# Gyakorló feladatok a Valószínűségelmélet kurzushoz

## 1. Mértékelméleti ismétlés

**1.1.** Tekintsük az egész számok halmazát, mint alaphalmazt. Adjuk meg az alábbi halmazrendszerek által generált $\sigma$-algebrákat.

**a.** $\mathcal{H}_1 = \{\mathbb{N}_0, \{0\}\}$;

**b.** $\mathcal{H}_2 = \{\{n\} : n \in \mathbb{N}_0\}$;

**c.** $\mathcal{H}_3 = \{\{2n, 2n+1, 2n+2, 2n+3\} : n \in \mathbb{Z}\}$.

**1.2.** Tekintsük a valós számok halmazát, mint alaphalmazt. Mutassuk meg, hogy az alábbi halmazrendszerek által generált $\sigma$-algebrák azonosak a Borel-halmazok rendszerével, tehát a nyílt halmazok által generált $\sigma$-algebrával.

**a.** $\mathcal{H}_1 = \{(a,b) : a, b \in \mathbb{R}\}$;

**b.** $\mathcal{H}_2 = \{(a,b] : a, b \in \mathbb{R}\}$;

**c.** $\mathcal{H}_3 = \{(-\infty, b] : b \in \mathbb{R}\}$.

**1.3.** Tekintsük a következő függvényeket: $F(x) = (x-1)^2$, $t(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$,

$$G(x) = \begin{cases} 0\,, & x < 0\,, \\ 1/2\,, & 0 \le x < 1\,, \\ 3/4\,, & 1 \le x < 2\,, \\ 1\,, & 2 \le x\,, \end{cases} \qquad H(x) = \begin{cases} (x-1)^2\,, & x < 0\,, \\ (x-1)^2 - 1\,, & 0 \le x < 1\,, \\ (x-1)^2 - 3/2\,, & 1 \le x < 2\,, \\ (x-1)^2 - 2\,, & 2 \le x\,. \end{cases}$$

Legyen továbbá $\mu_F, \mu_G, \mu_H$ rendre az $F, G, H$ függvény által indukált Lebesgue–Stieltjes-mérték, és jelölje $\lambda$ a Lebesgue-mértéket.

**a.** A $\mu_F, \mu_G$ mértékek közül melyik szinguláris és melyik abszolút folytonos a $\lambda$ mértékre nézve? A szinguláris esetben adjuk meg a mérték atomjait, az abszolút folytonos esetben pedig a Radon–Nikodym-deriváltat.

**b.** Adjuk meg a $\mu_H$ mérték Lebesgue-felbontását a $\lambda$ mértékre nézve.

**c.** Adjuk meg a következő halmazok $\mu_F, \mu_G, \mu_H, \lambda$ mértékek szerinti mértékeit: $\{0,1\}$, $(0,1)$, $[0,1]$, $\mathbb{R}$.

**d.** Adjuk meg a $t$ függvény $\mu_F, \mu_G, \mu_H$ mértékek szerinti integrálját a $(0,2)$ intervallumon. Hogyan változik a megoldás, ha az integrált a $[0,2]$ intervallumon vesszük?

**1.4.**$^{\mathbf{HF}}$ Tekintsük az alábbi függvényeket:

$$t(x) = \begin{cases} x\,, & x \le 1\,, \\ 1\,, & 1 < x < 2\,, \\ x^2\,, & x \le 2\,, \end{cases} \qquad H(x) = \begin{cases} 2x\,, & x \le 0\,, \\ 1\,, & 0 < x \le 1\,, \\ 1 - x^2\,, & 1 < x\,. \end{cases}$$

**a.** Adjuk meg a $\mu_H$ mérték atomjait. Definiáljuk az $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeket olyan módon, hogy a $\mu_H$ mérték Labesgue-mértékre vett Lebesgue-felbontása $\mu_H = \mu_F + \mu_G$ alakban álljon elő. Adjuk meg az abszolút folytonos rész Radon–Nikodym-deriváltját is.

**b.** Adjuk meg a következő halmazok $\mu_F, \mu_G, \mu_H$ mértékek szerinti mértékeit: $\{0, 2\}$, $(0, 2)$, $[0, 2]$. Határozzuk meg az $\int_{(0,2]} t(x)dH(x)$ integrál értékét.

**1.5.*** Legyen $\Theta \neq \emptyset$ tetszőleges halmaz. Adjuk meg a $\mathcal{H} = \{\{x\} : x \in \Theta\}$ halmazrendszer által generált $\sigma$-algebrát. A generált $\sigma$-algebra milyen feltételek mellett tartalmazza a $\Theta$ halmaz összes részhalmazát?

**1.6.*** Mekkora lehet egy véges számosságú $\sigma$-algebra elemszáma? Létezik megszámlálhatóan végtelen számosságú $\sigma$-algebra?

**1.7.*** Hány atomja lehet egy $P$ valószínűségi mértéknek, azaz mekkora lehet az elemszáma a következő halmaznak: $\{\omega \in \Omega : P(\{\omega\}) > 0\}$?

**1.8.*** Létezik olyan mérték a valós egyenes Borel-halmazain, amely szinguláris a Lebesgue-mértékre nézve, de atommentes?

**1.9.*** Legyen $X_1, \ldots, X_n$ azonos valószínűségi mezőn értelmezett véletlen változó, továbbá legyen $N$ az előzőektől független diszkrét változó $R_N = \{1, \ldots, n\}$ értékkészlettel. Ekkor az $X_N$ változót az $X_1, \ldots, X_n$ változókból képzett kevert változónak, az $X_N$ eloszlását pedig kevert eloszlásnak nevezzük.

**a.** Írjuk fel $X_N$ eloszlásfüggvényét illetve eloszlását az $X_1, \ldots, X_n, N$ változók eloszlásfüggvényének és eloszlásának segítségével.

**b.** Tekintsünk egy tetszőleges eloszlást (valószínűségi mértéket) a valós egyenes Borel-halmazain. Mutassuk meg, hogy ez az eloszlás egyértelműen felírható egy abszolút folytonos, egy atomos szinguláris és egy atommentes szinguláris eloszlás keveréseként. (Az abszolút folytonosságot és a szingularitást a Lebesgue-mértékre nézve értjük.) Mit jelent ez az előállítás a véletlen változók nyelvén?

## 2. Generált $\sigma$-algebrák, függetlenség

**2.1.** **a.** Definiáljunk egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűszínűségi mezőt, ezen pedig egy $X : \Omega \to \mathbb{R}$ véletlen változót olyan módon, hogy az $X$ változó egy szabályos dobókocka feldobását modellezze.

**b.** Legyen $Y$ és $Z$ az $X$ változó kettővel illetve hárommal vett maradéka. Adjuk meg az $X$, az $Y$ illetve a $Z$ változó által generált $\sigma$-algebrát. Milyen tartalmazási reláció áll fenn a három halmazrendszer között? Mi a helyzet a $\sigma(Y, Z)$ halmazrendszerrel?

**2.2.** Legyen $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B} \cap \Omega$, $P = \lambda|_\Omega$. Tekintsük az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőt, valamint az alábbi $X : \Omega \to \mathbb{R}$ változót:

$$X(\omega) = \begin{cases} -2\,, & 0 \le \omega \le 1/4\,, \\ -1\,, & 1/4 < \omega \le 1/2\,, \\ 1\,, & 1/2 < \omega \le 3/4\,, \\ 2\,, & 3/4 < \omega \le 1\,, \end{cases}$$

Ábrázoljuk az $X$ függvényt koordináta-rendszerben, és adjuk meg a súlyfüggvényét. Határozzuk meg az $X$, az $X^2$ illetve a $\operatorname{sgn} X$ változó által generált $\sigma$-algebrát. Milyen tartalmazási reláció áll fenn a három halmazrendszer között? Mi a helyzet a $\sigma(X^2, \operatorname{sgn} X)$ halmazrendszerrel?

**2.3.**$^{\mathbf{HF}}$ **a.** Definiáljunk egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőt, rajta pedig a hozzárendelési szabály megadásával egy $X$ és egy $Y$ véletlen változót olyan módon, hogy a két változó független legyen, és mindkettő geometriai eloszlást kövessen $p = 1/2$ paraméterrel.

**b.** Adjuk meg a $\max(X, Y)$ változó által generált $\sigma$-algebrát. Milyen tartalmazási relációban áll ez a halmazrendszer a $\sigma(X, Y)$ halmazrendszerrel?

**c.** Teljesül a $\sigma(X, Y) = \sigma(\max(X, Y), \min(X, Y))$ egyenlőség?

**2.4.** Legyen $\Omega = [0,1]^2$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}^2 \cap \Omega$, $P = \lambda^2|_\Omega$, és tekintsük az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőt. Tekintsük továbbá az $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ koordináta változókat, melyek egy tetszőleges $\omega = (x, y) \in \Omega$ kimenetelhez rendre az $X(\omega) = x$ és $Y(\omega) = y$ értéket rendelik hozzá.

**a.** Határozzuk meg az $X$ illetve az $Y$ változó által generált $\sigma$-algebrát. Mutassuk meg, hogy a két változó független egymástól.

**b.** Adjuk meg az $(X, Y)$ vektorváltozó által generált $\sigma$-algebrát. Mutassunk példát olyan $A$ eseményre, melyre $A \in \sigma(X, Y)$, de $A \notin \sigma(X)$ és $A \notin \sigma(Y)$.

**c.** Adjuk meg az $X + Y$ illetve az $X - Y$ változó által generált $\sigma$-algebrát. Mutassuk meg, hogy a két változó nem független egymástól.

**2.5.*** Legyen $X$ véletlen változó egy tetszőleges $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, és legyen $\mathcal{F}$ a generált $\sigma$-algebra. Tegyük fel, hogy rendelkezünk valamennyi információval a kísérlet kimenetelével kapcsolatban, de ez nem feltétlenül jelenti azt, hogy pontosan tudjuk, melyik kimenetel is következett be. Mutassuk meg, hogy ekkor az alábbiak ekvivalensek:

**(i)** A rendelkezésünkre álló információ elég ahhoz, hogy tetszőleges $A \in \mathcal{F}$ eseményről eldöntsük, hogy bekövetkezett vagy nem.

**(ii)** A rendelkezésünkre álló információ elég ahhoz, hogy megmondjuk az $X$ változó aktuális értékét.

**(iii)** A rendelkezésünkre álló információ elég ahhoz, hogy megmondjuk minden olyan változónak az aktuális értékét, mely mérhető az $\mathcal{F}$ $\sigma$-algebrára nézve.

**2.6.*** Legyen $X$ tetszőleges véletlen változó. Tekintsünk egy olyan $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mérhető függvényt, mely injektív az $X$ változó értékkészletén, és legyen $Y = h(X)$. Mutassuk meg, hogy ekkor $\sigma(X) = \sigma(Y)$. Az egyenlőség akkor is teljesül, ha elhagyjuk az injektivitási feltételt?

**2.7.***
**a.** Tekintsünk egy $X : \Omega \to \mathbb{Z}$ leképezést az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, és legyen $\mathcal{H} = \{X^{-1}(\{x\}) : x \in \mathbb{R}\}$. Mutassuk meg, hogy ekkor $\sigma(\mathcal{H}) = \sigma(X)$, aminek következtében a leképezés pontosan akkor $\mathcal{A}$-mérhető, ha $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{A}$.

**b.** Egy megfelelően választott $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn adjunk példát olyan $X : \Omega \to \mathbb{R}$ leképezésre, ahol ugyan $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{A}$, de a leképezés nem $\mathcal{A}$-mérhető. (Tehát abból, hogy $X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{A}$ minden $x$ valós számra, még nem következik, hogy $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ minden $B$ Borel-halmaz esetén.)

## 3. A Kolmogorov 0–1 törvény és a Borel–Cantelli-lemmák

**3.1.** Legyen $X_1, X_2, \ldots$ azonos valószínűségi mezőn definiált véletlen változó, $c$ pedig valós szám. Mutassuk meg, hogy az alábbiakban definiált halmazok események. A halmazok közül melyek elemei a változók által generál farok $\sigma$-algebrának? Ezek alapján a Kolmogorov 0–1 törvény alkalmazásával milyen állításokat fogalmazhatunk meg a bevezetett események valószínűségeire?

**a.** $A_1 = \{\sup_{n\in\mathbb{N}} X_n > c\}$;

**b.** $A_2 = \{\limsup_{n\to\infty} X_n \leq c\}$;

**c.** $A_3 = \{$a $c$ érték torlódási pontja az $X_1, X_2, \ldots$ sorozatnak$\}$;

**d.**$^{\mathbf{HF}}$ $A_4 = \{$az $X_1, X_2, \ldots$ sorozatban csak véges sok egész érték szerepel$\}$;

**e.** $A_5 = \{\lim_{n\to\infty}(X_1 + X_n)/2 = c\}$.

**3.2.** Legyen $X_1, X_2, \ldots$ független és azonos eloszlású véletlen változó, továbbá legyen $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $n = 1, 2, \ldots$, a kapcsolatos részletösszeg sorozat. Tekintsünk tetszőleges $f_1, f_2, \ldots : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mérhető determinisztikus függvényeket, és legyen $Y$ az alábbi változók valamelyike:

$$\liminf_{n\to\infty} f_n(X_n)\,, \qquad \limsup_{n\to\infty} f_n(X_n)\,, \qquad \liminf_{n\to\infty} f_n(S_n)\,, \qquad \limsup_{n\to\infty} f_n(S_n)\,.$$

Mutassuk meg, hogy létezik olyan $c \in [-\infty, +\infty]$ determinisztikus érték, amelyre $P(Y = c) = 1$. (Tipp: vajon hogyan néz ki az $Y$ változó eloszlásfüggvénye?)

**3.3.**$^{\mathbf{HF}}$ Legyen $X_1, X_2, \ldots$ azonos valószínűségi mezőn definiált véletlen változó

$$P(X_n = 1) = \frac{1}{n^\alpha}\,, \qquad P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^\alpha}\,, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

eloszlással, ahol $\alpha > 0$ rögzített paraméter.

**a.** Tegyük fel, hogy az $X_1, X_2, \ldots$ változó független. Az $\alpha$ paraméter függvényében határozzuk meg a következő esemény valószínűségét:

$$P\Big(\lim_{n\to\infty} X_n = 0\Big) = P\big(\text{a sorozatban csak véges sok 1-es szerepel}\big)$$

**b.** Tetszőleges $\alpha > 0$ mellett konstruáljuk meg az $X_1, X_2, \ldots$ sorozatot olyan módon, hogy a $\lim_{n\to\infty} X_n = 0$ konvergencia 1 valószínűséggel teljesüljön.

**3.4.** Legyen $X_1, X_2, \ldots$ azonos valószínűségi mezőn definiált exponenciális eloszlású véletlen változó $\lambda > 0$ paraméterrel.

**a.** Mutassuk meg, hogy ha a változók függetlenek, akkor

$$P\left(\liminf_{n\to\infty} \frac{X_n}{\ln n} = 0\right) = 1 \qquad \text{és} \qquad P\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\ln n} = \frac{1}{\lambda}\right) = 1\,.$$

**b.** Mit állíthatunk az előző pont valószínűségeiről akkor, ha a változók nem függetlenek? Konstruáljuk meg az $X_1, X_2, \ldots$ változókat olyan módon, hogy

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\ln n} = 0\right) = 1\,.$$

**3.5.** Legyen $X_1, X_2, \ldots$ azonos valószínűségi mezőn értelmezett és a $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlású véletlen változó, továbbá legyen $c \in [0,1]$ rögzített.

**a.** Mutassuk meg, hogy ha az $X_1, X_2, \ldots$ változók függetlenek, akkor a $c$ érték 1 valószínűséggel torlódási pontja a sorozatnak.

**b.** Mutassuk meg, hogy ha az $X_1, X_2, \ldots$ változók függetlenek, akkor a sorozat torlódási pontjainak a halmaza 1 valószínűséggel a [0,1] intervallum. (Tipp: először foglalkozzunk csak a racionális számokkal.)

**c.** A függetlenségi feltétel mellőzésével konstruáljuk meg az $X_1, X_2, \ldots$ sorozatot úgy, hogy a rögzített $c$ érték 0 valószínűséggel legyen a sorozat torlódási pontja.

**3.6.*** Mutassuk meg, hogy tetszőleges $A_1, A_2, \ldots$ eseményekre

$$P\Big(\liminf_{n\to\infty} A_n\Big) \le \liminf_{n\to\infty} P(A_n) \le \limsup_{n\to\infty} P(A_n) \le P\Big(\limsup_{n\to\infty} A_n\Big)\,.$$

**3.7.*** **a.** Legyen $X_1, X_2, \ldots$ független és azonos eloszlású véletlen változó, és $\alpha > 0$. Mutassuk meg, hogy $\lim_{n\to\infty} X_n/n^{1/\alpha} = 0$ majdnem biztosan pontosan akkor, ha $E(|X_1|^\alpha) < \infty$.

**b.** **A nagy számok erős törvényének megfordítása.** Legyen $X_1, X_2, \ldots$ független és azonos eloszlású véletlen változó, és tegyük fel, hogy a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} = c$$

konvergencia pozitív valószínűséggel teljessül valamilyen $c \in \mathbb{R}$ determinisztikus értékre. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a változóknak létezik a várható értéke, a konvergencia 1 valószínűséggel teljesül, és $c = E(X_1)$. (Tipp: először mutassuk meg, hogy $X_n/n \to 0$ majdnem biztosan.)

## 4. Folytonos eloszlások konvolúciója és transzformációi

**4.1.** Legyen $X$ és $Y$ független exponenciális eloszlású változó rendre $\lambda$ és $\mu$ paraméterrel.

**a.** Adjuk meg az $\{X = Y\}$ és az $\{X \leq Y\}$ esemény valószínűségét.

**b.** Határozzuk meg az $\min(X, Y)$ és a $\max(X, Y)$ változó sűrűségfüggvényét.

**4.2.** Legyen $X_1, \ldots, X_n$ független, azonos eloszlású és abszolút folytonos véletlen változó.

**a.** Mennyi a valószínűsége, hogy az $X_1, \ldots, X_n$ változók mind ugyanazt az értéket veszik fel? Mennyi annak az esélye, hogy mindegyik más értéket vesz fel?

**b.** Mennyi annak az esélye, hogy a változók közül $X_1$ veszi fel a legkisebb értéket?

**c.** Változik az előző két kérdésre azott válasz, ha a változók nem abszolút folytonos eloszlásúak? Ha igen, akkor adjunk példát erre.

**4.3.** Határozzuk meg az $X^2$ változó eloszlását, ha

**a.$^{\mathbf{HF}}$** az $X$ exponenciális eloszlású;

**b.** az $X$ standard normális eloszlású.

**4.4.** **a.** Legyen $X$ és $Y$ független $\lambda$ paraméteres exponenciális eloszlású véletlen változó. Mutassuk meg, hogy az $X+Y$ összeg másodrendű Gamma-eloszlást követ $\lambda$ paraméterrel, tehát a sűrűségfüggvénye

$$f_{X+Y}(z) = \begin{cases} \lambda^2 z e^{-\lambda z}, & z \geq 0\,, \\ 0\,, & z < 0\,. \end{cases}$$

**b.** Legyen $X_1$ és $X_2$ független normális eloszlású változó rendre $\mu_1$ és $\mu_2$ várható értékkel, és rendre $\sigma_1$ és $\sigma_2$ szórással. Mutassuk meg, hogy az $X_1 + X_2$ összeg normális eloszlást követ $\mu_1 + \mu_2$ várható értékkel és $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$ varianciával.

**c.** Legyen $X$ és $Y$ független és a $[0, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlású véletlen változó. Határozzuk meg az $X + Y$ összeg sűrűségfüggvényét.

**4.5.** Határozzuk meg az $|X - Y|$ változó eloszlását, ha

**a.** $X$ és $Y$ független exponenciális eloszlású változó közös $\lambda$ paraméterrel;

**b.$^{\mathbf{HF}}$** $X$ és $Y$ független és egyenletes eloszlású a $[0, 1]$ intervallumon.

**4.6.*** Koktélt akarunk keverni 3/4 rész gin és 1/4 rész Martini arányban, de az összetevők kimérésekor egymástól független véletlen hibákat követünk el. Mindkét komponens esetében a mérés hibája egyenletes eloszlást követ a $-10$ és $+10$ százalék között, ahol az adott komponens saját mennyiségét 100 százaléknak tekintjük. Adjuk meg a gin arányának sűrűségfüggvényét és várható értékét.

**4.7.*** **a.** A $\Gamma$-függvény a

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx\,, \qquad a > 0\,,$$

formulával van definiálva. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $a$ pozitív és $n$ pozitív egész szám esetén

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}\,, \qquad \Gamma(a+1) = a\Gamma(a)\,, \qquad \Gamma(n) = (n-1)!\,.$$

**b.** Tetszőleges $a, \lambda > 0$ számokra az $a$ rendű és $\lambda$ paraméteres Gamma-eloszlás az

$$f(x) = \frac{\lambda^a x^{a-1}e^{-\lambda x}}{\Gamma(a)}\,, \qquad x \geq 0\,,$$

sűrűségfüggvénnyel van definiálva. Mutassuk meg, hogy $f$ valóban sűrűségfüggvény. Milyen kapcsolat van az exponenciális és a $\Gamma$-eloszlás között?

**c.** Legyen $X_1, \ldots, X_n$ független $\Gamma$-eloszlású változó rendre $a_1, \ldots, a_n$ renddel és közös $\lambda$ paraméterrel. Mutassuk meg, hogy az $X_1 + \cdots + X_n$ összeg $\Gamma$-eloszlást követ $a_1 + \cdots + a_n$ renddel és $\lambda$ paraméterrel. Ezek alapján mit állíthatunk $n$ darab független és azonos paraméteres exponenciális változó összegéről?

**d.** Legyen $X$ és $Y$ független $\Gamma$-eloszlású változó rendre $a$ és $b$ renddel és közös $\lambda$ paraméterrel. Mutassuk meg, hogy az $X/Y$ és az $X/(X+Y)$ változó sűrűségfüggvénye

$$f_{\frac{X}{Y}}(z) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\frac{z^{a-1}}{(z+1)^{a+b}}\,, \qquad z \geq 0\,,$$

és

$$f_{\frac{X}{X+Y}}(z) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}z^{a-1}(1-z)^{b-1}\,, \qquad 0 \leq z \leq 1\,.$$

(Megjegyezzük, hogy a kapott függvények rendre a másod- illetve az elsőfajú Beta-eloszlás sűrűségfüggvényei.)

**4.8.*** Legyen $X, X_1, \ldots, X_n$ független és standard normális eloszlású véletlen változó.

**a.** Az $X_1^2 + \cdots + X_n^2$ változó eloszlását $n$-ed rendű (vagy $n$ szabadsági fokú) $\chi^2$-eloszlásnak nevezzük. Mutassuk meg, hogy ez az eloszlás azonos az $a = n/2$ rendű és $\lambda = 1/2$ paraméteres $\Gamma$-eloszlással. (Tipp: kezdjük az $n = 1$ esettel.)

**b.** Az

$$Y = \frac{\sqrt{n}X}{\sqrt{X_1^2 + \cdots + X_n^2}}$$

változó eloszlását $n$-ed rendű (vagy $n$ szabadsági fokú) Student-eloszlásnak nevezzük. Határozzuk meg az eloszlás sűrűségfüggvényét.

## 5. Generátorfüggvények

**5.1.** Határozzuk meg a Poisson-eloszlás generátorfüggvényét, majd adjunk zárt formulát a Poisson-eloszlás momentumaira. Mutassuk meg, hogy két független Poisson-eloszlású változó összege szintén Poisson-eloszlást követ.

**5.2.** Határozzuk meg a negatív binomiális eloszlás Laplace-transzformáltját és karakterisztikus függvényét. Ezek segítségével mutassuk meg, hogy a negatív binomiális eloszlás előáll független geometria eloszlások összegeként. A Laplace-transzformált segítségével adjuk meg a negatív binomiális eloszlás első két momentumát is.

**5.3.** Adjuk meg az $[a, b]$ intervallumon vett egyenletes eloszlás Laplace-transzformáltját és karakterisztikus függvényét. A kapott függvények segítségével határozzuk meg az egyenletes eloszlás várható értékét és szórását. Mutassuk meg, hogy két független egyenletes eloszlású változó összege nem egyenletes eloszlást követ. Két egyenletes eloszlású, de nem feltétlenül független változó összege lehet egyenletes?

**5.4.** Határozzuk meg a Gamma-eloszlás Laplace-transzformáltját és karakterisztikus függvényét, majd adjunk zárt formulát az eloszlás monetumaira. Mutassuk meg, hogy két független és azonos $\lambda$ paraméteres Gamma-eloszlású változó összege szintén Gamma-eloszlást követ. (A Gamma-eloszlás definíciójáért lásd a **4.7.b.** feladatot.)

**5.5.** Mely eloszlások karakterisztikus függvényei a következők?

**a.** $\phi(t) = \cos(4t) - i\sin(4t)$, $t \in \mathbb{R}$;

**b.** $\phi(t) = \begin{cases} 1 - |t|\,, & -1 \le t \le 1\,, \\ 0\,, & \text{különben.} \end{cases}$

**5.6.**$^{\mathbf{HF}}$ Az $X$ változó Cauchy-eloszlást követ $a > 0$ skála és $b \in \mathbb{R}$ lokációs paraméterrel, ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{a}{a^2 + (x-b)^2}\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

(A skála paraméter a sűrűségfüggvény alakját határozza meg, mint a normális eloszlásnál a szórás. A lokációs paraméter az eltolás mértékét adja meg, mint a normális eloszlásnál a várható érték.)

**a.** Mutassuk meg, hogy a standard ($a = 1$ és $b = 0$ paraméteres) Cauchy-eloszlás karakterisztikus függvénye $\phi(t) = e^{-|t|}$, $t \in \mathbb{R}$. (Tipp: inverziós formula.)

**b.** Legyen $\xi$ egy standard Cauchy-eloszlású véletlen változó, és legyen $a > 0$ és $b \in \mathbb{R}$. Határozzuk meg az $a\xi + b$ változó eloszlását. Ennek segítségével adjuk meg a Cauchy-eloszlás karakterisztikus függvényét tetszőleges paraméterekre.

**c.** Mutassuk meg, hogy független Cauchy-eloszlású változók összege Cauchy-eloszlást követ.

**5.7.** Át lehet cimkézni két dobókockát úgy, hogy a dobott számok összege ugyanolyan eloszlású legyen, mintha szabályos kockákkal dobtunk volna? Az átcimkézés most azt jelenti, hogy tetszőleges pozitív egész számokat írunk a kockák lapjaira. A két kockát különböző módon is átcímkézhetjük. (Tipp: írjuk fel az összegváltozó generátorfüggvényét.)

**5.8.*** Legyen $\phi$ tetszőleges karakterisztikus függvény. Mutassuk meg, hogy $\overline{\phi}$, $\phi^2$, $|\phi|^2$ és $\mathrm{Re}(\phi)$ szintén karakterisztikus függvény, továbbá definiáljunk olyan változókat, melyeknek ezek a karakterisztikus függvényeik.

**5.9.*** Bizonyítsuk be, hogy az $X$ véletlen változó karakterisztikus függvénye akkor és csak akkor valós értékű, ha $X$ eloszlása szimmetrikus, tehát tetszőleges $x$ valós szám esetén $P(X \leq x) = P(X \geq -x)$. (Tipp: a $\phi$ függvény pontosan akkor valós értékű, ha $\phi = \overline{\phi}$.)

**5.10.*** Legyen $X$ Bernoulli-eloszlású változó 1/3 paraméterrel. Indirekt úton igazoljuk, hogy nem létezik olyan $Y$ változó, melyre $\phi_Y = |\phi_X|$. Ennek alapján mit állíthatunk, egy karakterisztikus függvény abszolút értéke mindig karakterisztikus függvény?

## 6. Eloszlásbeli konvergencia

**6.1.** Legyen $X_1, X_2, \ldots$ olyan véletlen változó, hogy az $X_n$ eloszlásfüggvénye rendre

$$F_n(x) = \begin{cases} \left(\frac{x}{1+x}\right)^n, & x \geq 0\,, \\ 0\,, & x < 0\,. \end{cases}$$

- **a.** Mutassuk meg, hogy $F_n$ tényleg eloszlásfüggvény minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.
- **b.** Mutassuk meg, hogy az $X_n$ sorozat nem konvergál eloszlásban amint $n \to \infty$, de az $X_n/n$ sorozat már igen.

**6.2.** Legyen $X_1, X_2, \ldots$ független $\lambda = 1$ paraméteres exponenciális eloszlás változó.

- **a.** Legyen $Y_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$. Mutassuk meg, hogy az $nY_n$ sorozat eloszlásban konvetgál a $\lambda = 1$ paraméteres exponenciális eloszláshoz.
- **b.** Legyen $Z_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$. Mutassuk meg, hogy $Z_n - \ln n$ eloszlásban tart a Gumbel-eloszláshoz, melynek eloszlásfüggvénye $F(x) = e^{-e^{-x}}$, $x \in \mathbb{R}$.

**6.3.**^HF Legyen $X_1, X_2, \ldots$ független és a $[0, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlású véletlen változó, továbbá legyen $M_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$. Mutassuk meg, hogy $nM_n$ eloszlásban konvergál egy nemdegenerált eloszláshoz, amint $n \to \infty$. Határozzuk meg a határeloszlást is.

**6.4.** Legyen $X, X_1, X_2, \ldots$ egész értékű véletlen változó. Mutassuk meg, hogy az $X_1, X_2, \ldots$ sorozat pontosan akkor konvergál eloszlásban az $X$ változóhoz, ha tetszőleges $k \in \mathbb{Z}$ esetén $P(X_n = k) \to P(X = k)$ amint $n \to \infty$.

**6.5.** Adott egy urna $M$ piros és $N-M$ zöld, tehát összesen $N$ golyóval, ahol $M = M_N$ függ $N$ értékétől. Ha visszatevés nélkül kiveszünk $n$ golyót, akkor a kiválasztott piros golyók száma egy olyan $X_N$ véletlen változó, mely hipergeometrikus eloszlást követ, tehát

$$P(X_N = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Mutassuk meg, hogy ha valamely $p \in (0,1)$ mellett $M/N \to p$ amint $N \to \infty$, akkor az $X_N$ változó eloszlásban tart az $n$ és $p$ paraméteres binomiális eloszláshoz. (Ennek a konvergenciának az a következménye, hogy nagy $N$ esetén a hipergeometrikus eloszlás jól közelíthető binomiálissal. Ezt a tényt a gyakorlatban is alkalmazzák például közvéleménykutatások kiértékelése során.)

**6.6.** Legyen $X_r$ negatív binomiális eloszlású változó $r$ renddel és $p = p_r$ paraméterrel, tehát legyen a súlyfüggvénye

$$P\big(X_r = k\big) = \binom{k-1}{r-1}(1-p)^{k-r}p^r\,, \qquad k = r, r+1, \ldots$$

Mutassuk meg, hogy ha valamely $\lambda > 0$ érték mellett $p \to 1$ és $r(1-p) \to \lambda$ amint $r \to \infty$, akkor $X_r - r$ eloszlásban konvergál a $\lambda$ paraméteres Poisson-eloszláshoz.

**6.7.** A Pólya-féle urnamodellben kezdetben 1 piros és 1 fehér golyó található egy urnában. Minden lépésben kihúzunk egy golyót, majd visszateszünk 2 a kihúzottal megegyező színű golyót az urnába. Legyen $X_n$ az urnában található piros golyók száma $n$ húzás után. Mutassuk meg, hogy $P(X_n = k) = 1/(n+2)$, $k = 1, \ldots, n+1$. Bizonyítsuk be, hogy $X_n/n$ eloszlásban konvergál a $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszláshoz.

**6.8.*** Tekintsünk egy berendezést, és tegyük fel, hogy $p \downarrow 0$ esetén aszimptotikusan $p + o(p)$ annak az esélye, hogy a műszer meghibásodik egy $p$ hosszúságú időintervallumon. Adjuk meg a műszer $X$ élettartamának eloszlását. Ezt úgy fogjuk megtenni, hogy minden rögzített $n \in \mathbb{N}$ értékre vesszük a $((k-1)/n, k/n]$, $k = 1, 2, \ldots$ alakú időintervallumokat, és legyen $Y_n$ annak az intervallumnak a sorszáma, ahol a berendezés tönkremegy. (Feltehető, hogy a berendezés egymástól függetlenenül megy tönkre az egyes időintervallumokon.) Ekkor $Y_n/n$ jó közelítés a teljes élettartamra, és $X$ eloszlása megkapható, mint $Y_n/n$ határeloszlása, ha a beosztás $p_n = 1/n$ finomsága tart nullához.

- **a.** Határozzuk meg $Y_n$ és $Y_n/n$ eloszlásfüggvényét.
- **b.** Mutassuk meg, hogy $Y_n/n$ eloszlásban konvergál a $\lambda = 1$ paraméteres exponenciális eloszláshoz.

**6.9.*** **Cramér–Wold-lemma.** Legyen $X, X_1, X_2, \ldots$ tetszőleges $d$-dimenziós vektorváltozó. Mutassuk meg, hogy a $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ konvergencia akkor és csak akkor teljesül, ha $\langle c, X_n\rangle \xrightarrow{\mathcal{D}} \langle c, X\rangle$ tetszőleges $c \in \mathbb{R}^d$ vektor esetén.

## 7. További konvergenciatípusok

**7.1.** Legyen $r > 0$ tetszőleges érték. Konstruáljunk meg egy olyan $X_1, X_2, \ldots$ sorozatot, mely

**a.** konvergál majdnem biztos értelemben, de $r$-dik momentumban nem;

**b.** konvergál $r$-dik momentumban, de majdnem biztos értelemben nem;

**c.** nem konvergál sem $r$-dik momentumban, sem majdnem biztos értelemben, de sztochasztikusan igen.

**7.2.** Legyen $X_1, X_2, \ldots$ azonos valószínűségi mezőn értelmezett véletlen változó véges szórással, melyekre $E(X_n) \to a \in \mathbb{R}$ és $D(X_n) \to 0$, amint $n \to \infty$.

**a.** Mutassuk meg, hogy a sorozat sztochasztikusan konvergál az $a$ értékhez.

**b.** Mutassuk meg, hogy a sorozat várható értékben (tehát első momentumban) is konvergál $a$-hoz.

**c.** A fentieken túl tegyük fel, hogy $D(X_n) \leq c/n$ teljesül minden $n$ és valamilyen $c > 0$ esetén. Mutassuk meg, hogy ekkor a sorozat majdnem biztos értelemben is konvergál $a$-hoz.

**7.3.** Legyen $Z_1, Z_2, \ldots$ független standard normális eloszlású véletlen változó. Mutassuk meg, hogy az

$$Y_n = \frac{Z_1 + \cdots + Z_n}{n}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

sorozat konvergál majdnem biztos értelemben és $r$-dik momentumban tetszőleges $r \geq 1$ esetén. (Tipp: Határozzuk meg $\sqrt{n}Y_n$ eloszlását, majd alkalmazzuk a momentum konvergenciatételt.)

**7.4.HF** **a.** Tegyük fel, hogy a $Z_n = (X_n, Y_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, sorozat eloszlásban konvergál a $Z = (X, Y)$ vektorváltozóhoz. Mutassuk meg, hogy ekkor az eloszlásbeli konvergencia komponensenként is teljesül. Tegyül fel továbbá, hogy $X_n$ és $Y_n$ minden $n$-re független egymástól. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $X$ és $Y$ is független. (Tipp: karakterisztikus függvények.)

**b.** Tegyük fel, hogy $X_1, X_2, \ldots$ sztochasztikusan konvergál az $X$ változóhoz. Mutassuk meg, hogy ekkor az $(X_n, X_{n+1})$, $n = 1, 2, \ldots$, sorozat sztochasztikusan konvergál az $(X, X)$ véletlen vektorhoz. Tegyük fel továbbá, hogy az $X_1, X_2, \ldots$ változók függetlenek. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az $X$ változó degenerált.

**c.** (Szorgalmi feladat.) Igazoljuk a feladat fő eredményét, tehát a b. pont második állítását röviden, a többi pont bizonyítása nélkül.

**7.5.*** Jelölje $\mathcal{V}$ az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn definiált véletlen változók halmazát, és legyen

$$\rho(X, Y) = \inf\left\{\varepsilon \geq 0 : P(|X - Y| > \varepsilon) < \varepsilon\right\}, \qquad X, Y \in \mathcal{V}.$$

**a.** Mutassuk meg, hogy $\rho$ metrika a $\mathcal{V}$ halmazon.

**b.** Mutassuk meg, hogy $\rho$ metrizálja a sztochasztikus konvergenciát, tehát egy $X_1, X_2, \ldots \in \mathcal{V}$ sorozat pontosan akkor konvergál egy $X \in \mathcal{V}$ véletlen változóhoz sztochasztikusan, ha $\rho(X_n, X) \to 0$, amint $n \to \infty$.

## 8. A feltételes várható érték általános fogalma

**8.1.** Tekintsük az $(\Omega, \mathcal{A}, P) = ([0,1], \mathcal{B} \cap [0,1], \lambda|_{[0,1]})$ valószínűségi mezőt, és jelölje $\mathcal{F}$ a $[0, 0{,}5]$ intervallum által generált $\sigma$-algebrát. Írjuk fel az $\mathcal{F}$ halmazrendszer elemeit, és határozzuk meg, hogy mely $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ vélentlen változók lesznek mérhetőek az $\mathcal{F}$-re nézve. Egy tetszőleges integrálható $X$ véletlen változó esetén határozzuk meg az $E[X|\mathcal{F}]$ feltételes várható értéket is.

**8.2.** Modellezzük egy szabályos dobókocka feldobását a következő módon. Az eseménytér legyen $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, $\mathcal{A}$ legyen a teljes $\sigma$-algebra, legyen $P(\{\omega\}) = 1/6, \omega \in \Omega$, és tekintsük az $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $X(\omega) = \omega$, változót. Legyen továbbá $B_1 = \{1,3,5\}$, $B_2 = \{2\}$, $B_3 = \{4,6\}$. Határozzuk meg az $X$ változó feltételes várható értékét a következő $\sigma$-algebrákra nézve:

**a.** $\sigma(B_1, B_2, B_3)$;

**b.**$^{\mathbf{HF}}$ $\mathcal{A}$;

**c.**$^{\mathbf{HF}}$ $\{\emptyset, \Omega\}$.

**8.3.** Legyen $\Omega = [0,1]^2$ és $\mathcal{A} = \mathcal{B}^2 \cap \Omega$, továbbá legyen $P$ a kétdimenziós Lebesgue-mérték megszorítása az $\Omega$ eseménytérre. Tekintsük továbbá az $X(\omega) = \omega_1$, $Y(\omega) = \omega_2$, $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega$, koordináta változókat.

**a.** Jelölje $\mathcal{F}$ az $X$ változó által generált $\sigma$-algebrát. Határozzuk meg a következő feltételes várható értékeket: $E[X|\mathcal{F}]$, $E[Y|\mathcal{F}]$, $E[XY|\mathcal{F}]$, $E[(X+Y)^2|\mathcal{F}]$.

**b.** Mutassuk meg, hogy $E[X|X+Y] = E[Y|X+Y]$ majdnem biztosan, majd ennek segítségével adjunk explicit formulát a két feltételes várható értékre.

**c.** Mutassuk meg, hogy $E[X+Y|X-Y] = 1 = E[X+Y]$. Független egymástól az $X+Y$ és az $X-Y$ változó?

**8.4.** Legyen $X$ a $[-1,1]$ intervalllumon egyenletes eloszlású véletlen változó. Határozzuk meg az $E[X^2|X]$ és az $E[X|X^2]$ feltételes várható értéket. Hogyan változik a megoldás, ha az $X$ változó a $[-1,2]$ intervallumon követ egyenletes eloszlást?

**8.5.** Legyen $X$ és $Y$ azonos valószínűségi mezőn értelmezett és integrálható véletlen változó, melyekre $E[X|Y] = Y$ és $E[Y|X] = X$ majdnem biztosan. Mutassuk meg, hogy ekkor $X = Y$ majdnem biztosan. (Tipp: toronyszabály.)

**8.6.**$^{\mathbf{HF}}$ Ebben a feladatban minden véletlen változó ugyanazon a valószínűségi mezőn van értelmezve, és mindegyik integrálható.

**a.** Mutassuk meg, hogy ha $(X_1, Y)$ és $(X_2, Y)$ azonos eloszlású véletlen vektor, akkor minden $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mérhető függvényre $Eg(X_1, Y) = Eg(X_2, Y)$. (Tipp: transzformációtétel.) Ennek segítségével bizonyítsuk be, hogy $E[X_1|Y] = E[X_2|Y]$ majdnem biztosan.

**b.** Mutassuk meg, hogy ha $X$ és $Y$ független és azonos eloszlású változó, akkor $E[X|X+Y] = (X+Y)/2$ majdnem biztosan.

**c.** Legyen $X_1, \dots, X_n$ független és azonos eloszlású, és legyen $S_m = X_1 + \dots + X_m$, $m = 1, \dots, n$. Határozzuk meg az $E[X_1|S_m]$ és az $E[X_1|S_m, \dots, S_n]$ feltételes várható értéket. (Tipp: írjuk fel a feltételekben szereplő $\sigma$-algebrákat az $X_i$ változók segítségével.)

**8.7.*** Legyenek $X$ és $Y$ azonos valószínűségi mezőn értelmezett és integrálható véletlen változók, továbbá legyenek $\mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$ az $\mathcal{A}$ halmazrendszer rész-$\sigma$-algebrái.

**a.** Adjunk explicit formulát a $\sigma(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ halmazrendszer eseményeire.

**b.** Tegyük fel, hogy $\sigma(X, \mathcal{F})$ független a $\mathcal{G}$ $\sigma$-algebrától. Mutassuk meg, hogy ekkor $E[X|\sigma(\mathcal{F}, \mathcal{G})] = E[X|\mathcal{F}]$. Vajon ez az azonosság akkor is teljesül, ha csak annyit teszünk fel, hogy az $X$ változó független $\mathcal{G}$-től?

**c.** Tegyük fel, hogy $\sigma(X, \mathcal{F})$ és $\sigma(Y, \mathcal{G})$ független $\sigma$-algebrák. Bizonyítsuk be, hogy $E[XY|\sigma(\mathcal{F}, \mathcal{G})] = E[X|\mathcal{F}]E[Y|\mathcal{G}]$.

**8.8.*** Legyen $X$ és $Y$ integrálható változó az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Tekintsünk egy $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{A}$ halmazalgebrát, és legyen $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{H})$. Mutassuk meg, hogy $E[X|\mathcal{F}] = Y$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\int_A X dP = \int_A Y dP$ minden $A \in \mathcal{H}$ eseményre. (Tehát a feltételes várható érték definícióját nem kell minden $\mathcal{F}$-beli halmazra leellenőrizni, elég egy generáló halmazalgebrát venni.)

## 9. Feltételes várható érték és feltételes eloszlás

**9.1.** Legyen $X_1, X_2, \dots$ független és azonos eloszlás véletlen változó, és tekintsünk egy tőlük is független $N$ nemnegatív egész értékű változót. Ekkor az $S = X_1 + \dots + X_N$ véletlen tagszámú összeget összetett eloszlású változónak nevezzük. (Az összetett eloszlásokat többek között a biztosításmatematikában alkalmazzák a biztosítottak teljes kárigényének modellezésére.)

**a.** Fejezzük ki az $S$ változó generátorfüggvényét, Laplace-transzformáltját és karakterisztikus függvényét az $X_1$ és az $N$ változó hasonló függvényeivel.

**b. Wald azonosság.** Tegyük fel, hogy $X_1$ és $N$ integrálható változó. Mutassuk meg, hogy ekkor $E(S) = E(N)E(X_1)$.

**c. Wald második azonossága.** Tegyük fel, hogy az $X_1$ és az $N$ változónak létezik véges második momentuma. Mutassuk meg, hogy ekkor

$$\mathrm{Var}(S) = E(N)\,\mathrm{Var}(X_1) + \big(E(X)\big)^2\,\mathrm{Var}(N)\,.$$

**9.2.** Legyen $X$ exponenciális eloszlású változó. Adjuk meg $X$-nek az $\lfloor X \rfloor$ változóra vett feltételes eloszlásfüggvényét és feltételes várható értékét.

**9.3.** Definiáljuk az $X_1, X_2, \ldots$ sorozatot a következő módon. Az $X_1$ változó legyen egyenletes eloszlású a $[0, 1]$ intervallumon, majd tetszőleges $n \geq 2$ esetén az $X_n$ változó az $X_{n-1}$-re feltételesen legyen egyenletes eloszlású az $[X_{n-1}, X_{n-1} + 1]$ intervallumon. Adjuk meg $X_2$ feltétel nélküli sűrűségfüggvényét és $X_n$ feltétel nélküli várható értékét.

**9.4.*** **Diszkrét eloszlások ritkítása.** Legyen $\mathbb{1}_1, \mathbb{1}_2, \ldots$ független Bernoulli-eloszlású változó azonos $p \in (0, 1)$ paraméterrel, és tekintsünk egy tőlük független $N$ nemnegatív egész értékű véletlen változót. Ekkor az $M = \mathbb{1}_1 + \cdots + \mathbb{1}_N$ változót az $N$ változó $p$ valószínűség szerinti ritkításának, az $(M, N - M)$ párt pedig az $N$ Bernoulli-felbontásának nevezzük. (A dolog úgy képzelhető el, hogy egy $N$ elemszámú halmaz elemeit véletlenszerűen szétdobáljuk két rakásba, és megszámoljuk, hogy hány elem került az egyes rakásokba.)

- **a.** Írjuk fel $M$ generátorfüggvényét az $N$ és az $\mathbb{1}_1$ változó generátorfüggvényének segítségével. Írjuk fel az $(M, N - M)$ vektorváltozó generátorfüggvényét is.
- **b.** Mutassuk meg, hogy ha $N$ Poisson-eloszlást követ, akkor $M$ és $N-M$ független Poisson-eloszlású változó. Ez meglepő eredmény az $N = M+(N-M)$ azonosság tükrében?
- **c.**[HF] A $q \in (0, 1)$ paraméterest geometriai eloszlást nem csak olyan módon szokták definiálni, ahogyan az másodévben előkerült, hanem a

$$P(N = n) = (1 - q)^n q\,, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

súlyfüggvénnyel is. Nevezzük ezt a továbbiakban eltolt geometriai eloszlásnak. Határozzuk meg az eltolt geometriai eloszlás generátorfüggvényét, majd mutassuk meg, hogy az eloszlás $p \in (0, 1)$ valószínűség szerinti ritkítása eltolt geometriai eloszlásra vezet.

**9.5.*** Tekintsük egy 2 egység hosszúságú intervallumot, majd egyenletes eloszlás szerint vegyünk egy véletlen pontot az intervallumon. Ezek után tekintsük a véletlen pont 1 sugarú környezetét, ami szintén egy 2 egység hosszúságú intervallum lesz, és vegyük a két intervallum metszetét. Ezek után ismételjük ugyanezt a lépést: mindig az adott intervallumon vegyünk egy véletlen pontot egyenletes eloszlás szerint, majd az intervallumot messük le a véletlen pont 1 sugarú környezetével. Jelölje $X_n$ az intervallum hosszát az $n$-dik lépés után.

- **a.** Bizonyítsuk be, hogy az $X_n$ sorozat 1 valószínűségel konvergál egy $X$ véletlen változóhoz. Mutassuk meg azt is, hogy $X \geq 1$ majdnem biztosan.
- **b.** Adjuk meg az $X_{n+1}$ változónak az $X_n$-re vett feltételes eloszlásfüggvényét és feltételes várható értékét.

**c.** Határátmenet segítségével írjunk fel egy azonosságot az $X$ változó várható értékére, majd mutassuk meg, hogy $X = 1$ majdnem biztosan.

**d.** Mutassuk meg a b. és a c. feladatrész kihagyásával, hogy $X = 1$ majdnem biztosan. (Tipp: tegyük fel, hogy $P(X > 1) > 0$, majd alkalmazzuk a Borel–Cantelli-lemmákat.)

## 10. Együttes és feltételes sűrűségfüggvény

**10.1.** Az alábbi $H$ függvények közül melyek eloszlásfüggvények? Ha egy adott függvény eloszlásfüggvény, akkor határozzuk meg a kapcsolatos kétváltozós sűrűségfüggvényt, továbbá a marginális eloszlás- és sűrűségfüggvényeket is. Függetlenek egymástól a marginális eloszlások?

**a.** $H(x, y) = \exp(-e^{-x} - e^{-y})$, $x, y \in \mathbb{R}$;

**b.** $H(x, y) = \exp(-e^{-x-y})$, $x, y \in \mathbb{R}$.

**10.2.** Legyen $X_1$ és $X_2$ független és a $[0, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlású véletlen változó. Határozzuk meg $X_1^* = \min(X_1, X_2)$ és $X_2^* = \max(X_1, X_2)$ együttes és marginális sűrűségfüggvényét. Adjuk meg a két változó várható értékét is.

**10.3.** Legyen $X$ és $Y$ független és exponenciális eloszlású véletlen változó azonos $\lambda > 0$ paraméterrel. Adjuk meg a $P(Y > X|X)$ feltételes valószínűséget. Határozzuk meg az $X$ változónak az $X + Y$ összegre vett feltételes sűrűségfüggvényét és feltételes várható értékét.

**10.4.** **a.** Legyen $(X_1, X_2)$ kétdimenziós standard normális vektorváltozó. Határozzuk meg az $X_1$ változó feltételes sűrűségfüggvényét és feltételes várható értékét az $X_2$ illetve a $2X_1 + 7X_2 + 1$ változóra nézve.

**b.**$^{\mathbf{HF}}$ Oldjuk meg az a. feladatrészt azzal a módosítással, hogy $(X_1, X_2)$ kétdimenziós normális eloszlást követ

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \Sigma = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$$

várható érték vektorral és kovarianciamátrixszal. Adjuk meg a két komponens korrelációs együtthatóját is.

**10.5.** Legyen $\Lambda$ exponenciális eloszlású változó $\lambda$ paraméterrel. Határozzuk meg annak az $X$ változónak az eloszlását, amely a $\Lambda$ változóra nézve az alábbi feltételes eloszlással van definiálva:

**a.** $X$ Poisson-eloszlású $\Lambda$ paraméterrel;

**b.** $X$ exponenciális eloszlású $\Lambda$ paraméterrel.

**10.6.** Legyen $Y$ egyenletes eloszlású változó a $[0,1]$ intervallumon, és az $Y$-ra feltételesen legyen $X$ egyenletes eloszlású a $[0,Y]$ intervallumon. Határozzuk meg a két változó együttes sűrűségfüggvényét, illetve $X$ feltétel nélküli sűrűségfüggvényét és várható értékét. Az $(X,Y)$ vektorváltozó eloszlása megegyezik a **10.2.** feladatban definiált $(X_1^*, X_2^*)$ vektorváltozó eloszlásával?

**10.7.** Két helyen eltörök egy 1 méter hosszú botot. Mennyi annak az esélye, hogy a három darabból háromszöget tudok szerkeszteni, ha

**a.** a két töréspontot egymástól függetlenül és egyenletes eloszlás szerint jelölöm ki a boton?

**b.** először egyenletes eloszlás szerint kettétöröm a botot, majd a hosszabbik darabot szintén kettétöröm ismét csak egyenletes eloszlás szerint?

**10.8.*** **Örökifjú tulajdonság véletlen időpontra.** Legyen $X$ exponenciális eloszlású véletlen változó. Ekkor az örökifjú tulajdonság értelmében

$$P\big(X > x + y \mid X > y\big) = P(X > x)\,, \qquad x, y \geq 0\,.$$

Mutassuk meg, hogy ennél több is igaz. Nevezetesen, legyen $Y$ az $X$-től független és nemnegatív értékű változó. Bizonyítsuk be, hogy ekkor

$$P\big(X > x + Y \mid X > Y\big) = P(X > x)\,, \qquad x \geq 0\,.$$

**10.9.*** **A felújítási egyenlet.** Tekintsünk $X_1, X_2, \ldots$ független és pozitív értékű véletlen változókat közös $F$ eloszlásfüggvénnyel. Képzeljük el, hogy a 0 pontból kiindulva felmérünk egymás mellé rendre $X_1, X_2, \ldots$ hosszúságú intervallumokat a pozitív félegyenesre.

**a.** Tetszőleges $t \geq 0$ esetén jelölje $N_t$ azt, hogy hány ilyen intervallum fér bele a $[0,t]$ tartományba. Mutassuk meg, hogy az $m(t) = E(N_t)$ függvény kielégíti a következő egyenletet:

$$m(t) = \int_{[0,t]} m(t-x)dF(x)\,, \qquad t \geq 0\,.$$

**b.** Tekintsük most azt az intervallumot, amelyikbe a $t$ érték esik, és jelölje $Y_t$ azt, hogy ez az intervallum mennyire „lóg ki” a $[0,t]$ tartományból. Adjunk meg a fentihez hasonló integrálegyenleteket az $a(t) = E(Y_t)$ és $p(s,t) = P(Y_t > s)$, $s, t \geq 0$, függvényekre.

**c.** Mutassuk meg, hogy ha $X_1, X_2, \ldots$ exponenciális eloszlást követ $\lambda$ paraméterrel, akkor a következő függvények megoldásai a kapott integrálegyenleteknek: $m(t) = \lambda t$, $a(t) = 1/\lambda$, $p(s,t) = e^{-\lambda s}$. Értelmezzük is ezeket az eredményeket.

## 11. Szűrés, adaptáltság, martingálok

**11.1.** Jelölje $X_1, X_2, \ldots$ a véletlen bolyongást az egész számok halmazán. Határozzuk meg, hogy az alábbi sorozatok szűrést alkotnak-e, és ha igen, akkor a bolyongás adaptált-e a szűréshez.

**a.** $\mathcal{F}_n = \sigma(X_n)$, $n = 1, 2, \ldots$;

**b.** $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$, $n = 1, 2, \ldots$;

**c.** $\mathcal{F}_n = \sigma(|X_1|, \ldots, |X_n|)$, $n = 1, 2, \ldots$

**11.2.** Legyen $X_n$ és $Y_n$ martingál az $\mathcal{F}_n$ szűrésre nézve, továbbá legyen $a$ és $b$ tetszőleges valós szám.

**a.** Mutassuk meg, hogy ekkor tetszőleges $n_k$ pozitív egész értékű és szigorúan monoton növekvő számsorozat esetén $X_{n_k}$ martingál a $\mathcal{F}_{n_k}$ szűrésre nézve.

**b.** Mutassuk meg, hogy ekkor $aX_n + bY_n$ szintén martingál. Milyen állítást tudunk megfogalmazni akkor, ha a két sorozat szubmartingál vagy szupermartingál?

**c.** Mutassuk meg, hogy $\min(X_n, Y_n)$ szupermartingál, $\max(X_n, Y_n)$ pedig szubmartingál.

**11.3.** Legyen $X_1, X_2, \ldots$ integrálható véletlen változó, és legyen $\mathcal{F}_n$ a generált szűrés. Legyen továbbá $Y_n = \max(X_n, E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n))$, $n = 1, 2, \ldots$

**a.** Mutassuk meg, hogy $Y_n$ szubmartingál.

**b.** Bizonyítsuk be, hogy $Y_n$ a legkisebb szubmartingál, ami dominálja az $X_n$ sorozatot, tehát ha $Z_n$ olyan szubmartingál, hogy $Z_n \geq X_n$ minden $n$-re, akkor $Z_n \geq Y_n$ minden $n$-re.

**11.4.** Jelölje $X_1, X_2, \ldots$ a $p$ paraméteres véletlen bolyongást az egész számok halmazán, és tekintsük a $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, a természetes szűrést?

**a.** Tegyük fel, hogy $p = 1/2$, tehát a bolyongás szimmetrikus. Milyen $c$ valós számokra lesznek a következő sorozatok martingálok az $\mathcal{F}_n$ szűrésre nézve: $cX_n$, $X_n^2 - cn$, $\exp(X_n - cn)$, $n = 1, 2, \ldots$

**b.** Tegyük fel, hogy $p \neq 1/2$. Martingálelméleti szempontból mit állíthatunk az $X_n$ sorozatról? Adjuk meg az $X_n$ sorozat Doob-felbontását. Mutassuk meg, hogy $[(1-p)/p]^{X_n}$ martingál, ami 1 valószínűséggel konvergál a 0 értékhez.

**11.5.** Tekintsünk egy egérkét, aki a sík egész koordinátájú pontjain bolyong oly módon, hogy az origóból indul, és minden lépésben a négy lehetséges egész koordinátájú szomszédja közül választ egy véletlenszerűen, tehát egyenlő valószínűséggel. Legyen $S_n$ az egérke helyzete az $n$-edik lépés után. Mutassuk meg, hogy $S_n$ és $Z_n = \|S_n\|^2 - n$ martingál az $\mathcal{F}_n = \sigma(S_1, \ldots, S_n)$ szűrésre nézve.

**11.6.**[HF] Legyen $X_1, X_2, \dots$ független és azonos eloszlású véletlen változó, ahol $E(X_1) = 0$ és $\mathrm{Var}(X_1) \in (0, \infty)$. Legyen $Y_n = X_1 + \dots + X_n$ és $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$.

**a.** Vizsgáljuk meg, hogy $Y_n$ szub- és/vagy szupermartingált alkot-e az $\mathcal{F}_n$ szűrésre nézve. Mi a helyzet az $Y_n^2$ sorozattal? Tudunk mondani olyan $a_n$ determinisztikus sorozatot, hogy $Y_n^2 - a_n$ már martingál?

**b.** Mi állíthatunk martingálelméleti szempontból a $Z_n = X_1^2 + \dots + X_n^2$ sorozatról? Határozzuk meg a $Z_n$ sorozat Doob-felbontását is.

**11.7.** Tekintsük ismét a **6.7.** feladatban definiált Pólya-féle urnamodellt. Mutassuk meg, hogy az $Y_n = X_n/n$ sorozat martingál a generált szűrésre nézve, mely 1 valószínűséggel konvergál egy $Y_\infty$ véletlen változóhoz. Határozzuk meg $Y_\infty$ eloszlását is.

**11.8.** **(Galton–Watson-folyamat.)** Definiáljuk az $X_n$, $n = 0, 1, \dots$, sorozatot az

$$X_0 = 1\,, \qquad X_n = \sum_{k=1}^{X_{n-1}} \xi_{n,k}\,, \quad n \geq 1\,,$$

rekurzióval, ahol $\xi_{n,k}$, $n, k \geq 1$, teljesen független, azonos eloszlású és nemnegatív egész értékű véletlen változók, melyekre $\mu = E(\xi_{1,1}) \in (0, \infty)$. Jelölje továbbá $\mathcal{F}_n$ a generált szűrést, és legyen $M_n = X_n/\mu^n$.

**a.** Mutassuk meg, hogy $E[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] = \mu X_{n-1}$ és $E[X_n] = \mu^n$.

**b.** Mutassuk meg, hogy $M_n$ martingál a generált szűrésre nézve, és 1 valószínűséggel konvergál egy $M_\infty$ véletlen változóhoz.

**c.** Mutassuk meg, hogy $\mu < 1$ esetén $M_\infty = 0$ majdnem biztosan.

**11.9.** Legyenek $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan sűrűségfüggvények, melyekre

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R} : g(x) = 0\}\,.$$

Tekintsünk $X_1, X_2, \dots$ független és azonos eloszlású változókat $g$ sűrűségfüggvénnyel. Mutassuk meg, hogy az

$$Y_n = \frac{f(X_1) \cdots f(X_n)}{g(X_1) \cdots g(X_n)}\,, \qquad n = 1, 2, \dots$$

sorozat martingál az $X_1, X_2, \dots$ változók által generált szűrésre nézve.

## 12. Megállási idők, az opcionális megállási tétel; a nagy számok törvénye

**12.1.** Tekintsünk egy $\mathcal{F}_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, szűrést, és egy $\alpha : \Omega \to \mathbb{N}_0$ véletlen változót. Mutassuk meg, hogy ekkor az alábbiak ekvivalensek:

(i) $\alpha$ megállási idő a szűrésre nézve;

(ii) $\{\alpha = n\} \in \mathcal{F}_n$ minden $n \in \mathbb{N}_0$ esetén;

(iii) $\{\alpha \geq n\} \in \mathcal{F}_n$ minden $n \in \mathbb{N}_0$ esetén.

**12.2.** Tekintsünk egy $\mathcal{F}_n$, $n = 1, 2, \ldots$, szűrést, és legyen $\sigma$ és $\tau$ megállási idő a szűrésre nézve. Határozzuk meg, hogy a következő változók közül melyik megállási idő: $\min(\sigma, \tau)$, $\max(\sigma, \tau)$, $2\sigma$, $\lfloor \sigma/2 \rfloor$, $\sigma + \tau$.

**12.3.** Jelölje $X_n$, $n = 0, 1, \ldots$, a véletlen bolyongást, és legyen $\mathcal{F}_n$ a generált szűrés. Az alábbi változók közül melyik megállási idő a szűrésre nézve?

**a.** Egy rögzített $a \in \mathbb{Z}$ egész érték első elérési ideje: $\tau = \min\{n \geq 0 : X_n = a\}$.

**b.** A bolyongás első lokális maximuma: $\tau = \min\{n \geq 0 : X_{n+1} = X_n - 1\}$.

**c.** Az első lefelés lépés időpontja: $\tau = \min\{n \geq 1 : X_n = X_{n-1} - 1\}$.

**12.4.** Legyen $X_n$ martingál, $\tau$ pedig megállási idő egy $\mathcal{F}_n$ szűrésre nézve. Ekkor az

$$Y_n = X_n \mathbb{1}_{\{n \leq \tau\}} + X_\tau \mathbb{1}_{\{n > \tau\}} = \begin{cases} X_n \,, & n \leq \tau \,, \\ X_\tau \,, & n > \tau \,, \end{cases}$$

sorozatot **megállított martingálnak** nevezzük. Mutassuk meg, hogy

$$Y_{n+1} = X_{n+1} \mathbb{1}_{\{n \leq \tau\}} + X_\tau \mathbb{1}_{\{n > \tau\}} \,, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

Ennek segítségével bizonyítsuk be, hogy a megállított martingál szintén martingál.

**12.5.** (Ballot-tétel opcionális megállási tétellel.) Tekintsünk egy szavazást, ahol két jelöltre lehetett szavazni. Tegyük fel, hogy a két jelölt $a$ illetve $b$ szavazatott kapott, $a > b$, és legyen $n = a + b$ a leadott szavazatok száma. A szavazatokat véletlen sorrendben számolják össze. Jelölje $S_k$ a két jelöltre összeszámolt szavazatok különbségét $k \geq 0$ szavazat összesítese után, és legyen

$$X_k = \begin{cases} \frac{S_{n-k}}{n-k} \,, & 0 \leq k \leq n-1 \,, \\ S_1 \,, & k \geq n \,, \end{cases}$$

Legyen továbbá $\tau = \min\{k : S_{n-k} = 0\}$.

**a.** Mutassuk meg, hogy az $X_k$ sorozat martingál a generált szűrésre nézve, $\tau$ pedig megállási idő.

**b.** Az opcionális megállási tétel alkalmazásával határozzuk meg $X_\tau$ várható értékét. Ebből a teljes várható érték tételével adjuk meg a $P(\tau = n)$ valószínűséget, tehát annak az esélyét, hogy a szavazatok összeszámlálása során a végső győztes végig vezetni fog.

**12.6.** (A játékos csődje opcionális megállási tétellel.) Egy játékos egy szerencsejátékot játszik, és minden körben 1 zseton tétet tesz kockára. Egy-egy körben egymástól függetlenül a tétet $p \in (0,1)$ valószínűséggel megduplázza, $q = 1-p$ valószínűséggel pedig elveszíti. Jelölje $S_n$ azt, hogy a játékos mennyi pénzt nyert az első $n$ parti során, továbbá legyen

$$\tau = \min\{n \geq 0 : X_n = -a \text{ vagy } X_n = b\}\,.$$

Tehát $\tau$ az első olyan időpont, mikor a játékos $a$ zseton minuszban vagy $b$ zseton pluszban van a 0 időponthoz viszonyítva.

**a.** Mutassuk meg, hogy $\tau$ véges várható értékű megállási idő az $S_n$, $n \geq 0$, sorozat által generált szűrésre nézve.

**b.** Mutassuk meg, hogy $p = 1/2$ esetén $S_n$ martingál, és az opcionális megállási tétel alkalmazásával határozzuk meg a $P(X_\tau = -a)$ valószínűséget.

**c.** Továbbra is a $p = 1/2$ esetet vizsgálva mutassuk meg, hogy $S_n^2 - n$ szintén martingál, majd az opcionális megállási tételt alkalmazva adjuk meg $\tau$ várható értékét.

**d.** Mutassuk meg, hogy $p \neq 1/2$ esetén $X_n = ((1-p)/p)^{S_n}$ martingál, és a b. ponthoz hasonlóan határozzuk meg a $P(S_\tau = -a)$ valószínűséget.

**12.7.** **a.** Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény esetén

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \cdots \int_0^1 f\left(\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}\right) dx_1 \cdots dx_n = f\left(\frac{1}{e}\right).$$

**b.** Bizonyítsuk be, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{x_1 + \cdots + x_n}\, dx_1 \cdots dx_n = \frac{2}{3}\,.$$

**12.8.** Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független véletlen változók, ahol

$$P(X_n = n^2 - 1) = \frac{1}{n^2}\,, \qquad P(X_n = -1) = 1 - \frac{1}{n^2}\,, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Mutassuk meg, hogy 1 valószínűséggel

$$\frac{\sum_{k=1}^n \left[X_k - E(X_k)\right]}{n} \to -1\,, \qquad n \to \infty\,.$$

(Tipp: először vizsgáljuk meg az $X_1, X_2, \ldots$ sorozat aszimptotikus viselkedését.) Ez az eredmény nem mond ellent valamelyik tanult nagyszámtörvénynek?