V a l ó s z í n ű s é g s z á m í t á s

1. Véletlen kísérletek, eseményalgebrák

1.1. Valószínűségről véletlen események esetén beszélünk. A **véletlen eseményeket** az jellemzi, hogy nem tudjuk előre megmondani, hogy bekövetkeznek-e, vagy sem. Ezek **véletlen kimenetelű kísérletekkel** kapcsolatosak; ezt a fogalmat tágan értelmezzük: bele tartoznak olyan **véletlen jelenségek** megfigyelései is, melyeknél a körülményeket nem mi határozzuk meg.

Néhány példa:

(a) Minőségellenőrzést végeznek egy gyárban: az elkészült n termékből valamilyen módon kiválasztanak m darabot ($m \leqslant n$), és megvizsgálják, hogy megfelelnek-e az előírásoknak. A kísérlet eredménye (kimenetele): a hibás termékek száma. Ez a $\{0, 1, 2, \dots, m\}$ halmaz valamely eleme.

(b) Kitöltünk egy hagyományos lottószelvényt: megjelölünk 5 számot a lehetséges 90-ből. A kísérlet kimenetele: a találatok száma.

(c) Két különböző fajta növény keresztezésekor az utód bizonyos tulajdonságait (például a virág színét) a gének határozzák meg, melyeket a szülöktől örökölt. Jelölje ezeket A és a. A lehetséges génkombinációk: AA, Aa, aa.

(d) Ha megfigyeljük egy virágporszemcse mozgását valamilyen folyadékban, akkor egy meglehetősen kaotikus mozgást tapasztalunk (melyet Brown-mozgásnak neveznek); ennek oka az, hogy a virágporszemcsét a folyadék molekulái lökdösik, melyek úgynevezett hőmozgást végeznek. A megfigyelés eredménye: a virágporszemcse útvonala.

(e) Egy ragályos fertőzés terjedése, a csapadékmennyiség alakulása, a szeizmográf mozgása szintén véletlen jelenség.

(f) A valószínűségszámítás fejlődésére hatással volt a különböző szerencsejátékokkal kapcsolatos véletlen események valószínűségének vizsgálata.

Matematikai szempontból egy véletlen kísérlettel kapcsolatban minket csak a **lehetséges kimenetelek** érdekelnek. A **valószínűségszámítás** a véletlen kísérletek **mennyiségi** törvényszerűségeit tanulmányozza, és a lehetséges kimenetelekkel kapcsolatban állításokat fogalmaz meg. Csak olyan kísérletekkel foglalkozunk, melyeket **sokszor megismételhetünk**; az egyedi eseményekkel kapcsolatos esélyek latolgatása nem tárgya a valószínűségszámításnak.

1.2. Minden véletlen kísérlettel kapcsolatban tekinthetünk bizonyos **eseményeket**, amelyekről a kísérlet végrehajtása után el tudjuk dönteni hogy bekövetkeztek-e, vagy sem. Ilyen az (a) példában az az esemény, hogy k hibás terméket találunk, ahol $k \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$. De lehet tekinteni azt az eseményt is, hogy a hibás termékek száma kisebb mint egy adott szám, vagy azt, hogy a hibás termékek száma páros, stb. Ezzel a kísérlettel kapcsolatos események általános alakja:

$$\text{a hibás termékek száma} \in M, \qquad \text{ahol } M \subset \{0, 1, 2, \ldots, m\}.$$

A továbbiakban kiderül (lásd a Stone–tételt), hogy egy kísérlettel kapcsolatos eseményeket mindig lehet egy halmaz bizonyos részhalmazaival reprezentálni! Tekintsük egy adott véletlen kísérlettel kapcsolatos összes események halmazát. Ezek között két kitüntetett szerepel: I, a **biztos esemény**, amely a kísérlet bármely végrehajtása során bekövetkezik, és O, a **lehetetlen esemény**, amely sohasem. Tulajdonképpen sok olyan esemény van, amely mindig bekövetkezik, illetve amely sohasem következik be; például az (a) kísérletben mindig bekövetkeznek azok az események, hogy a hibás termékek száma kisebb mint valamely K szám, ahol $K > m$. Viszont mi az eseményeket csak **kvantitatív** szempontból vizsgáljuk (azaz ismételt kísérletek során a bekövetkezések gyakoriságát), ezért az összes biztos, illetve lehetetlen eseményt azonosnak tekintjük. Általában az A és B eseményeket **azonosaknak** tekintjük, ha a kísérlet végrehajtása során vagy mind a kettő bekövetkezik, vagy egyik sem; ekkor azt írjuk, hogy $A = B$.

Egy kísélettel kapcsolatos események között **logikai kapcsolatok** vannak, és **logikai műveleteket** lehet bevezetni:

- Minden A eseménnyel kapcsolatban tekinthetjük az A **ellentett eseményét**, amely pontosan akkor következik be, amikor az A esemény nem következik be; jelölése: $\overline{A}$.
- Az A és B események **összege** az az esemény, amely pontosan akkor következik be, amikor az A és B események közül legalább az egyik bekövetkezik; jelölése: $A + B$.
- Az A és B események **szorzata** az az esemény, amely pontosan akkor következik be, amikor az A és B események mindegyike bekövetkezik; jelölése: $A \cdot B$.
- Az A és B események **különbsége** az az esemény, amely pontosan akkor következik be, amikor az A esemény bekövetkezik, a B esemény pedig nem; jelölése: $A - B$.
- Az A és B események **szimmetrikus differenciája** az az esemény, amely akkor következik be, amikor az A és B események közül pontosan egy következik be; jelölése: $A \triangle B$.
- Azt mondjuk, hogy az A és B események **kizárják egymást**, ha egyszerre nem következhetnek be.
- Azt mondjuk, hogy az A esemény **maga után vonja** a B eseményt, ha az A esemény bekövetkezése esetén mindig bekövetkezik a B esemény is; jelölése: $A \Rightarrow B$.

Érvényesek a következő összefüggések:

- kommutativitás: $A + B = B + A, \;\; A \cdot B = B \cdot A$;
- asszociativitás: $A + (B + C) = (A + B) + C, \;\; A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$;
- idempotencia: $A + A = A, \;\; A \cdot A = A$;
- disztributivitás: $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C), \;\; A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$;
- de Morgan-féle azonosságok: $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}, \;\; \overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$;
- $A - B = A \cdot \overline{B}$;
- $A \bigtriangleup B = (A - B) + (B - A)$;
- A és B kizárják egymást akkor és csak akkor, ha $A \cdot B = O$;
- $A \Rightarrow B$ akkor és csak akkor, ha $A \cdot B = A$, illetve akkor és csak akkor, ha $A + B = B$, illetve akkor és csak akkor, ha $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$;
- $\overline{\overline{A}} = A, \;\; \overline{I} = O, \;\; \overline{O} = I, \;\; \overline{A} = I - A$;
- $A + \overline{A} = I, \;\; A \cdot \overline{A} = O, \;\; A + O = A, \;\; A + I = I, \;\; A \cdot O = O, \;\; A \cdot I = A$.

1.3. Definíció. *Ha eseményekből álló $\mathcal{E}$ halmaz olyan, hogy tartalmazza a biztos eseményt, és $A, B \in \mathcal{E}$ esetén $\overline{A} \in \mathcal{E}$ és $A + B \in \mathcal{E}$, akkor $\mathcal{E}$–t* ***eseményalgebrának*** *nevezzük.*

(Ekkor persze $O \in \mathcal{E}$, és $A, B \in \mathcal{E}$ esetén $A \cdot B \in \mathcal{E}$, $A - B \in \mathcal{E}$ és $A \bigtriangleup B \in \mathcal{E}$ is teljesül.) Egy kísérlettel kapcsolatos események nyilván eseményalgebrát alkotnak.

1.4. Definíció. *Ha valamely Ω halmaz bizonyos részhalmalmazaiból álló $\mathcal{A}$ rendszer olyan, hogy $\Omega \in \mathcal{A}$, és $A, B \in \mathcal{A}$ esetén $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$ és $A \cup B \in \mathcal{A}$, akkor az $(\Omega, \mathcal{A})$ párt* ***halmazalgebrának*** *nevezünk.*

(Ekkor persze $\emptyset \in \mathcal{A}$, és $A, B \in \mathcal{A}$ esetén $A \cap B \in \mathcal{A}$ és $A \setminus B \in \mathcal{A}$ is teljesül.)

1.5. Tétel. (Stone) *Minden eseményalgebrához található vele izomorf halmazalgebra, azaz tetszőleges $\mathcal{E}$ eseményalgebrához létezik $(\Omega, \mathcal{A})$ halmazalgebra és $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{A}$ kölcsönösen egyértelmű leképezés úgy, hogy*

(a) $\varphi(I) = \Omega$,

(b) $\varphi(\overline{A}) = \Omega \setminus \varphi(A)$ *tetszőleges* $A \in \mathcal{E}$ *esetén,*

(c) $\varphi(A + B) = \varphi(A) \cup \varphi(B)$ *tetszőleges* $A, B \in \mathcal{E}$ *esetén.*

(Ekkor persze $\varphi(O) = \emptyset$, és $A, B \in \mathcal{E}$ esetén $\varphi(A \cdot B) = \varphi(A) \cap \varphi(B)$ és $\varphi(A - B) = \varphi(A) \setminus \varphi(B)$ is teljesül, valamint A és B akkor és csak akkor egymást kizáróak, ha $\varphi(A)$ és $\varphi(B)$ diszjunktak, továbbá $A \Rightarrow B$ azzal ekvivalens, hogy $\varphi(A) \subset \varphi(B)$.)

Ez alapján az eseményalgebrákra vonatkozó állítások bizonyítása elvégezhető az úgynevezett Venn–diagrammokkal.

1.6. Amikor egy kísérlettel kapcsolatos eseményalgebra végtelen sok eseményt tartalmaz, akkor arra is szükségünk lesz, hogy egy A_1, A_2, ... eseménysorozat esetén tekintsük az $A_1 + A_2 + \cdots$ **végtelen összeget**, mely az az esemény, amelyik pontosan akkor következik be, ha van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy A_n bekövetkezik, illetve az $A_1 \cdot A_2 \cdot \cdots$ **végtelen szorzatot**, mely az az esemény, amelyik pontosan akkor következik be, ha mindegyik A_1, A_2, ... esemény bekövetkezik. Ezért egy véletlen kísérlettel kapcsolatos eseményeket egy olyan $(\Omega, \mathcal{A})$ halmazalgebra segítségével fogjuk leírni, melyre teljesül, hogy $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ esetén $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ (ekkor persze $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \overline{\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n\right)} \in \mathcal{A}$ is teljesül); az ilyen halmazalgebrát σ–**algebrának** nevezzük. Az Ω halmazt **eseménytérnek**, elemeit **elemi eseményeknek** nevezzük, az $\mathcal{A}$ elemeit pedig **eseményeknek** nevezzük. A kísérlet maga úgy írható le, hogy az Ω egy pontját választjuk ki véletlenszerűen; ha az $\omega \in \Omega$ pont került kiválasztásra, akkor pontosan azok az $A \in \mathcal{A}$ események következtek be, melyekre $\omega \in A$ teljesül; ha pedig $\omega \notin A$, akkor A nem következett be.

1.7. Ha egy kísérletnek véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok különböző kimenetele van, akkor jelölje ezek halmazát Ω; tehát $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}$, vagy $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ alakú. Mivel az elemi eseményeket is eseményeknek tekintjük, így a nekik megfelelő egyelemű $\{\omega_k\}$ halmazok benne vannak $\mathcal{A}$–ban, ezért ekkor $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$, azaz $\mathcal{A}$ az összes részhalmazokból álló halmazrendszer (mely nyilván σ–algebrát alkot).

1.8. Példák:

(a) Egy pénzdarab feldobása esetén $\Omega = \{\text{fej}, \text{írás}\}$.

(b) n-szer dobva egy pénzdarabbal:

$$\Omega = \{\omega = (a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i = \text{fej vagy írás}\}.$$

Ekkor $|\Omega| = 2^n$. Ha n darab egyforma pénzdarabot egyidőben dobunk fel, akkor is lehet ugyanezt az eseményteret tekinteni, de lehet csak a megkülönböztethető kimenetelekre szorítkozni: ezek száma $n + 1$.

(c) Egy zsákban n különböző színű golyó van. Kihúzunk ezek közül k darabot; négy lehetőség van aszerint, hogy visszatevéssel vagy visszatevés nélkül húzunk (az utóbbi esetben $k \leqslant n$ szükséges), és aszerint, hogy a sorrend számít vagy nem számít. Ez a kísérlet ekvivalens azzal a kísérlettel, amikor n rekeszbe helyezünk el k tárgyat; az előbbi négy lehetőség annak felel meg, hogy egy rekeszbe több tárgy is kerülhet vagy csak egy, illetve a tárgyak meg vannak különböztetve, vagy nem. Az eseménytér elemeinek számát a következő táblázat tartalmazza.

	sorrend számít (variáció)	sorrend nem számít (kombináció)	
visszatevés nélkül (ismétlés nélküli)	$\dfrac{n!}{(n-k)!}$	$\dbinom{n}{k}$	egy rekeszbe legfeljebb egy tárgy kerülhet
visszatevéssel (ismétléses)	n^k	$\dbinom{n+k-1}{k}$	egy rekeszbe több tárgy is kerülhet
	a tárgyak különbözőek	a tárgyak nem különböznek	

- Ha n különböző elem közül húzunk visszatevés nélkül úgy, hogy a sorrend számít, és kihúzzuk az összes n elemet (ami azzal ekvivalens, hogy n elemet sorbaállítunk; ezeket **permutációknak** nevezzük), akkor a lehetőségek száma $n! := 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$, hiszen az első húzásnál még n lehetőség van, a másodiknál $n-1$, stb., és ezek szorzata adja az eredményt.

- Ha n különböző elem közül k ($k \leqslant n$) elemet húzunk visszatevés nélkül úgy, hogy a sorrend számít (ezeket **ismétlés nélküli variációknak** nevezzük), akkor a lehetőségek száma $n(n-1)\cdots(n-k+1)$, amit az előzőhöz hasonló gondolatmenettel bizonyíthatunk.

- Ha n különböző elem közül k elemet húzunk visszatevéssel úgy, hogy a sorrend számít (ezeket **ismétléses variációknak** nevezzük), akkor a lehetőségek száma n^k, hiszen minden húzásnál n lehetőség van.

- Ha n különböző elem közül k ($k \leqslant n$) elemet húzunk visszatevés nélkül úgy, hogy a sorrend nem számít (ezeket **ismétlés nélküli kombinációknak** nevezzük), akkor a lehetőségek száma

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!},$$

  hiszen a megfelelő ismétlés nélküli variációkat úgy lehet megkapni, hogy a kihúzott k elemet az összes lehetséges módon sorbarakjuk; ezek száma pedig mindig $k!$.

- Ha n különböző elem közül k elemet húzunk visszatevéssel úgy, hogy a sorrend nem számít (ezeket **ismétléses kombinációknak** nevezzük), akkor a lehetőségek száma $\binom{n+k-1}{k}$, amit úgy lehet belátni, hogy a kísérlet kimeneteleihez egyértelműen hozzá lehet rendelni egy olyan sorozatot, mely $n-1$ darab egyesből és k darab nullából áll, és úgy kell értelmezni, hogy az első egyesig levő nullák száma (ami 0 is lehet) jelenti az első fajta elemből húzottak számát, az első és második egyes közé írt nullák száma jelenti a második fajta elemből húzottak számát, stb.; az ilyen nulla–egy sorozatok száma pedig nyilván $\binom{n+k-1}{k}$, hiszen azt kell megmondani, hogy az $n+k-1$ hely közül melyik k helyre kerüljön nulla.

(d) Adva van n kártya; ezeket osztjuk szét k játékos közöt úgy, hogy sorban n_1, n_2, ... , n_k kártyát kapjanak, ahol $n_1+n_2+\cdots+n_k=n$, és az egy játékoshoz kerülő lapok sorrendje nem számít (ezeket **ismétléses permutációknak** nevezzük). Ekkor az eseménytér elemeinek száma

$$|\Omega| = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_k!},$$

hiszen a kártyák $n!$ számú permutációit úgy lehet ezekből a leosztásokból megkapni, hogy az egy játékoshoz került n_1, n_2, ... , n_k kártyát tetszőleges sorrendbe helyezzük.

(e) Addig dobálunk egy érmével, míg az első fejet sikerül elérni. Ekkor

$$\Omega = \{\mathrm{f}, \mathrm{if}, \mathrm{iif}, \mathrm{iiif}, \dots, \mathrm{i}_\infty\},$$

ahol i_∞ azt a lehetséges kimenetelt jelöli, amikor csak írást dobunk a végtelenségig.

1.9. Ha egy egységnyi hosszúságú pálcát véletlen helyen kettétörünk, akkor a lehetséges kimenetelek halmazát reprezentálhatja az $\Omega=[0,1]$ intervallum; nyilván az összes részhalmazokból álló 2^Ω halmazrendszer most is σ-algebra, de ez nem alkalmas, mert túl bő'. Nyilván elvárjuk, hogy például az $[\alpha,\beta]\subset[0,1]$ intervallumok (mint a legegyszerűbb részhalmazok) eseményeket reprezentáljanak (azt az eseményt, hogy a véletlenszerűen választott pont beleesik az illető $[\alpha,\beta]$ intervallumba). Azt a legszűkebb σ-algebrát, mely tartalmazza az összes $[\alpha,\beta]\subset[0,1]$ intervallumot **Borel-féle σ-algebrának** nevezzük; ez nyilván tartalmazza az összes $(\alpha,\beta), [\alpha,\beta), (\alpha,\beta]\subset[0,1]$ intervallumot és ilyenek megszámlálható unióit is, hiszen $(\alpha,\beta)=[0,1]\setminus([0,\alpha]\cup[\beta,1])$, és $[\alpha,\beta)=\bigcup_{n=1}^{\infty}[\alpha,\beta-n^{-1}]$.

2. Valószínűség

2.1. Ismételjünk meg egy véletlen kísérletet n-szer egymástól függetlenül, azaz a kísérletek eredményét ne befolyásolják az előző kísérletek eredményei. Jelölje $k_n(A)$ azon kísérletek számát, amelyeknél az A esemény bekövetkezett; ezt az A esemény **gyakoriságának** nevezzük. Az A esemény **relatív gyakorisága:**

$$\nu_n(A) := \frac{k_n(A)}{n}.$$

Nyilván

- $0 \leqslant \nu_n(A) \leqslant 1$ teljesül tetszőleges A eseményre;
- $\nu_n(\emptyset)=0,\ \ \nu_n(\Omega)=1$;
- ha A és B egymást kizáró események, akkor $\nu_n(A\cup B)=\nu_n(A)+\nu_n(B)$;
- ha A_1, A_2, ... páronként egymást kizáró események, akkor

$$\nu_n\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu_n(A_j),$$

ahol a jobboldalon álló sor tagjai közül csak véges sok különbözik nullától;

- $\nu_n(\overline{A}) = 1 - \nu_n(A)$ teljesül tetszőleges A eseményre;
- ha $A \subset B$, akkor $\nu_n(A) \leqslant \nu_n(B)$.

(De ezek a tulajdonságok nem függetlenek egymástól.)

A **tapasztalat alapján** egy esemény relatív gyakorisága bizonyos **stabilitást** mutat: ingadozik valamilyen érték körül egyre kisebb kilengésekkel. (Azt persze nem állíthatjuk, hogy ez a sorozat konvergens volna, és erről tapasztalati úton nem is tudunk meggyőződni.) Ezért természetes az a feltételezés, hogy minden eseményhez hozzá lehet rendelni ezt a bizonyos értéket, amit az illető esemény **valószínűségének** nevezünk, és rendelkezik a relatív gyakoriságra jellemző tulajdonságokkal.

2.2. Definíció. ***Valószínűségi mező*** *alatt egy $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ hármast értünk, ahol Ω egy nemüres halmaz, $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ az Ω bizonyos részhalmazaiból álló σ-algebra, és $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ pedig egy olyan leképezés (halmazfüggvény), melyre*

(a) $0 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant 1$ *teljesül tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ esetén,*

(b) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,

(c) *ha $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ páronként diszjunktak, akkor*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j).$$

*(Ezt a tulajdonságot σ-**additivitásnak** nevezzük).*

Könnyű belátni, hogy ha $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ egy valószínűségi mező, akkor

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ (hiszen ha $\mathbb{P}(\emptyset) > 0$ volna, akkor (c)-ben $A_1 = A_2 = \ldots = \emptyset$ választással ellentmondásra jutnánk);
- ha $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ páronként diszjunktak, akkor

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A_j)$$

  (ezt a tulajdonságot **véges additivitásnak** nevezzük; úgy bizonyítható, hogy (c)-t alkalmazzuk $A_{n+1} = A_{n+2} = \ldots = \emptyset$ esetére, és alkalmazzuk azt, hogy $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$);
- $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$ (hiszen $\Omega = A \cup \overline{A}$ diszjunkt felbontás, így $1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A \cup \overline{A}) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A})$);
- ha $A \subset B$, akkor $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$ (ezt a tulajdonságot **monotonitásnak** nevezzük; úgy lehet belátni, hogy $A \subset B$ esetén $B = A \cup (B \cap \overline{A})$ diszjunkt felbontás, ezért $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cup (B \cap \overline{A})) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \cap \overline{A}) \geqslant \mathbb{P}(A)$);

- tetszőleges $A, B \in \mathcal{A}$ esetén

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B),$$

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C).$$

2.3. Az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mezőt **diszkrétnek** nevezzük, ha Ω véges vagy megszámlálhatóan végtelen, és $\mathcal{A} = 2^\Omega$. Ekkor tehát $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}$ vagy $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ alakú. Nyilván tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ esemény előáll az

$$A = \bigcup_{i\,:\,\omega_i \in A} \{\omega_i\}$$

diszjunkt felbontás alakjában, ezért

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i\,:\,\omega_i \in A} \mathbb{P}(\{\omega_i\}).$$

Ezért elég megadni az elemi események valószínűségeit, a $p_i := \mathbb{P}(\{\omega_i\})$ $(i = 1, 2, \ldots)$ számokat ahhoz, hogy tetszőleges esemény valószínűségét ki tudjuk számolni. Nyilván szükséges az, hogy ezek a $\{p_1, p_2, \ldots\}$ számok nemnegatívak legyenek és összegük 1 legyen, hiszen

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left(\bigcup_j \{\omega_j\}\right) = \sum_j p_j.$$

A véges sok elemi eseményt tartalmazó valószínűségi mezők között gyakran fordul elő olyan, amelynél (például szimmetria okok miatt) $p_1 = p_2 = \ldots = p_N = N^{-1}$. Ekkor

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i\,:\,\omega_i \in A} p_i = \frac{1}{N} \sum_{i\,:\,\omega_i \in A} 1 = \frac{1}{N} |\{i : \omega_i \in A\}|,$$

vagyis

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{az } A \text{ szempontjából kedvező kimenetelek száma}}{\text{összes kimenetelek száma}}.$$

2.4. Példák:

(a) Két érmét feldobva mennyi annak a valószínűsége, hogy egy fej és egy írás legyen az eredmény? Ekkor a két érmét megkülönböztetve az $\Omega = \{\mathrm{ff}, \mathrm{fi}, \mathrm{if}, \mathrm{ii}\}$ eseményteret kapjuk, amelyben a kimenetelek egyforma valószínűségűek, így a válasz 0.5.

(b) Mennyi a valószínűsége, hogy egy n tagú társaságban van legalább két olyan személy, akiknek ugyanakkor van a születésnapja? (Feltesszük, hogy a szökőnap nem lehet.) Nyilván $n > 365$ esetén (a skatulya-elv' miatt) ez biztos esemény, így ekkor a valószínűség 1. Ha pedig $n \leqslant 365$, akkor az ellentett eseménnyel számolva

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdots (365 - n + 1)}{365^n} = 1 - \frac{365!}{(365-n)! \cdot 365^n} \approx \begin{cases} 0.284 & \text{ha } n = 16 \\ 0.476 & \text{ha } n = 22 \\ 0.507 & \text{ha } n = 23 \\ 0.891 & \text{ha } n = 40 \end{cases}$$

2.5. Valószínűségek geometriai kiszámítási módja.

Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ és válasszunk egy pontot véletlenszerűen Ω-ban úgy, hogy 'minden pont egyenlő eséllyel kerül kiválasztásra', amit úgy lehet értelmezni, hogy annak a valószínűsége, hogy a pont egy $A \subset \Omega$ részhalmazba esik, az illető A részhalmaz mértékével arányos, azaz

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)},$$

ahol μ az illető halmaz mértékét jelöli: $k = 1$ esetén összhossz, $k = 2$ esetén terület, $k = 3$ esetén térfogat. (Meg kell jegyezni, hogy az $\mathbb{R}^k$ összes részhalmazára nem lehet σ-additív mértéket definiálni, ezért csak a Borel-halmazokra szoktak szorítkozni.) A fenti képlet nyilvánvaló analógiát mutat a

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{az } A \text{ szempontjából kedvező kimenetelek száma}}{\text{összes kimenetelek száma}}$$

képlettel.

2.6. Példák:

(a) Egy egységnyi hosszúságú szakaszt két, találomra kiválasztott ponttal három szakaszra bontunk fel. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a három szakaszból háromszöget lehet szerkeszteni? Jelölje a két, találomra kiválsztott pont helyét $x, y \in [0, 1]$. A két pont találomra való kiválasztását úgy értelmezzük, hogy annak a valószínűsége, hogy az (x, y) pont a $[0, 1] \times [0, 1]$ négyzet valamely részhalmazába esik, a részhalmaz területével arányos. A keresett valószínűség ezért annak a halmaznak a területe, melynek pontjaira fennállnak a következő egyenlőtlenségek:

$$0 < x < \frac{1}{2} < y < 1 \quad \text{és} \quad y - x < \frac{1}{2}$$

vagy

$$0 < y < \frac{1}{2} < x < 1 \quad \text{és} \quad x - y < \frac{1}{2}.$$

Ezért a keresett valószínűség 0.25.

(b) **Bertrand-féle paradoxon.** Tekintsünk egy kört, és válasszuk ki találomra a kör valamelyik húrját; mennyi annak a valószínűsége, hogy ez a húr hosszabb lesz, mint a körbe írt szabályos háromszög oldala? A 'paradoxon' abból származik, hogy a feladatban nincs megadva, hogy mit értsünk azon, hogy találomra' választunk egy húrt. A következő három felfogás mindegyike természetesnek tűnik, de különböző eredményekre vezetnek:

- Válasszunk véletlenszerűen egy pontot a kör belsejében, és azt a húrt tekitsük, aminek ez a pont a felezőpontja. A kapott húr akkor és csak akkor lesz hosszabb, mint a körbe írt szabályos háromszög oldala, ha a véletlenszerűen választott pont egy olyan körbe esik, mely koncentrikus az eredetivel, és fele sugarú. Ezért a keresett valószínűség

$$\frac{\pi(r/2)^2}{\pi r^2} = \frac{1}{4}.$$

- Tekitsük a kör egy tetszőleges sugarát, és azon válasszunk véletlenszerűen egy pontot, és tekitsük azt a húrt, amelynek ez a a felezőpontja. A húr akkor lesz hosszabb a körbe írt szabályos háromszög oldalánál, ha a középpontja legfeljebb $r/2$ távolságra van a kör középpontjától. Tehát a keresett valószínűség

$$\frac{r/2}{r} = \frac{1}{2}.$$

- Először válasszunk egy tetszőleges pontot a kör kerületén; ez lesz a húr egyik végpontja. Ezután válaszzunk a kerületen véletlenszerűen egy másik pontot; ez lesz a húr másik végpontja. Ekkor a keresett valószínűség nyilván $1/3$.

3. Feltételes valószínűség

3.1. Tekintsük az A és B eseményeket. Hogyan definiáljuk az A esemény **feltételes valószínűségét a B feltétel mellett**? Más szavakkal: hogy definiáljuk az A esemény feltételes valószínűségét, ha tudjuk, hogy a B esemény bekövetkezett? Elvégezve N független kísérletet, a B esemény $k_n(B)$ alkalommal következik be; ezen esetekben $k_n(A \cap B)$ alkalommal következik be egyúttal az A esemény is. Így az A esemény **feltételes relatív gyakorisága** azon feltétel mellett, hogy B bekövetkezik

$$\nu_n(A \mid B) := \frac{k_n(A \cap B)}{k_n(B)} = \frac{k_n(A \cap B)/n}{k_n(B)/n} = \frac{\nu_n(A \cap B)}{\nu_n(B)}.$$

Mivel a $\nu_n(B)$ és $\nu_n(A \cap B)$ relatív gyakoriságok a $\mathbb{P}(B)$ illetve $\mathbb{P}(A \cap B)$ valószínűségek körül ingadoznak, ezért természetes az A eseménynek a B eseményre vonatkozó feltételes valószínűségét a

$$\mathbb{P}(A \mid B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

képlettel értelmezni, hacsak $\mathbb{P}(B) > 0$.

3.2. Példák:

(a) Mennyi a valószínűsége, hogy egy kétgyermekes családban mindkét gyerek fiú, ha tudjuk, hogy

- az idősebb gyerek fiú;
- legalább az egyik gyerek fiú ?

Ekkor az eseménytér $\Omega = \{\mathrm{FF}, \mathrm{FL}, \mathrm{LF}, \mathrm{LL}\}$, melynek elemei egyformán $1/4$ valószínűségűek. Jelölje $A = \{\text{mindkét gyerek fiú}\} = \{\mathrm{FF}\}$, $B_1 = \{\text{az idősebb gyerek fiú}\} = \{\mathrm{FF}, \mathrm{FL}\}$, $B_2 = \{\text{legalább az egyik gyerek fiú}\} = \{\mathrm{FF}, \mathrm{FL}, \mathrm{LF}\}$. Nyilván $A \cap B_1 = A \cap B_2 = \{\mathrm{FF}\}$, így $\mathbb{P}(A \mid B_1) = 1/2$, $\mathbb{P}(A \mid B_2) = 1/3$.

(b) Bridzsnél osztáskor 2 ászt kapott egy játékos. Mennyi a valószínűsége, hogy a másik 2 ász a partnerénél van? Az összes leosztások száma $52!/(13!)^4$, ezek egyforma valószínűségűek. Ezekből $\binom{4}{2} \cdot \binom{48}{11} \cdot \frac{39!}{(13!)^3}$ olyan leosztás van, melynél az első játékos 2 ászt kap, és ezek között pedig $\binom{4}{2} \cdot \binom{48}{11} \cdot \binom{37}{11} \cdot \frac{26!}{(13!)^2}$ olyan leosztás van, melynél a másik 2 ász a partnerénél van. Tehát a keresett feltételes valószínűség

$$\frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{48}{11} \cdot \binom{37}{11} \cdot \frac{26!}{(13!)^2}}{\binom{4}{2} \cdot \binom{48}{11} \cdot \frac{39!}{(13!)^3}} = \frac{\frac{37!}{11! \cdot (13!)^2}}{\frac{39!}{(13!)^3}} = \frac{37!}{11!} \cdot \frac{13!}{39!} = \frac{12 \cdot 13}{38 \cdot 39} = \frac{2}{19}.$$

(Persze lehetne olyan eseményteret választani, amelynél számít a lapok sorrendje; ekkor az $|\Omega| = 52!$ számú elemi esemény megint egyenlő valószínűségű, de ekkor a kedvező esetek számánál is figyelembe kell venni a lapok sorrendjét!)
Ezt az eredményt úgy is meg lehet kapni, hogy mivel az első játékosnak már kiosztottak 2 ászt, így az a kérdés, hogy a másik 2 ászt a lehetséges 39 egyenlő valószínűségű helyre kiosztva mennyi annak a valószínűsége, hogy mind a kettő a partner 13 lapja közé kerül? Ekkor az összes esetek száma $\binom{39}{2}$, a kedvező esetek száma pedig $\binom{13}{2}$, így az eredmány

$$\frac{\binom{13}{2}}{\binom{39}{2}} = \frac{12 \cdot 13}{38 \cdot 39} = \frac{2}{19}.$$

(Hasonló módon annak a valószínűsége, hogy a partnernél 1 ász van: $\frac{26}{3 \cdot 19}$, annak a valószínűsége pedig, hogy a partnernél nincs ász: $\frac{25}{3 \cdot 19}$.)

Nyilván teljesül a

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \mid A)$$

összefüggés, melyet lehet használni két esemény együttes bekövetkezési valószínűségének kiszámítására. Teljes indukcióval bizonyítható a következő általánosítás:

3.3. Állítás. (Láncszabály)

$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2 \mid A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})$,

hacsak $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$.

Bizonyítás. Az állítás igaz $n = 1$ esetén. Ha feltesszük, hogy igaz $n = k$-ra, akkor

$$\mathbb{P}(A_{k+1} \mid A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k) = \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k \cap A_{k+1})}{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k)}$$

alapján

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k \cap A_{k+1}) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k) \cdot \mathbb{P}(A_{k+1} \mid A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k),$$

amiből az indukciós feltevést használva kapjuk az állítást $n = k + 1$-re. $\square$

Példa: Húzzunk ki a 32 lapos magyar kártyából hármat visszatevés nélkül. Mennyi a valószínűsége, hogy az első és a harmadik kihúzott lap piros, a második pedig nem az? Jelölje A_i $(i = 1, 2, 3)$ azt az eseményt, hogy az i-edik húzás eredménye piros. Ekkor $\mathbb{P}(A_1) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(\overline{A}_2|A_1) = \frac{24}{31}$, $\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{7}{30}$, így $\mathbb{P}(A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3) = \frac{1}{4} \cdot \frac{24}{31} \cdot \frac{7}{30} = \frac{7}{155}$. (Persze lehetne használni azt az eseményteret is, amely az első három kihúzott lapból áll a sorrendet is figyelembe véve; ekkor $|\Omega| = 32 \cdot 31 \cdot 30$, és a kimenetelek egyenlő valószínűségűek. Mivel a kedvező esetek száma $8 \cdot 24 \cdot 7$, így a keresett valószínűség $\frac{8 \cdot 24 \cdot 7}{32 \cdot 31 \cdot 30} = \frac{7}{155}$.)

Az eseményterek diszjunkt felbontásai fontos szerepet játszanak.

3.4. Definíció. *Események egy A_1, A_2, … véges vagy végtelen sorozatát **teljes eseményrendszernek** nevezzük, ha egymást páronként kizárják, és összegük az egész eseménytér.*

Ez azt jelenti, hogy egy teljes eseményrendszer eseményei közül a kísérlet végrehajtásakor mindig pontosan egy következik be. Egy teljes eseményrendszerre nyilván

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = 1.$$

3.5. Tétel. (Teljes valószínűség tétele) *Ha az A_1, A_2, … pozitív valószínűségű események teljes eseményrendszert alkotnak, akkor tetszőleges B eseményre*

$$\mathbb{P}(B) = \sum_k \mathbb{P}(B \mid A_k) \cdot \mathbb{P}(A_k).$$

Bizonyítás. Nyilván $B = \bigcup_k (B \cap A_k)$ diszjunkt felbontás, hiszen $B = B \cap \Omega = B \cap (\bigcup_k A_k) = \bigcup_k (B \cap A_k)$, és $i \neq j$ esetén $(B \cap A_i) \cap (B \cap A_j) = B \cap A_i \cap A_j = \emptyset$, ugyanis $A_i \cap A_j = \emptyset$. Ezért $\mathbb{P}(B) = \sum_k \mathbb{P}(B \cap A_k)$, amiből a $\mathbb{P}(B \cap A_k) = \mathbb{P}(B \mid A_k) \cdot \mathbb{P}(A_k)$ összefüggés felhasználásával kapjuk az állítást. □

Példa: Három gép csavarokat gyárt. Az első gépnél a selejt aránya 1 %, a másodiknál 2 %, a harmadiknál 3 %. Az első gép az össztermék 50 %-át, a második 30 %-át, a harmadik 20 %-át állítja elő. Mi a valószínűsége annak, hogy az össztermékből véletlenszerűen választott csavar selejtes? Jelölje B azt az eseményt, hogy selejtet húzunk, A_i $(i = 1, 2, 3)$ pedig azt, hogy a kihúzott csavar az i-edik gépen készült. Ekkor nyilván $\mathbb{P}(B|A_1) = 0.01$, $\mathbb{P}(B|A_2) = 0.02$, $\mathbb{P}(B|A_3) = 0.03$, $\mathbb{P}(A_1) = 0.5$, $\mathbb{P}(A_2) = 0.3$, $\mathbb{P}(A_3) = 0.2$, így

$$\mathbb{P}(B) = 0.01 \cdot 0.5 + 0.02 \cdot 0.3 + 0.03 \cdot 0.2 = 0.017.$$

3.6. Állítás. (Bayes–formula) *Ha A és B pozitív valószínűségű események, akkor*

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B \mid A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Bizonyítás. Definíció szerint $\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$. Ezután használhatjuk a $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B \mid A)$ összefüggést. □

3.7. Tétel. (Bayes–tétel) *Ha az A_1, A_2, ... pozitív valószínűségű események teljes eseményrendszert alkotnak, akkor*

$$\mathbb{P}(A_i \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A_i) \cdot \mathbb{P}(B \mid A_i)}{\sum\limits_j \mathbb{P}(B \mid A_j) \cdot \mathbb{P}(A_j)}.$$

Bizonyítás. A Bayes-formulát alkalmazva $\mathbb{P}(A_i \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A_i) \cdot \mathbb{P}(B \mid A_i)}{\mathbb{P}(B)}$. Ezután a teljes valószínűség tétele alapján $\mathbb{P}(B) = \sum\limits_j \mathbb{P}(B \mid A_j) \cdot \mathbb{P}(A_j)$. □

Példa: Mennyi a feltételes valószínűsége az előző példában annak, hogy az első, második, illetve harmadik gépen gyártották a kiválsztott csavart azon feltétel mellett, hogy az selejtesnek bizonyult?

$$\mathbb{P}(A_1|B) = \frac{0.01 \cdot 0.5}{0.017} = \frac{5}{17}, \qquad \mathbb{P}(A_2|B) = \frac{6}{17} \qquad \mathbb{P}(A_3|B) = \frac{6}{17}.$$

4. Függetlenség

4.1. Akkor tartunk két eseményt függetleneknek egymástól, ha az egyik bekövetkezésével kapcsolatos információ nem változtatja meg a másik esemény bekövetkezésének esélyéről alkotott véleményünket. Mivel valamely B esemény bekövetkezésekor az A esemény bekövetkezési esélyét a $\mathbb{P}(A|B)$ feltételes valószínűség adja meg (hacsak $\mathbb{P}(B) > 0$), és hasonlóan: az A esemény bekövetkezésekor a B bekövetkezési esélye $\mathbb{P}(B|A)$ (hacsak $\mathbb{P}(A) > 0$), ezért pozitív valószínűségű A és B eseményeket akkor nevezünk függetleneknek, ha $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$ és $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$ teljesül. Mivel $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$ és $\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$, ezért midkét feltétel azzal ekvivalens, hogy $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$ teljesül. Ennek az összefüggésnek akkor is van értelme, ha A vagy B valószínűsége 0. Ezért az általános definíció a következő:

4.2. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az A és B események* ***függetlenek****, ha*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

Könnyen bizonyítható, hogy ha A és B függetlenek, akkor $\overline{A}$ és B, A és $\overline{B}$, valamint $\overline{A}$ és $\overline{B}$ is függetlenek.

4.3. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az A_1, A_2, ... események* ***páronként függetlenek****, ha közülük bármely két esemény független.*
Azt mondjuk, hogy az A_1, A_2, ... események ***(teljesen) függetlenek****, ha bármely $k \in \{1, 2, \dots, n\}$-re és az 1, 2, ..., n számok tetszőleges i_1, i_2, ... i_k ismétlés nélküli kombinációjára*

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1})\mathbb{P}(A_{i_2}) \cdots \mathbb{P}(A_{i_k}).$$

Lehetséges, hogy például három esemény páronként függetlenek, de nem (teljesen) függetlenek.

5. Valószínűségi változók

5.1. Egy véletlen kísérlettel kapcsolatosan sokféle véletlentől függő mennyiséget lehet tekinteni. Például ha feldobunk 5 kockát, akkor tekinthetjük a dobott számok összegét, vagy a legkisebb dobott számot, vagy a legnagyobb és legkisebb dobott szám különbségét, stb. Ha egy négyzet alakú céltáblára lövünk, akkor tekinthetjük a középponttól mért távolságot, a legközelebbi csúcstól mért távolságot; ha két lövést adunk le, akkor tekinthetjük azok távolságát, stb. Mindezek a véletlentől függő mennyiségek reprezentálhatók valamely $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ függvénnyel, vagy ha egyszerre k darab véletlen mennyiséget is tekintünk, akkor egy $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^k$ függvénnyel; ezeket **valószínűségi változóknak**, illetve **valószínűségi vektorváltozóknak** nevezzük. A $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változót **diszkrétnek** nevezzük, ha a lehetséges értékeinek halmaza megszámlálható (azaz véges vagy megszámlálhatóan végtelen halmaz). Jelölje ekkor $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ lehetséges értékeinek halmazát $X = \{x_1, x_2, \dots\}$. Nyilván szeretnénk beszélni az $\{\omega : \xi(\omega) = x_i\}$, $(i = 1, 2 \dots)$ típusú eseményekről (vagyis arról, hogy a ξ véletlen mennyiség éppen az x_i értéket veszi fel); ehhez az kell, hogy $\{\omega : \xi(\omega) = x_i\} \in \mathcal{A}$, $(i = 1, 2 \dots)$ teljesüljön. Természetesen egy diszkrét valószínűségi mezőn értelmezett tetszőleges függvény teljesíti ezt a feltételt, mert ekkor $\mathcal{A} = 2^\Omega$. (Viszont ha $\mathcal{A} \neq 2^\Omega$, akkor van olyan $A \subset \Omega$ részhalmaz, melyre $A \notin \mathcal{A}$, és ekkor az A részhalmaz $\chi_A : \Omega \to \mathbb{R}$ **indikátorfüggvényét** tekintve, melynek a definíciója

$$\chi_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{ha } \omega \in A, \\ 0 & \text{ha } \omega \notin A, \end{cases}$$

nyilván a χ_A függvény nem teljesíti a fenti feltételt, mert $\{\omega : \chi_A(\omega) = 1\} = A \notin \mathcal{A}$.) Az $\{\omega : \xi(\omega) = x_i\}$, $i = 1, 2 \dots$ események nyilván teljes eseményrendszert alkotnak. A $p_\xi(x_i) := \mathbb{P}\{\xi = x_i\} := \mathbb{P}(\{\omega : \xi(\omega) = x_i\})$, $i = 1, 2 \dots$ valószínűségeket a ξ **eloszlásának** nevezzük. Nyilván

$$p_\xi(x_i) \geqslant 0,\ i = 1, 2 \dots, \quad \text{és} \quad \sum_i p_\xi(x_i) = 1.$$

5.2. Példák:

(a) Két kockát dobva a dobott számok összegét jelölje ξ. Ekkor a ξ lehetséges értékeinek halmaza $X = \{2, 3, \dots, 12\}$, és

$$\mathbb{P}\{\xi = k\} = \begin{cases} \frac{k-1}{36} & \text{ha } 2 \leqslant k \leqslant 7, \\ \frac{13-k}{36} & \text{ha } 7 \leqslant k \leqslant 12. \end{cases}$$

(b) n független kísérletet végzünk egy p valószínűségű A eseménnyel kapcsolatban. Jelölje ξ az A esemény gyakoriságát: $\xi = k_n(A)$. Ekkor az eseménytér

$$\Omega = \{\omega : \omega = (a_1, a_2, \dots, a_n),\ a_i = 0 \text{ vagy } 1\},$$

ahol

$$a_i = \begin{cases} 1 & \text{ha } A \text{ bekövetkezik az } i\text{-edik kísérletben,} \\ 0 & \text{ha } A \text{ nem következik be az } i\text{-edik kísérletben,} \end{cases}$$

és

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = p^{\sum_{i=1}^n a_i} q^{n-\sum_{i=1}^n a_i},$$

ahol $q = 1 - p = \mathbb{P}(\overline{A})$.

Továbbá a ξ lehetséges értékeinek halmaza $X = \{0, 1, \dots, n\}$, és

$$\mathbb{P}\{\xi = k\} = \sum_{\omega\,:\,a_1+\cdots+a_n=k} p^{\sum_{i=1}^n a_i} q^{n-\sum_{i=1}^n a_i} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Ekkor ξ eloszlását **n-edrendű p paraméterű binomiális eloszlásnak** nevezzük.

Tekintsünk most egy teljes eseményrendszert: A_1, A_2, $\dots$, A_r, és jelölje $p_i = \mathbb{P}(A_i)$ $(i = 1, 2, \dots, r)$. (Nyilván $p_1 + p_2 + \cdots + p_r = 1$.) Jelölje ξ_i az A_i esemény gyakoriságát: $\xi_i = k_n(A_i)$. Ekkor a $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r)$ valószínűségi vektorváltozó lehetséges értékeinek halmaza azokból a $(k_1, k_2, \dots, k_r)$ szám r-esekből áll, melyeknek koordinátái nemnegatív egészek és a koordináták összege n, továbbá

$$\mathbb{P}\{\xi_1 = k_1, \xi_2 = k_2, \dots, \xi_r = k_r\} = \frac{n!}{k_1!\,k_2!\cdots k_r!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}.$$

Ennek a $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r)$ valószínűségi vektorváltozónak az eloszlását **polinomiális eloszlásnak** nevezzük.

(c) Addig végzünk független kísérleteket egy p valószínűségű A eseménnyel kapcsolatban, amíg sikerül elérni, hogy az A esemény bekövetkezzen. Jelölje ξ az ehhez szükséges kísérletek számát; ez elvileg lehetne akár végtelen is, de $k = 0, 1, 2, \dots$ esetén

$$\mathbb{P}\{\xi = k + 1\} = p \cdot q^k,$$

így

$$\mathbb{P}\{\xi = \infty\} = 1 - \mathbb{P}\{\xi < \infty\} = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\{\xi = k + 1\} = 1 - p \sum_{k=0}^{\infty} q^k = 0.$$

Ekkor ξ eloszlását **elsőrendű p paraméterű negatív binomiális eloszlásnak** nevezzük.

Ha addig végzünk független kísérleteket,amíg az A esemény r-edik előfordulását sikerül elérni, és ξ jelöli az ehhez szükséges kísérletek számát, akkor $k = 0, 1, 2, \dots$ esetén

$$\mathbb{P}\{\xi = k + r\} = \binom{r + k - 1}{k} p^r \cdot q^k,$$

és újra

$$\mathbb{P}\{\xi = \infty\} = 1 - \mathbb{P}\{\xi < \infty\} = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\{\xi = k + r\} = 1 - p^r \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r + k - 1}{k} q^k = 0,$$

hiszen

$$\binom{r+k-1}{k} = \frac{(r+k-1)(r+k-2)\cdots r}{k!}$$
$$= \frac{(-r)(-r-1)\cdots(-r-k+1)}{k!}(-1)^k = \binom{-r}{k}(-1)^k$$

alapján

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{r+k-1}{k}q^k = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-r}{k}(-q)^k = (1-q)^{-r} = p^{-r}.$$

Ekkor ξ eloszlását r**-edrendű** p **paraméterű negatív binomiális eloszlásnak** nevezzük.

(d) Egy urnában M piros és $N-M$ fekete golyó van ($M<N$). Visszatevéssel húzunk n golyót. Jelölje ξ a kihúzott piros golyók számát. Ekkor ξ lehetséges értékeinek halmaza $X=\{0,1,\dots,n\}$, és

$$\mathbb{P}\{\xi=k\} = \binom{n}{k}\left(\frac{M}{N}\right)^k\left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-k},$$

tehát ξ eloszlása n-edrendű M/N paraméterű binomiális eloszlás.

Ha visszatevés nélkül húzunk ki n golyót ($n \leqslant N$), és megint ξ jelöli a kihúzott piros golyók számát, akkor ξ olyan k értékeket vehet fel, melyre teljesül $0\leqslant k\leqslant n$, $k\leqslant M$, és $n-k\leqslant N-M$, továbbá

$$\mathbb{P}\{\xi=k\} = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Ekkor ξ eloszlását **hipergeometrikus eloszlásnak** nevezzük.

(e) Legyen egy urnában r különböző színű golyó, az i–edik színből N_i ($i=1,\dots,r$). Jelölje $N := N_1+\dots+N_r$ az összes golyók számát. Visszatevéssel húzunk n golyót. Jelölje ξ_i az i–edik színből húzott golyók számát. Ekkor a $(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_r)$ valószínűségi vektorváltozó lehetséges értékeinek halmaza azokból a $(k_1,k_2,\dots,k_r)$ szám r-esekből áll, melyeknek koordinátái nemnegatív egészek és a koordináták összege n, továbbá

$$\mathbb{P}\{\xi_1=k_1,\xi_2=k_2,\dots,\xi_r=k_r\} = \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!}\left(\frac{N_1}{N}\right)^{k_1}\left(\frac{N_2}{N}\right)^{k_2}\cdots\left(\frac{N_r}{N}\right)^{k_r},$$

tehát a $(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_r)$ valószínűségi vektorváltozó eloszlása polinomiális eloszlás.

Ha visszatevés nélkül húzunk ki n golyót ($n\leqslant N$), és megint ξ_i jelöli az i–edik színből húzott golyók számát, akkor a lehetséges értékek halmaza azokból a $(k_1,k_2,\dots,k_r)$ szám r–esekből áll, melyeknek koordinátái nemnegatív egészek, a koordináták összege n, és $k_i\leqslant\min(n,N_i)$; továbbá

$$\mathbb{P}\{\xi_1=k_1,\xi_2=k_2,\dots,\xi_r=k_r\} = \frac{\binom{N_1}{k_1}\cdots\binom{N_r}{k_r}}{\binom{N}{n}}.$$

Ekkor ξ eloszlását **polihipergeometrikus eloszlásnak** nevezzük.

(f) Mazsolás kalácsot sütünk. Tegyük fel, hogy 1000 gramm tésztába átlagosan 50 darab mazsolát teszünk. Egy szelet kalács súlya 25 gramm. Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott szeletben nincsen mazsola? Feltételezések:

- minden mazsola egyforma valószínűséggel kerülhet bele bármely szeletbe, és a mazsolák egymástól függetlenül „mozognak”.

Ha éppen 1000 gramm tésztából készítünk kalácsot, akkor $n = 50$ mazsolát véletlenszerűen elosztunk $N = 1000/25 = 40$ szeletbe. Jelölje ξ egy kiválasztott szeletbe kerülő mazsolák számát. Ez n-edrendű, $1/N$ paraméterű binomiális eloszlású, ezért $k = 0, 1, \ldots, n$ esetén

$$\mathbb{P}(\xi = k) = \binom{n}{k} \frac{1}{N^k} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-k},$$

tehát ekkor az eredeti kérdésre a válasz: $\left(1 - \frac{1}{40}\right)^{50} \approx 0.28$. Mi történik, ha növeljük a tészta mennyiségét? Ha $20 \cdot n$ gramm tésztát és n mazsolát használunk fel, akkor $N = 20 \cdot n/25$ szelet készül, így a binomiális eloszlás paramétere $p_n := 1/N = 5/(4n)$. Jelölje $\lambda := 5/4$ az egy szeletre átlagosan jutó mazsolák számát. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

hiszen

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}.\end{aligned}$$

Ha egy η valószínűségi változó lehetséges értékei a nemnegatív egész számok és $k = 0, 1, \ldots$ esetén

$$\mathbb{P}(\eta = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

akkor azt mondjuk, hogy η eloszlása λ paraméterű **Poisson–eloszlás**.

5.3. Ha a $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változó nem feltétlenül diszkrét, akkor is szeretnénk beszélni az $\{\omega : \xi(\omega) \in [a, b]\}$ alakú eseményekről, ahol $[a, b] \subset \mathbb{R}$; ehhez pontosan az kell, hogy $\{\omega : \xi(\omega) < c\} \in \mathcal{A}$ teljesüljön tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ esetén (ugyanis ekkor

$$\{\omega : \xi(\omega) \in [a, b)\} = \{\omega : \xi(\omega) < b\} \setminus \{\omega : \xi(\omega) < a\} \in \mathcal{A}$$

és

$$\{\omega : \xi(\omega) \in [a, b]\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\omega : \xi(\omega) \in [a, b + n^{-1})\} \in \mathcal{A}$$

is teljesül).

5.4. Definíció. *Akkor modjuk, hogy a $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ leképezés egy valószínűségi változó, ha tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén $\{\omega : \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{A}$ teljesül. Ekkor az $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$,*

$$F(x) := \mathbb{P}\{\xi < x\}$$

*függvényt a ξ **eloszlásfüggvényének** nevezzük.*

5.5. Állítás. *Legyen $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ valamely $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye. Ekkor*

(a) *F monoton növekvő*

(b) *F balról folytonos*

(c) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1.$

Bizonyítás. (a) Ha $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ és $x_1 \leqslant x_2$, akkor $\{\omega : \xi(\omega) < x_1\} \subset \{\omega : \xi(\omega) < x_2\}$ miatt

$$F(x_1) = \mathbb{P}\{\xi < x_1\} \leqslant \mathbb{P}\{\xi < x_2\} = F(x_2).$$

(b) Azt kell megmutatni, hogy ha $x_0 \in \mathbb{R}$ és $x_k \to x_0,\ x_k \leqslant x_{k+1} \leqslant x_0$, akkor $F(x_k) \to F(x_0)$. Viszont ekkor az

$$\{\omega : \xi(\omega) < x_0\} = \{\omega : \xi(\omega) < x_1\} \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \{\omega : x_k \leqslant \xi(\omega) < x_{k+1}\} \right)$$

diszjunkt felbontás alapján

$$\mathbb{P}\{\xi < x_0\} = \mathbb{P}\{\xi < x_1\} + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\{x_k \leqslant \xi < x_{k+1}\},$$

azaz

$$F(x_0) = F(x_1) + \sum_{k=1}^{\infty} (F(x_{k+1}) - F(x_k)),$$

amiből

$$F(x_0) = F(x_1) + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} (F(x_{k+1}) - F(x_k)) = F(x_1) + \lim_{n\to\infty} (F(x_n) - F(x_1)) = \lim_{n\to\infty} F(x_n).$$

(c) Az előzőhöz hasonlóan $x_k \to \infty,\ x_k \leqslant x_{k+1}$ esetén az

$$\Omega = \{\omega : \xi(\omega) < x_1\} \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \{\omega : x_k \leqslant \xi(\omega) < x_{k+1}\} \right)$$

diszjunkt felbontásból $1 = \mathbb{P}(\Omega) = \lim\limits_{k\to\infty} F(x_k)$.
Ha pedig $x_k \to -\infty,\ x_k \geqslant x_{k+1}$, akkor az

$$\{\omega : \xi(\omega) < x_1\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\omega : x_{k+1} \leqslant \xi(\omega) < x_k\}$$

diszjunkt felbontás alapján

$$F(x_1)=\sum_{k=1}^{\infty}(F(x_k)-F(x_{k+1}))=\lim_{n\to\infty}(F(x_1)-F(x_n))=F(x_1)-\lim_{n\to\infty}F(x_n),$$

így $\lim_{k\to\infty}F(x_k)=0$. □

Érdemes megjegyezni, hogy az utolsó állítás bizonyítási módszerével belátható az is, hogy $\mathbb{P}\{\xi\leqslant x_0\}=\lim_{x\to x_0+0}F(x)$, ugyanis $x_k\to x_0,\ \ x_k\geqslant x_{k+1}\geqslant x_0$ esetén az

$$\{\omega:\xi(\omega)<x_1\}=\{\omega:\xi(\omega)\leqslant x_0\}\cup\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\{\omega:x_{k+1}\leqslant\xi(\omega)<x_k\}\right)$$

diszjunkt felbontás alapján

$$F(x_1)=\mathbb{P}\{\xi\leqslant x_0\}+\sum_{k=1}^{\infty}(F(x_k)-F(x_{k+1}))=\mathbb{P}\{\xi\leqslant x_0\}+F(x_1)-\lim_{n\to\infty}F(x_n).$$

Azt is be lehet látni, hogy ha egy $F:\mathbb{R}\to[0,1]$ függvény rendelkezik az (a), (b) és (c) tulajdonságokkal, akkor létezik olyan valószínűségi változó, melynek éppen F az eloszlásfüggvénye.

5.6. Példák:

(a) Ha $\xi:\Omega\to\mathbb{R}$ diszkrét valószínűségi változó $X=\{x_1,x_2,\dots\}$ lehetséges értékekkel és $p_\xi(x_i)=\mathbb{P}\{\xi=x_i\}$ $(i=1,2,\dots)$ eloszlással, akkor ξ eloszlásfüggvénye egy olyan balról folytonos lépcsősfüggvény, melynek az ugráshelyei éppen az $x_1,x_2,\dots$ pontok, és az ugrás nagysága az x_i pontban $p_\xi(x_i)$.

(b) Ha a $[0,1]$ intervallumon válsztunk véletlenszerűen egy ξ pontot úgy, hogy egy $A\subset[0,1]$ részhalmazba esés valószínűsége az illető részhalmaz mértékével arányos, akkor ξ eloszlásfüggvénye nyilván

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{ha } x\leqslant 0\\ x & \text{ha } 0<x\leqslant 1\\ 1 & \text{ha } x>1.\end{cases}$$

Ekkor a ξ valószínűségi változót **egyenletes eloszlásúnak** nevezzük a $[0,1]$ intervallumon.

5.7. Definíció. *Tekintsünk egy $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ valószínűségi mezőn egy $\xi:\Omega\to\mathbb{R}$ valószínűségi változót. Ha létezik olyan $f:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ függvény, melyre*

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,dt$$

*teljesül minden $x\in\mathbb{R}$ pontban, akkor az f függvényt a ξ **sűrűségfüggvényének** nevezzük.*

(A definícióban Lebesgue–integrál szerepel.) Ha létezik is sűrűségfüggvény, az nem egyértelmű, mert például egy tetszôleges pontban az értékét megváltoztatva a fenti integrál értéke nem változik.

Ha a ξ valószínűségi változónak van sűrűségfüggvénye, akkor az eloszlásfüggvénye nyilván folytonos, ezért

$$\mathbb{P}\{\xi = x_0\} = \mathbb{P}\{\xi \leqslant x_0\} - \mathbb{P}\{\xi < x_0\} = \lim_{x \to x_0+0} F(x) - F(x_0) = 0$$

tetszőleges $x_0 \in \mathbb{R}$ esetén. Továbbá

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt = 1,$$

hiszen $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$; azt is be lehet látni, hogy ha egy nemnegatív f függvényre teljesül $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt = 1$, akkor létezik olyan valószínűségi változó, melynek éppen f a sűrűségfüggvénye. Ezenkívül tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ esetén

$$\mathbb{P}\{a \leqslant \xi < b\} = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\, dt.$$

Ha az f sűrűségfüggvény folytonos az $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban, akkor ott a F eloszlásfüggvény differenciálható, és $F'(x_0) = f(x_0)$.

5.8. Példák:

(a) Ha ξ egyenletes eloszlású a $[0, 1]$ intervallumon, akkor a sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

(b) Ha a ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

alakú, ahol $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, akkor azt mondjuk, hogy ξ **normális eloszlású** (m, σ^2) **paraméterekkel**. Azt, hogy a fenti függvényre teljesül $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$ abból következik, hogy

$$\begin{aligned}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx\right)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\infty} r e^{-r^2/2} dr d\right) \varphi = 2\pi \left[-re^{-r^2/2}\right]_{r=0}^{r=\infty} = 2\pi.\end{aligned}$$

(c) Jelölje a ξ valószínűségi változó egy radioaktív atom élettartamát. Ez rendelkezik az úgynevezett **örökifjú tulajdonsággal:** ha $t, \Delta t > 0$, akkor

$$\mathbb{P}\{\xi \geqslant t + \Delta t \mid \xi \geqslant t\} = \mathbb{P}\{\xi \geqslant \Delta t\},$$

vagyis annak ellenére, hogy tudjuk, hogy az atom már megélt t időt, a még hátralevő élettartam eloszlása éppen olyan, mint a teljes élettartam eredeti eloszlása. Be lehet látni, hogy ξ eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leqslant 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

alakú, ahol $\lambda > 0$ a **bomlási állandó:**

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \mathbb{P}\{t \leqslant \xi < t + \Delta t \mid \xi \geqslant t\} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}(1 - e^{-\lambda \Delta t}) = \lambda,$$

ami azt jelenti, hogy kis $\Delta t > 0$ időtartam esetén $\mathbb{P}\{t \leqslant \xi < t + \Delta t \mid \xi \geqslant t\} \approx \lambda \Delta t$, azaz a Δt időtartam alatti lebomlás valószínűsége Δt-vel arányos, és az arányossági tényező $\lambda > 0$. A sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leqslant 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

Ezt az eloszlást λ **paraméterű exponenciális eloszlásnak** nevezzük. **Felezési idő** alatt azt a T időtartamot értjük, amennyi idő alatt $\frac{1}{2}$ valószínűséggel bomlik el egy radioaktív atom; ekkor ugyanis a radioaktív anyagnak közelítőleg fele bomlik el. $\frac{1}{2} = \mathbb{P}\{\xi < T\} = F(T) = 1 - e^{-\lambda T}$ alapján $T = (\ln 2)/\lambda$, azaz a felezési idő fordítottan arányos a bomlási állandóval.

5.9. Egy valószínűségi vektorváltozó előáll $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$ alakban, ahol $\xi_i : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változók; az $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$,

$$F(x_1, \dots, x_k) := \mathbb{P}\{\xi_1 < x_1, \dots, \xi_k < x_k\}$$

függvényt a ξ **eloszlásfüggvényének** nevezzük. Be lehet látni, hogy egy $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor eloszlásfüggvénye valamely $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ valószínűségi vektorváltozónak, ha

(a) $F(y_1, y_2) - F(x_1, y_2) - F(y_1, x_2) + F(x_1, x_1) \geqslant 0$ tetszőleges $x_1 \leqslant y_1$ és $x_2 \leqslant y_2$ esetén;

(b) F balról folytonos mindkét változójában;

(c) $\lim\limits_{x_1 \to -\infty} F(x_1, x_2) = \lim\limits_{x_2 \to -\infty} F(x_1, x_2) = 0, \quad \lim\limits_{\substack{x_1 \to +\infty \\ x_2 \to +\infty}} F(x_1, x_2) = 1.$

(Ez értelemszerűen általánosítható.)
Ha létezik olyan $f : \mathbb{R}^k \to [0, \infty)$ függvény, melyre

$$F(x_1, \dots, x_k) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_k} f(t_1, \dots, t_k)\, dt_1 \dots dt_k$$

teljesül minden $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ pontban, akkor az f függvényt a ξ **sűrűségfüggvényének** nevezzük. Nyilván

$$\mathbb{P}\{a_i \leqslant \xi_i \leqslant b_i,\, i = 1, \dots, k\} = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_k}^{b_k} f(t_1, \dots, t_k)\, dt_1 \dots dt_k,$$

sőt tetszőleges $B \subset \mathbb{R}^k$ Borel–halmaz esetén

$$\mathbb{P}\{(\xi_1, \dots, \xi_k) \in B\} = \int \cdots \int_B f(t_1, \dots, t_k)\, dt_1 \dots dt_k,$$

továbbá ha F folytonosan differenciálható, akkor

$$f(x_1, \dots, x_k) = \frac{\partial^k F(x_1, \dots, x_k)}{\partial x_1 \dots \partial x_k}.$$

5.10. Legyenek ξ és η diszkrét valószínűségi változók egy $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mezőn. Jelölje a lehetséges értékeik halmazát $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ illetve $Y = \{y_1, y_2, \dots\}$. Akkor mondjuk hogy ξ és η **függetlenek**, ha tetszőleges i és j esetén az $A_i = \{\xi = x_i\}$ és $B_j = \{\eta = y_j\}$ alakú események függetlenek, azaz $\mathbb{P}\{\xi = x_i, \eta = y_j\} = \mathbb{P}\{\xi = x_i\}\mathbb{P}\{\eta = y_j\}$. Általában a ξ és η valószínűségi változókat akkor nevezzük **függetleneknek**, ha tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}$ esetén $\mathbb{P}\{\xi < x, \eta < y\} = \mathbb{P}\{\xi < x\}\mathbb{P}\{\eta < y\}$, azaz $F_{\xi,\eta}(x, y) = F_\xi(x)F_\eta(y)$, ahol $F_{\xi,\eta}$ a (ξ, η) valószínűségi vektorváltozó eloszlásfüggvényét jelöli. Ha létezik (ξ, η)-nak az $f_{\xi,\eta}$ sűrűségfüggvénye, akkor ebben az esetben $f_{\xi,\eta}(x, y) = f_\xi(x)f_\eta(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$ is ekvivalens a függetlenséggel. Hasonlóan lehet értelmezni több valószínűségi változó függetlenségét is.

Ha a ξ és η valószínűségi változók függetlenek, akkor azt mondjuk, hogy $\xi + \eta$ eloszlása a ξ és η eloszlásának **konvolúciója**.

5.11. Példák:

(a) Ha ξ és η független diszkrét valószínűségi változók, és a lehetséges értékeik egész számok, akkor a

$$\{\xi + \eta = k\} = \bigcup_{j=-\infty}^{\infty} (\{\xi = j\} \cap \{\eta = k - j\})$$

diszjunkt felbontás alapján

$$p_{\xi+\eta}(k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} p_\xi(j)p_\eta(k - j).$$

Például ha ξ és η független binomiális eloszlásúak (n_1, p) illetve (n_2, p) paraméterekkel, akkor ezek konvolúciója ismét binomiális eloszlás, mégpedig (n_1+n_2, p) paraméterekkel, ugyanis

$$p_\xi(j) = \binom{n_1}{j} p^j(1 - p)^{n_1 - j}, \qquad j = 0, 1, \dots, n_1$$

$$p_\eta(j) = \binom{n_2}{j} p^j(1 - p)^{n_2 - j}, \qquad j = 0, 1, \dots, n_2$$

alapján

$$p_{\xi+\eta}(k) = \sum_{i,j\,:\,i+j=k} \binom{n_1}{i} p^i (1-p)^{n_1-i} \binom{n_2}{j} p^j (1-p)^{n_2-j}$$

$$= p^k (1-p)^{n_1+n_2-k} \sum_{i,j\,:\,i+j=k} \binom{n_1}{i}\binom{n_2}{j} = \binom{n_1+n_2}{k} p^k (1-p)^{n_1+n_2-k}.$$

(b) Ha a ξ és η független valószínűségi változóknak léteznek az f_ξ és f_η sűrűségfüggvényeik, akkor

$$F_{\xi+\eta}(x) = \mathbb{P}\{\xi+\eta < x\} = \iint\limits_{u+v<x} f_{\xi,\eta}(u,v)\,du\,dv$$

$$= \iint\limits_{u+v<x} f_\xi(u) f_\eta(v)\,du\,dv = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{x-u} f_\eta(v)\,dv \right) f_\xi(u)\,du$$

alapján

$$f_{\xi+\eta}(x) = F'_{\xi+\eta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(u) f_\eta(x-u)\,du.$$

Például ha ξ és η független normális eloszlásúak (m_1, σ_1^2) illetve (m_2, σ_2^2) paraméterekkel, akkor ezek konvolúciója ismét normális eloszlás, mégpedig $(m_1+m_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$ paraméterekkel, ugyanis

$$f_\xi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(u-m_1)^2}{2\sigma_1^2}}, \qquad f_\eta(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(u-m_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

alapján

$$f_{\xi+\eta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(u-m_1)^2}{2\sigma_1^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(x-u-m_2)^2}{2\sigma_2^2}}\,du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} e^{-\frac{(x-m_1-m_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}.$$

6. Várható érték

6.1. Tekintsünk egy $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ diszkrét valószínűségi változót $X = \{x_1, \dots, x_N\}$ lehetséges értékekkel és $p_k = p_\xi(x_k) = \mathbb{P}\{\xi = x_k\}$ $(k = 1, \dots, N)$ eloszlással. Ha elvégzünk n független kísérletet a ξ valószínűségi változóval kapcsolatban, akkor az x_k értéket körülbelül np_k esetben kapjuk (hiszen az $A_k = \{\xi = x_k\}$ esemény relatív gyakorisága $k_n(A_k)/n \approx \mathbb{P}(A_k)$, ezért $k_n(A_k) \approx np_k$), így a megfigyelt értékek átlaga körülbelül

$$\frac{1}{n}(np_1x_1 + \cdots + np_Nx_N) = \sum_{k=1}^{N} p_k x_k.$$

Ezért a várható értéket a következő módon értelmezzük.

6.2. Definíció. *Ha $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ egy diszkrét valószínűségi változó, melynek lehetséges értékekei $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ és eloszlása $p_k = p_\xi(x_k) = \mathbb{P}\{\xi = x_k\}$ $(k = 1, 2, \dots)$, akkor az*

$$\mathbb{E}\xi := \sum_k p_k x_k$$

*mennyiséget a ξ **várható értékének** nevezzük, amennyiben a $\sum_k p_k x_k$ sor abszolút konvergens.*
Ha $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ egy abszolút folytonos valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, akkor az

$$\mathbb{E}\xi := \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$$

*mennyiséget a ξ **várható értékének** nevezzük, amennyiben az $\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$ improprius integrál abszolút konvergens.*

Tetszőleges ξ valószínűségi változó esetén a várható érték (amennyiben létezik) írható az

$$\mathbb{E}\xi = \int_\Omega \xi(\omega)\, \mathbb{P}(d\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, dF(x)$$

alakban is, ahol az első integrál a ξ függvénynek az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mértéktéren vett integrálja, a második pedig az F függvény szerinti Lebesgue–Stieltjes integrál.

6.3. Példák:

(a) Ha ξ binomiális eloszlású (n, p) paraméterekkel, akkor $\mathbb{P}\{\xi = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $k = 0, 1, \dots, n$ alapján

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} (1-p)^{n-k} = np.$$

Tehát például ha egy $p > 0$ valószínűségű A eseményre elvégzünk n független megfigyelést, akkor a gyakoriság várható értéke $\mathbb{E}(k_n(A)) = np$.

(b) Ha egy egységnyi oldalú négyzetben választunk egyenletes eloszlás szerint egy pontot, és ξ jelöli a pontnak a legközelebbi oldaltól való távolságát, akkor ξ eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \mathbb{P}\{\xi < x\} = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leqslant 0 \\ 1 - (1-2x)^2 & \text{ha } 0 < x \leqslant \frac{1}{2} \\ 1 & \text{ha } x > 1 \end{cases}$$

ezért a sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} 4 - 8x & \text{ha } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

így a várható értéke

$$\mathbb{E}\xi = \int_0^{1/2} x(4 - 8x)\, dx = \left[2x^2 - \frac{8}{3}x^3\right]_{x=0}^{x=1/2} = \frac{1}{6}.$$

(c) Az A és B játékosok a következő játékot játszák. Felváltva dobnak egy szabályos érmét; A kezd, és az nyer, akinek először sikerül fejet dobnia. Az első dobásnál 2–2 forintot tesznek be, és minden dobás előtt duplázzák a tétet, azaz ha az n-edik dobásra sikerül fejet dobni és n páratlan, akkor A nyer 2^n forintot B-től, ha pedig n páros, akkor B nyer 2^n forintot A-tól. Mennyi az A illetve B játékos várható nyereménye? Jelölje ξ az A játékos nyereményét (mely pozitív, ha A nyer, és negatív, ha A veszít). Ekkor ξ lehetséges értékei $(-1)^{n+1}2^n$ $(n = 1, 2, \dots)$ és $\mathbb{P}\{\xi = (-1)^{n+1}2^n\} = 2^{-n}$. Mivel a $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}2^n 2^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ sor nem konvergens, így ξ várható értéke nem létezik! (Viszont $\mathbb{P}\{\xi > 0\} = \sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}\{\xi = 2^{2k+1}\} = \sum_{k=1}^{\infty}2^{-2k-1} = 2/3$, így A nagyobb valószínűséggel nyer, tehát ilyen szempontból A-nak előnyösebb a játék.)

(d) Legyen ξ olyan valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Ezt az eloszlást **Cauchy-eloszlásnak** nevezzük. Az $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\,dx}{\pi(1+x^2)}$ improprius integrál nem abszolút konvergens, mert

$$\int_0^K \frac{x\,dx}{\pi(1+x^2)} = \left[\frac{1}{2\pi}\ln(1+x^2)\right]_0^K = \frac{1}{2\pi}\ln(1+K^2) \to \infty, \qquad \text{ha } K \to \infty.$$

Ezért ξ-nek nem létezik várható értéke. Viszont az f sűrűségfüggvény páros függvény, ezért tetszőleges $[a, b] \subset \mathbb{R}$ esetén $\mathbb{P}\{\xi \in [a, b]\} = \mathbb{P}\{\xi \in [-b, -a]\}$; ekkor azt mondjuk, hogy ξ eloszlása **szimmetrikus**.

6.4. A várható érték rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

- Lineáris: ha ξ és η valószínűségi változók és $a, b \in \mathbb{R}$, akkor $\mathbb{E}(a\xi + b\eta) = a\mathbb{E}\xi + b\mathbb{E}\eta$
- Monoton: ha $\xi \leqslant \eta$, akkor $\mathbb{E}\xi \leqslant \mathbb{E}\eta$
- $|\mathbb{E}\xi| \leqslant \mathbb{E}|\xi|$ (hiszen $-|\xi| \leqslant \xi \leqslant |\xi|$ alapján a monotonitásból $-\mathbb{E}|\xi| \leqslant \mathbb{E}\xi \leqslant \mathbb{E}|\xi|$)
- Ha $\mathbb{P}\{\xi = c\} = 1$, ahol $c \in \mathbb{R}$, akkor $\mathbb{E}\xi = c$
- Ha ξ és η függetlenek, akkor $\mathbb{E}\xi\eta = \mathbb{E}\xi \cdot \mathbb{E}\eta$ (legyenek például ξ és η diszkrét valószínűségi változók $p_j = \mathbb{P}\{\xi = x_j\}$, illetve $q_j = \mathbb{P}\{\eta = y_j\}$ $(j = 1, 2, \dots)$ eloszlással, és $\xi\eta$ lehetséges értékeit jelölje $z_1, z_2, \dots$; ekkor a függetlenséget használva

$$\mathbb{P}\{\xi\eta = z_k\} = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i,j\,:\,x_i y_j = z_k}\{\xi = x_i\} \cap \{\eta = y_j\}\right) = \sum_{i,j\,:\,x_i y_j = z_k} p_i q_j,$$

ezért

$$\mathbb{E}\xi\eta = \sum_k z_k \sum_{i,j\,:\,x_i y_j = z_k} p_i q_j = \sum_k \sum_{i,j\,:\,x_i y_j = z_k} p_i q_j x_i y_j = \left(\sum_i p_i x_i\right)\left(\sum_j q_j y_j\right) = \mathbb{E}\xi \cdot \mathbb{E}\eta$$

- Cauchy-Schwartz egyenlőtlenség: $\mathbb{E}|\xi\eta| \leqslant \sqrt{\mathbb{E}\xi^2\mathbb{E}\eta^2}$ (hiszen tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $\mathbb{E}(|\xi| - \lambda|\eta|)^2 \geqslant 0$, azaz $\lambda^2\mathbb{E}\eta^2 - 2\lambda\mathbb{E}|\xi\eta| + \mathbb{E}\xi^2 \geqslant 0$, így a diszkriminánsa nem pozitív: $4(\lambda\mathbb{E}|\xi\eta|)^2 - 4\mathbb{E}\xi^2\mathbb{E}\eta^2 \leqslant 0$)

- Legyen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ha ξ diszkrét valószínűségi változó $p_k = \mathbb{P}\{\xi = x_k\}$ eloszlással, akkor

$$\mathbb{E}g(\xi) = \sum_k p_k g(x_k).$$

Ha $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ olyan valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, akkor

$$\mathbb{E}g(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,dx.$$

6.5. Definíció. *A* $\mathbb{D}^2\xi := \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2$ *mennyiséget a* ξ ***szórásnégyzetének*** *nevezzük.*

Nyilván

$$\mathbb{D}^2\xi = \mathbb{E}(\xi^2 - 2\xi\mathbb{E}\xi + (\mathbb{E}\xi)^2) = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2,$$

így ha ξ diszkrét valószínűségi változó $p_k = \mathbb{P}\{\xi = x_k\}$ eloszlással, akkor

$$\mathbb{D}^2\xi = \sum_k p_k x_k^2 - \left(\sum_k p_k x_k\right)^2,$$

ha pedig $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ olyan valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, akkor

$$\mathbb{D}^2\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx\right)^2.$$

Nyilván

$$\mathbb{D}^2(\xi + c) = \mathbb{D}^2\xi, \qquad \mathbb{D}^2(c\xi) = c^2\mathbb{D}^2\xi$$

teljesül tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ esetén, és ha ξ és η függetlenek, akkor

$$\mathbb{D}^2(\xi + \eta) = \mathbb{D}^2\xi + \mathbb{D}^2\eta.$$

6.6. Példa: Legyen η **standard normális eloszlású**, azaz normális eloszlású $(0, 1)$ paraméterekkel. Ekkor

$$\mathbb{E}\eta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{\infty} x e^{-x^2/2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\substack{K\to-\infty \\ L\to+\infty}} \left[-e^{-x^2/2}\right]_{x=K}^{x=L} = 0,$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\eta^2 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2/2} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\substack{K\to-\infty \\ L\to+\infty}} \left(\left[-x e^{-x^2/2}\right]_{x=K}^{x=L} + \int_K^L e^{-x^2/2}\,dx\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx = 1.
\end{aligned}$$

Ha pedig ξ normális eloszlású (m, σ^2) paraméterekkel, akkor ξ előáll $\xi = \sigma\eta + m$ alakban, ahol η standard normális eloszlású, hiszen $\eta = (\xi - m)/\sigma$ alapján η eloszlásfüggvénye

$$F_\eta(x) = \mathbb{P}\{\eta < x\} = \mathbb{P}\{(\xi - m)/\sigma < x\} = \mathbb{P}\{\xi < \sigma x + m\} = F_\xi(\sigma x + m),$$

így η sűrűségfüggvénye

$$f_\eta(x) = F_\eta'(x) = \sigma F_\xi'(\sigma x + m) = \sigma f_\xi(\sigma x + m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2},$$

ezért $\mathbb{E}\xi = \sigma\mathbb{E}\eta + m = m$ és $\mathbb{D}^2\xi = \sigma^2\mathbb{D}\eta = \sigma^2$.

6.7. Definíció. *A*

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}((\xi - \mathbb{E}\xi)(\eta - \mathbb{E}\eta))$$

mennyiséget a ξ és η valószínűségi változók ***kovarianciájának*** *nevezzük.*
A

$$\operatorname{corr}(\xi, \eta) = \frac{\operatorname{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{\mathbb{D}^2\xi\,\mathbb{D}^2\eta}}$$

mennyiséget a ξ és η valószínűségi változók ***korrelációs együtthatójának*** *nevezzük.*
Ha $\operatorname{corr}(\xi, \eta) = 0$, akkor azt mondjuk, hogy ξ ***és*** *η* ***korrelálatlanok****.*

Nyilván $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}\xi\eta - (\mathbb{E}\xi)(\mathbb{E}\eta)$, ezért ha ξ és η függetlenek, akkor korrelálatlanok; ez fordítva nem igaz: léteznek olyan ξ és η valószínűségi változók, melyek korrelálatlanok, de nem függetlenek.

6.8. Állítás. *Tetszőleges ξ és η valószínűségi változók esetén*

$$|\operatorname{corr}(\xi, \eta)| \leqslant 1,$$

és $|\operatorname{corr}(\xi, \eta)| = 1$ akkor és csak akkor, ha valamely $a \neq 0$ és b valós számokkal $\mathbb{P}\{\eta = a\xi + b\} = 1$ teljesül; itt $a > 0$ illetve $a < 0$ aszerint, hogy $\operatorname{corr}(\xi, \eta) = 1$ illetve $\operatorname{corr}(\xi, \eta) = -1$.

Bizonyítás. A Cauchy-Schwartz egyenlőtlenség alapján

$$|\operatorname{cov}(\xi, \eta)| = |\mathbb{E}((\xi - \mathbb{E}\xi)(\eta - \mathbb{E}\eta))| \leqslant \sqrt{\mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2\mathbb{E}(\eta - \mathbb{E}\eta)^2},$$

így $\operatorname{corr}(\xi, \eta)| \leqslant 1$. Legyen továbbá

$$\tilde{\xi} = \frac{\xi - \mathbb{E}\xi}{\sqrt{\mathbb{D}^2\xi}}, \qquad \tilde{\eta} = \frac{\eta - \mathbb{E}\eta}{\sqrt{\mathbb{D}^2\eta}}.$$

Nyilván $\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}\eta = 0$ és $\mathbb{D}\xi = \mathbb{D}\eta = 1$ (ezért ezeket ξ, illetve η **standardizáltjának** nevezzük). Továbbá ha $\operatorname{corr}(\xi, \eta) = 1$, akkor $\mathbb{E}\tilde{\xi}\tilde{\eta} = 1$, így $2\mathbb{E}\tilde{\xi}\tilde{\eta} = \mathbb{E}\tilde{\xi}^2\mathbb{E}\tilde{\eta}^2$, amiből $\mathbb{E}(\tilde{\xi} - \tilde{\eta})^2 = 0$, ezért $\mathbb{P}\{\tilde{\xi} = \tilde{\eta}\} = 1$, azaz

$$\mathbb{P}\left\{\tilde{\eta} = \mathbb{E}\eta + \sqrt{\frac{\mathbb{D}^2\eta}{\mathbb{D}^2\xi}}(\xi - \tilde{\xi})\right\} = 1.$$

Hasonlóan, ha $\mathrm{corr}(\xi,\eta)=-1$, akkor $\mathbb{E}\tilde{\xi}\tilde{\eta}=-1$, így $-2\mathbb{E}\tilde{\xi}\tilde{\eta}=\mathbb{E}\tilde{\xi}^2\mathbb{E}\tilde{\eta}^2$, amiből $\mathbb{E}(\tilde{\xi}+\tilde{\eta})^2=0$, ezért $\mathbb{P}\{\tilde{\xi}=-\tilde{\eta}\}=1$, azaz

$$\mathbb{P}\left\{\tilde{\eta}=\mathbb{E}\eta-\sqrt{\frac{\mathbb{D}^2\eta}{\mathbb{D}^2\xi}}(\xi-\tilde{\xi})\right\}=1.$$

□

Könnyen ellenőrízhető, hogy tetszőleges ξ és η valószínűségi változók esetén

$$\mathbb{D}^2(\xi+\eta)=\mathbb{D}^2\xi+2\mathrm{cov}(\xi,\eta)+\mathbb{D}^2\eta.$$

7. Feltételes várható érték

7.1. Definíció. *Legyen A egy pozitív valószínűségű esemény. Ha ξ diszkrét valószínűségi változó $\mathbb{P}\{\xi=x_k\}$ $(k=1,2,\dots)$ eloszlással, akkor ξ-nek az A-ra vonatkozó **feltételes eloszlása***

$$\mathbb{P}\{\xi=x_k\mid A\},\qquad k=1,2,\dots$$

***feltételes várható értéke** pedig*

$$\mathbb{E}(\xi|A):=\sum_k x_k\mathbb{P}\{\xi=x_k\mid A\}$$

amennyiben a $\sum_k x_k\mathbb{P}\{\xi=x_k\mid A\}$ sor abszolút konvergens.
*Egy tetszőleges ξ valószínűségi változónak az A-ra vonatkozó **feltételes eloszlásfüggvénye***

$$F(x|A):=\mathbb{P}\{\xi<x\mid A\},\qquad x\in\mathbb{R}.$$

Ha létezik olyan $f(\cdot\mid A)$ függvény, melyre

$$F(x|A)=\int_{-\infty}^{x}f(u\mid A)\,du$$

*teljesül tetszőleges $x\in\mathbb{R}$ esetén, akkor az $f(\cdot\mid A)$ függvényt ξ-nek az A-ra vonatkozó **feltételes sűrűségfüggvényének** nevezzük. Ekkor ξ-nek az A-ra vonatkozó **feltételes várható értéke***

$$\mathbb{E}(\xi|A):=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x\mid A)\,dx$$

amennyiben az $\int_{-\infty}^{\infty}xf(x\mid A)\,dx$ improprius integrál abszolút konvergens.

Nyilván ha ξ diszkrét valószínűségi változó, akkor a $\mathbb{P}\{\xi=x_k\mid A\}$, $k=1,2,\dots$ számok eloszlást alkotnak, hiszen nemnegatívak, és összegük 1:

$$\sum_k\mathbb{P}\{\xi=x_k\mid A\}=\frac{1}{\mathbb{P}(A)}\sum_k\mathbb{P}(\{\xi=x_k\}\cap A)=\frac{1}{\mathbb{P}(A)}\mathbb{P}\left(\bigcup_k(\{\xi=x_k\}\cap A)\right)$$
$$=\frac{1}{\mathbb{P}(A)}\mathbb{P}\left(\left(\bigcup_k\{\xi=x_k\}\right)\cap A\right)=\frac{1}{\mathbb{P}(A)}\mathbb{P}(\Omega\cap A)=1.$$

Továbbá ha $\mathbb{E}\xi$ létezik, akkor tetszőleges A pozitív valószínűségű esemény esetén létezik $\mathbb{E}(\xi \mid A)$ is.

7.2. Tétel. (Teljes várható érték tétele) *Ha az $A_1, A_2, \dots$ pozitív valószínűségű események teljes eseményrendszert alkotnak, és a ξ valószínűségi változónak létezik várható értéke, akkor*

$$\mathbb{E}(\xi) = \sum_k \mathbb{E}(\xi \mid A_k) \cdot \mathbb{P}(A_k).$$

Bizonyítás. Legyen ξ diszkrét valószínűségi változó x_j, $j = 1, 2, \dots$ lehetséges értékekkel. Ekkor

$$\begin{aligned}\sum_k \mathbb{E}(\xi \mid A_k) \cdot \mathbb{P}(A_k) &= \sum_k \sum_j x_j \mathbb{P}\{\xi = x_j \mid A_k\} \cdot \mathbb{P}(A_k) = \sum_k \sum_j x_j \mathbb{P}(\{\xi = x_j\} \cap A_k) \\ &= \sum_j x_j \sum_k \mathbb{P}(\{\xi = x_j\} \cap A_k) = \sum_j x_j \mathbb{P}\{\xi = x_j\} = \mathbb{E}\xi.\end{aligned}$$

(A szummák felcserélhetőségét az biztosítja, hogy a ξ valószínűségi változó várható értékének létezéséből következik az illető sor abszolút konvergenciája.)

Abszolút folytonos ξ valószínűségi változó esetén a bizonyítás hasonlóan végezhető el. $\square$

8. Nagy számok törvényei

Először két egyenlőtlenséget bizonyítunk a várhatóértékkel kapcsolatban.

8.1. Állítás. (Markov-egyenlőtlenség) *Ha a ξ valószínűségi változó nemnegatív, akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén*

$$\mathbb{P}\{\xi \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{\mathbb{E}\xi}{\varepsilon}$$

Bizonyítás. Például legyen ξ diszkrét valószínűségi változó $p_k = \mathbb{P}\{\xi = x_k\}$, $k = 1, 2, \dots$ eloszlással. Ekkor

$$\mathbb{E}\xi = \sum_k p_k x_k \geqslant \sum_{k\,:\,x_k \geqslant \varepsilon} p_k x_k \geqslant \varepsilon \sum_{k\,:\,x_k \geqslant \varepsilon} p_k = \varepsilon \mathbb{P}\{\xi \geqslant \varepsilon\}.$$

$\square$

8.2. Állítás. (Csebisev-egyenlőtlenség) *Tetszőleges ξ valószínűségi változó és $\varepsilon > 0$ esetén*

$$\mathbb{P}\{|\xi - \mathbb{E}\xi| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{\mathbb{D}^2\xi}{\varepsilon^2}$$

Bizonyítás. A Markov-egyenlőtlenséget alkalmazva

$$\mathbb{P}\{|\xi - \mathbb{E}\xi| \geqslant \varepsilon\} = \mathbb{P}\{(\xi - \mathbb{E}\xi)^2 \geqslant \varepsilon^2\} \leqslant \frac{\mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2}{\varepsilon^2} = \frac{\mathbb{D}^2\xi}{\varepsilon^2}.$$

$\square$

A Bernoulli-féle nagy számok törvénye azt fejezi ki, hogy sok kísérletet végrehajtva egy esemény relatív gyakorisága ,,közel van" a valószínűségéhez.

8.3. Tétel. (Bernoulli-féle nagy számok törvénye) *Tekintsünk egy p valószínűségű A eseménnyel kapcsolatosan n független kísérletet. Ekkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{\left|\frac{k_n(A)}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right\} = 0.$$

Mivel $k_n(A)$ binomiális eloszlású, azaz $\mathbb{P}\{k_n(A) = k\} = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$, ezért a fenti azzal ekvivalens, hogy

$$\sum_{k\,:\,\left|\frac{k}{n}-p\right|<\varepsilon} \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} \to 1, \qquad \text{ha } n \to \infty.$$

Megjegyezzük, hogy a binomiális eloszlás maximális tagja $k = [np]$ vagy $k = [np] + 1$, és a megfelelő valószínűség $\mathbb{P}\{k_n(A) = k\} \approx 1/\sqrt{2\pi np(1-p)} \to 0$ ha $n \to \infty$, viszont az előzőek szerint az $(np - n\varepsilon, np + n\varepsilon)$ intervallumba eső tagok összege tetszőlegesen kicsi $\varepsilon > 0$ esetén is 1–hez konvergál.

A $k_n(A)$ gyakoriság előáll $k_n(A) = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$ alakban, ahol

$$\xi_i(\omega) := \begin{cases} 1 & \text{ha az } i\text{-edik kísérletben } A \text{ bekövetkezik,} \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Nyilván a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ valószínűségi változók függetlenek, azonos eloszlásúak, $\mathbb{P}\{\xi_1 = 1\} = p$, $\mathbb{P}\{\xi_1 = 0\} = 1 - p$, és $\mathbb{E}\xi_1 = p$, $\mathbb{D}^2\xi_1 = p(1-p)$, ezért az előző állítás speciális esete a következő tételnek.

8.4. Tétel. (Nagy számok gyenge törvénye) *Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots$ páronként korrelálatlan, azonos eloszlású valószínűségi változók, melyeknek létezik a szórásuk. Jelölje $S_n := \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$, $n \in \mathbb{N}$. Ekkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}\xi_1\right| \geqslant \varepsilon\right\} = 0.$$

Bizonyítás. Nyilván

$$\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\xi_k = \mathbb{E}\xi_1,$$

$$\mathbb{D}^2\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\mathbb{D}^2 S_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{D}^2\xi_k = \frac{1}{n}\mathbb{D}^2\xi_1,$$

ezért a Csebisev-egyenlőtlenséget alkalmazva

$$\mathbb{P}\left\{\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}\xi_1\right| \geqslant \varepsilon\right\} \leqslant \frac{\mathbb{D}^2\xi_1}{n\varepsilon^2} \to 0, \qquad \text{ha } n \to \infty.$$

□

A bizonyítás alapján a Bernoulli-féle nagy számok törvényével kapcsolatban azt kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}\left\{\left|\frac{k_n(A)}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right\} \leqslant \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2},$$

így például ha azt akarjuk elérni, hogy egy szabályos érmét dobálva a fejek számának relatív gyakorisága legalább 0.95 valószínűséggel 0.1-nél kevesebbel térjen el a valószínűségtől, akkor a fentiek alapján

$$\mathbb{P}\left\{\left|\frac{k_n(A)}{n} - \frac{1}{2}\right| \geqslant 0,1\right\} \leqslant \frac{1}{4 \cdot 0.1^2 \cdot n},$$

így a követelmény biztosan teljesül, ha

$$\frac{1}{4 \cdot 0.1^2 \cdot n} \leqslant 0.05, \qquad \text{azaz } n \geqslant 500,$$

vagyis az érmével legalább 500-szor kell dobni. (Ez egy meglehetősen durva közelítés.)

Bizonyítás nélkül közöljük a nagy számok erős törvényét.

8.5. Tétel. (Nagy számok erős törvénye) *Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots$ teljesen független, azonos eloszlású valószínűségi változók, melyeknek létezik a várható értékük. Jelölje $S_n := \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$, $n \in \mathbb{N}$. Ekkor*

$$\mathbb{P}\left\{\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \mathbb{E}\xi_1\right\} = 1.$$

9. Centrális határeloszlás-tételek

Jelölje φ_{m,σ^2} az (m, σ^2) paraméterű normális eloszlás sűrűségfüggvényét, azaz

$$\varphi_{m,\sigma^2}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

A következő tételeket bizonyítás nélkül közöljük.

9.1. Tétel. (Lokális határeloszlás-tétel) *Tekintsünk egy $p \in (0,1)$ valószínűségű A eseménnyel kapcsolatosan n független kísérletet. Legyen $\{\psi_n\}$ egy olyan valós számsorozat, melyre $\lim_{n\to\infty} n^{-2/3}\psi_n = 0$. Ekkor*

$$\sup_{k\,:\,|k-np|\leqslant\psi_n} \left|\frac{\mathbb{P}\{k_n(A) = k\}}{\varphi_{np,np(1-p)}(k)} - 1\right| \to 0, \qquad \text{ha } n \to \infty.$$

(Vagyis az $(np-\psi_n, np+\psi_n)$ intervallumban $\frac{\mathbb{P}\{k_n(A)=k\}}{\varphi_{np,np(1-p)}(k)} \to 1$ egyenletesen teljesül.)

Jelölje Φ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényét:

$$\Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du.$$

9.2. Tétel. (Moivre-Laplace-tétel) *Tekintsünk egy $p \in (0,1)$ valószínűségű A eseménnyel kapcsolatosan n független kísérletet. Ekkor*

$$\sup_{-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty} \left| \mathbb{P}\left\{ \frac{k_n(A)-np}{\sqrt{np(1-p)}} \in [a,b) \right\} - (\Phi(b)-\Phi(a)) \right| \to 0, \qquad \textit{ha } n \to \infty.$$

Ezért ha egy szabályos érmét dobálunk, akkor a fejek számának relatív gyakoriságára tetszőleges $a > 0$ esetén érvényes

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{ \frac{k_n(A)}{n} - \frac{1}{2} \in \left[-\frac{a}{2\sqrt{n}}, \frac{a}{2\sqrt{n}} \right) \right\} = \Phi(a) - \Phi(-a) = 2\Phi(a) - 1.$$

Mivel a $2\Phi(a) - 1 = 0.95$ és $\frac{a}{2\sqrt{n}} = 0.1$ összefüggésekből $a \approx 1.96$ és $n \approx 96$ adódik, így

$$\mathbb{P}\left\{ \left| \frac{k_n(A)}{n} - \frac{1}{2} \right| \leqslant 0,1 \right\} \approx 0.95 \qquad \text{ha } n \approx 96,$$

tehát elég körülbelül 96-szor dobni egy szabályos érmével ahhoz, hogy a fejek számának relatív gyakorisága legalább 0.95 valószínűséggel 0.1-nél kevesebbel térjen el a valószínűségtől.

A Moivre-Laplace tételből következik, hogy speciálisan

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{ \frac{k_n(A)-np}{\sqrt{np(1-p)}} < x \right\} = \Phi(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Ennek a tételnek az általános alakja a következő.

9.3. Tétel. (Centrális határeloszlás-tétel) *Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots$ teljesen független, azonos eloszlású valószínűségi változók, melyeknek létezik a szórásuk. Jelölje $S_n := \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$, $n \in \mathbb{N}$. Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{ \frac{S_n - n\mathbb{E}\xi_1}{\sqrt{n\mathbb{D}^2\xi_1}} < x \right\} = \Phi(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$