\eta^4) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^4 \mathrm{e}^{-x^2/2} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big[-x^3 \mathrm{e}^{-x^2/2} \Big]_{x=-\infty}^{x=\infty} + \frac{3}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \mathrm{e}^{-x^2/2} \, \mathrm{d}x = 3\,\mathsf{E}(\eta^2) = 3, \end{aligned}$$

ezért η ferdesége és csúcsossága is 0.

Ha ξ normális eloszlású (m, σ^2) paraméterekkel, akkor $\xi = \sigma\,\eta + m$, ahol η standard normális eloszlású, ezért ξ ferdesége és csúcsossága is 0.

Véletlen változó kvantilisei, mediánja, interkvartilise

Legyen $q \in (0,1)$. A $c_q \in \mathbb{R}$ szám q**-kvantilise** a ξ véletlen változónak, ha

$$\mathrm{P}\{\xi < c_q\} \leqslant q, \qquad \text{és} \qquad \mathrm{P}\{\xi > c_q\} \leqslant 1 - q.$$

Az $\frac{1}{2}$-kvantilist **mediánnak** nevezzük.

Az $c_{3/4} - c_{1/4}$ különbséget **interkvartilisnek** nevezzük.

Legyen

$$a := \inf\left\{x \in \mathbb{R} : \mathrm{P}\{\xi > x\} \leqslant 1-q\right\}, \quad b := \sup\left\{x \in \mathbb{R} : \mathrm{P}\{\xi < x\} \leqslant q\right\}.$$

Ekkor $a \leqslant b$, és egy $c \in \mathbb{R}$ szám akkor és csak akkor q-kvantilise ξ-nek, ha $a \leqslant c \leqslant b$.

Szokták csak az $\frac{a+b}{2}$ számot tekinteni a q-kvantilisnek.

Véletlen változó kvantilisei

- Ha az $F_\xi(x) = q$ egyenletnek van megoldása de csak egy, akkor ez az $F_\xi^{-1}(q)$ megoldás az egyetlen q-kvantilis.
- Ha az $F_\xi(x) = q$ egyenletnek nincs megoldása, akkor egyetlen q-kvantilis van, mégpedig az a szám, ahol az F_ξ függvény átugorja a q számot.
- Ha az $F_\xi(x) = q$ egyenletnek több megoldása van, akkor a megoldáshalmaz az $(a, b]$ vagy $[a, b]$ intervallum, és a q-kvantilisek éppen az $[a, b]$ intervallum pontjai.

Véletlen változó módusza

Ha ξ diszkrét véletlen változó $x_1, x_2, \ldots$ lehetséges értékekkel, akkor az x_i szám **módusza** ξ-nek, ha x_i-t a legnagyobb valószínűséggel veszi fel, azaz

$$P\{\xi = x_i\} = \sup_k P\{\xi = x_k\}.$$

Ha ξ abszolút folytonos véletlen változó f_ξ sűrűségfüggvénnyel, akkor az x szám **módusza** ξ-nek, ha x globális maximumhelye a sűrűségfüggvénynek, azaz

$$f_\xi(x) = \sup_{y\in\mathbb{R}} f_\xi(y).$$

Markov-egyenlőtlenség

Ha a ξ véletlen változó nemnegatív, akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén

$$\mathsf{P}\{\xi \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{\mathsf{E}(\xi)}{\varepsilon}.$$

Bizonyítás: Ha ξ diszkrét véletlen változó nemnegatív $x_1, x_2, \dots$ lehetséges értékekkel, akkor

$$\mathsf{E}(\xi) = \sum_k x_k \cdot \mathsf{P}\{\xi = x_k\} \geqslant \sum_{k\,:\,x_k \geqslant \varepsilon} x_k \cdot \mathsf{P}\{\xi = x_k\}$$

$$\geqslant \varepsilon \sum_{k\,:\,x_k \geqslant \varepsilon} \mathsf{P}\{\xi = x_k\} = \varepsilon \cdot \mathsf{P}\{\xi \geqslant \varepsilon\}.$$

Ha ξ abszolút folytonos nemnegatív valószínűségi változó f_ξ sűrűségfüggvénnyel, akkor $f_\xi(x) = 0$ ha $x \leqslant 0$, ezért

$$\mathsf{E}(\xi) = \int_0^\infty x f_\xi(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_\varepsilon^\infty x f_\xi(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \varepsilon \int_\varepsilon^\infty f_\xi(x)\,\mathrm{d}x = \varepsilon \cdot \mathsf{P}\{\xi \geqslant \varepsilon\}.$$

Csebisev-egyenlőtlenség

Tetszőleges ξ véletlen változó és $\varepsilon > 0$ esetén

$$\mathsf{P}\{|\xi - \mathsf{E}(\xi)| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{\mathrm{var}(\xi)}{\varepsilon^2}.$$

Bizonyítás: A Markov-egyenlőtlenséget alkalmazva

$$\mathsf{P}\{|\xi - \mathsf{E}(\xi)| \geqslant \varepsilon\} = \mathsf{P}\{(\xi - \mathsf{E}(\xi))^2 \geqslant \varepsilon^2\} \leqslant \frac{\mathsf{E}\left[(\xi - \mathsf{E}(\xi))^2\right]}{\varepsilon^2} = \frac{\mathrm{var}(\xi)}{\varepsilon^2}.$$

Bernoulli-féle nagy számok törvénye

n független kísérlet

A esemény, $p := \mathrm{P}(A)$

A gyakorisága: $k_n(A)$

Ekkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left\{\left|\frac{k_n(A)}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right\} = 0.$$

Szimbolikusan:

$$\frac{k_n(A)}{n} \xrightarrow{\mathrm{P}} p \qquad \text{ha } n \to \infty,$$

melyet **sztochasztikus konvergenciának** nevezünk.

Nagy számok gyenge törvénye

Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots$ páronként korrelálatlan, azonos eloszlású véletlen változók, melyeknek véges a második momentumuk. Ekkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left\{\left|\frac{\xi_1+\cdots+\xi_n}{n} - \mathrm{E}(\xi_1)\right| \geqslant \varepsilon\right\} = 0.$$

Szimbolikusan:

$$\frac{\xi_1+\cdots+\xi_n}{n} \xrightarrow{\mathrm{P}} \mathrm{E}(\xi_1) \qquad \text{ha } n \to \infty.$$

Bizonyítás: Legyen $S_n := \xi_1 + \cdots + \xi_n$, $n \in \mathbb{N}$.
Ekkor $\mathrm{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \mathrm{E}(\xi_k) = \mathrm{E}(\xi_1)$
és $\mathrm{var}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\mathrm{var}(S_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n \mathrm{var}(\xi_k) = \frac{\mathrm{var}(\xi_1)}{n}$,
ezért a Csebisev-egyenlőtlenséggel
$\mathrm{P}\left\{\left|\frac{S_n}{n} - \mathrm{E}(\xi_1)\right| \geqslant \varepsilon\right\} \leqslant \frac{\mathrm{var}(\xi_1)}{n\varepsilon^2} \to 0$ ha $n \to \infty$.

6. Nagy számok törvényei

Mivel $k_n(A) = \xi_1 + \cdots + \xi_n$, ahol $\xi_1, \ldots, \xi_n$ független p paraméterű Bernoulli-eloszlásúak, ezért ebből következik a Bernoulli-féle nagy számok törvénye.

Csebisev-egyenlőtlenséggel $\mathrm{P}\left\{\left|\frac{k_n(A)}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right\} \leqslant \frac{p(1-p)}{n \cdot \varepsilon^2}$.

Így például ha azt akarjuk elérni, hogy egy szabályos érmét dobálva a fejek számának relatív gyakorisága legalább 0.95 valószínűséggel 0.1-nél kevesebbel térjen el a valószínűségtől, akkor a fentiek alapján

$$\mathrm{P}\left\{\left|\frac{k_n(A)}{n} - \frac{1}{2}\right| \geqslant 0,1\right\} \leqslant \frac{1}{4 \cdot (0.1)^2 \cdot n},$$

így a követelmény biztosan teljesül, ha

$$\frac{1}{4 \cdot (0.1)^2 \cdot n} \leqslant 0.05, \qquad \text{azaz } n \geqslant 500,$$

vagyis az érmével legalább 500-szor kell dobni.

Nagy számok erős törvénye

Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots$ (teljesen) független, azonos eloszlású véletlen változók, melyeknek létezik a várható értékük. Ekkor

$$P\left\{\lim_{n\to\infty} \frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{n} = E(\xi_1)\right\} = 1.$$

7. Centrális határeloszlás-tételek

Jelölje φ_{m,σ^2} az (m,σ^2) paraméterű normális eloszlás sűrűségfüggvényét, azaz $\varphi_{m,\sigma^2}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$, $x \in \mathbb{R}$.

Lokális határeloszlás-tétel

n független kísérlet

A esemény, $p := \mathrm{P}(A) \in (0,1)$

A gyakorisága: $k_n(A)$

Ekkor $\mathrm{P}\{k_n(A) = k\} \approx \varphi_{np,np(1-p)}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} \mathrm{e}^{-\frac{(k-np)^2}{2np(1-p)}}$,

mégpedig ha $(\psi_n)_{n=1}^{\infty}$ egy olyan valós számsorozat, melyre $\psi_n = o(n^{2/3})$ ha $n \to \infty$, azaz $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-2/3}\psi_n = 0$, akkor

$$\sup_{k\,:\,|k-np|\leqslant\psi_n} \left| \frac{\mathrm{P}\{k_n(A) = k\}}{\varphi_{np,np(1-p)}(k)} - 1 \right| \to 0 \qquad \text{ha } n \to \infty.$$

Jelölje Φ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényét, azaz

$$\Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Moivre-Laplace-tétel

n független kísérlet

A esemény, $p := \mathsf{P}(A) \in (0,1)$

A gyakorisága: $k_n(A)$

Ekkor $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{\frac{k_n(A)-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant x\right\} = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u$, sőt

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty} \left| \mathsf{P}\left\{\frac{k_n(A)-np}{\sqrt{np(1-p)}} \in (a,b]\right\} - (\Phi(b)-\Phi(a)) \right| = 0$$

Ezért ha egy szabályos érmét dobálunk, akkor a fejek számának relatív gyakoriságára tetszőleges $a > 0$ esetén érvényes

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left\{ \frac{k_n(A)}{n} - \frac{1}{2} \in \left(-\frac{a}{2\sqrt{n}}, \frac{a}{2\sqrt{n}} \right] \right\} = \Phi(a) - \Phi(-a) = 2\Phi(a) - 1.$$

Mivel a

$$2\Phi(a) - 1 = 0.95, \qquad \frac{a}{2\sqrt{n}} = 0.1$$

összefüggésekből $a \approx 1.96$ és $n \approx 96$ adódik, így

$$\mathrm{P}\left\{ \left| \frac{k_n(A)}{n} - \frac{1}{2} \right| \leqslant 0,1 \right\} \approx 0.95 \quad \text{ha} \quad n \approx 96,$$

tehát elég körülbelül 96-szor dobni egy szabályos érmével ahhoz, hogy a fejek számának relatív gyakorisága legalább 0.95 valószínűséggel 0.1-nél kevesebbel térjen el a valószínűségtől.

7. Centrális határeloszlás-tételek

Centrális határeloszlás-tétel

Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots$ teljesen független, azonos eloszlású véletlen változók, melyeknek véges a második momentumuk. Legyen

$$S_n := \xi_1 + \cdots + \xi_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left\{ \frac{S_n - \mathrm{E}(S_n)}{\sqrt{\mathrm{var}(S_n)}} \leqslant x \right\} = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Szimbolikusan: $\frac{S_n - \mathrm{E}(S_n)}{\sqrt{\mathrm{var}(S_n)}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,1)$ ha $n \to \infty$.

Mivel $k_n(A) = \xi_1 + \cdots + \xi_n$, ahol $\xi_1, \ldots, \xi_n$ független p paraméterű Bernoulli-eloszlásúak, ezért ebből következik a Moivre-Laplace-tétel.

$(n, M, N-M)$ paraméterű hipergeometrikus eloszlás

Egy dobozban M piros és $N-M$ fekete golyó van ($M < N$). Visszatevés nélkül húzunk ki n golyót ($n \leqslant N$), és ξ jelöli a kihúzott piros golyók számát. Ekkor ξ olyan k értékeket vehet fel, melyre teljesül $0 \leqslant k \leqslant n$, $k \leqslant M$, és $n-k \leqslant N-M$, eloszlása

$$\mathsf{P}\{\xi = k\} = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Ha $\xi_i := \begin{cases} 1 & \text{ha az } i\text{-edik golyó piros,} \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$ akkor $\xi = \xi_1 + \cdots + \xi_n$, és a $\xi_1, \ldots, \xi_n$ véletlen változók $\frac{M}{N}$ paraméterű Bernoulli-eloszlásúak, DE NEM FÜGGETLENEK! Például $i \neq j$ esetén

$$\mathsf{P}\{\xi_i = 1, \xi_j = 1\} = \frac{M(M-1)}{N(N-1)}, \qquad \mathsf{P}\{\xi_i = 1\} = \mathsf{P}\{\xi_j = 1\} = \frac{M}{N}.$$

$$\mathsf{E}(\xi) = \mathsf{E}(\xi_1) + \cdots + \mathsf{E}(\xi_n) = n \cdot \frac{M}{N},$$

$$\begin{aligned}\operatorname{var}(\xi) &= \operatorname{cov}(\xi, \xi) = \operatorname{cov}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i, \sum_{j=1}^{n} \xi_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{var}(\xi_i) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j),\end{aligned}$$

ahol

$$\operatorname{var}(\xi_i) = \frac{M}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right), \qquad \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) = \frac{M(M-N)}{N^2(N-1)},$$

így

$$\operatorname{var}(\xi) = n \cdot \frac{M}{N} \cdot \left(1 - \frac{M}{N}\right) \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

p paraméterű elsőrendű negatív binomiális eloszlás

A esemény, $p := \mathrm{P}(A)$, melyre $0 < p < 1$. Jelölje $\xi :=$ az A első bekövetkezéséhez szükséges független kísérletek számát; lehetséges értékei: $1, 2, \ldots, \infty$, eloszlása: $\mathrm{P}\{\xi = \infty\} = 0$, és

$$\mathrm{P}\{\xi = k\} = p \cdot (1-p)^{k-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots .$$

$$\mathrm{E}(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p(1-p)^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1},$$

ahol $q := 1 - p$, és

$$\sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} (q^k)' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k \right)' = \left(\frac{1}{1-q} \right)' = \frac{1}{(1-q)^2},$$

így

$$\mathrm{E}(\xi) = p \cdot \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}.$$

$$E(\xi^2) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot p(1-p)^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[k + k(k-1)\right] \cdot p(1-p)^{k-1}$$
$$= p \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} + pq \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)q^{k-2},$$

ahol

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)q^{k-2} = \sum_{k=1}^{\infty} (q^k)'' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k\right)'' = \left(\frac{1}{1-q}\right)'' = \frac{2}{(1-q)^3},$$

így

$$E(\xi^2) = \frac{1}{p} + pq \cdot \frac{2}{(1-q)^3} = \frac{2-p}{p^2}.$$

Végül

$$\mathrm{var}(\xi) = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}.$$

λ paraméterű Poisson-eloszlás

$$\mathrm{P}\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}, \qquad k = 0, 1, \ldots, \qquad \text{ahol } \lambda > 0.$$

$$\mathrm{E}(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\lambda^{\ell+1}}{\ell!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\lambda\mathrm{e}^{\lambda} = \lambda,$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\xi^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \big[k + k(k-1)\big] \cdot \frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda} \\ &= \lambda + \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-2)!} = \lambda + \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\lambda^{\ell+2}}{\ell!} = \lambda + \lambda^2,\end{aligned}$$

$$\mathrm{var}(\xi) = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda.$$

Egyenletes eloszlás az $\{1,2,\ldots,N\}$ halmazon

$$\mathrm{P}\{\xi = k\} = \frac{1}{N}, \qquad k = 1,2,\ldots,N.$$

$$\mathrm{E}(\xi) = \sum_{k=1}^{N} k \cdot \frac{1}{N} = \frac{N(N+1)}{2N} = \frac{N+1}{2},$$

$$\mathrm{E}(\xi^2) = \sum_{k=1}^{N} k^2 \cdot \frac{1}{N} = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6N} = \frac{(N+1)(2N+1)}{6},$$

$$\mathrm{var}(\xi) = \frac{(N+1)(2N+1)}{6} - \frac{(N+1)^2}{4} = \frac{N^2-1}{12}.$$

Egyenletes eloszlás az (a, b) intervallumon

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leqslant a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{ha } a < x \leqslant b, \\ 1 & \text{ha } x > b. \end{cases} \qquad f_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{ha } a \leqslant x \leqslant b \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

$\xi = a + (b-a)\cdot\eta$ ahol η egyenletes eloszlású a $(0, 1)$ intervallumon, hiszen

$$\mathrm{P}\{\eta \leqslant y\} = \mathrm{P}\left\{\frac{\xi - a}{b-a} \leqslant y\right\} = \mathrm{P}\{\xi \leqslant a+(b-a)y\} = \begin{cases} 0 & \text{ha } y \leqslant 0, \\ y & \text{ha } 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 1 & \text{ha } y \geqslant 1. \end{cases}$$

$$\mathrm{E}(\eta) = \int_0^1 y \,\mathrm{d}y = \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{2},$$

$$\mathrm{E}(\eta^2) = \int_0^1 y^2 \,\mathrm{d}y = \left[\frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{3},$$

$$\mathrm{var}(\eta) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12},$$

ezért

$$\mathrm{E}(\xi) = a + (b-a)\,\mathrm{E}(\eta) = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2},$$

$$\mathrm{var}(\xi) = (b-a)^2\,\mathrm{var}(\eta) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

λ paraméterű exponenciális eloszlás

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } \ x < 0, \\ \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{ha } \ x \geqslant 0, \end{cases} \qquad \text{ahol } \ \lambda > 0.$$

$$\mathrm{E}(\xi) = \int_0^\infty x\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \Big[-x\mathrm{e}^{-\lambda x}\Big]_{x=0}^{x=\infty} + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_{x=0}^{x=\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

$$\mathrm{E}(\xi^2) = \int_0^\infty x^2\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \Big[-x^2\mathrm{e}^{-\lambda x}\Big]_{x=0}^{x=\infty} + 2\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{\lambda}\int_0^\infty x\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\lambda^2},$$

$$\mathrm{var}(\xi) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

(m, σ^2) paraméterű normális eloszlás

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad \text{ahol } m \in \mathbb{R},\ \sigma > 0.$$

$\mathrm{E}(\xi) = m$, $\mathrm{var}(\xi) = \sigma^2$, ferdesége 0, csúcsossága 0.

Eloszlásfüggvénye:

$$F_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{(u-m)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}u, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Továbbá $\xi = \sigma \cdot \eta + m$, ahol η standard normális eloszlású, azaz paraméterei $m = 0$, $\sigma = 1$ így eloszlásfüggvénye

$$\Phi(x) := F_\eta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u, \qquad x \in \mathbb{R},$$

melynek értékei táblázatokban megtalálhatók.

Diszkrét véletlen változó feltételes eloszlása, feltételes várható értéke, feltételes varianciája

Legyen A egy pozitív valószínűségű esemény. Ha ξ diszkrét véletlen változó $\mathsf{P}\{\xi = x_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ eloszlással, akkor ξ-nek az A-ra vonatkozó **feltételes eloszlása**

$$\mathsf{P}\{\xi = x_k \,|\, A\}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

feltételes várható értéke

$$\mathsf{E}(\xi \mid A) := \sum_k x_k \cdot \mathsf{P}\{\xi = x_k \,|\, A\}$$

amennyiben ez a sor abszolút konvergens, azaz
$\sum_k |x_k| \cdot \mathsf{P}\{\xi = x_k \,|\, A\} < \infty$, **feltételes varianciája** pedig

$$\mathrm{var}(\xi \mid A) := \mathsf{E}\left[(\xi - \mathsf{E}(\xi \mid A))^2 \mid A\right] = \mathsf{E}(\xi^2 \mid A) - \left[\mathsf{E}(\xi \mid A)\right]^2$$

$$= \sum_k x_k^2 \cdot \mathsf{P}\{\xi = x_k \,|\, A\} - \left(\sum_k x_k \cdot \mathsf{P}\{\xi = x_k \,|\, A\}\right)^2.$$

Mi a két szabályos dobókockával dobott számok eltérésének feltételes eloszlása azon feltétel mellett, hogy a dobott számok összege ℓ ?

Jelölje a dobott számokat ξ és η. Nyilván $\ell \in \{2, 3, \dots, 12\}$ és

$$P(\xi + \eta = \ell) = \begin{cases} \frac{\ell-1}{36} & \text{ha } 2 \leqslant \ell \leqslant 7, \\ \frac{13-\ell}{36} & \text{ha } 7 \leqslant \ell \leqslant 12. \end{cases}$$

Továbbá a $|\xi - \eta|$ lehetséges értékei 0,1,2,3,4,5, és

$$P(|\xi - \eta| = 0 \mid \xi + \eta = 2) = 1, \qquad P(|\xi - \eta| = 1 \mid \xi + \eta = 3) = 1,$$

$$P(|\xi - \eta| = 0 \mid \xi + \eta = 4) = \frac{1}{3}, \qquad P(|\xi - \eta| = 2 \mid \xi + \eta = 4) = \frac{2}{3},$$

$$P(|\xi - \eta| = 1 \mid \xi + \eta = 5) = \frac{1}{2}, \qquad P(|\xi - \eta| = 3 \mid \xi + \eta = 5) = \frac{1}{2},$$

$$P(|\xi - \eta| = 0 \mid \xi + \eta = 6) = \frac{1}{5}, \qquad P(|\xi - \eta| = 2 \mid \xi + \eta = 6) = \frac{2}{5},$$

$$P(|\xi - \eta| = 4 \mid \xi + \eta = 6) = \frac{2}{5}.$$

Abszolút folytonos véletlen változó feltételes eloszlása, feltételes várható értéke

Egy tetszőleges ξ véletlen változónak az A-ra vonatkozó **feltételes eloszlásfüggvénye**

$$F_{\xi|A}(x) := \mathrm{P}\{\xi < x \mid A\}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Ha létezik olyan $f_{\xi|A}$ függvény, melyre

$$F_{\xi|A}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{\xi|A}(u)\,\mathrm{d}u$$

teljesül tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén, akkor az $f_{\xi|A}$ függvényt ξ-nek az A-ra vonatkozó **feltételes sűrűségfüggvényének** nevezzük. Ekkor ξ-nek az A-ra vonatkozó **feltételes várható értéke**

$$\mathrm{E}(\xi \mid A) := \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{\xi|A}(x)\,\mathrm{d}x$$

amennyiben ez az improprius integrál abszolút konvergens, azaz $\int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot f_{\xi|A}(x)\,\mathrm{d}x < \infty$.

Abszolút folytonos véletlen változó feltételes varianciája

ξ-nek az A-ra vonatkozó **feltételes varianciája:**

$$\begin{aligned}\operatorname{var}(\xi \mid A) &:= \mathrm{E}\left[(\xi - \mathrm{E}(\xi \mid A))^2 \mid A\right] = \mathrm{E}(\xi^2 \mid A) - \left[\mathrm{E}(\xi \mid A)\right]^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_{\xi|A}(x)\,\mathrm{d}x - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{\xi|A}(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.\end{aligned}$$

- Ha ξ diszkrét véletlen változó, akkor a $\mathrm{P}\{\xi = x_k \mid A\}$, $k = 1, 2, \ldots$ számok eloszlást alkotnak, hiszen nemnegatívak, és összegük 1:

$$\sum_k \mathrm{P}\{\xi = x_k \mid A\} = \frac{1}{\mathrm{P}(A)} \sum_k \mathrm{P}(\{\xi = x_k\} \cap A)$$
$$= \frac{1}{\mathrm{P}(A)} \mathrm{P}\left(\bigcup_k (\{\xi = x_k\} \cap A)\right) = \frac{1}{\mathrm{P}(A)} \mathrm{P}\left(\left(\bigcup_k \{\xi = x_k\}\right) \cap A\right)$$
$$= \frac{1}{\mathrm{P}(A)} \mathrm{P}(\Omega \cap A) = 1.$$

- Ha létezik az $f(\cdot \mid A)$ feltételes sűrűségfüggvény, akkor $f(\cdot \mid A)$ sűrűségfüggvény, hiszen $\int_{-\infty}^{\infty} f(u \mid A)\,\mathrm{d}u = 1$.
- Ha $\mathrm{E}(\xi)$ létezik, akkor tetszőleges A pozitív valószínűségű esemény esetén létezik $\mathrm{E}(\xi \mid A)$ is.

Példa: Legyen ξ standard normális eloszlású, és $A := \{\xi \geqslant 0\}$.
Ekkor $\mathrm{P}(A) = 1/2$, és

$$F_{\xi|A}(x) = \frac{\mathrm{P}(0 \leqslant \xi < x)}{\mathrm{P}(\xi > 0)} = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leqslant 0, \\ 2\,\mathrm{P}(0 \leqslant \xi < x) & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

Ha $x > 0$, akkor tehát

$$F_{\xi|A}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u.$$

Megjegyzés: ha $\eta := |\xi|$, akkor

$$F_\eta(x) = F_{\xi|A}(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Abszolút folytonos véletlen változóra vonatkozó feltételes sűrűségfüggvény, feltételes várható érték

Legyen (ξ, η) abszolút folytonos véletlen változó $f_{\xi,\eta}$ sűrűségfüggvénnyel. Ekkor ξ **feltételes sűrűségfüggvénye az $\eta = y$ feltételre nézve:**

$$f_{\xi|\eta}(x|y) := \begin{cases} \dfrac{f_{\xi,\eta}(x,y)}{f_\eta(y)} & \text{ha } f_\eta(y) \neq 0, \\ 0 & \text{ha } f_\eta(y) = 0, \end{cases}$$

ahol f_η az η sűrűségfüggvénye.

ξ **feltételes eloszlásfüggvénye az $\eta = y$ feltételre nézve:**

$$F_{\xi|\eta}(x|y) := \int_{-\infty}^{x} f_{\xi|\eta}(u|y)\,\mathrm{d}u,$$

ξ **feltételes várható értéke az $\eta = y$ feltételre nézve:**

$$\mathsf{E}(\xi \mid \eta = y) := \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{\xi|\eta}(x|y)\,\mathrm{d}x,$$

Abszolút folytonos véletlen változóra vonatkozó feltételes variancia, regressziós görbe

ξ feltételes varianciája az $\eta = y$ feltételre nézve:

$$\begin{aligned}\operatorname{var}(\xi \mid \eta = y) &:= \mathsf{E}\left[(\xi - \mathsf{E}(\xi \mid \eta = y))^2 \mid \eta = y\right] \\ &= \mathsf{E}(\xi^2 \mid \eta = y) - \left[\mathsf{E}(\xi \mid \eta = y)\right]^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_{\xi|\eta}(x|y)\,\mathrm{d}x - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{\xi|\eta}(x|y)\,\mathrm{d}x\right)^2.\end{aligned}$$

ξ regressziós görbéje az η feltételre nézve:

az $y \mapsto \mathsf{E}(\xi \mid \eta = y)$ függvény.

Ez minimalizálja az $\mathsf{E}\left[(\xi - f(\eta))^2\right]$ mennyiséget, azaz ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy $\mathsf{E}\left[f(\eta)^2\right] < \infty$, akkor

$$\mathsf{E}\left[(\xi - \mathsf{E}(\xi \mid \eta))^2\right] \leqslant \mathsf{E}\left[(\xi - f(\eta))^2\right].$$

Példa: Ha (ξ, η) normális eloszlású véletlen vektor és $\mathrm{var}(\eta) > 0$, akkor

$$\mathrm{E}(\xi \mid \eta = y) = \mathrm{E}(\xi) + \frac{\mathrm{cov}(\xi, \eta)}{\mathrm{var}(\eta)}(y - \mathrm{E}(\eta)),$$

azaz a regressziós görbe egy egyenes.
Továbbá ξ feltételes eloszlása az $\eta = y$ feltételre vonatkozóan normális eloszlás, mégpedig

$$\mathcal{N}\left(\mathrm{E}(\xi \mid \eta = y), \mathrm{var}(\xi) - \frac{(\mathrm{cov}(\xi, \eta))^2}{\mathrm{var}(\eta)}\right).$$

Tehát

$$\mathrm{var}(\xi \mid \eta = y) = \mathrm{var}(\xi) - \frac{(\mathrm{cov}(\xi, \eta))^2}{\mathrm{var}(\eta)},$$

ami nem függ y-tól!

Teljes eseményrendszerre vonatkozó teljes várható érték tétel

Ha az $A_1, A_2, \ldots$ pozitív valószínűségű események teljes eseményrendszert alkotnak, ξ véletlen változó és $\mathrm{E}(|\xi|) < \infty$, akkor

$$\mathrm{E}(\xi) = \sum_k \mathrm{E}(\xi \mid A_k) \cdot \mathrm{P}(A_k).$$

Bizonyítás. Legyen ξ diszkrét véletlen változó $x_1, x_2, \ldots$ lehetséges értékekkel. Ekkor

$$\sum_k \mathrm{E}(\xi \mid A_k) \cdot \mathrm{P}(A_k) = \sum_k \sum_j x_j \mathrm{P}\{\xi = x_j \mid A_k\} \cdot \mathrm{P}(A_k)$$

$$= \sum_k \sum_j x_j \mathrm{P}(\{\xi = x_j\} \cap A_k) = \sum_j x_j \sum_k \mathrm{P}(\{\xi = x_j\} \cap A_k)$$

$$= \sum_j x_j \mathrm{P}\{\xi = x_j\} = \mathrm{E}(\xi).$$

Abszolút folytonos ξ véletlen változó esetén hasonlóan.

Példa:

Szabályos dobókockával addig dobunk, míg az első 6-os megjelenik.

$\xi :=$ az ehhez szükséges dobások száma

$A_k :=$ az első dobás k

$$\mathrm{E}(\xi) = \sum_{k=1}^{6} \mathrm{E}(\xi \mid A_k) \cdot \mathrm{P}(A_k)$$

Mivel

$$\mathrm{E}(\xi \mid A_k) = \begin{cases} 1 + \mathrm{E}(\xi) & \text{ha } \; k \leqslant 5, \\ 1 & \text{ha } \; k = 6, \end{cases}$$

ezért

$$\mathrm{E}(\xi) = \frac{1}{6}\big(1 + 5(1 + \mathrm{E}(\xi))\big),$$

amiből

$$\mathrm{E}(\xi) = 6.$$