Végtelen sok esemény bekövetkezése

Legyenek $A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}$ tetszőleges események valamely $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ valószínűségi mezőn. Ekkor

$\liminf_{n\to\infty} A_n = \{$Az A_n események közül véges sok kivételével mind bekövetkezik$\} = \cup_{n_0=1}^{\infty} \cap_{n=n_0+1}^{\infty} A_n$

$\limsup_{n\to\infty} A_n = \{$Az A_n események közül végtelen sok bekövetkezik$\} = \cap_{n_0=1}^{\infty} \cup_{n=n_0+1}^{\infty} A_n$

Független véletlen változók összege

Legyenek X és Y független véletlen változók rendre f_X és f_Y sűrűségfüggvénnyel. Ekkor

$$f_{X+Y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(t-x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t-x) f_Y(x)\,dx.$$

Nevezetes diszkrét eloszlások

Eloszlás	várható érték	variancia	karakterisztikus függvény	súlyfüggvény
degenerált(c)	c	0	e^{itc}	$\mathrm{P}(X=c)=1$
Bernoulli(p)	p	$p(1-p)$	$1+p\left(e^{it}-1\right)$	$\mathrm{P}(X=1)=p$ $\mathrm{P}(X=0)=1-p$
binom(n,p)	np	$np(1-p)$	$\left(1+p\left(e^{it}-1\right)\right)^n$	$\mathrm{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ $k=0,1,\ldots,n$
geom(p)	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}$	$\mathrm{P}(X=k)=(1-p)^{k-1}p$ $k=1,2,\ldots$
negbinom(r,p)	$\frac{r}{p}$	$\frac{r(1-p)}{p^2}$	$\left(\frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}\right)^r$	$\mathrm{P}(X=k)=\binom{k-1}{r-1}(1-p)^{k-r}p^r$ $k=r,r+1,\ldots$
Poisson(λ)	λ	λ	$e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)}$	$\mathrm{P}(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ $k=0,1,\ldots$
diszkrét egyenletes(N)	$\frac{N+1}{2}$	$\frac{(N-1)(N+1)}{12}$	$\frac{1}{N}\frac{e^{it(N+1)}-e^{it}}{e^{it}-1}$	$\mathrm{P}(X=k)=\frac{1}{N}$ $k=1,2,\ldots,N$

Nevezetes folytonos eloszlások

Eloszlás	várható érték	variancia	sűrűségfüggvény	karakterisztikus függvény
$\mathcal{E}[a,b]$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & \text{ha } a<x<b\\ 0 & \text{különben}\end{cases}$	$\varphi(t)=\begin{cases}\frac{e^{itb}-e^{ita}}{it(b-a)} & \text{ha } t\neq 0\\ 1 & \text{különben}\end{cases}$
$\mathrm{Exp}(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & \text{ha } x>0\\ 0 & \text{különben}\end{cases}$	$\varphi(t)=\frac{\lambda}{\lambda-it}$
$\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$	μ	σ^2	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\varphi(t)=e^{it\mu-\frac{\sigma^2t^2}{2}}$

Többdimenziós normális eloszlás

Legyen $m \in \mathbb{R}^d$ tetszőleges, $D \in \mathbb{R}^{d\times d}$ szimmetrikus, pozitív definit. Ekkor az $X \sim \mathcal{N}_d(m, D)$ véletlen vektorváltozó sűrűség- és karakterisztikus függvénye

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \det(D)}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left\langle x-m, D^{-1}(x-m)\right\rangle\right\},$$

$$\varphi(t) = \exp\left\{i\langle m,t\rangle - \frac{1}{2}\langle t, Dt\rangle\right\}.$$