Sztochasztikus folyamatok

Benke János és Szűcs Gábor

Szegedi Tudományegyetem, Bolyai Intézet

2016. tavaszi félév

Sztochasztikus folyamatok

A továbbiakban legyen

- $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező, $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ mérhető tér,
- $\mathbb{T} \neq \emptyset$ tetszőleges halmaz,
- $X_t : \Omega \to \mathcal{X}$, $t \in \mathbb{T}$, véletlen elemek, azaz $\mathcal{A}$-$\mathcal{G}$ mérhető függvények.

Sztochasztikus folyamat

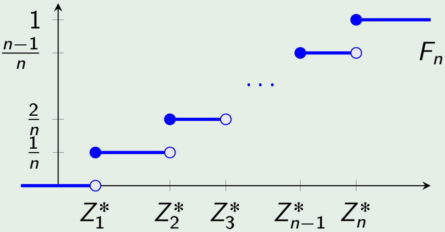
Az $\mathbb{X} = (X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ indexezett halmazt **sztochasztikus folyamatnak** nevezzük.

- A folyamat **állapottere** vagy **fázistere** az $\mathcal{X}$ halmaz.
- A folyamat **állapotai** a változók lehetséges $x \in \mathcal{X}$ értékei.
- A folyamat **indexhalmaza** vagy **paraméterhalmaza** a $\mathbb{T}$ halmaz.
- A folyamat **paramétere** vagy **időparamétere** a $t \in \mathbb{T}$ index.
- Az $\mathbb{X}$ sztochasztikus folyamat a $t \in \mathbb{T}$ időpontban az $x \in \mathcal{X}$ **állapotban van**, ha a realizált $\omega \in \Omega$ kimenetel mellett $X_t(\omega) = x$.

Empirikus eloszlásfüggvény

Legyen $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ statisztikai minta, és legyen $Z_1^* \leqslant Z_2^* \leqslant \ldots \leqslant Z_n^*$ a rendezett minta. Az **empirikus eloszlásfüggvény**:

$$F_n(t) = \frac{1}{n}\#\{k : Z_k \leqslant t\} = \frac{1}{n}\max\{k : Z_k^* \leqslant t\}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$



Ekkor $\mathbb{X} = (F_n(t))_{t\in\mathbb{R}}$ egy sztochasztikus folyamat, melynek állapottere $\mathcal{X} = \{k/n : k = 0, 1, \ldots, n\}$, indexhalmaza $\mathbb{T} = \mathbb{R}$.

Független és azonos eloszlású változók, fehér zaj

Legyen X_t, $t \in \mathbb{T}$, független és azonos eloszlás valószínűségi változó. Ekkor $\mathbb{X} = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ szintén egy sztochasztikus folyamat. Ha az X_t változók várható értéke nulla, akkor az $\mathbb{X}$ folyamatot **fehér zajnak** is szokás nevezni. (Időnként azt is felteszik, hogy véges a szórás.)

Szűrési probléma: Adott egy $\mathbb{Y} = (Y_t)_{t\in\mathbb{T}}$ jelfolyamat, amit eltorzít az $\mathbb{X} = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ fehér zaj, és így de mi csak az $\mathbb{Y} + \mathbb{X} = (Y_t + X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ folyamatot vesszük. Szűrjük ki a zajt, tehát adjuk meg az $\mathbb{Y}$ jelet.

A kurzuson a továbbiakban csak olyan sztochasztikus folyamatokkal foglalkozunk, melyek valamilyen valós vagy valós vektor értékű mennyiség időbeli alakulását írják le. Jelölésbeli konvenciók:

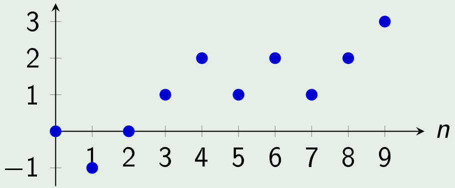
- A továbbiakban az állapottér $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}$ vagy $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^d$.
- A továbbiakban az indexhalmaz $\mathbb{T} \subseteq [0, \infty)$, a t indexet pedig gyakran **időnek** nevezzük.
- Egy determinisztikus vagy véletlen $\tau \in \mathbb{T}$ időpont esetén a folyamat múltja $(X_t)_{t<\tau}$, a folyamat jövője pedig $(X_t)_{t>\tau}$.

Véletlen bolyongás

Legyen $p \in (0,1)$ rögzített, és legyen $Z_1, Z_2, \dots$ független és azonos eloszlású változó, melyre

$$P(Z_n = +1) = p, \qquad P(Z_n = -1) = 1 - p, \qquad n = 1, 2, \dots$$

Legyen továbbá $X_0 = 0$ és $X_n = Z_1 + \dots + Z_n$, $n = 1, 2, \dots$



Az $\mathbb{X} = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ sztochasztikus folyamatot **(egydimenziós) véletlen bolyongásnak** nevezzük. A bolyongás **szimmetrikus**, ha $p = 1/2$, és **nem szimmetrikus**, ha $p \neq 1/2$. A bolyongás állapottere $\mathcal{X} = \mathbb{Z}$, indexhalmaza $\mathbb{T} = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Sztochasztikus folyamatok típusai és trajektóriája

Indexhalmaz szerint az $\mathbb{X} = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ folyamat

- diszkrét idejű, ha $\mathbb{T}$ megszámlálható. Pl.: $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$.
- folytonos idejű, ha $\mathbb{T}$ egy intervallum. Pl.: $\mathbb{T} = [0, \infty)$, $\mathbb{T} = [0, 1]$.

Állapottér szerint az $\mathbb{X}$ folyamat lehet

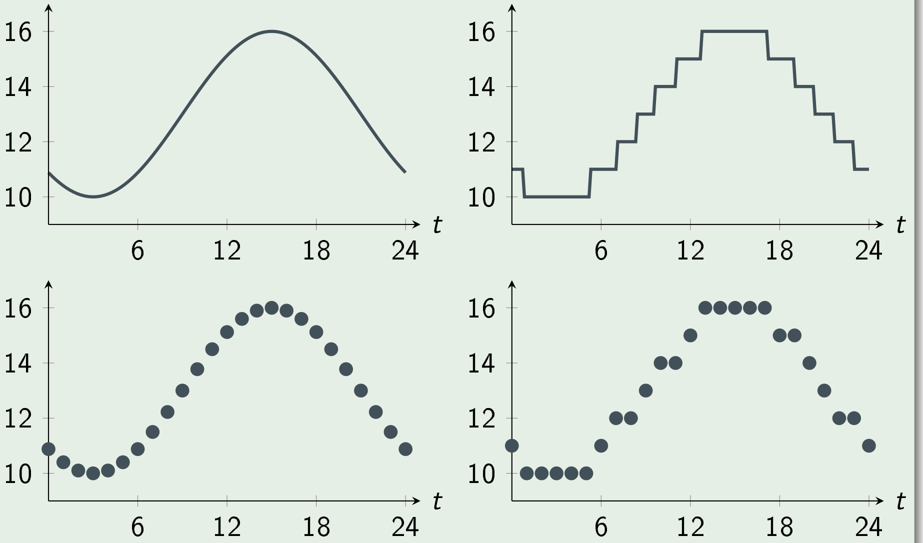
- megszámlálható vagy véges állapotterű, ha $\mathcal{X}$ megszámlálható illetve véges. Például: $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{Z}$, $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{Z}^d$.
- nem megszámlálható állapotterű, ha $\mathcal{X}$ nem megszámlálható.

Az $\mathbb{X}$ sztochasztikus folyamatnak az $\omega \in \Omega$ kimenetelhez tartozó **trajektóriája** a $\mathbb{T} \to \mathcal{X}$, $t \mapsto X_t(\omega)$, determinisztikus függvény.

Hőmérsékletet mérünk

Legyen X_t a külső hőmérséklet a $t \in \mathbb{T} \subseteq [0, 24]$ időpontban.
Diszkrét vagy folytonos idő: óránként egyszer mérünk vagy folyamatosan.
Megszámlálható vagy nem megszámlálható állapottér: digitális vagy analóg hőmérőt használunk.

Hőmérsékletet mérünk (folytatás)



Filtráció és megállási idők

Információ a σ-algebrában

Legyen $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ tetszőleges rész-σ-algebra. Azt mondjuk, hogy **ismerjük az σ-algebrát**, ha a rendelkezésünkre álló információ elegendő ahhoz, hogy tetszőleges $A \in \mathcal{F}$ eseményről eldöntsük, hogy a kísérlet aktuális végrehajtásakor bekövetkezett, vagy nem.

A továbbiakban jelölje $\mathcal{B}$ a valós egyenes Borel-halmazainak σ-algebráját.

Ismert σ-algebra, ismert változók

Ha az X_t, $t \in \mathbb{T}$, véletlen változók generálják az $\mathcal{F}$ σ-algebrát, tehát $\sigma(X_t : t \in \mathbb{T}) = \mathcal{F}$, akkor az alábbiak ekvivalensek.

1. Ismerjük az $\mathcal{F}$ σ-algebrát.
2. Ismerjük az X_t, $t \in \mathbb{T}$, véletlen változók értékét.
3. Ismerjük minden $\mathcal{F}$-$\mathcal{B}$ mérhető véletlen változó értékét.

Független kockadobások

Tekintsük a következő valószínűségi mezőt és véletlen változókat:

$$\Omega = \Big\{\omega = (k,\ell) : k,\ell = 1,\dots,6\Big\}, \quad \mathcal{A} = 2^{\Omega}, \quad P\big(\{\omega\}\big) = \frac{1}{36}, \forall\omega\in\Omega,$$

$$\mathcal{F} = \Big\{B \times \{1,2,3,4,5,6\} : B \subseteq \{1,\dots,6\}\Big\} \subseteq \mathcal{A}.$$

Legyen továbbá $X(\omega) := k$, $Y(\omega) := \ell$, és legyen Z az X érték kettővel vett maradéka. Ekkor X és Y egymástól független szabályos kockadobások, és teljesülnek az alábbiak:

- $\mathcal{F} = \sigma(X)$, tehát $\mathcal{F}$ ismerete ekvivalens X ismeretével.
- A Z mérhető $\mathcal{F}$-re nézve, tehát $\mathcal{F}$ ismeretében Z értékét is tudjuk. De Z nem generálja $\mathcal{F}$-et, tehát kevesebb információt tartalmaz, mint az X változó.
- Az Y nem mérhető $\mathcal{F}$-re nézve, tehát $\mathcal{F}$ ismerete kevés az Y változó értékének meghatározásához. (Ami nem meglepő.)

Szűrés (filtráció) és adaptáltság

Legyen $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{A}$, $t \in \mathbb{T}$, rész-σ-algebráknak egy olyan serege, melyre $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ ha $s \leqslant t$. Ekkor az $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ rendszert **szűrésnek** vagy **filtrációnak** nevezzük.

Akkor mondjuk, hogy egy $\mathbb{X} = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ folyamat **adaptált** az $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ szűréshez, ha X_t mérhető az $\mathcal{F}_t$-re nézve minden $t \in \mathbb{T}$ esetén.

Az $\mathbb{X}$ folyamat által **generált szűrés**, avagy a **természetes szűrés** az $\mathcal{F}_t^{\mathbb{X}} = \sigma(X_s : s \leqslant t)$ filtráció.

- Az $\mathcal{F}_t$ σ-algebra azt fejezi ki, hogy a t időpontban mennyi információval rendelkezünk a kísétletről. Ezért bővül a rendszer.
- Az adaptáltság azt jelenti, hogy tetszőleges $t \in \mathbb{T}$ időpontban a rendelkezésünkre álló $\mathcal{F}_t$ információ elég ahhoz, hogy meghatározuk az X_t változó értékét. (Sőt, az X_s, $s \leqslant t$, változók értékét is.)
- Generált szűrés esetén a t időpontban az információ pontosan az X_s, $s \leqslant t$, változók értéke. Egy folyamat mindig adaptált az általa generált szűréshez.

Kiterjesztett függvények

Legyen $\overline{\mathbb{R}} := (-\infty, +\infty]$ és

$$\overline{\mathcal{B}} := \sigma\big(\mathcal{B}, \{+\infty\}\big) = \big\{B, B \cup \{+\infty\} : B \in \mathcal{B}\big\}.$$

- Egy $\tau : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ függvényt **kiterjesztett függvénynek** nevezünk.
- Egy kiterjesztett függvény akkor **mérhető**, ha $\mathcal{A}$-$\overline{\mathcal{B}}$ mérhető, tehát tetszőleges $D \in \overline{\mathcal{B}}$ halmaz esetén $\tau^{-1}(D) \in \mathcal{A}$. Ekkor a τ függvényt **általános értelemben vett véletlen változónak** nevezzük.

Kiterjesztett függvény mérhetősége

Legyen τ tetszőleges kiterjesztett függvény, és legyen $\Omega_0 := \tau^{-1}(\mathbb{R})$. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.

1. A τ függvény mérhető.
2. $\Omega_0 \in \mathcal{A}$ és a $\tau|_{\Omega_0} : \Omega_0 \to \mathbb{R}$ **véges megszorítás** Borel-mérhető.

Mi csak nemnegatív értékű általános értelemben vett véletlen változókkal fogunk majd találkozni. Ebben az esetben a véges megszorításnak van jól definiált várható értéke: $E(\tau|_{\Omega_0}) = \int_{\Omega_0} \tau \, dP \in [0, +\infty]$.

Általános értelemben vett véletlen változó várható értéke

Egy $\tau : \Omega \to [0, +\infty]$ általános értelemben vett véletlen változóra legyen

$$E(\tau) := \int_\Omega \tau \, dP := E(\tau|_{\Omega_0}) + \infty \cdot P(\Omega_0^c) = \begin{cases} E(\tau|_{\Omega_0}), & P(\Omega_0^c) = 0, \\ +\infty, & P(\Omega_0^c) > 0. \end{cases}$$

(Legyen $\infty \cdot 0 = 0$.)

Megmutatható, hogy

- ha $h : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ mérhető, akkor $h(\tau)$ is mérhető;
- megszámlálható sok nemnegatív értékű általános értelemben vett véletlen változó összege, szorzata, infimuma és szuprémuma mérhető;
- a most definiált várható érték lineáris és monoton kiterjesztése a véges véletlen változók várható értékének.

Megállási idő

Legyen $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ szűrés, és legyen $\tau : \Omega \to \mathbb{T} \cup \{+\infty\}$ általános értelemben vett véletlen változó.

- τ **megállási idő** a szűrésre nézve, ha $\{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t, \quad \forall t \in \mathbb{T}$.
- τ megállási idő egy $\mathbb{X} = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ sztochasztikus folyamatra nézve, ha megállási idő a folyamat által generált szűrésre nézve.

A megállási idők ekvivalens definíciói

Legyen $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ szűrés, $\tau : \Omega \to \mathbb{T} \cup \{+\infty\}$ általános értelemben vett véletlen változó. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.

1. τ megállási idő a szűrésre nézve.
2. $\{\tau > t\} \in \mathcal{F}_t$ minden $t \in \mathbb{T}$ esetén.

Ha $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{N}_0$, akkor az előzőekkel az is ekvivalens, hogy

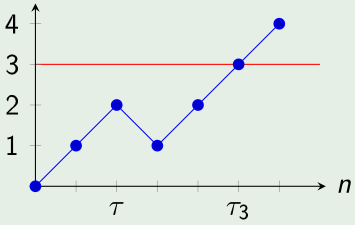
3. $\{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t$ minden $t \in \mathbb{T}$ esetén.

A megállási időnek az a szemléletes jelentése, hogy tetszőleges $t \in \mathbb{T}$ időpontban a rendelkezésre álló $\mathcal{F}_t$ információ elegendő ahhoz, hogy eldönthessük, τ aktuális értéke a „múltban”, vagy a „jövőben” van.

Első elérési idő és első lokális maximum a véletlen bolyongásra

Legyen $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ a véletlen bolyongás a természetes szűréssel.

- Egy $a \in \mathbb{Z}$ érték **első elérési ideje**: $\tau_a := \min\{n \in \mathbb{N}_0 : X_n = a\}$ Ez egy megállási idő.
- A bolyongás első lokális maximuma $\tau = \min\{n \in \mathbb{N}_0 : X_{n+1} = X_n - 1\}$. Ez nem megállási idő.



A konstansváltozó megállási idő

Tekintsünk egy tetszőleges $t_0 \in \mathbb{T}$ értéket, és legyen $\tau(\omega) = t_0$ minden $\omega \in \Omega$ esetén. Ekkor τ megállási idő.

Pre-σ-algebra

Legyen $\tau : \Omega \to \mathbb{T} \cup \{+\infty\}$ megállási idő az $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ szűrésre nézve.
A **pre-$\boldsymbol{\sigma}$-algebra**, avagy a $\boldsymbol{\tau}$ **előtti események $\boldsymbol{\sigma}$-algebrája**:

$$\mathcal{F}_\tau = \big\{A \in \mathcal{A} : A \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t, t \in \mathbb{T}\big\} \subseteq \mathcal{A}.$$

Megjegyzés: Megmutatható, hogy ha $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{N}_0$, akkor

$$\mathcal{F}_\tau = \big\{A \in \mathcal{A} : A \cap \{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t, t \in \mathbb{T}\big\}.$$

A pre-σ-algebra tulajdonságai

Legyen $\tau : \Omega \to \mathbb{T} \cup \{+\infty\}$ megállási idő az $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ szűrésre nézve.

1. Az $\mathcal{F}_\tau$ halmazrendszer σ-algebra, és a τ változó $\mathcal{F}_\tau$-mérhető.
2. Ha $\tau(\omega) = t_0$ minden $\omega \in \Omega$ esetén, akkor $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_{t_0}$.

Diszkrét idejű Markov-láncok

Néhány hétig diszkrét idejű és megszámlálható állapotterű folyamatokkal foglalkozunk. Az egyszerűség kedvéért legyen $\mathbb{T} = \mathbb{N}_0$ és $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{Z}^d$, ahol $d \geqslant 1$ egész. Megszámlálható állapottér esetén az állapottérre gyakran inkább az $\mathcal{I}$ jelölést alkalmazzák, mi is így teszünk.

Tehát: $\mathbb{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ véletlen (vektor-)változóknak egy sorozata.

Markov-tulajdonság, diszkrét idejű Markov-lánc

Az $\mathbb{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ folyamat rendelkezik a **Markov-tulajdonsággal**, ha tetszőlegesen $n \in \mathbb{N}_0$ és $i_0, \dots, i_n, j \in \mathcal{I}$ esetén valahányszor

$$P\big(X_n = i_n, \dots, X_0 = i_0\big) > 0,$$

akkor

$$P\big(X_{n+1} = j \mid X_n = i_n, \dots, X_0 = i_0\big) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i_n).$$

Ezt úgy is szokás mondani, hogy az $\mathbb{X}$ folyamatnak **nincsen memóriája**, és ilyenkor a folyamatot **diszkrét idejű Markov-láncnak** nevezzük.

Átmenetvalószínűség, átmenetmátrix

Legyen $\mathbb{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ diszkrét idejű Markov-lánc, és legyen n rögzített nemnegatív egész szám.

- Az ***n*-dik lépéshez tartozó átmenetvalószínűségek**:

$$p_{i,j}(n) := P\big(X_n = j \mid X_{n-1} = i\big), \qquad i, j \in \mathcal{I}.$$

- Az ***n*-dik lépéshez tartózó átmenetvalószínűség-mátrix**, vagy röviden **átmenetmátrix**:

$$\mathbf{P}(n) = \Big[p_{i,j}(n)\Big]_{i,j\in\mathcal{I}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{I}\times\mathcal{I}}.$$

- A Markov-lánc **időhomogén** (vagy röviden **homogén**), ha az átmenetvalószínűségek nem függenek az n időparamétertől. Ekkor az n indexet elhagyjuk, tehát a jelölés: $p_{i,j}$ és $\mathbf{P}$.
- A folyamat **kezdeti eloszlása** az az $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_i]_{i\in\mathcal{I}}$ sorvektor, melyre $\alpha_i = P(X_0 = i)$, $i \in \mathcal{I}$.

A Markov-tulajdonság azt fejezi ki, hogy egy-egy lépés során az, hogy a folyamat melyik állapotba lép tovább, csak attól függ, hogy most melyik állapotban van. A korábbi állapotok csak a jelenen keresztül befolyásolják a Markov-lánc jövőjét.

A kezdeti eloszlás és az átmenetmátrixok tökéletesen leírják a diszkrét idejű Markov-láncot:

- Kezdeti eloszlás: melyik állapotból mekkora valószínűséggel indulunk.
- Átmenetvalószíníségek: az egyes lépések során milyen dinamikával, tehát mekkora valószínűséggel lépünk tovább.

Az átmenetmátrix sztochasztikus mátrix

Tetszőleges $\mathbb{X}$ diszkrét idejű Markov-lánc és n nemnegatív egész szám esetén a $\mathbf{P}(n) \in \mathbb{R}^{\mathcal{I}\times\mathcal{I}}$ átmenetmátrix **sztochasztikus mátrix**, ami két dolgot jelent:

- a mátrix elemei nemnegatív számok: $p_{i,j}(n) \geqslant 0, \quad i,j \in \mathcal{I}$;
- minden sorban 1 a komponensek összege: $\sum_{j\in\mathcal{I}} p_{i,j}(n) = 1, \quad i \in \mathcal{I}$.

A véletlen bolyongás, mint Markov-lánc

Az $\mathbb{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ véletlen bolyongás Markov-lánc, ugyanis az, hogy egy-egy lépésben hová lépünk tovább, csak attól függ, hogy melyik állapotban vagyunk, attól nem, hogy korábban hol jártunk. Precízen:

$$P\big(X_{n+1}=j \mid X_n=i_n,\dots,X_0=i_0\big) = P\big(Z_{n+1}=j-i_n \mid X_n=i_n,\dots,X_0=i_0\big)$$
$$= P(Z_{n+1}=j-i_n) = P(Z_{n+1}=j-i_n \mid X_n=i_n) = P(X_{n+1}=j \mid X_n=i_n).$$

- A kezdeti eloszlás a 0 állapotban denegerált eloszlás:

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\delta}_0 = \big[\delta_{0,i}\big]_{i\in\mathcal{I}}, \qquad \text{ahol} \qquad \delta_{0,i} = \begin{cases} 1, & i=0, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

- A bolyongás időhomogén Markov-lánc, az átmenetvalószínűségek nem függenek n-től:

$$p_{i,j}(n) = P\big(X_n=j \mid X_{n-1}=i\big) = \begin{cases} p, & j=i+1, \\ 1-p, & j=i-1, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A Pólya-féle urnamodell

Urna, benne 1 piros és 1 fekete golyó. Minden lépésben húzunk egy golyót, majd visszarakjuk, valamint beteszünk még egy olyat, mint amit kihúztunk.

- Legyen X_n annak az indikátora, hogy az n-dik húzás piros. Ekkor az $\mathbb{X} = (X_n)_{n=1,2,\dots}$ sorozat nem Markov-lánc:

$$P\big(X_3 = 1 \mid X_2 = 1, X_1 = 1\big) = \frac{3}{4} \neq P\big(X_3 = 1 \mid X_2 = 1, X_1 = 0\big) = \frac{1}{2}\,.$$

  Markov-lánc esetén mindkét oldal értéke $P(X_3 = 1 \mid X_2 = 1)$ lenne.

- Legyen Y_n a piros golyók száma az n-dik lépés után. Ekkor

$$P\big(Y_{n+1} = j \mid Y_n = i_n, \dots, Y_1 = i_1\big) = \begin{cases} i_n/(n+2)\,, & j = i_n + 1\,, \\ 1 - i_n/(n+2)\,, & j = i_n\,, \\ 0\,, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

  Az $\mathbb{Y} = (Y_n)_{n=1,2,\dots}$ folyamat Markov-lánc, de nem időhomogén.

Többlépéses Markov-láncok

Tegyük fel, hogy a korábbi napok időjárásától függetlenül

$$P(\text{holnap esik}) = \begin{cases} 0{,}7\,, & \text{ha ma és tegnap esett,} \\ 0{,}5\,, & \text{ha ma esett, de tegnap nem,} \\ 0{,}4\,, & \text{ha ma nem esett, de tegnap igen,} \\ 0{,}2\,, & \text{ha sem ma, sem tegnap nem esett.} \end{cases}$$

- Legyen X_n annak az indikátora, hogy az n-dik napon esik. Ekkor az $\mathbb{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sorozat nem Markov-lánc.
- Legyen $Y_n = (X_n, X_{n-1})$. Ekkor $\mathbb{Y} = (Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Markov-lánc, és

$$\mathbf{P}(n) = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0 & 0{,}3 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0 & 0{,}6 \\ 0 & 0{,}2 & 0 & 0{,}8 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} (1,1) \\ (1,0) \\ (0,1) \\ (0,0) \end{array} \end{array}$$

Az $\mathbb{Y}$ folyamatnak két lépés a memóriája: többlépéses Markov-lánc.

Diszkrét idejű Markov-láncok ekvivalens definíciói

Legyen $\mathbb{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sztochasztikus folyamat az $\mathcal{I}$ megszámlálható állapottéren, továbbá legyen

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n), \qquad \mathcal{G}_n = \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots), \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

Ekkor az alábbiak ekvivalensek.

1. Az $\mathbb{X}$ sztochasztikus folyamat diszkrét idejű Markov-lánc.
2. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$, $i, j \in \mathcal{I}$ és $B \in \mathcal{F}_n$ mellett
$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i, B) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$$
amennyiben az $\{X_n = i\} \cap B$ esemény valószínűsége pozitív.
3. Tetszőleges $n, m \in \mathbb{N}_0$, $i, j_n, \ldots, j_{n+m} \in \mathcal{I}$ és $B \in \mathcal{F}_n$ mellett
$$P(X_{n+m} = j_{n+m}, \ldots, X_n = j_n \mid X_n = i, B) \\ = P(X_{n+m} = j_{n+m}, \ldots, X_n = j_n \mid X_n = i)$$
amennyiben az $\{X_n = i\} \cap B$ esemény valószínűsége pozitív.

Diszkrét idejű Markov-láncok ekvivalens definíciói (folytatás)

4. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$, $i \in \mathcal{I}$, $A \in \mathcal{G}_n$ és $B \in \mathcal{F}_n$ mellett
$$P\big(A \mid X_n = i, B\big) = P\big(A \mid X_n = i\big)$$
amennyiben az $\{X_n = i\} \cap B$ esemény valószínűsége pozitív.
5. Tetszőleges $n, m \in \mathbb{N}_0$ és $g : \mathcal{I}^{m+1} \to \mathbb{R}$ korlátos függvény esetén
$$E\Big[g\big(X_n, \ldots, X_{n+m}\big) \,\Big|\, X_n, \ldots, X_0\Big] = E\Big[g\big(X_n, \ldots, X_{n+m}\big) \,\Big|\, X_n\Big].$$

Tehát a Markov-tulajdonság ekvivalens azzal, hogy a jelenre feltételesen a múlt és a jövő függetlenek: $P(\text{Jövő} \mid \text{Jelen}, \text{Múlt}) = P(\text{Jövő} \mid \text{Jelen})$, ahol
$$\text{Jelen} = \{X_n = i\}, \quad \text{Jövő} \in \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots), \quad \text{Múlt} \in \sigma(X_0, \ldots, X_n).$$

A Markov-tulajdonsággal az alábbi állítások is ekvivalensek:

- $P(\text{Jövő}, \text{Múlt} \mid \text{Jelen}) = P(\text{Jövő} \mid \text{Jelen})\, P(\text{Múlt} \mid \text{Jelen})$
- $P(\text{Múlt} \mid \text{Jelen}, \text{Jövő}) = P(\text{Múlt} \mid \text{Jelen})$

Diszkrét idejű homogén Markov-láncok

Egy $\mathbb{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ diszkrét idejű Markov-lánc **időhomogén**, vagy röviden **homogén**, ha az átmenetvalószínűségek nem függenek a paramétertől, tehát tetszőleges $i, j \in \mathcal{I}$ állapotok és $n \in \mathbb{N}_0$ index esetén

$$P\big(X_n = j \mid X_{n-1} = i\big) = P\big(X_1 = j \mid X_0 = i\big) =: p_{i,j}\,.$$

A homogenitás azt fejezi ki, hogy a Markov-lánc dinamikája nem változik az idő múlásával, a folyamat az n időparamétertől függetlenül mindig azonos eséllyel lép át egy i állapotból egy j állapotba.

Ezen a kurzuson az $\mathbb{X} \sim \text{Markov}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{P})$ jelölés azt jelenti, hogy $\mathbb{X}$ homogén Markov-lánc $\boldsymbol{\alpha}$ kezdeti eloszlással és $\mathbf{P}$ átmenetmátrixszal.

Az **inhomogén** Markov-lánc kifejezés szövegkönyezettől függően két dolgot is jelenthet:

- általános Markov-lánc, ami nem biztos, hogy homogén;
- nem homogén Markov-lánc, tehát az átmenetvalószínűségek függnek az indextől.

Átmenetgráf

Az $\mathbb{X}$ homogén Markov lánc átmenetgráfja egy olyan irányított gráf, melynek csúcsai az állapotok, és egy $\vec{ij}$ él pontosan akkor van behúzva, ha $p_{i,j} > 0$. Az élekre rá szokás írni átmenetvalószínűségeket.

A véletlen bolyongás, mint homogén Markov-lánc

A véletlen bolyongás homogén Markov-lánc az $\mathcal{I} = \mathbb{Z}$ állapottéren. Átmenetvalószínűségei, kezdeti eloszlása, illetve átmenetgráfja:

$$p_{i,j} = \begin{cases} p\,, & j = i+1\,, \\ 1-p\,, & j = i-1\,, \\ 0\,, & \text{egyébként}, \end{cases} \qquad \alpha_i = \delta_{0,i} = \begin{cases} 1\,, & i = 0\,, \\ 0\,, & \text{egyébként}, \end{cases} \qquad i,j \in \mathbb{Z}\,.$$

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, bend left, "p"] & -2 \arrow[l, bend left, "1-p"] \arrow[r, bend left, "p"] & -1 \arrow[l, bend left, "1-p"] \arrow[r, bend left, "p"] & 0 \arrow[l, bend left, "1-p"] \arrow[r, bend left, "p"] & 1 \arrow[l, bend left, "1-p"] \arrow[r, bend left, "p"] & 2 \arrow[l, bend left, "1-p"] \arrow[r, bend left, "p"] & \cdots \arrow[l, bend left, "1-p"] \end{tikzcd}$$

Homogén Markov-láncok ekvivalens definíciói

Legyen $\mathbb{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sztochasztikus folyamat egy $\mathcal{I}$ megszámlálható állapottéren, és legyen $\mathbf{P} = [p_{i,j}]_{i,j\in\mathcal{I}}$ sztochasztikus mátrix. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.

1. $\mathbb{X}$ homogén Markov-lánc és $\mathbf{P}$ az átmenetmátrixsza.
2. Tetszőleges $m, n \in \mathbb{N}_0$ időpontok, $i, j_m, \dots, j_{m+n} \in \mathcal{I}$ állapotok és $B \in \sigma(X_0, \dots, X_m)$ esemény mellett

$$P\big(X_{m+n} = j_{m+n}, \dots, X_m = j_m \mid X_m = i, B\big) = \delta_{i,j_m} p_{j_m,j_{m+1}} \cdots p_{j_{m+n-1},j_{m+n}},$$

   valahányszor a feltétel valószínűsége pozitív.
3. Tetszőleges $m \in \mathbb{N}_0$ és $i \in \mathcal{I}$ mellett az $\mathbb{X}' = (X_{m+n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ folyamatra teljesülnek az alábbiak:
   - az $\mathbb{X}'$ folyamat az $\{X_m = i\}$ eseményre feltételesen független az $X_0, \dots, X_m$ változóktól;
   - az $\{X_m = i\}$ eseményre feltételesen $\mathbb{X}' \sim \text{Markov}(\boldsymbol{\delta}_i, \mathbf{P})$.

Többlépéses átmenetvalószínűségek

Legyen $\mathbb{X}$ homogén Markov-lánc, és legyen

$$p_{i,j}^{(n)} := P\big(X_n = j \mid X_0 = i\big), \qquad \mathbf{P}^{(n)} := \Big[p_{i,j}^{(n)}\Big]_{i,j\in\mathcal{I}}, \qquad n \in \mathbb{N}_0 .$$

A $p_{i,j}^{(n)}$ valószínűségeket ***n*-lépéses átmenetvalószínűségeknek**, a $\mathbf{P}^{(n)}$ mátrixot pedig ***n*-lépéses átmenetmátrixnak** nevezzük.

A többlépéses átmenetvalószínűségek időhomogének

Ha $\mathbb{X}$ homogén Markov-lánc, akkor tetszőleges akkor tetszőleges $i, j \in \mathcal{I}$ és $m, n, \in \mathbb{N}_0$ mellett

$$P\big(X_{m+n} = j \mid X_m = i\big) = P\big(X_n = j \mid X_0 = i\big) .$$

Chapman–Kolmogorov-egyenletek

Ha $\mathbb{X} \sim \text{Markov}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{P})$, akkor tetszőleges $i, j \in \mathcal{I}$ és $m, n, \in \mathbb{N}_0$ mellett

$$p_{i,j}^{(n+m)} = \sum_{k \in \mathcal{I}} p_{i,k}^{(n)} p_{k,j}^{(m)} .$$

Ebből következik, hogy $\mathbf{P}^{(n+m)} = \mathbf{P}^{(n)}\mathbf{P}^{(m)}$, $\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^n$, $X_n \sim \boldsymbol{\alpha}\mathbf{P}^n$.

Multiplikációs formulák

Legyen $\mathbb{X} \sim \text{Markov}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{P})$ homogén Markov-lánc. Ekkor tetszőleges $k \geqslant 1$, $0 \leqslant m < n_1 < \cdots < n_k$ és $i, j_1, \ldots, j_k \in \mathcal{I}$ mellett

$$P\big(X_{n_k} = j_k, \ldots, X_{n_1} = j_1 \mid X_m = i\big) = p_{i,j_1}^{(n_1-m)} p_{j_1,j_2}^{(n_2-n_1)} \cdots p_{j_{k-1},j_k}^{(n_{k-1}-n_k)} ,$$

$$P\big(X_{n_k} = j_k, \ldots, X_{n_1} = j_1, X_0 = i\big) = \alpha_i p_{i,j_1}^{(n_1)} p_{j_1,j_2}^{(n_2-n_1)} \cdots p_{j_{k-1},j_k}^{(n_{k-1}-n_k)} ,$$

$$P\big(X_{n_k} = j_k, \ldots, X_{n_1} = j_1\big) = \sum_{i \in \mathcal{I}} \alpha_i p_{i,j_1}^{(n_1-m)} p_{j_1,j_2}^{(n_2-n_1)} \cdots p_{j_{k-1},j_k}^{(n_{k-1}-n_k)} ,$$

Kommunikációs osztályok és periódus

Legyen továbbra is $\mathbb{X} \sim \text{Markov}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{P})$ az $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{Z}$ állapottéren.

Mit mondhatunk el a láncról, ha nem ismerjük az átmenetvalószínűségeket, csak azt tudjuk, hogy melyik állapotból melyikbe lehet átlépni?

Elérhetőség, kommunikációs viszony, elnyelő állapot

Tekintsünk tetszőleges $i, j \in \mathcal{I}$ állapotokat.

- A j állapot **elérhető** az i állapotból, (jelölésben $i \rightharpoonup j$,) ha a
$$P\big(\text{a lánc valaha eljut } j\text{-be} \mid X_0 = i\big) = P\big(\exists n \in \mathbb{N}_0 : X_n = j \mid X_0 = i\big)$$
valószínűség pozitív.
- Az i és a j állapot **kommunikációs viszonyban áll egymással**, ha kölcsönösen elérhetőek egymásból. Jelölésben: $i \rightleftharpoons j$.
- Az i állapot **elnyelő**, ha $p_{i,i} = 1$.

Megjegyzés: mivel $p_{i,i}^{(0)} = 1$, ezért $i \rightharpoonup i$ minden $i \in \mathcal{I}$ esetén.

Az elérhetőség ekvivalens definíciói

1. A j állapot elérhető a i állapotból.
2. Létezik $n \in \mathbb{N}_0$, melyre $p_{i,j}^{(n)} > 0$.
3. Vagy $i = j$, vagy pedig valamely n pozitív egész számra léteznek $i_1, \ldots, i_{n-1}$ állapotok, hogy $p_{i,i_1}, p_{i_1,i_2}, \ldots, p_{i_{n-1},j} > 0$.
4. Vagy $i = j$, vagy az átmenetgráfon létezik az $i \to j$ irányított út.

A kommunikációs viszony ekvivalenciareláció

A kommunikációs viszony ekvivalenciareláció az állapotok halmazán.

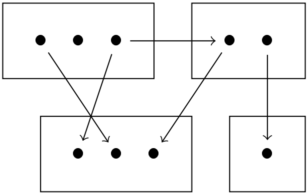
Kommunikációs osztályok, osztálytulajdonság

A kommunikációs viszony, mint ekvivalenciareláció által meghatározott ekvivalenciaosztályokat **kommunikációs osztályoknak** nevezzük. A lánc **irreducibilis**, ha csak egy osztálya van, és **reducibilis**, ha több.

Állapotoknak valamely tulajdonsága **osztálytulajdonság**, ha egy osztályon belül vagy minden állapot rendelkezik vele, vagy egyik sem.

További észrevételek és definíciók:

- A kommunikációs osztályok az átmenetgráf erősen összefüggő komponensei.
- A kommunikációs osztályok csak az átmenetvalószínűségektől függnek, a kezdeti eloszlástól nem. Ilyen módon beszélhetünk reducibilis és irreducibilis átmenetmátrixról.
- Legyenek $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{I}$ kommunikációs osztályok. Azt mondjuk, hogy a $\mathcal{C}_2$ **elérhető** a $\mathcal{C}_1$-ből, ha létezik $i \in \mathcal{C}_1$ és $j \in \mathcal{C}_2$, hogy $i \rightharpoonup j$.
- Két különböző osztály nem lehet kölcsönösen elérhető egymásból.
- Egy kommunikációs osztályt **zártnak** nevezünk, ha belőle nem érhető el más osztály. Az osztály **nyitott**, ha el lehet hagyni.



Periódus

Egy i állapot **periódusa**

$$d_i := \text{lnko}\left\{n > 0 : p_{i,i}^{(n)} > 0\right\}, \quad \text{ahol} \quad \text{lnko}\,\emptyset = \infty.$$

Az i állapot **aperiodikus**, ha $d_i = 1$, és **periodikus**, ha $1 < d_i < \infty$.

Két speciális állapot

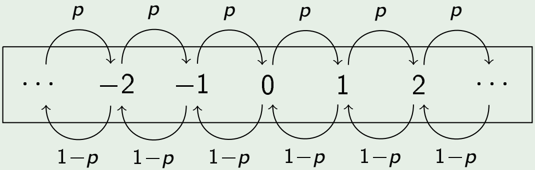
- Ha egy állapot elnyelő, akkor aperiodikus, és egyedül alkot egy kommunikációs osztályt.
- Egy állapotnak pontosan akkor végtelen a periódusa, ha az állapotból indulva nem lehet oda visszatérni. Ez az állapot önálló osztályt alkot.

Szolidaritási tétel az állapotok periódusára

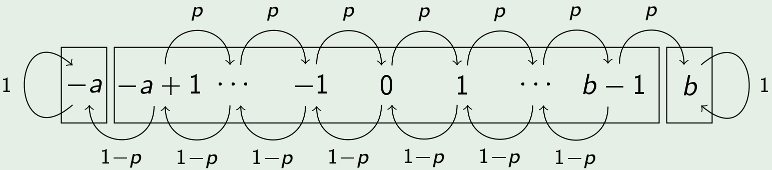
Egy kommunikációs osztályon belül minden állapotnak azonos a periódusa, tehát a periódus osztálytulajdonság. Ilyen értelemben beszélhetünk az osztályok periódusáról, továbbá periodikus és aperiodikus osztályokról.

A véletlen bolyongás és a játékos csődje probléma

A véletlen bolyongásnál egy osztály van, és minden állapot periódusa 2:



Ha a bolyongáshoz hozzáadunk két elnyelő a falat, akkor az elnyelő falak egyelemű osztályok, periódusuk 1, és a többi állapot pedig egyetlen osztályt alkot 2 periódussal:



Periodikus osztályok felbontása

Legyen $\mathbb{X} \sim \text{Markov}(\alpha, \mathbf{P})$ irreducibilis és periodikus d periódussal. Ekkor teljesülnek az alábbiak.

1. Az $\mathcal{I}$ állapottérnek létezik olyan $\mathcal{C}_0 \cup \cdots \cup \mathcal{C}_{d-1} = \mathcal{I}$ diszjunk halmazokra való felbontása, hogy bármely $k = 0, \ldots, d-1$ esetén

$$P\big(X_1 \in \mathcal{C}_{k+1} \,\big|\, X_0 \in \mathcal{C}_k\big) = 1\,, \qquad \text{ahol} \qquad \mathcal{C}_d := \mathcal{C}_0\,.$$

   Ezeket a halmazokat az $\mathbb{X}$ Markov-lánc **alosztályainak** nevezzük.

2. Legyen $\mathbb{Y} = (X_{nd})_{n \in \mathbb{N}_0}$. Ekkor $\mathbb{Y} \sim \text{Markov}(\alpha, \mathbf{P}^d)$. Továbbá az $\mathbb{Y}$ lánc kommunikációs osztályai a $\mathcal{C}_0, \ldots, \mathcal{C}_{d-1}$ halmazok, és ezek az osztályok aperiodikusak és zártak az $\mathbb{Y}$ láncban.

Az erős Markov-tulajdonság

Legyen $\mathbb{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \sim \text{Markov}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{P})$ az $\mathcal{I}$ állapottéren, és legyen

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n), \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

Láttuk, hogy ekkor tetszőleges $m \in \mathbb{N}_0$ időpont és $i \in \mathcal{I}$ állapot mellett az $(X_{m+n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ folyamat az $\{X_m = i\}$ eseményre feltételesen homogén Markov-lánc, ami független az $\mathcal{F}_n$ σ-algebrától. Arra vagyunk kíváncsiak, hogy ez az állítás érvényben marad-e akkor, ha a determinisztikus m értéket egy véletlen időpontra cseréljük.

Legyen $\tau : \Omega \to \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$ megállási idő az $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ szűrésre nézve, és tekintsük a τ előtti események σ-algebráját:

$$\mathcal{F}_\tau = \big\{A \in \mathcal{A} : A \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}_0\big\}.$$

Legyen $\Omega_0 = \{\tau < \infty\}$, és tekintsük az $\mathbb{X}' = (X_{\tau+n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ sorozatot, ami jól definiált és mérhető az Ω_0 halmazon.

Erős Markov-tulajdonság

Legyen $\mathbb{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ diszkrét idejű homogén Markov-lánc $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{\mathcal{I}\times\mathcal{I}}$ átmenetmátrixszal. Ekkor tetszőleges τ megállási idő és $i \in \mathcal{I}$ állapot esetén az $\mathbb{X}' = (X_{\tau+n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ sorozatra teljesülnek az alábbiak:

- A $\{\tau < \infty, X_\tau = i\}$ eseményre feltételesen $\mathbb{X}'$ független az $\mathcal{F}_\tau$ σ-algebrától. Formálisan: tetszőleges $A \in \sigma(\mathbb{X}')$ és $B \in \mathcal{F}_\tau$ eseményekre
$$P\big(A \mid \tau < \infty, X_\tau = i, B\big) = P\big(A \mid \tau < \infty, X_\tau = i\big).$$
- A $\{\tau < \infty, X_\tau = i\}$ eseményre feltételesen $\mathbb{X}' \sim \text{Markov}(\boldsymbol{\delta}_i, \mathbf{P})$.

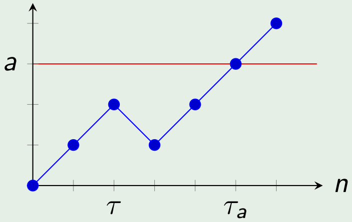
A tétel csak a $\{\tau < \infty, X_\tau = i\}$ eseményre feltételesen állít bármit is az $\mathbb{X}'$ folyamatról. Emiatt nincs szükség arra, hogy az $\mathbb{X}'$ az egész eseménytéren értelmezve legyen, elég az, hogy az $\Omega_0 = \{\tau < \infty\} \subseteq \Omega$ halmazon jól definiált.

Az erős Markov-tulajdonság a bolyongásra

Legyen $\mathbb{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ a véletlen bolyongás,
τ_a egy adott $a \in \mathbb{Z}$ érték első elérési ideje,
τ a folyamat első lokális maximamuma:

$$\tau_a = \min\{n \in \mathbb{N}_0 : X_n = a\}$$

$$\tau = \min\{n \in \mathbb{N}_0 : X_{n+1} = X_n - 1\}$$



- Az első elérési idő megállási idő, tehát az $(X_{\tau_a+n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ folyamat a $\{\tau_a < \infty, X_{\tau_a} = a\} = \{\tau_a < \infty\}$ eseményre feltételesen szintén véletlen bolyongás. Látni fogjuk, hogy a szimmetrikus esetben $P(\tau_a < \infty) = 1$, vagyis ekkor az erős Markov-tulajdonság állításai a $\{\tau_a < \infty\}$ feltétel nélkül is teljesülnek.
- Az első lokális maximumra nem teljesül az erős Markov-tulajdonság, hiszen az $(X_{\tau+n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ sorozat nem véletlen bolyongás:

$$P(X_{\tau+1} = i + 1 \mid X_\tau = i) = 0 \neq p = P(X_1 = i + 1 \mid X_0 = i).$$

Ez nem ellentmondás, hiszen τ nem megállási idő.

Az állapotok típusai

A továbbiakban $\mathbb{X} \sim \text{Markov}(\boldsymbol{\delta}_i, \mathbf{P})$, ahol $i \in \mathcal{I}$ rögzített állapot.

Visszatérési idők, visszatérési valószínűség

- Az i állapotba való **r-edik visszatérés ideje**: $\tau_{i,0} := 0$,

$$\tau_{i,r} := \begin{cases} \min\{n > \tau_{i,r-1} : X_n = i\}, & \tau_{i,r-1} < \infty, \\ +\infty, & \tau_{i,r-1} = \infty, \end{cases} \qquad r = 1, 2, \ldots$$

- A továbbiakban τ_i az **első visszatérési időt** jelöli, ennek várható értéke $\mu_i := E(\tau_i) \in [0, \infty]$.
- **(Első) visszatérési valószínűség**: $f_i := P(\tau_i < \infty)$.
- **Visszatérések száma**: $V_i := \sup\{r \in \mathbb{N}_0 : \tau_{i,r} < \infty\}$.

- A visszatérési idők $\mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$ értékű megállási idők. Ebből az is következik, hogy a μ_i várható érték jól definiált.
- Az i állapotban tett **látogatások száma**: $V_i + 1$.

A visszatérések számának eloszlása

Ha $f_i < 1$, akkor $V_i + 1$ geometriai eloszlású $1 - f_i$ paraméterrel, míg ha $f_i = 1$, akkor $V_i = \infty$ majdnem biztosan. Továbbá mindkét esetben

$$E(V_i) + 1 = \frac{1}{1 - f_i} = \sum_{n=0}^{\infty} p_{i,i}^{(n)} .$$

Az állapotok típusai

Legyen $\mathbb{X} \sim \text{Markov}(\boldsymbol{\delta}_i, \mathbf{P})$, ahol $i \in \mathcal{I}$ rögzített állapot.

- Az i állapot **tranziens**, ha $V_i < \infty$ majdnem biztosan.
- Az i állapot **rekurrens**, ha $V_i = \infty$ majdnem biztosan.

Legyen i rekurrens állapot. Ez az állapot **null-rekurrens**, ha $\mu_i = \infty$, és **pozitív rekurrens**, ha $\mu_i < \infty$.

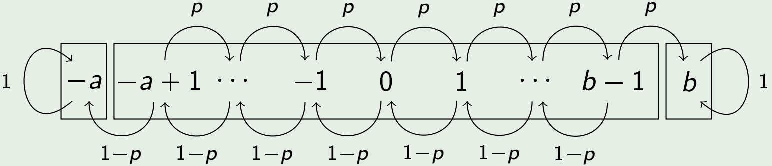
Megjegyzés: A fenti tétel szerint tetszőleges i állapot esetén vagy $P(V_i < \infty) = 1$ vagy pedig $P(V_i = \infty) = 1$. Emiatt minden állapot beleesik valamelyik típusba.

Minden elnyelő állapot pozitív rekurrens

Ha i elnyelő állapot, akkor $P(\tau_i = 1) = 1$. Ekkor a visszatérések száma $V_i = \infty$ majdnem biztosan, továbbá $\mu_i = E(\tau_i) < \infty$.

A véletlen bolyongás elnyelő falakkal

A b és a $-a$, állapot elnyelő, tehát ez a két állapot pozitív rekurrens. A többi i állapotra $f_i < 1$, tehát ezek az állapotok tranziensek.



A periodikus állapotok típusa (házi feladat)

Legyen $\mathbb{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ irreducibilis Markov-lánc $d \in (1, \infty)$ periódussal, és legyen $\mathbb{Y} = (X_{nd})_{n\in\mathbb{N}_0}$. Ekkor tetszőleges $i \in \mathcal{I}$ állapotnak azonos a típusa az $\mathbb{X}$ és az $\mathbb{Y}$ láncban.

A visszatérőségi kritérium

Legyen $i \in \mathcal{I}$ tetszőleges állapot.

1. Az i állapot pontosan akkor tranziens, ha $f_i < 1$, amivel az is ekvivalens, hogy
$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{i,i}^{(n)} < \infty\,.$$
2. Az i állapot pontosan akkor null-rekurrens, ha
$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{i,i}^{(n)} = \infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{n\to\infty} p_{i,i}^{(n)} = 0\,.$$
3. Az i állapot pontosan akkor pozitív rekurrens, ha
$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{i,i}^{(n)} = \infty \qquad \text{és} \qquad \limsup_{n\to\infty} p_{i,i}^{(n)} > 0\,.$$

Tranziens és null-rekurrens állapotok limeszvalószínűségei

Legyen $\mathbb{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ homogén Markov-lánc, és legyen j tranziens vagy null-rekurrens állapot. Ekkor tetszőleges i állapotra

$$\lim_{n\to\infty} p_{i,j}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} P(X_n = j) = 0\,.$$

Szolidaritási tétel az állapotok típusára

Egy osztályon belül minden állapotnak azonos a típusa, tehát a típus osztálytulajdonság.

Következmény: Beszélhetünk tranziens, null-rekurrens és pozitív rekurrens osztályokról annak megfelelően, hogy mi az állapotok típusa.

Zárt és nyitott osztályok típusa

1. Minden nyitott osztály tranziens.
2. Minden rekurrens osztály zárt.

Az előző állítás nem megfordítható. Például látni fogjuk, hogy a nem szimmetrikus véletlen bolyongás tranziens, pedig csak egy kommunikációs osztálya van, ami nyilvánvalóan zárt.

A véges kommunikációs osztályok típusa

Egy véges kommunikációs osztály pontosan akkor rekurrens, ha zárt. Továbbá, egy véges osztály nem lehet null-rekurrens.

A rekurrens állapotok elérhetősége

Legyen $\mathbb{X} = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ diszkrét idejű homogén Markov-lánc az $\mathcal{I}$ állapottéren, és legyen $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{I}$ a lánc egy rekurrens osztálya. Ekkor teljesülnek az alábbiak.

- Tetszőleges $i, j \in \mathcal{C}$ esetén
$$P\big(\exists n \in \mathbb{N}_0 : X_n = j \mid X_0 = i\big) = P\big(\text{valaha elérjük } j\text{-t} \mid X_0 = i\big) = 1.$$
- Arra az eseményre feltételesen, hogy a folyamat valaha eléri a $\mathcal{C}$ osztályt, a folyamat 1 valószínűséggel minden $\mathcal{C}$-beli állapotot végtelen sokszor meglátogat.

A véletlen bolyongás és Pólya György tétele

Legyen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ az (egydimenziós) véletlen bolyongás. Tehát legyen $Z_1, Z_2, \ldots$ független és azonos eloszlású változó, melyek eloszlása

$$P(Z_n = +1) = p\,, \qquad P(Z_n = -1) = 1 - p\,, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

és legyen

$$X_0 = 0\,, \qquad X_n = X_{n-1} + Z_n = Z_1 + \cdots + Z_n\,, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

A nem szimmetrikus bolyongás asszimptotikus viselkedése

A véletlen bolyongásra 1 valószínűséggel

$$\lim_{n\to\infty} X_n = \begin{cases} +\infty\,, & p > 1/2\,, \\ -\infty\,, & p < 1/2\,. \end{cases}$$

Ebből következik, hogy a nem szimmetrikus véletlen bolyongás tranziens.

Az egydimenziós véletlen bolyongás típusa

A véletlen bolyongás null-rekurrens, ha $p = 1/2$, és tranziens, ha $p \neq 1/2$.

A magasabbdimenziós szimmetrikus bolyongás

Adott d pozitív egész szám mellett legyen $\mathbf{e}_k = (\delta_{k,1}, \ldots, \delta_{k,d})$, $k = 1, \ldots, d$, az $\mathbb{R}^d$ Euklídeszi tér standard bázisa. Legyen továbbá $Z_1, Z_2, \ldots$ független és azonos eloszlású vektorváltozó, melyek eloszlása

$$P(Z_n = \mathbf{e}_k) = 1/(2d) = P(Z_n = -\mathbf{e}_k)\,, \qquad k = 1, \ldots, d\,.$$

Ekkor az $X_0 = 0$, $X_n = Z_1 + \cdots + Z_n$, formulával definiált $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ folyamatot **d-dimenziós szimmetrikus bolyongásnak** nevezzük. Könnyen megmutatható, hogy ez a folyamat Markov-lánc a $\mathbb{Z}^d$ állapottéren.

Pólya György tétele (1921)

A szimmetrikus bolyongás null-rekurrens, ha $d \leqslant 2$, és tranziens, ha $d \geqslant 3$.
„A részeg ember mindig hazatalál, de a részeg madár már nem feltétlenül.”

Invariáns mértékek és invariáns eloszlások

Legyen $\mathbb{X}$ homogén Markov-lánc $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ átmenetmátrixszal. A célunk olyan kezdeti eloszlást keresni, mely időben állandó (stacionárius,) ami azt jelenti, hogy a folyamatot ebből az eloszlásból indítva ez lesz az eloszlása az $X_1, X_2, \ldots$ változóknak is.

Invariáns eloszlás

Egy $\boldsymbol{\pi} = [\pi_i]_{i \in \mathcal{I}}$ eloszlás az $\mathbb{X}$ Markov-lánc **invariáns eloszlása** vagy **stacionárius eloszlása**, ha $X_0 \sim \pi$ esetén $X_1 \sim \pi$.

Az invariáns eloszlás ekvivalens definíciói

Legyen $\boldsymbol{\pi} = [\pi_i]_{i \in \mathcal{I}}$ eloszlás. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.

1. A $\boldsymbol{\pi}$ az $\mathbb{X}$ Markov-lánc invariáns eloszlása.
2. $X_0 \sim \boldsymbol{\pi}$ esetén $X_n \sim \boldsymbol{\pi}$, $n = 1, 2, \ldots$.
3. $\boldsymbol{\pi}$ a $\mathbf{P}$ mátrix $\lambda = 1$ sajátértékhez tartozó bal oldali sajátvektora, tehát $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P}$.

Megjegyzések:

- Az invariáns eloszlás nem is a lánctól, hanem az átmenetmátrixtól függ. Helyesebb lenne azt mondani, hogy „$\mathbf{P}$ invariáns eloszlása."
- Egy sztochasztikus mátrixnak a $\lambda = 1$ mindig sajátértéke, hiszen az $[1]_{i\in\mathcal{I}}$ oszlopvektor jobboldali sajátvektor. Ez azt jelenti, hogy mindig létezik olyan $\boldsymbol{\pi} = [\pi_i]_{i\in\mathcal{I}}$ vektor, amire $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P}$. De ez a vektor nem feltétlenül eloszlás, lehetnek negatív komponensei is.
- Egy $\boldsymbol{\pi} = [\pi_i]_{i\in\mathcal{I}}$ vektor pontosan akkor invariáns eloszlás, ha

$$\pi_j \geqslant 0\,, \qquad \sum_{i\in\mathcal{I}} \pi_i = 1\,, \qquad \pi_j = \sum_{i\in\mathcal{I}} \pi_i p_{i,j}\,, \qquad j \in \mathcal{I}\,.$$

Tranziens és null-rekurrens mértéke az invariáns eloszlás szerint

Legyen $\mathbb{X}$ homogén Markov-lánc, aminek létezik $\boldsymbol{\pi}$ invariáns eloszlása. Ekkor tetszőleges i tranziens vagy null-rekurrens állapot esetén $\pi_i = 0$. Ebből következik, hogy az invariáns eloszlás a pozitív rekurrens osztályokra van koncentrálva.

A továbbiakban irreducibilis és rekurrens láncokat vizsgálunk. Ehhez általánosítanunk kell az invariáns eloszlás fogalmát.

Invariáns mérték

Legyen $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ átmenetmátrix az $\mathcal{I}$ állapottéren.

- Egy $\boldsymbol{\pi} = [\pi_i]_{i \in \mathcal{I}}$ vektort **mértéknek** nevezünk, ha a komponensei nemnegatív valós számok. Azt mondjuk, hogy a mérték **véges**, ha az állapottér mértéke véges: $\boldsymbol{\pi}(\mathcal{I}) := \sum_{i \in \mathcal{I}} \pi_i < \infty$.
- Egy $\boldsymbol{\pi}$ mérték **invariáns** vagy **stacionárius mérték**, ha $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P}$.

Az egydimenziós véletlen bolyongás invariáns mértékei

Az egydimenziós véletlen bolyongásnak nincsen invariáns eloszlása, hiszen a folyamat a p paramétertől függően vagy tranziens vagy null-rekurrens. Ezzel szemben tetszőleges $c \geqslant 0$ esetén $\boldsymbol{\pi} = [c]_{i \in \mathcal{I}}$ invariáns mérték, ugyanis $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P}$. Ez a mérték csak akkor véges, ha $c = 0$, tehát $\boldsymbol{\pi}$ nem invariáns eloszlás. Kérdések: Vannak további invariáns mértékek is? Mi a helyzet a magasabbdimenziós esetben?

Invariáns mértékek rekurrens Markov-láncokon

Legyen $\mathbb{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ rekurrens irreducibilis Markov-lánc $\mathbf{P} = [p_{i,j}]_{i,j\in\mathcal{I}}$ átmenetmátrixszal. Adott $k \in \mathcal{I}$ mellett legyen $\boldsymbol{\gamma}^{(k)} = [\gamma_i^{(k)}]_{i\in\mathcal{I}}$, ahol

$$\gamma_i^{(k)} := E\left[\sum_{n=0}^{\tau_k - 1} \mathbb{1}_{\{X_n = i\}} \,\middle|\, X_0 = k\right], \qquad i \in \mathcal{I}.$$

Tehát $\gamma_i^{(k)}$ a k állapotba való első visszatérésig az i állapotban tett látogatások számának várható értéke. Ekkor teljesülnek az alábbiak.

1. $\gamma_k^{(k)} = 1$ és $\boldsymbol{\gamma}^{(k)}(\mathcal{I}) = \mu_k$.
2. $\gamma^{(k)}$ invariáns mérték.
3. Minden invariáns mérték $c\gamma^{(k)}$, $c \geqslant 0$, alakban áll elő.
4. Ha az osztály pozitív rekurrens, akkor minden invariáns mérték véges, ha null-rekurrens, akkor $\boldsymbol{\pi} = 0$ az egyetlen véges invariáns mérték.

Az egydimenziós szimmetrikus bolyongás invariáns mértékei

Az egydimenziós szimmetrikus bolyongás esetében a $\boldsymbol{\pi} = [1]_{i \in \mathcal{I}}$ mérték invariáns. Mivel minden invariáns mérték $c\boldsymbol{\gamma}^{(0)}$ alakú, és $\gamma_0^{(0)} = 1$, azt kapjuk, hogy $\boldsymbol{\gamma}^{(0)} = \boldsymbol{\pi}$, vagyis minden invariáns mérték $[c]_{i \in \mathcal{I}}$ alakú.

Irreducibilis Markov-láncok invariáns eloszlása

Egy irreducibilis Markov-láncnak akkor és csak akkor létezik $\boldsymbol{\pi} = [\pi_i]_{i \in \mathcal{I}}$ invariáns eloszlása, ha a lánc pozitív rekurrens. Ekkor az invariáns eloszlás egyértelmű, és $\pi_i = 1/\mu_i$ minden i állapotra.

A homogén Markov-láncok invariáns eloszlásainak karakterizációja

Egy homogén Markov-láncnak akkor és csak akkor létezik invariáns eloszlása, ha a láncnak van pozitív rekurrens osztálya. Ha ez teljesül, akkor legyenek $\boldsymbol{\pi}^{(1)}, \boldsymbol{\pi}^{(2)}, \ldots$ az egyes pozitív rekurrens osztályok egyértelmű invariáns eloszlásai. Egy $\boldsymbol{\pi}$ eloszlás pontosan akkor invariáns eloszlása az egész Markov-láncnak, ha előáll $\boldsymbol{\pi} = a_1\boldsymbol{\pi}^{(1)} + a_2\boldsymbol{\pi}^{(2)} + \cdots$ alakban valamilyen $a_1, a_2, \ldots \geqslant 0$, $a_1 + a_2 + \cdots = 1$, együtthatókkal.

Diszkrét idejű Markov-láncok ergodicitása

Konvergencia az egyensúlyhoz

Legyen $\mathbb{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ irreducibilis, aperiodikus és pozitív rekurrens Markov-lánc π invariáns eloszlással. Ekkor tetszőleges i, j állapotokra

$$\lim_{n\to\infty} p_{i,j}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} P(X_n = j) = \pi_j = 1/\mu_j \,.$$

Szükség van a tételben minden feltételre?

- Ha j tranziens vagy null-rekurrens, akkor további feltétel nélkül:

$$\lim_{n\to\infty} p_{i,j}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} P(X_n = j) = 0 = 1/\mu_j \,.$$

- Ha a lánc pozitív rekurrens, de periodikus d periódussal, akkor $p_{i,j}^{(n)} = 0$, ha $d \nmid n$, és $\lim_{n\to\infty} p_{i,j}^{(nd)} = d/\mu_j > 0$.
- Ha j pozitív rekurrens, de a láncnak több osztálya is van, akkor a határértékek függhetnek i osztályától illetve a kezdeti eloszlástól.

Ergodicitás (nagy számok törvényei)

Legyen $\mathbb{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ irreducibilis homogén Markov-lánc.

1. Tetszőleges j állapot esetén a folyamat hosszútávon átlagosan $\mu_j = E(\tau_j)$ lépésenként látogatja meg a j-t:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{X_m=j\}} = \frac{1}{\mu_j} \qquad \text{m.b.}$$

2. Tegyük fel, hogy a folyamat pozitív rekurrens, és tekintsünk egy tetszőleges $c : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ függvényt. Legyen $\boldsymbol{\pi} = [\pi_i]_{i\in\mathcal{I}}$ a folyamat invariáns eloszlása, és tegyük fel, hogy

$$\overline{c} := \sum_{i\in\mathcal{I}} c(i)\pi_i < \infty\,.$$

Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} c(X_m) = \overline{c} \qquad \text{m.b}$$

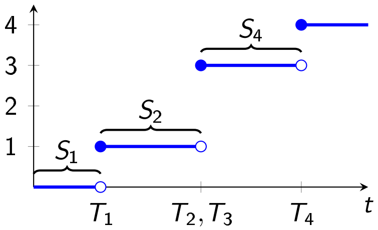
Számláló folyamatok

A továbbiakban folytonos idejű és nemnegatív egész értékű sztochasztikus folyamatokkal foglalkozunk, és az indexhalmaz $\mathbb{T} = [0, \infty)$ lesz.

Számláló folyamat

Legyen $S_1, S_2, \ldots \geqslant 0$ tetszőleges nemnegatív értékű véletlen változó, és tekintsük a részletösszeg sorozatot: $T_0 = 0$, $T_n = S_1 + \cdots + S_n$, $n \geqslant 1$. Ekkor a kapcsolatos **számláló folyamatot** a következő módon definiáljuk:

$$X_t = \#\{n \geqslant 1 : T_n \leqslant t\} = \max\{n \geqslant 0 : T_n \leqslant t\}, \qquad t \geqslant 0.$$



Számláló folyamatokkal valamilyen ismétlődő esemény bekövetkezéseit szoktuk modellezni, az X_t érték azt mutatja meg, hogy ez az esemény hányszor következett be a $[0, t]$ időintervallumon. Például:

- Biztosításmatematika: káresemények száma egy adott kártípusnál.
- Tömegkiszolgálási modellek: kiszolgált ügyfelek száma.
- Felújításelmélet: hányszor kellett kicserélnünk egy alkatrészt.

A számláló folyamat trajektóriái rendelkeznek az alábbi tulajdonságokkal:

- a trajektóriák monoton növekvőek;
- càdlàg tulajdonság, tehát a trajektóriák mindenhol jobbról folytonosak, és mindenhol van baloldali határértékük („continue à droite, limitée à gauche");
- tetszőleges $s < t$ esetén $X_t - X_s$ az $(s, t]$ intervallumon bekövetkezett események száma.

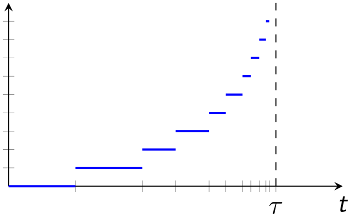
Sztochasztikus folyamat felrobbanása

Egy $(X_t)_{t \geqslant 0}$ folyamat **felrobban** a $\tau \geqslant 0$ véletlen vagy determinisztikus időpontban, ha $X_t < \infty$ minden $t < \tau$ esetén, és $\lim_{t \uparrow \tau} X_t = \infty$.

Megjegyzések:

- Kényelmi okokból most a $\tau = \infty$ esetet is felrobbanásnak nevezzük, de ez könyvenként változó.
- Minden számláló folyamat felrobban 1 valószínűséggel, időpontja:

$$\tau = \lim_{n \to \infty} T_n = S_1 + S_2 + \cdots \in [0, \infty] .$$



- Ha $S_1, S_2, \ldots$ független változó, akkor $\{\tau < \infty\}$ farokesemény, és a Kolmogorov 0-1 törvény szerint $P(\tau < \infty) \in \{0, 1\}$.
- Az általános esetben ez nem feltétlenül teljesül. Feladat: Konstruáljunk olyan számláló folyamatot, mely $1/2$ valószínűséggel véges időben felrobban, és $1/2$ valószínűséggel $\tau = \infty$.

Független exponenciális változók sorai

Legyen $S_1, S_2, \ldots$ független és exponenciális változó rendre $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ paraméterrel. Ekkor az $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ sor vagy 1 valószínűséggel konvergens, vagy 1 valószínűséggel divergens. Továbbá, a $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ sor pontosan akkor konvergens, ha $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\lambda_n < \infty$.

A tisztán születési folyamat

Ha egy $(X_t)_{t \geqslant 0}$ számláló folyamat esetében az $S_1, S_2, \ldots$ változók függetlenek és exponenciális eloszlásúak rendre valamilyen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots > 0$ paraméterrel, akkor a folyamatot **tisztán születési folyamatnak** nevezzük.

Ezen folyamat esetében a felrobbanás időpontja $\tau = S_1 + S_2 + \cdots$, amire $P(\tau < \infty) \in \{0, 1\}$. Továbbá, a $P(\tau < \infty) = 1$ egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $1/\lambda_1 + 1/\lambda_2 + \cdots < \infty$.

Ha speciálisan a paraméterek egyenlőek, akkor $P(\tau < \infty) = 0$, tehát a folyamat 1 valószínűséggel nem robban fel véges időben.

Várható érték függvény

Egy $(X_t)_{t\geqslant 0}$ valós értékű sztochasztikus folyamat **várható érték függvénye** az $m(t) = E(X_t)$ függvény, mely azon $t \geqslant 0$ pontokban van értelmezve, ahol a várható érték létezik.

Számláló folyamatok eloszlása és várható érték függvénye

Legyen $(X_t)_{t\geqslant 0}$ számláló folyamat, és jelölje rendre F_{T_n} a T_n változó eloszlásfüggvényét. Ekkor az alábbiak teljesülnek minden $t \geqslant 0$ értékre.

1. $P(X_t = n) = F_{T_n}(t) - F_{T_{n+1}}(t), \quad n \in \mathbb{N}_0;$
2. $P(\tau \leqslant t) = \lim_{n\to\infty} F_{T_n}(t);$
3. $E(X_t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_{T_n}(t).$

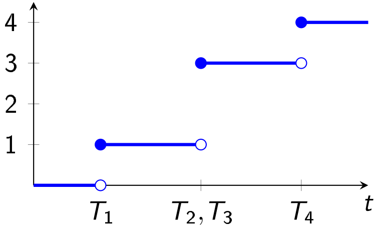
Ha $(X_t)_{t\geqslant 0}$ olyan számláló folyamat, hogy az $S_1, S_2, \ldots$ változók függetlenek, akkor a fenti eloszlásfüggvények számolhatóak konvolúcióval:

$$F_{T_{n+1}}(t) = F_{T_n+S_{n+1}}(t) = \big(F_{T_n} \star F_{S_{n+1}}\big)(t) = \int_{\mathbb{R}} F_{T_n}(t-s)\, dF_{S_{n+1}}\,.$$

Felújítási folyamatok

Felújítási folyamat és felújítási függvény

Egy $(X_t)_{t \geqslant 0}$ számláló folyamatot **felújítási folyamatnak** nevezünk, ha az $S_1, S_2, \ldots$ változók függetlenek és azonos eloszlásúak. Ebben az esetben a kapcsolatos $m(t) = E(X_t)$, $t \geqslant 0$, várható érték függvényt **felújítási függvénynek** hívjuk.



Megjegyzés: Ha $P(S_1 = 0) = 1$, akkor a folyamat 1 valószínűséggel felrobban a $\tau = 0$ pontban. A továbbiakban ezt az esetet ki fogjuk zárni, tehát feltesszük, hogy $P(S_1 = 0) < 1$. Ekkor $E(S_1) \in (0, \infty]$.

A **Gamma-függvény** az alábbi integrál:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx \in (0, \infty)\,, \qquad \alpha > 0\,.$$

Ha egy T változó **Gamma-eloszlást** követ $\alpha > 0$ renddel és $\lambda > 0$ paraméterrel, akkor a sűrűségfüggvénye, várható értéke és varianciája:

$$f_T(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}\,, \quad x \geqslant 0\,, \qquad E(T) = \frac{\alpha}{\lambda}\,, \qquad \mathrm{Var}(T) = \frac{\alpha}{\lambda^2}\,.$$

Speciálisan, ha $\alpha = n \geqslant 1$ egész szám, akkor $\Gamma(n) = (n-1)!$ és

$$F_T(t) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}\,, \qquad t \geqslant 0\,.$$

Független és azonos eloszlású exponenciálisok összege

Ha $S_1, \ldots, S_n$ független és azonos eloszlású exponenciális változó $\lambda > 0$ paraméterrel, akkor az $S_1 + \cdots + S_n$ összeg Gamma-eloszlást követ n renddel és λ paraméterrel.

A Poisson-folyamat

Az $(X_t)_{t \geqslant 0}$, felújítási folyamat λ intenzitású **Poisson-folyamat**, ha $S_1, S_2, \ldots$ exponenciális eloszlású λ paraméterrel. Tulajdonságai:

- A $T_n = S_1 + \cdots + S_n$ felújítási időpont Gamma-eloszlást követ:

$$E(T_n) = \frac{n}{\lambda}, \quad \mathrm{Var}(T_n) = \frac{n}{\lambda^2}, \quad F_{T_n}(t) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \ t \geqslant 0 .$$

- Az X_t változó Poisson-eloszlású λt paraméterrel:

$$P(X_t = n) = F_{T_n}(t) - F_{T_{n+1}}(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \qquad n \in \mathbb{N}_0 .$$

- A felújítási függvény: $m(t) = E(X_t) = \lambda t, \quad t \geqslant 0.$
- Az „intenzitás” jelentése: egy $(s, t]$ intervallumra várható értékben $E(X_t - X_s) = m(t) - m(s) = \lambda(t - s)$ felújítás esik.
- A felrobbanás időpontja $\tau = \infty$ majdnem biztosan, ugyanis

$$P(\tau \leqslant t) = \lim_{n \to \infty} F_{T_n}(t) = 0, \qquad t \geqslant 0.$$

Sztochasztikus folyamatok növekményei

Egy $(X_t)_{t \geqslant 0}$ sztochasztikus folyamat **növekménye** egy $(s, t] \subseteq [0, \infty)$ intervallumon az $X_t - X_s$ változó.

- A folyamat **stacionárius növekményű**, ha $X_t - X_s$ és $X_{t-s} - X_0$ azonos eloszlású változó tetszőleges $0 \leqslant s < t$ esetén, tehát a növekmény eloszlása csak az intervallum hosszától függ.
- A folyamat **független növekményű**, ha tetszőleges $k \geqslant 1$ egész és $(s_1, t_1], \ldots, (s_k, t_k]$ diszjunkt intervallumok esetén a kapcsolatos $X_{t_1} - X_{s_1}, \ldots, X_{t_k} - X_{s_k}$ növekmények függetlenek.

A Poisson-folyamat ekvivalens definíciói

Legyen $(X_t)_{t \geqslant 0}$ számláló folyamat. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.

1. Az folyamat Poisson-folyamat λ intenzitással.
2. A folyamat független és stacionárius növekményű, és tetszőleges $t \geqslant 0$ esetén X_t Poisson-eloszlást követ λt paraméterrel.

A felújítási folyamat aszimptotikus viselkedése

Legyen $(X_t)_{t\geqslant 0}$ felújítási folyamat, ahol $P(S_1 = 0) < 1$. Ekkor

$$\lim_{t\to\infty} \frac{X_t}{t} = \frac{1}{E(S_1)} \quad \text{m.b.} \qquad \text{és} \qquad \lim_{t\to\infty} \frac{m(t)}{t} = \frac{1}{E(S_1)}\,.$$

Tehát hosszútávon időegységenként átlagosan $1/E(S_1)$ felújítás történik, és a felújítási függvénynek ezzel azonos a rendje.

Megjegyzések:

- A második konvergenciát **elemi felújítási tételnek** nevezzük.
- Ha $E(S_1) < \infty$, akkor X_t és $m(t)$ aszimptotikusan lineáris:

  $$X_t \sim \frac{t}{E(S_1)} \qquad \text{és} \qquad m(t) \sim \frac{t}{E(S_1)}\,, \qquad t \to \infty\,.$$

  Ha $E(S_1) = \infty$, akkor $X_t = o(t)$ és $m(t) = o(t)$, $t \to \infty$.
- A felújítási folyamat és a felújítási függvény nem robban fel véges időben, és a felújítási függvény càdlàg függvény.

Felújítási díjfolyamatok

Legyen (S_n, C_n), $n \geqslant 1$, független és azonos eloszlású, ahol $S_1 \geqslant 0$ majdnem biztosan, és legyen $(X_t)_{t \geqslant 0}$ az $S_1, S_2, \ldots$ változók által meghatározott felújítási folyamat. A kapcsolatos **felújítási díjfolyamat**:

$$R_t = \sum_{n=1}^{X_t} C_n = C_1 + \cdots + C_{N_t}\,, \qquad t \geqslant 0\,.$$

Tehát a felújítások az élettartamtól függő költséggel járnak, és az R_t változó a $[0, t]$ intervallumon jelentkező teljes költség.

A felújítási díjfolyamat aszimptotikus viselkedése

Legyen $(R_t)_{t \geqslant 0}$ felújítási díjfolyamat, és tegyük fel, hogy $P(S_1 = 0) < 1$ és $E(|C_1|) < \infty$. Ekkor

$$\lim_{t\to\infty} \frac{R_t}{t} = \frac{E(C_1)}{E(S_1)} \quad \text{m.b.} \qquad \text{és} \qquad \lim_{t\to\infty} \frac{E(R_t)}{t} = \frac{E(C_1)}{E(S_1)}\,.$$

Folytonos idejű Markov-láncok

Legyen $\mathbb{X} = (X_t)_{t \geqslant 0}$ sztochasztikus folyamat az $\mathcal{I}$ megszámlálható állapottéren.

Folytonos idejű Markov-láncok

Az $\mathbb{X}$ folyamat **folytonos idejű Markov-lánc**, ha tetszőleges $n \geqslant 1$ egész, $i_1, \ldots, i_n, i, j$ állapotok, és $0 \leqslant s_1 \leqslant \ldots \leqslant s_n \leqslant s \leqslant t$ időpontok esetén

$$P\big(X_t = j \mid X_s = i, X_{s_n} = i_n, \ldots, X_{s_1} = i_1\big) = P\big(X_t = j \mid X_s = i\big)$$

amennyiben a feltétel valószínűsége pozitív. A folytonos idejű Markov-lánc **átmenetvalószínűségei**:

$$p_{i,j}(s,t) = P\big(X_t = j \mid X_s = i\big)\,, \qquad 0 \leqslant s \leqslant t\,, \quad i,j \in \mathcal{I}\,.$$

Az **átmenetmátrix**: $\mathbf{P}(s,t) = \big[p_{i,j}(s,t)\big]_{i,j\in\mathcal{I}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{I}\times\mathcal{I}}, \quad 0 \leqslant s \leqslant t.$

Az átmenetmátrix tulajdonságai

Tetszőleges $0 \leqslant s \leqslant t$ esetén $\mathbf{P}(s,t)$ sztochasztikus mátrix, és

$$\mathbf{P}(s,s) = \mathbf{E}_{\mathcal{I}} := \left[\delta_{i,j}\right]_{i,j\in\mathcal{I}}.$$

Folytonos idejű Markov-láncok ekvivalens definíciói

Legyen $\mathbb{X} = (X_t)_{t\geqslant 0}$ megszámlálható állapotterű folyamat, és legyen

$$\mathcal{F}_t = \sigma(X_s : s \leqslant t), \qquad \mathcal{G}_t = \sigma(X_s : s \geqslant t), \qquad t \geqslant 0.$$

Ekkor az alábbiak ekvivalensek.

1. Az $\mathbb{X}$ folyamat folytonos idejű Markov-lánc.
2. Tetszőleges $t \geqslant 0$ időpont, $i \in \mathcal{I}$ állapot, továbbá $A \in \mathcal{G}_t$ és $B \in \mathcal{F}_t$ események mellett

$$P(A \mid X_t = i, B) = P(A \mid X_t = i).$$

Folytonos idejű homogén Markov-láncok

Az $\mathbb{X} = (X_t)_{t \geqslant 0}$ folytonos idejű Markov-lánc **homogén**, ha tetszőleges $0 \leqslant s \leqslant t$ és $i, j \in \mathcal{I}$ esetén

$$p_{i,j}(s, t) = p_{i,j}(0, t - s)\,,$$

tehát az átmenetvalószínűségek csak a vizsgált időintervallum hosszától függnek. Ekkor legyen

$$p_{i,j}^{(t-s)} := p_{i,j}(s, t) \qquad \text{és} \qquad \mathbf{P}^{(t-s)} := \mathbf{P}(s, t)\,.$$

A Markov-lánc kezdeti eloszlása: $\boldsymbol{\alpha} = \left[\alpha_i\right]_{i \in \mathcal{I}}$, ahol $\alpha_i = P(X_0 = i)$.

Mi legyen az állapottér? Elég, ha $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{N}_0$, mint a diszkrét idejű esetben?

Most a folyamat felrobbanhat véges időben, tehát a rendszer elérheti a ∞ állapotot. A továbbiakban legyen $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, és megköveteljük, hogy a ∞ állapot legyen elnyelő, de ne legyen kezdeti állapot.

Erős Markov-tulajdonság

Legyen $\mathbb{X}$ homogén Markov-lánc $\mathbf{P}^{(t)}$, $t \geqslant 0$, átmenetmátrixokkal, és jelölje $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s : s \leqslant t)$, $t \geqslant 0$, a generált szűrést. Legyen továbbá τ megállási idő, és tekintsük az $\mathbb{X}' = (X_{\tau+t})_{t \geqslant 0}$ folyamatot, ami jól definiált az $\Omega_0 = \{\tau < \infty\}$ eseményen. Ekkor tetszőleges i állapot esetén a $\{\tau < \infty, X_\tau = i\}$ eseményre feltételesen teljesülnek az alábbiak:

1. $\mathbb{X}'$ homogén Markov-lánc $\boldsymbol{\delta}_i$ kezdeti eloszlással és $\mathbf{P}^{(t)}$, $t \geqslant 0$, átmenetmátrixokkal.
2. $\mathbb{X}'$ független az $\mathcal{F}_\tau$ σ-algebrától.

Chapman–Kolmogorov-egyenletek

Ha $\mathbb{X}$ homogén Markov-lánc $\mathbf{P}^{(t)}$, $t \geqslant 0$, átmenetmátrixokkal, akkor

$$\mathbf{P}^{(s+t)} = \mathbf{P}^{(s)}\mathbf{P}^{(t)}, \qquad s, t \geqslant 0.$$

Megjegyzés: Diszkrét idejű Markov-láncoknál $\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^n$, $n = 2, 3, \dots$, könnyen számolható. Mi a helyzet folytonos időben?

Kolmogorov egyenletei

A továbbiakban az $\mathbb{X} = (X_t)_{t \geqslant 0}$ folyamat legyen folytonos idejű homogén Markov-lánc $\mathbf{P}^{(t)}$, $t \geqslant 0$, átmenetmátrixokkal.

Standard Markov-láncok

Az $\mathbb{X}$ Markov-lánc **standard**, ha $\mathbf{P}^{(t)} \to \mathbf{P}^{(0)} = \mathbf{E}_{\mathcal{I}}$, amint $t \downarrow 0$, tehát tetszőleges $i, j \in \mathcal{I}$ esetén $p_{i,j}^{(t)} \to p_{i,j}^{(0)} = \delta_{i,j}$, amint $t \downarrow 0$

Standard Markov-láncok átmenetvalószínűségei

Legyen $\mathbb{X}$ standard Makov-lánc, és legyen $i, j \in \mathcal{I}$ tetszőleges.

1. A $p_{i,j}^{(t)}$, $t \geqslant 0$, függvény folytonos a pozitív félegyenesen.
2. A
$$q_{i,j} := \lim_{h \downarrow 0} \left[p_{i,j}^{(h)} - p_{i,j}^{(0)} \right] / h = \lim_{h \downarrow 0} \left[p_{i,j}^{(h)} - \delta_{i,j} \right] / h$$
határérték jól definiált abban az értelemben, hogy $q_{i,i} \in [-\infty, 0]$, és $q_{i,j} \in [0, \infty)$, ha $i \neq j$.

Jobbról folytonos Markov-láncok

Ha az $\mathbb{X}$ homogén Markov-lánc sztochasztikusan folytonos a $t = 0$ pontban, akkor standard. Ebből következik, hogy a Markov-lánc standard, ha a trajektóriái càdlàg függvények.

Konzervatív Markov-láncok, infinitezimális generátor

Egy $\mathbb{X}$ standard Markov-lánc **konzervatív**, ha tetszőleges $i \in \mathcal{I}$ esetén

$$q_{i,i} > -\infty \qquad \text{és} \qquad \sum_{j \in \mathcal{I}} q_{i,j} = 0\,.$$

Ekkor a $\mathbf{Q} = [q_{i,j}]_{i,j \in \mathcal{I}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ mátrixot az $\mathbb{X}$ folyamat **infinitezimális generátorának**, vagy röviden a folyamat **generátormátrixának** nevezzük.

Vegyük észre, hogy

$$\mathbf{Q} = \left[\lim_{h \downarrow 0} \frac{p_{i,j}^{(t)} - p_{i,j}^{(0)}}{h} \right]_{i,j \in \mathcal{I}} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{\mathbf{P}^{(t)} - \mathbf{P}^{(0)}}{h} = \frac{d\mathbf{P}^{(t)}}{dt} \bigg|_{t=0} .$$

Kolmogorov egyenletei

Legyen $\mathbf{Q}$ az $\mathbb{X}$ konzervatív Markov-lánc generátormátrixa, és legyen $\mathbf{P} : [0, \infty) \to \mathbb{R}^{\mathcal{I}\times\mathcal{I}}$, $t \mapsto \mathbf{P}(t)$, mátrix értékű függvény.

- **Kolmogorov előrehaladó (forward) egyenletei:**

$$\frac{d\mathbf{P}(t)}{dt} = \mathbf{P}(t)\mathbf{Q}\,, \qquad \text{azaz} \qquad \frac{dp_{i,j}(t)}{dt} = \sum_{k\in\mathcal{I}} p_{i,k}(t)q_{k,j}\,, \quad i,j\in\mathcal{I}\,.$$

- **Kolmogorov visszafelé haladó (backward) egyenletei:**

$$\frac{d\mathbf{P}(t)}{dt} = \mathbf{Q}\mathbf{P}(t)\,, \qquad \text{azaz} \qquad \frac{dp_{i,j}(t)}{dt} = \sum_{k\in\mathcal{I}} q_{i,k}p_{k,j}(t)\,, \quad i,j\in\mathcal{I}\,.$$

Ha a Kolmogorov előre- vagy visszafelé haladó egyenletekhez hozzáadjuk a $\mathbf{P}(0) = \mathbf{E}_{\mathcal{I}}$ kezdeti feltételt, akkor egy kezdeti érték problémát kapunk. A kérdés az, hogy ennek a kezdeti érték problémának milyen feltételek mellett lesz megoldása a $\mathbf{P}^{(t)}$, $t \geqslant 0$, mátrix értékű függvény.

Kolmogorov egyenletei véges állapottéren

Legyen $\mathbb{X}$ véges állapotterű standard Markov-lánc. Ekkor a folyamat konzervatív is. Jelölje $\mathbf{Q}$ a lánc generátormátrixát. Ekkor a $\mathbf{P}^{(t)}$, $t \geqslant 0$, átmenetmátrix, mint mátrix értékű függvény, egyértelmű megoldása annak a kezdeti érték problémának, hogy a Kolmogorov előre- vagy visszafelé haladó egyenleteket tekintjük a $\mathbf{P}^{(0)} = \mathbf{E}_{\mathcal{I}}$ kezdeti feltétel mellett. Ebből következik, hogy

$$\mathbf{P}^{(t)} = e^{\mathbf{Q}t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \mathbf{Q}^n , \qquad t \geqslant 0 .$$

Mit mondhatunk általában, tehát nem véges állapottér esetén?

- Az előrehaladó egyenleteknek nincs mindig megoldásuk, de ha van, akkor $\mathbf{P}^{(t)}$, $t \geqslant 0$, megoldás, és ez az egyetlen megoldás.
- A visszafelé haladó egyenleteknek az átmenetvalószínűségek mindig megoldásai, de lehetnek más megoldások is.

Kérdés: Mi a helyzet a Poisson-folyamat esetében?

Az állapotváltozások dinamikája

Legyen $\mathbb{X} = (X_t)_{t\geqslant 0}$ folytonos idejű folyamat az $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ állapottéren, és legyen a ∞ állapot elnyelő. Azt mondjuk, hogy az $\mathbb{X}$ folyamat càdlàg, ha minden trajektóriája càdlàg függvény. Ekkor a folyamatnak megszámlálhatóan sok ugráspontja van, melyek megállási idők:

$$T_0 := 0\,, \qquad T_n := \min\left\{t > T_{n-1} : X_t \neq X_{T_{n-1}}\right\}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Legyen továbbá

- $Y_n := X_{T_{n-1}}, \quad n = 1, 2, \ldots,$ a meglátogatott állapotok sorozata;
- $S_n := T_n - T_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots$ az egyes állapotokban eltöltött idő.

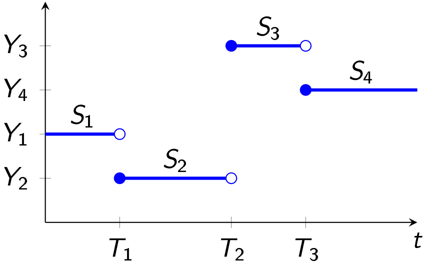
Beágyazott folyamat

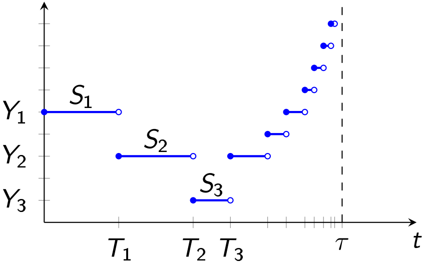
Az $\mathbb{Y} = (Y_n)_{n=1,2,\ldots}$ diszkrét idejű sztochasztikus folyamatot **beágyazott folyamatnak** nevezzük.

Kérdés: Ha $\mathbb{X}$ càdlàg folytonos idejű homogén Markov-lánc, akkor mennyi időt tölt el egy-egy állapotban, és milyen szabályok szerint ugrik tovább?

Hogyan viselkedhet a T_n sorozat?

- Ha a folyamat nem robban fel véges időben, és nem nyelődik el véges sok lépés után, akkor $T_n \to \infty$.
- Ha a folyamat véges (de általában véletlen sok) ugrás után elér egy elnyelő állapotot, akkor $T_0, \ldots, T_N < \infty$, $T_{N+1}, T_{N+2}, \ldots = \infty$, ahol T_N az elnyelődés időpontja. Ekkor legyen $Y_n = X_{T_N}$, $n > N$.
- Ha a folyamat felrobban egy $\tau < \infty$ időpontban, akkor $T_n \to \tau$. Mivel a ∞ állapot elnyelő, a folyamatot csak a τ pontig vizsgáljuk.





Az állapotváltozások dinamikája

Legyen $\mathbb{X} = (X_t)_{t \geqslant 0}$ càdlàg folyamat az $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ állapottéren, és tekintsünk egy $\mathbf{Q} = [q_{i,j}]_{i,j \in \mathcal{I}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ mátrixot, melyre

$$q_{i,i} \leqslant 0\,, \qquad q_{i,j} \geqslant 0\,, \qquad \textstyle\sum_{k \in \mathcal{I}} q_{i,k} = 0\,, \qquad i,j \in \mathcal{I}\,,\ i \neq j\,.$$

Ekkor az alábbiak ekvivalensek.

1. Az $\mathbb{X}$ folyamat konzervatív Markov-lánc, és $\mathbf{Q}$ a generátora.
2. Tetszőleges $i \in \mathcal{I}$ állapot esetén ha $q_{i,i} = 0$, akkor az i állapot elnyelő az $\mathbb{X}$ folyamatban, míg ha $q_{i,i} < 0$, akkor minden $n \geqslant 1$ egész esetén teljesülnek az alábbiak:
   - Az $\{Y_n = i\}$ eseményre feltételesen S_n és Y_{n+1} független egymástól és az $Y_1, \ldots, Y_{n-1}, S_1, \ldots, S_{n-1}$ változóktól.
   - Az $\{Y_n = i\}$ eseményre feltételesen az S_n változó exponenciális eloszlást követ $-q_{i,i}$ paraméterrel.
   - $P(Y_{n+1} = j \mid Y_n = i) = -q_{i,j}/q_{i,i}$ minden $j \neq i$ állapotra.

Az előző tétel szerint a càdlàg konzervatív Markov-láncok dinamikája csak a $\mathbf{Q}$ generátormátrixtól függ, méghozzá a következő módon:

- Ha $q_{i,i} = 0$, akkor az i állapot elnyelő, tehát nem lehet elhagyni.
- Ha $q_{i,i} \neq 0$, akkor az i állapotban csak véges sok időt töltünk el, és utána átugrunk egy másik állapotba. A tétel szerint
  - az i állapotban eltöltött idő és az, hogy hová ugrunk tovább, csak az i állapottól függ, a folyamat múltjától nem;
  - az i állapotban eltöltött idő exponenciális eloszlást követ, melynek paramétere kódolva van a $\mathbf{Q}$ mátrixban;
  - az, hogy az elugrás során az i-ből melyik állapotokba mekkora valószínűséggel ugrunk át, szintén kódolva van a $\mathbf{Q}$ mátrixban.

A beágyazott folyamat diszkrét idejű Markov-lánc

Ha $\mathbb{X} = (X_t)_{t \geqslant 0}$ konzervatív Markov-lánc $\mathbf{Q} = [q_{i,j}]_{i,j \in \mathcal{I}}$ generátorral, akkor a kapcsolatos $(Y_n)_{n=1,2,\ldots}$ beágyazott folyamat diszkrét idejű homogén Markov-lánc, melynek átmenetmátrixsza $\mathbf{R} = [r_{i,j}]_{i,j \in \mathcal{I}}$, ahol

$$r_{i,i} = \begin{cases} 0\,, & q_{i,i} \neq 0\,, \\ 1\,, & q_{i,i} = 0\,, \end{cases} \qquad r_{i,j} = \begin{cases} -q_{i,j}/q_{i,i}\,, & q_{i,i} \neq 0\,, \\ 0\,, & q_{i,i} = 0\,, \end{cases} \qquad i,j \in \mathcal{I}\,,\ i \neq j\,.$$

A gyakorlaton a konvervatív Markov-láncokra egy másik dinamikus leírást is tanulni fogunk. Ehhez szükség lesz a következő tételre.

Exponenciális eloszlású változók minimuma

Legyen $S_1, S_2, \dots$ független exponenciális eloszlású véletlen változóknak egy véges vagy végtelen sorozata rendre $\lambda_1, \lambda_2, \dots > 0$ paraméterrel. Tegyük fel, hogy $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots < \infty$, és legyen

$$S = \inf\{S_1, S_2, \dots\} : \Omega \to [0, \infty).$$

Ekkor teljesülnek az alábbiak:

1. Az S véletlen változó exponenciális eloszlást követ λ paraméterrel.
2. Létezik olyan N egész értékű változó, melyre $P(S_N = S) = 1$. Az N és az S változó független egymástól, és

$$P(N = n) = \frac{\lambda_n}{\lambda} = \frac{\lambda_n}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots}.$$

Kommunikációs osztályok és az állapotok típusai

Legyen $\mathbb{X} = (X_t)_{t \geqslant 0}$ folytonos idejű càdlàg és konzervatív Markov-lánc az $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$ állapottéren. Fontosabb jelölések:

- átmenetvalószínűségek: $\mathbf{P}^{(t)} = [p_{i,j}^{(t)}]_{i,j \in \mathcal{I}}, \quad t \geqslant 0,$
- generátormátrix: $\mathbf{Q} = [q_{i,j}]_{i,j \in \mathcal{I}},$
- az egyes állapotokban eltöltött (exponenciális) idő: $S_1, S_2, \ldots,$
- a meglátogatott állapotok sorozata: $\mathbb{Y} = (Y_n)_{n \geqslant 1}$

Vázfolyamat

Legyen $h > 0$ tetszőleges valós szám. Az $X_n^h = X_{nh}$ formulával definiált $\mathbb{X}^h = (X_n^h)_{n \geqslant 0}$ folyamatot ***h*-lépéses váznak** nevezzük.

A vázfolyamat Markov-lánc

Tetszőleges $h > 0$ esetén az $\mathbb{X}^h$ vázfolyamat homogén Markov-lánc $\mathbf{P}^{(h)}$ átmenetmátrixszal.

Elérhetőség, kommunikációs viszony, intenzitási diagramm

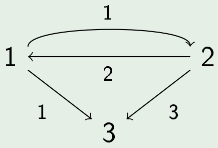
Legyen $i, j \in \mathcal{I}$ tetszőleges állapot. Azt mondjuk, hogy a j állapot **elérhető** i-ből, ha

$$P\big(\text{a lánc valaha eléri } j\text{-t} \mid X_0 = i\big) = P\big(\exists t \geqslant 0 : X_t = j \mid X_0 = i\big) > 0\,.$$

A két állapot **kommunikációs viszonyban** áll egymással, ha kölcsönösen elérhetőek egymásból. Az $\mathbb{X}$ folyamat **intenzitási diagrammja** azaz irányított gráf az $\mathcal{I}$ csúcshalmazon, melyben egy $\vec{ij}$ él pontosan akkor van behúzva, ha $q_{i,j} > 0$, tehát a folyamat át tud ugrani az i-ből közvetlenül a j-be. Általában az élekre rá szoktuk írni a $q_{i,j}$ értékeket.

Egy példa az $\mathcal{I} = \{1, 2, 3\}$ állapottéren

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Az elérhetőség ekvivalens definíciói

Tetszőleges $i, j \in \mathcal{I}$ és $h > 0$ esetén az alábbiak ekvivalensek.

1. j elérhető i-ből az $\mathbb{X}$ folyamatban.
2. j elérhető i-ből az $\mathbb{X}^h$ vázfolyamatban.
3. j elérhető i-ből az $\mathbb{Y}$ beágyazott folyamatban.
4. Vagy $i = j$, vagy az intenzitási diagrammon lézetik az i-ből j-be vezető irányított út.
5. $p_{i,j}^{(t)} > 0$ valamilyen $t > 0$ esetén.
6. $p_{i,j}^{(t)} > 0$ minden $t > 0$ esetén.

Továbbá, a kommunikációs viszony ekvivalenciareláció az állapottéren.

A kommunikációs viszony ekvivalenciaosztályait a folytonos esetben is **kommunikációs osztályoknak** nevezzük. A tétel szerint a kommunikációs osztályok az intenzitási diagramm erősen összefüggő komponensei, és az $\mathbb{X}$, az $\mathbb{X}^h$ és az $\mathbb{Y}$ folyamatban a kommunikációs osztályok azonosak.

Az állapotok típusai

Legyen $P(X_0 = i) = 1$, ahol $i \in \mathcal{I}$ rögzített, és jelölje Λ_i az i állapotban eltöltött összes időt, tehát a $\{t \geqslant 0 : X_t = i\} \subseteq \mathbb{R}$ halmaz Lebesgue-mértékét. Azt mondjuk, hogy az i állapot **tranziens**, ha $P(\Lambda_i < \infty) = 1$, és **rekurrens**, ha $P(\Lambda_i = \infty) = 1$.

A típusok tulajdonságai

Tetszőleges $h > 0$ lépésköz esetén az alábbiak ekvivalensek.

1. Az i állapot tranziens (illetve rekurrens) az $\mathbb{X}$ folyamatban.
2. Az i álllapot tranziens (illetve rekurrens) az $\mathbb{X}^h$ vázfolyamatban.
3. Az i álllapot tranziens (illetve rekurrens) az $\mathbb{Y}$ folyamatban.
4. $X_0 = i$ esetén $\sup\{t \geqslant 0 : X_t = i\} < \infty$ (illetve $= \infty$) m.b.
5. $\int_0^\infty p_{i,i}^{(t)} dt < \infty$ (illetve $= \infty$).

A fentiekből következik, hogy minden állapot beleesik valamelyik típusba, és a típus osztálytulajdonság az $\mathbb{X}$ folyamat esetén is.

Invariáns eloszlás és ergodicitás

Invariáns eloszlás és invariáns mérték

Legyen $\pi = [\pi_i]_{i\in\mathcal{I}}$ mérték az állapottéren.

- π **invariáns mérték**, ha $\boldsymbol{\pi}\mathbf{P}^{(t)} = \boldsymbol{\pi}$ minden $t \geqslant 0$ esetén.
- $\boldsymbol{\pi}$ **invariáns eloszlás**, ha eloszlás és invariáns mérték. (Ekkor $X_0 \sim \boldsymbol{\pi}$ választással $X_t \sim \boldsymbol{\pi}$ minden $t \geqslant 0$ esetén.)

Az invariáns mértékek ekvivalens tulajdonságai

Legyen $\mathbb{X}$ irreducibilis és rekurrens. Ekkor tetszőleges $\boldsymbol{\pi} = [\pi_i]_{i\in\mathcal{I}}$ mérték esetén az alábbiak ekvivalensek.

1. A $\boldsymbol{\pi}$ mérték invariáns az $\mathbb{X}$ folyamatra nézve.
2. $\boldsymbol{\pi}\mathbf{Q} = 0$.
3. A $\boldsymbol{\rho} = [\rho_i]_{i\in\mathcal{I}}$, $\rho_i = -q_{i,i}\pi_i$, mérték invariáns az $\mathbb{Y}$ folyamatra.

Ebből következik, hogy az $\mathbb{X}$ folyamatnak létezik $\boldsymbol{\pi} \neq 0$ invariáns mértéke, és az invariáns mértékek pontosan $c\boldsymbol{\pi}$, $c \geqslant 0$, alakúak.

Az invariáns mértékek létezése

Ha az $\mathbb{X}$ folyamat irreducibilis, akkor teljesülnek az alábbiak.

1. Ha π invariáns mérték az $\mathbb{X}$ folyamatra nézve, akkor invariáns mérték az $\mathbb{X}^h$ folyamatra nézve is tetszőleges $h > 0$ esetén.
2. Ha $\mathbb{X}$ tranziens, akkor nem létezik invariáns eloszlása.
3. Ha $\mathbb{X}$ rekurrens, akkor $\mathbb{X}$ és $\mathbb{X}^h$ invariáns mértékei azonosak minden $h > 0$ esetén. Tehát $\boldsymbol{\pi}$ pontosan akkor invariáns mértéke az $\mathbb{X}$ folyamatnak, ha $\boldsymbol{\pi}\mathbf{P}^{(h)} = \boldsymbol{\pi}$ valamely $h > 0$ mellett.
4. Ha $\mathbb{X}^h$ pozitív rekurrens, akkor az invariáns mértékek mind végesek, ha viszont null-rekurrens, akkor $\boldsymbol{\pi} = 0$ az egyetlen invariáns mérték.

Pozitív rekurrens és null-rekurrens állapotok

Legyen az $\mathbb{X}$ folyamat irreducibilis és rekurrens. Azt mondjuk, hogy a folyamat **pozitív rekurrens**, ha az invariáns mértékei végesek, és az $\mathbb{X}$ **null-rekurrens**, ha a $\pi = 0$ az egyetlen véges invariáns mértéke.

A következő tételt nagyrészt bizonyítás nélkül mondjuk ki:

Folytonos idejű Markov-láncok invariáns eloszlásai

Legyen $\mathbb{X}$ irreducibilis folyamat, és jelölje m_i az i állapotba való első visszatérésig tartó idő várható értékét, tehát

$$m_i = E\Big[\inf\{t \geqslant S_1 : X_t = i\} \,\big|\, X_0 = i\Big],$$

ahol $\inf\varnothing = \infty$. Ekkor teljesülnek az alábbiak.

1. Az $\mathbb{X}$, az $\mathbb{X}^h$ és az $\mathbb{Y}$ Markov-lánc egyszerre tranziens, pozitív rekurrens vagy null-rekurrens.
2. Ha $\mathbb{X}$ pozitív rekurrens és nem csak egy elnyelő állapotból áll, akkor $m_i < \infty$, míg minden más esetében $m_i = \infty$ minden i állapotra.
3. Az $\mathbb{X}$ folyamatnak pontosan akkor létezik invariáns eloszlása, ha pozitív rekurrens. Ebben az esetben az invariáns eloszlás egyértelmű.
4. Ha $\mathbb{X}$ pozitív rekurrens és nem csak egy elnyelő állapotból áll, akkor az invariáns eloszlás felírható $\pi_i = 1/(-q_{i,i}m_i)$, $i \in \mathcal{I}$, alakban.

Konvergencia az egyensúlyhoz és ergodicitás

Legyen $\mathbb{X} = (X_t)_{t \geqslant 0}$ irreducibilis, càdlàg és konzervatív Markov-lánc tetszőleges kezdeti eloszlással, és tekintsünk tetszőleges i, j állapotokat.

1. Ha a j állapot nem elnyelő, akkor a léteznek a limeszvalószínűségek:

$$p_{i,j}^{(t)} \to \frac{1}{-q_{j,j} m_j}, \qquad P(X_t = j) \to \frac{1}{-q_{j,j} m_j}, \qquad t \to \infty .$$

2. Ha a j állapot nem elnyelő, akkor a j-ben eltöltött idő aránya:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \mathbb{1}_{\{X_t = j\}} \, dt \to \frac{1}{-q_{j,j} m_j}, \qquad T \to \infty, \qquad \text{m.b.}$$

3. Tegyük fel, hogy az $\mathbb{X}$ folyamat pozitív rekurrens. Legyen π az invariáns eloszlása, és tekintsünk egy olyan $c : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ függvényt, melyre $\overline{c} := \sum_{i \in \mathcal{I}} c(i) \pi_i < \infty$. Ekkor

$$\frac{1}{T} \int_0^T c(X_t) \, dt \to \overline{c}, \qquad T \to \infty, \qquad \text{m.b.}$$

Véges dimenziós eloszlások

Tekintsünk egy $\mathbb{X} = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ sztochasztikus folyamatot az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, ahol $\mathbb{T} \subseteq [0, \infty)$. Ekkor $\mathbb{X}$ egy véletlen függvény?

$$\mathbb{X} : \Omega \to \mathbb{R}^{\mathbb{T}} = \{x : \mathbb{T} \to \mathbb{R}, t \mapsto x_t\}\,, \qquad \mathbb{X}(\omega) : \mathbb{T} \to \mathbb{R}\,,$$
$$\omega \mapsto \mathbb{X}(\omega) \in \mathbb{R}^{\mathbb{T}}\,, \qquad t \mapsto \mathbb{X}_t(\omega)\,.$$

Az $\mathbb{X}$ folyamat akkor véletlen függvény, ha az $\mathbb{X} : \Omega \to \mathbb{R}^{\mathbb{T}}$ leképezés mérhető. Például, ha $\mathbb{T} = \{t_1, \dots, t_d\}$ egy véges halmaz, akkor

$$\mathbb{X} = \left(X_{t_1}, \dots, X_{t_d}\right) : \Omega \to \mathbb{R}^{\mathbb{T}} = \mathbb{R}^d\,, \quad \text{ami} \quad \mathcal{A}\text{–}\mathcal{B}^n\text{-mérhető.}$$

Ha $\mathbb{T}$ nem véges, akkor az $\mathbb{R}^{\mathbb{T}}$ téren nincs σ-algebra, tehát nincs értelme mérhetőségről beszélni. Először definiáljunk egy σ-algebrát.

Projekciók

Legyen $\mathbb{S} = \{s_1, \dots, s_n\} \subseteq \mathbb{T}$. Ekkor az $\mathbb{R}^{\mathbb{S}}$ altérre való **projekció**:

$$\pi_{\mathbb{S}} : \mathbb{R}^{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{S}}\,, \qquad x \mapsto \left(x_{s_1}, \dots, x_{s_n}\right).$$

A továbbiakban $\mathbb{T}$ legyen végtelen számosságú. Úgy fogunk σ-algebrát definiálni az $\mathbb{R}^{\mathbb{T}}$ téren, hogy a projekciók mérhető leképezések legyenek. Látni fogjuk, hogy ezzel a konstrukcióval az $\mathbb{X}$ folyamat is mérhető lesz.

Hengerhalmazok és mérhető halmazok

Legyen $\emptyset \neq \mathbb{S} = \{s_1, \ldots, s_n\} \subseteq \mathbb{T}$ és $B \in \mathcal{B}^{\mathbb{S}}$. **Hengerhalmazok:**

$$H_{\mathbb{S},B} := \pi_{\mathbb{S}}^{-1}(B) = \left\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{T}} : (x_{s_1}, \ldots, x_{s_n}) \in B\right\},$$

$$\mathcal{H} = \left\{H_{\mathbb{S},B} : \emptyset \neq \mathbb{S} \subseteq \mathbb{T}, \mathbb{S} \text{ véges}, B \in \mathcal{B}^{\mathbb{S}}\right\}.$$

Az $\mathbb{R}^{\mathbb{T}}$ tér mérhető halmazai: $\mathcal{M} := \sigma(\mathcal{H})$. Tehát $\mathcal{M}$ a legszűkebb σ-algebra, amire nézve a projekciók mind mérhetőek.

Sztochasztikus folyamatok mérhetősége

1. A $\mathcal{H}$ halmazrendszer halmazalgebra.
2. Az $\mathbb{X} : \Omega \to \mathbb{R}^{\mathbb{T}}$ leképezés $\mathcal{A}$–$\mathcal{M}$-mérhető, tehát az $\mathbb{X}$ folyamat az $\mathbb{R}^{\mathbb{T}}$ függvénytér véletlen eleme.

Véges dimenziós eloszlások

Az $\mathbb{X}$ sztochasztikus folyamat **eloszlása**:

$$P_{\mathbb{X}}(M) := P(\mathbb{X} \in M) = P\big(\mathbb{X}^{-1}(M)\big)\,, \qquad M \in \mathcal{M}\,.$$

Az $\mathbb{S} = \{s_1, \ldots, s_n\} \subseteq \mathbb{T}$ halmazhoz tartozó **véges dimenziós eloszlás**:

$$P_{\mathbb{X},\mathbb{S}}(B) := P\big((X_{s_1}, \ldots, X_{s_n}) \in B\big) = P(\mathbb{X} \in H_{\mathbb{S},B}) = P_{\mathbb{X}}(H_{\mathbb{S},B})\,, \quad B \in \mathcal{B}^{\mathbb{S}}\,.$$

Legyen μ σ-véges mérték az $(\mathbb{R}^{\mathbb{T}}, \mathcal{M})$ téren. A μ mérték $\mathbb{S}$-hez tartozó **marginálisa**: $\mu_{\mathbb{S}}(B) := \mu(H_{\mathbb{S},B})$, $B \in \mathcal{B}^{\mathbb{S}}$.

A mértékek egyértelműsége

Legyen μ és ν σ-véges mérték az $\mathbb{R}^{\mathbb{T}}$ téren. A két mérték pontosan akkor egyenlő, ha azonosak a véges dimenziós marginálisaik, azaz $\mu_{\mathbb{S}} = \nu_{\mathbb{S}}$ minden $\varnothing \neq \mathbb{S} \subseteq \mathbb{T}$ véges halmaz esetén.

Legyen $\mathbb{S} = \{s_1, \ldots, s_n\} \subseteq \mathbb{U} = \{u_1, \ldots, u_m\} \subseteq \mathbb{T}$, $B \in \mathcal{B}^{\mathbb{S}}$, és

$$H_{\mathbb{U},\mathbb{S},B} := \left\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{U}} : (x_{s_1}, \ldots, x_{s_n}) \in B\right\}.$$

Ekkor a véges dimenziós eloszlásokra teljesül a következő egyenlőség:

$$\begin{aligned} P_{\mathbb{X},\mathbb{U}}(H_{\mathbb{U},\mathbb{S},B}) &= P\big((X_{u_1}, \ldots, X_{u_m}) \in H_{\mathbb{U},\mathbb{S},B}\big) \\ &= P\big((X_{s_1}, \ldots, X_{s_n}) \in B\big) = P_{\mathbb{X},\mathbb{S}}(B). \end{aligned}$$

Mértékcsaládok konzisztenciája

Legyen $\{\mu_{\mathbb{S}} : \emptyset \neq \mathbb{S} \subseteq \mathbb{T}, \mathbb{S} \text{ véges}\}$ mértékeknek egy családja, ahol a $\mu_{\mathbb{S}}$ mérték rendre az $(\mathbb{R}^{\mathbb{S}}, \mathcal{B}^{\mathbb{S}})$ Euklideszi téren van értelmezve. Ez a család **konzisztens**, ha tetszőleges $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{U} \subseteq \mathbb{T}$ véges részhalmazok és $B \in \mathcal{B}^{\mathbb{S}}$ Borel-halmaz esetén $\mu_{\mathbb{U}}(H_{\mathbb{U},\mathbb{S},B}) = \mu_{\mathbb{S}}(B)$.

A véges dimenziós marginálisok konzisztensek

Legyen μ σ-véges mérték. Ekkor a véges dimenziós marginálisok által alkotott $\{\mu_{\mathbb{S}} : \emptyset \neq \mathbb{S} \subseteq \mathbb{T}, \mathbb{S} \text{ véges}\}$ mértékcsalád konzisztes.

Kolmogorov konzisztenciatétel

Legyen $\{\mu_{\mathbb{S}} : \emptyset \neq \mathbb{S} \subseteq \mathbb{T}, \mathbb{S} \text{ véges}\}$ valószínűségi mértékeknek egy konzisztens családja. Ekkor egyértelműen létezik egy μ valószínűségi mérték az $(\mathbb{R}^{\mathbb{T}}, \mathcal{M})$ téren, melynek a véges dimenziós marginálisai pontosan a fenti család elemei.

Kolmogorov egzisztenciatétel (Kolmogorov alaptétel)

Legyen $\{\mu_{\mathbb{S}} : \emptyset \neq \mathbb{S} \subseteq \mathbb{T}, \mathbb{S} \text{ véges}\}$ valószínűségi mértékeknek egy konzisztens családja. Ekkor létezik olyan $\mathbb{X} = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ sztochasztikus folyamat, melynek a véges dimenziós eloszlásai pontosan a fenti család elemei, azaz $P_{\mathbb{X},\mathbb{S}} = \mu_{\mathbb{S}}$ minden $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{T}$ véges halmaz esetén.

A fehér zaj folyamat véges dimenziós eloszlásai

Legyen $\mathbb{X} = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$, ahol az X_t változók függetlenek és azonos eloszlásúak közös F eloszlásfüggvénnyel. Az $\mathbb{S} = \{s_1, \ldots, s_n\} \subseteq \mathbb{T}$ halmazhoz kapcsolódó véges dimenziós eloszlás: $P_{\mathbb{S}} = \underbrace{\mu_F \times \cdots \times \mu_F}_{n \text{ darab}}$.

Modifikáció, függetlenség, folytonosság

Modifikációs viszony és megkülönböztethetetlen folyamatok

Legyen $\mathbb{X} = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ és $\mathbb{Y} = (Y_t)_{t\in\mathbb{T}}$, ahol $\mathbb{T} \subseteq [0, \infty)$.

- A két folyamat **azonos eloszlású**, ha $P_{\mathbb{X}} = P_{\mathbb{Y}}$, tehát
$$P(\mathbb{X} \in M) = P(\mathbb{Y} \in M), \qquad M \in \mathcal{M}.$$

Tegyük fel, hogy $\mathbb{X}$ és $\mathbb{Y}$ azonos valószínűségi mezőn van definiálva.

- A két folyamat **egymás modifikációja**, ha
$$P(X_t = Y_t) = 1, \qquad t \in \mathbb{T}.$$
- A két folyamat **megkülönböztethetetlen** egymástól, ha
$$P(\mathbb{X} = \mathbb{Y}) = P\big(X_t = Y_t, t \in \mathbb{T}\big) = 1.$$

Megjegyzések:

- A fenti relációk mind ekvivalenciarelációk.
- Két folyamat pontosan akkor azonos eloszlású, ha rendre azonosak a véges dimenziós eloszlásaik.

Modifikációs viszony és megkülönböztethetetlenség

Legyen $\mathbb{X}$ és $\mathbb{Y}$ azonos $\mathbb{T}$ indexhalmazzal paraméterezett folyamat.

1. Ha $\mathbb{X}$ és $\mathbb{Y}$ megkülönböztethetetlenek, akkor modifikációi egymásnak.
2. Ha $\mathbb{X}$ és $\mathbb{Y}$ modifikációja egymásnak, akkor azonos eloszlásúak.

A fenti állítások nem fordíthatóak meg

1. Legyen $\mathbb{T} = [0,1]$, $U \sim \text{Uniform}(T)$,

$$X_t = 0\,, \qquad Y_t = \begin{cases} 1\,, & t = U\,, \\ 0\,, & t \neq U\,, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{T}\,.$$

   Ekkor $P(\mathbb{X} = \mathbb{Y}) = 0$, tehát $\mathbb{X}$ és $\mathbb{Y}$ nem megkülönböztethetetlen folyamat. Viszont modifikációi egymásnak, hiszen

$$P(X_t = Y_t) = P(t \neq U) = 1, \qquad t \in \mathbb{T}.$$

2. Legyen X_0 és Y_0 azonos eloszlású véletlen változó. Ekkor az $\mathbb{X} = \{X_0\}$ és az $\mathbb{Y} = \{Y_0\}$ „folyamat” azonos eloszlású, de semmi sem garantálja, hogy egymás modifikációi.

Sztochasztikus folyamatok függetlensége

Legyen $\mathbb{X} = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ és $\mathbb{Y} = (Y_t)_{t\in\mathbb{S}}$ azonos valószínűségi mezőn értelmezett folyamat, ahol $\mathbb{S}, \mathbb{T} \subseteq [0, \infty)$ tetszőleges. Legyen $\mathcal{M}$ és $\mathcal{N}$ rendre az $\mathbb{R}^{\mathbb{T}}$ és az $\mathbb{R}^{\mathbb{S}}$ tér σ-algebrája. A két folyamat **független** egymástól, ha

$$P\big(\mathbb{X} \in M, \mathbb{Y} \in N\big) = P(\mathbb{X} \in M)P(\mathbb{Y} \in N) \qquad M \in \mathcal{M},\ N \in \mathcal{N}.$$

A függetlenség ekvivalens definíciói

Tegyük fel, hogy $\mathbb{X} = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ és $\mathbb{Y} = (Y_t)_{t\in\mathbb{S}}$ azonos valószínűségi mezőn van értelmezve. A két folyamat pontosan akkor független egymástól, ha a véges dimenziós eloszlásaik függetlenek egymástól. Ez utóbbi azt jelenti, hogy tetszőleges $n, m \geqslant 1$, $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{T}$ és $s_1, \ldots, s_m \in \mathbb{S}$ esetén $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ és $(Y_{s_1}, \ldots, Y_{s_m})$ független egymástól.

Legyen $\mathbb{X} = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$, ahol $\mathbb{T} \subseteq [0,\infty)$ egy tetszőleges intervallum. Hogyan definiáljuk a folyamat folytonosságát? Ötlet: $P(A_s) = 1$, ahol

$$\begin{aligned} A_s &= \big\{\omega\in\Omega : \text{ a } \ t\mapsto X_t(\omega) \ \text{ trajektória folytonos az } \ s \ \text{ pontban}\big\} \\ &= \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{\delta>0} \bigcap_{\substack{t\in\mathbb{T} \\ |t-s|<\delta}} \big\{\omega\in\Omega : |X_t(\omega) - X_s(\omega)| < \varepsilon\big\} \\ &= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{\substack{t\in\mathbb{T} \\ |t-s|<1/m}} \big\{\omega\in\Omega : |X_t(\omega) - X_s(\omega)| < 1/n\big\}. \end{aligned}$$

A jobb oldalon lévő halmazok ugyan események, de megszámlálhatónál több műveletet hajtunk végre. Emiatt $A_s \subseteq \Omega$ nem feltétlenül esemény.

Legyen $A = \bigcap_{s\in\mathbb{T}} A_s$, ami azon $\omega\in\Omega$ kimenetelek halmaza, melyekre a $t\mapsto X_t(\omega)$ trajektória mindenhol folytonos a $\mathbb{T}$ intervallumon. Vajon az A halmaz esemény, definiálhatjuk a folytonosságot a $P(A) = 1$ formulával?

A válasz meglepő lehet: ez a definíció nem működik, ugyanis megadható olyan $\mathbb{X}$ sztochasztikus folyamat, melyre A_s és A nem esemény.

Legyen $C(\mathbb{T}) \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{T}}$ a $\mathbb{T}$ intervallumon folytonos függvények halmaza. Tudjuk, hogy az $\mathbb{X} : \Omega \to \mathbb{R}^{\mathbb{T}}$ leképezés $\mathcal{A}$–$\mathcal{M}$-mérhető. Ha $C(\mathbb{T})$ az $\mathbb{R}^{\mathbb{T}}$ tér mérhető részhalmaza lenne, akkor

$$A = \{\omega \in \Omega : \mathbb{X}(\omega) \in C(\mathbb{T})\} = \mathbb{X}^{-1}(C(\mathbb{T}))$$

esemény lenne. A következő oldalon megmutatjuk, hogy $C(\mathbb{T}) \notin \mathcal{M}$, és így A nem feltétlenül esemény.

Sztochasztikus folyamatok folytonossága

Legyen $\mathbb{X} = (X_t)_{t \in \mathbb{T}}$, ahol $\mathbb{T} \subseteq [0, \infty)$ egy intervallum.

- A folyamat **pontonként folytonos** vagy **nincsen rögzített szakadási pontja**, ha tetszőleges $s \in \mathbb{T}$ mellett létezik olyan $\Omega_s \in \mathcal{A}$ esemény, melyre $P(\Omega_s) = 1$ és $\Omega_s \subseteq A_s$.
- A folyamat **trajektóriánként folytonos** vagy **mintafolytonos** a $\mathbb{T}$ intervallumon, ha létezik olyan $\Omega' \in \mathcal{A}$ esemény, melyre $P(\Omega') = 1$ és $\Omega' \subseteq A$.

Egy kis mértékelméleti érdekesség (nem kötelező)

Hogyan bizonyítható be, hogy $C(\mathbb{T})$ nem mérhető halmaz? Legyen

$$\mathcal{M}_0 = \left\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{T}} : (x_{t_1}, x_{t_2}, \dots) \in H,\ t_1, t_2, \dots \in \mathbb{T},\ H \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})\right\}.$$

Megmutatható, hogy

1. $\mathcal{M}_0$ egy σ-algebra az $\mathbb{R}^{\mathbb{T}}$ téren;
2. $\mathcal{M}_0$ tartalmazza a $\mathcal{H}$ hengerhalmazokat;
3. minden $M \in \mathcal{M}_0$ halmaz felírható hengerhalmazok megszámlálható metszeteként.

A fentiekből kapjuk, hogy $\mathcal{M}_0 = \sigma(\mathcal{H}) = \mathcal{M}$. Ebből következik, hogy $C(\mathbb{T}) \notin \mathcal{M}$, ugyanis tetszőleges $M \in \mathcal{M}_0$, $M \neq \emptyset$, halmaz esetén létezik $x, y \in M$, melyekre $x \in C(\mathbb{T})$ és $y \notin C(\mathbb{T})$.

A mérhető halmazoknak a fenti explicit előállítása azt fejezi ki, hogy egy $M \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{T}}$ halmaz pontosan akkor mérhető, ha olyan módon van definiálva, hogy megszámlálható sok helyen előírjuk a függvények értékét, a többi helyen pedig az értékek tetszőlegesek lehetnek. A folytonos függvények halmazát ilyen módon nem lehet definiálni.

Kapcsolat a két fajta folytonosság között

Ha az $\mathbb{X}$ folyamat mintafolytonos, akkor pontonként is folytonos.

Ez az állítás nem megfordítható

A Poisson-folyamat pontonként folytonos, de nem mintafolytonos.

Kérdés: Biztos, hogy ilyen nehézség eddig még nem merült fel? Definíció szerint egy $\mathbb{X}$ és egy $\mathbb{Y}$ folyamat akkor megkülönböztethetetlen, ha az

$$\{\mathbb{X} = \mathbb{Y}\} = \{X_t = Y_t : t \in \mathbb{T}\} = \bigcap_{t\in\mathbb{T}} \{X_t = Y_t\}$$

eseménynek 1 a valószínűsége. De ez esemény egyáltalán? Nem biztos.

Megkülönböztethetetlenség precíz definíciója

Az $\mathbb{X} = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ és az $\mathbb{Y} = (Y_t)_{t\in\mathbb{T}}$ sztochasztikus folyamat **megkülönböztethetetlen**, ha létezik olyan $\Omega_0 \in \mathcal{A}$ esemény, melyre $P(\Omega_0) = 1$ és $\Omega_0 \subseteq \{\mathbb{X} = \mathbb{Y}\}$.

Milyen előnye van annak, ha egy $\mathbb{X} = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ folyamat mintafolytonos? Legyen például $\psi : \mathbb{R}^{\mathbb{T}} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $\psi(x) = \sup_{t\in\mathbb{T}} x_t$. Ha a ψ funkcionál mérhető lenne, akkor $\psi(\mathbb{X}) = \sup_{t\in\mathbb{T}} X_t : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ is mérhető lenne, tehát teljesülne az alábbi:

$$\mathcal{A} \ni \{\psi(\mathbb{X}) \leqslant z\} = \left\{\sup_{t\in\mathbb{T}} X_t \leqslant z\right\} = \bigcap_{t\in\mathbb{T}} \{X_t \leqslant z\}, \qquad z \in \mathbb{R}.$$

De ez most egyáltalán nem garantált, tehát $\psi(\mathbb{X})$ nem feltétlenül véletlen változó! Ezzel szemben ha $\mathbb{X}$ mintafolytonos, akkor $\psi(\mathbb{X})$ mérhető:

$$\{\psi(\mathbb{X}) \leqslant z\} = \left\{\sup_{t\in\mathbb{T}\cap\mathbb{Q}} X_t \leqslant z\right\} = \bigcap_{t\in\mathbb{T}\cap\mathbb{Q}} \{X_t \leqslant z\} \in \mathcal{A}, \qquad z \in \mathbb{R}.$$

Ennek persze az az oka, hogy ψ mérhető a $C(\mathbb{T})$ függvénytéren.

Kolmogorov–Csentsov-tételt

Legyen $\mathbb{X} = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$, ahol $\mathbb{T} \subseteq [0, \infty)$ egy intervallum. Tegyük fel, hogy létezik $\alpha, \beta, \gamma > 0$ konstans, melyre

$$E\left(|X_t - X_s|^\alpha\right) \leqslant \gamma |t - s|^{1+\beta}, \qquad t, s \in \mathbb{T}.$$

Ekkor az $\mathbb{X}$ folyamatnak létezik mintafolytonos modifikációja.

Gauss-folyamatok

Legyen $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^\top$ normális eloszlású véletlen vektor, és legyen:

- $\boldsymbol{\mu} = [\mu_k]_{k=1}^n \in \mathbb{R}^n$ az $\mathbf{X}$ vektorváltozó várható érték vektora. Komponensei: $\mu_k = E(X_k)$.
- $\boldsymbol{\Sigma} = [\sigma_{k,\ell}]_{k,\ell=1}^n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ az $\mathbf{X}$ vektorváltozó kovarianciamátrixa. Komponensei: $\sigma_{k,\ell} = \operatorname{Cov}(X_k, X_\ell)$.

Mivel $\mathbf{X}$ normális eloszlású, ezért teljesülnek az alábbi tulajdonságok:

- Karakterisztikus függvénye: $\phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \exp\left(\mathrm{i}\boldsymbol{\mu}^\top\mathbf{t} - \mathbf{t}^\top\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{t}\right)$, $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$.
- Tetszőleges $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{p\times n}$ mátrix esetén $\mathbf{AX} : \Omega \to \mathbb{R}^p$ normális eloszlású véletlen vektor $\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}$ várható érték vektorral és $\mathbf{A\Sigma A}^\top$ kovarianciamátrixszal.
- A komponensek normális eloszlásúak: $X_k \sim \mathrm{N}(\mu_k, \sigma_{k,k})$.

A kovarianciamátrix általános tulajdonságai:

- szimmetrikus: $\sigma_{k,\ell} = \sigma_{\ell,k}$, $k, \ell = 1, \ldots, n$;
- pozitív szemidefinit: $\mathbf{x}^\top\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{x} \geqslant 0$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Szimmetrikus és pozitív szemidefinit függvények

Legyen $r : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, ahol $\mathbb{T} \subseteq [0, \infty)$.

- Az r függvény **szimmetrikus**, ha $r(s,t) = r(t,s)$, $s, t \in \mathbb{T}$.
- Az r függvény **pozitív szemidefinit**, ha tetszőleges $n \geqslant 1$ és $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{T}$ esetén az $[r(t_k, t_\ell)]_{k,\ell=1}^n$ mátrix pozitív szemindefinit.

Gauss-folyamatok

Legyen $\mathbb{T} \subseteq [0, \infty)$, és tekintsünk egy $m : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvényt és egy $r : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ szimmetrikus pozitív szemidefinit függvényt. Azt mondjuk, hogy az $\mathbb{X} = (X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ sztochasztikus folyamat **Gauss-folyamat** m **várható érték függvénnyel** és r **kovarianciafüggvénnyel**, ha tetszőleges $n \geqslant 1$ és $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{T}$ esetén az $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ véletlen vektor normális eloszlású $\boldsymbol{\mu}$ várható érték vektorral és $\boldsymbol{\Sigma}$ kovariancia-mátrixszal, ahol

$$\boldsymbol{\mu} = \Big(m(t_1), \dots, m(t_n)\Big)^\top \qquad \text{és} \qquad \boldsymbol{\Sigma} = \Big[r(t_k, t_\ell)\Big]_{k,\ell=1}^n .$$

A fehér zaj folyamat normális eloszlású változókkal

Legyen $\mathbb{X} = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$, ahol $X_t \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, $t \in \mathbb{T}$, független és azonos eloszlású véletlen változó. Ekkor $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ normális eloszlású, ahol

$$\boldsymbol{\mu} = (\mu, \ldots, \mu)^\top \qquad \text{és} \qquad \boldsymbol{\Sigma} = \left[\sigma^2 \delta_{t_k, t_\ell}\right]_{k,\ell=1}^n .$$

Tehát $\mathbb{X}$ Gauss-folyamat $m(t) = \mu$ várható érték függvénnyel és $r(s,t) = \sigma^2 \delta_{s,t}$ kovarianciafüggvénnyel.

Gauss-folyamatok létezése

Tetszőleges $\mathbb{T} \subseteq [0, \infty)$ indexhalmaz, $m : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ függvény valamint $r : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ szimmetrikus pozitív szemidefinit függvény esetén létezik olyan $\mathbb{X} = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ Gauss-folyamat, melynek m a várható érték függvénye és r a kovarianciafüggvénye.

Gauss-folyamatok eloszlása

Két Gauss-folyamat pontosan akkor azonos eloszlású, ha azonos a várható érték függvényük és a kovarianciafüggvényük.

A standard Wiener-folyamat

A standard Wiener-folyamat (standard Brown-mozgás)

A $\mathbb{W} = (W_t)_{t \geqslant 0}$ sztochasztikus folyamat **standard Wiener-folyamat** vagy **standard Brown-mozgás**, ha teljesülnek az alábbi tulajdonságok:

W1 $W_0 = 0$ m.b.

W2 $\mathbb{W}$ független növekményű.

W3 Tetszőleges $t \geqslant s \geqslant 0$ esetén $W_t - W_s \sim \mathrm{N}(0, t - s)$.
(Ebből az is következik, hogy $\mathbb{W}$ stacionárius növekményű.)

W4 $\mathbb{W}$ mintafolytonos.

A standard Wiener-folyamat ekvivalens definíciói

Az alábbiak ekvivalensek:

1. W1 és W2 és W3.
2. W1 és W2, továbbá tetszőleges $t \geqslant 0$ esetén $W_t \sim \mathrm{N}(0, t)$.
3. $\mathbb{W}$ Gauss-folyamat, $m(t) = 0$ és $r(s, t) = \min(s, t)$, $s, t \geqslant 0$.

A standard Wiener-folyamat létezése

1. Az $r(s,t) = \min(s,t)$, $s,t \geqslant 0$, függvény szimmetrikus és pozitív szemidefinit.
2. Létezik $\widetilde{\mathbb{W}} = (\widetilde{W}_t)_{t\geqslant 0}$ folyamat, mely teljesíti a W1, W2, W3 tulajdonságokat.
3. Létezik $\mathbb{W} = (W_t)_{t\geqslant 0}$ standard Wiener-folyamat.

A következő formulát nem fogom számon kérni.

A standard Wiener-folyamat első konstrukciója (Wiener, 1923)

Legyen $Z_1, Z_2, \ldots \sim \mathrm{N}(0,1)$ független és azonos eloszlású változó. Ekkor tetszőleges $t \in [0,1]$ esetén a

$$W_t = \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} Z_k \frac{\sin[(k-1/2)\pi t]}{(k-1/2)\pi}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

sztochasztikus folyamat standard Wiener-folyamat a $[0,1]$ intervallumon. (Az ilyen típusú reprezentációkat Karhunen–Loève-sorfejtésnek nevezzük.)

A standard Wiener-folyamatból származtatott folyamatok

Legyen $\mathbb{W} = (W_t)_{t \geqslant 0}$ standard Wiener-folyamat, és legyen $a, b \in \mathbb{R}$.

- **Wiener-folyamat drifttel:** Legyen $\mathbb{X} = (X_t)_{t \geqslant 0}$, ahol

$$X_t = at + bW_t \,, \qquad t \geqslant 0 \,.$$

  Az $\mathbb{X}$ folyamat Gauss-folyamat, melynek várható érték függvénye és kovarianciafüggvénye: $m(t) = at$, $r(s,t) = b^2 \min(s,t)$, $s, t \geqslant 0$.

  A paraméterek elnevezése: drift együttható (a), illetve diffúziós együttható vagy volatilitás együttható (b).

- **Exponenciális Brown-mozgás:** Legyen $\mathbb{Y} = (Y_t)_{t \geqslant 0}$, ahol

$$Y_t = \exp(at + bW_t) \,, \qquad t \geqslant 0 \,.$$

  Az $\mathbb{Y}$ folyamat nem Gauss-folyamat, a véges dimenziós eloszlásai nem normálisak: például tetszőleges $t \geqslant 0$ esetén az Y_t változó nem normális, hanem lognormális eloszlást követ.

A Wiener-folyamat további tulajdonságai

Martingálok

Tekintsünk egy $\mathbb{X} = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ sztochasztikus folyamatot és egy $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ szűrést. Az $\mathbb{X}$ folyamat **martingál** a szűrésre nézve, ha

- a folyamat adaptált a szűréshez;
- $E|X_t| < \infty, \quad t \in \mathbb{T}$;
- $E[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s$ m.b., $\quad s, t \in \mathbb{T}, \quad s \leqslant t$.

A standard Wiener-folyamat martingál

Legyen $\mathbb{W} = (W_t)_{t\geqslant 0}$ standard Wiener-folyamat, és tekintsük az

$$X_t = W_t^2 - t\,, \qquad Y_t = \exp(W_t - t/2)\,, \qquad t \geqslant 0\,,$$

folyamatokat. Ekkor $\mathbb{W}$, $(X_t)_{t\geqslant 0}$ és $(Y_t)_{t\geqslant 0}$ martingál a Wiener-folyamat által generált $\mathcal{F}_t^{\mathbb{W}} = \sigma(W_s : s \leqslant t)$, $\ t \geqslant 0$, szűrésre nézve.

Markov-folyamatok

Az $\mathbb{X} = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ sztochasztikus folyamat **Markov-folyamat**, ha tetszőleges $B \in \mathcal{B}$ Borel halmaz és $s, t \in \mathbb{T}$, $s \leqslant t$, indexek esetén

$$P\big(X_t \in B \mid \mathcal{F}_s^{\mathbb{X}}\big) = P\big(X_t \in B \mid X_s\big)\,,$$

ahol $\mathcal{F}_t^{\mathbb{X}} = \sigma(X_s : s \leqslant t)$ a folyamat által generált szűrés. A folyamat **időhomogén**, ha a fentieken túl

$$P\big(X_t \in B \mid X_s = x\big) = P\big(X_{t-s} \in B \mid X_0 = x\big)\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Az $f(s, x, t, y)$, $s, t \in \mathbb{T}$, $x, y \in \mathbb{R}$, függvény az $\mathbb{X}$ Markov-folyamat **átmenet-sűrűségfüggvénye**, ha

$$P\big(X_t \in B \mid X_s = x\big) = \int_B f(s, x, t, y)\, dy\,.$$

Időhomogén Markov-lánc esetén az átmenet-sűrűségfüggvényre:

$$f(s, x, t, y) = f(0, x, t - s, y).$$

A standard Wiener-folyamat Markov-folyamat

1. A $\mathbb{W}$ standard Wiener-folyamat időhomogén Markov-folyamat, és létezik átmenet-sűrűségfüggvénye: tetszőleges $0 \leqslant s \leqslant t$ esetén

$$f(s,x,t,y) = f_{\mathrm{N}(x,t-s)}(y-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}}, \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

2. (Erős Markov-tulajdonság.) Legyen τ megállási idő az $(\mathcal{F}_t^{\mathbb{W}})_{t\geqslant 0}$ szűrésre nézve, és legyen $\mathcal{F}_\tau$ a τ előtti események σ-algebrája. Ekkor tetszőleges $B \in \mathcal{B}$, $t \geqslant 0$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$P\big(X_{\tau+t} \in B \mid \mathcal{F}_\tau, X_\tau = x\big) = P\big(X_{\tau+t} \in B \mid X_\tau = x\big) = P\big(X_t \in B \mid X_0 = x\big).$$

Ebből az is következik, hogy az $X_{\tau+t} - X_\tau$, $t \geqslant 0$, sztochasztikus folyamat standard Wiener-folyamat.

Megjegyzés: az utolsó állítás a tükrözési elv elméleti alapja.

A trajektóriák maximuma

Tetszőleges $s, t, x > 0$ értékek esetén teljesülnek az alábbiak:

$$P\left(\sup_{0\leqslant h\leqslant t}(W_{s+h}-W_s) > x\right) = 2P\big(W_t > x\big) = 2\left[1-\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)\right],$$

$$P\left(\sup_{0\leqslant h\leqslant t}\left|W_{s+h}-W_s\right| > x\right) \leqslant 2P\big(|W_t| > x\big) = 4\left[1-\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)\right].$$

Az abszolút érték szuprémumának eloszlására is adható pontos érték az alábbi végtelen soros alakban, de ezt nem kell megtanulni:

$$P\left(\sup_{0\leqslant h\leqslant t}\left|W_{s+h}-W_s\right| \leqslant x\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k P\Big((2k-1)x \leqslant W_t \leqslant (2k+1)x\Big)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\left[\Phi\left(\frac{(2k+1)x}{\sqrt{t}}\right)-\Phi\left(\frac{(2k-1)x}{\sqrt{t}}\right)\right].$$

A standard Wiener-folyamat önhasonlósága

Tetszőleges $a > 0$ esetén az alábbiak standard Wiener-folyamatok.

1. Tükrözés: $W_t^{(1)} = -W_t, \quad t \geqslant 0.$
2. Újraindítás: $W_t^{(2)} = W_{t+a} - W_a, \quad t \geqslant 0.$
3. Átskálázás: $W_t^{(3)} = W_{at}/\sqrt{a}, \quad t \geqslant 0.$
4. Időinverzió: $W_t^{(4)} = \begin{cases} tW_{1/t}\,, & t > 0\,, \\ 0\,, & t = 0\,. \end{cases}$

Eddig a standard Wiener-folyamat eloszlásbeli tulajdonságait vizsgáltuk. A továbbiakban azt vizsgáljuk meg, hogy milyenek a folyamat trajektóriái.

A nagy számok törvénye a standard Wiener-folyamatra

A standard Wiener-folyamatra $\lim_{t\to\infty} W_t/t = 0$ m.b. Ez formálisan azt jelenti, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ és $t_n \to \infty$ sorozat esetén

$$P\Big(|W_{t_n}| > \varepsilon t_n \quad \text{csak véges sok } n\text{-re teljesül}\Big) = 1\,.$$

Az iterált logaritmustétel a Wiener-folyamatra (Hincsin, 1933)

A $(W_t)_{t\geqslant 0}$ standard Wiener-folyamatra teljesülnek az alábbiak:

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t\log_2\log_2 t}} = 1\,, \qquad \liminf_{t\to\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t\log_2\log_2 t}} = -1\,, \qquad \text{m.b.}$$

Az első állítás formálisan azt jelenti, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ és $t_n \to \infty$ esetén az alábbiak teljesülnek 1 valószínűséggel:

- $W_{t_n} > (1-\varepsilon)\sqrt{2t\log_2\log_2 t}$ végtelen sok n-re bekövetkezik;
- $W_{t_n} > (1+\varepsilon)\sqrt{2t\log_2\log_2 t}$ csak véges sok n-re következik be.

A fentiekből következnek az alábbi aszimptotikák is, melyeket hasonló módon értelmezünk:

$$\limsup_{\delta\to 0} \frac{W_\delta}{\sqrt{2\delta\log_2\log_2(1/\delta)}} = 1\,, \quad \liminf_{\delta\to 0} \frac{W_\delta}{\sqrt{2\delta\log_2\log_2(1/\delta)}} = -1\,, \quad \text{m.b.}$$

Tekintsünk egy $\Pi = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ beosztás egy adott $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ intervallumon. A beosztás finomsága: $|\Pi| = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |t_k - t_{k-1}|$.

A Wiener-folyamat négyzetes és teljes megváltozása

Legyen $(W_t)_{t \geqslant 0}$ Wiener folyamatra, $0 \leqslant a \leqslant b$ pedig tetszőleges.

1. A Wiener-folyamat négyzetes megváltozása:

$$\lim_{|\Pi| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \left[W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\right]^2 \xrightarrow{P} b - a\,.$$

2. A Wiener-folyamat teljes megváltozása: ha $|\Pi_n| \to 0$, akkor

$$\lim_{|\Pi| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \left|W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\right| \xrightarrow{P} \infty\,.$$

3. A diadikus beosztássorozat esetén a fenti konvergenciák majdnem biztos értelemben is teljesülnek.

A Wiener-folyamat deriválhatósága (Paley, Wiener, Zygmund, 1933)

A standard Wiener-folyamat 1 valószínűséggel sehol sem differenciálható. Precízebben: létezik $\Omega_0 \in \mathcal{A}$, $P(\Omega_0) = 1$, esemény, hogy ha $\omega \in \Omega_0$, akkor a $W_t(\omega)$, $t \geqslant 0$, trajektória sehol sem differenciálható.

Tehát a Wiener-folyamat trajektóriái 1 valószínűséggel

- mindenhol folytonosak, de sehol sem differenciálhatóak;
- nem korlátos változásúak.

A következő félévben szeretnénk a Wiener-folyamat szerint integrálni. Kérdés: hogyan definiáljuk az $I = \int_a^b f(t) dW_t$ integrált? Ötletek:

- Trajektóriánkénti Lebesgue–Stieltjes-integrál: Minden $\omega \in \Omega$ kimenetel esetén legyen $I(\omega) = \int_a^b f(t) dW_t(\omega)$. Ez nem működik, ugyanis a Wiener-folyamat trajektóriái nem korlátos változásúak!
- Sztochasztikus integrál: Riemann típusú integrálközelítő összegekkel
$$I = \lim_{|\Pi| \to 0} \sum_{k=1}^n f(t_{k-1}) \big(W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\big),$$
feltéve, hogy a határérték létezik valamilyen értelemben.

A Wiener-folyamat rövid története:

- Robert Brown (1827): Pollenszemcsék a mikroszkóp alatt.
- Louis Bachelier (1900): A párizsi tőzsde viselkedése.
- Albert Einstein (1905): „Einstein nagy éve", Annus Mirabilis. Négy tudományos cikk: fotoelektromosság, speciális relativitáselmélet, tömeg–energia ekvivalencia, részecskék hőmozgása (Brown-mozgás). Bevezeti a Wiener-folyamat W1–W4 definiáló tulajdonságait.
$$W(t) \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2 t) \qquad \text{ahol} \qquad \sigma^2 = (4RT)/(Nf).$$
- Norbert Wiener (1923): A folyamat sorfejtéses konstrukciója. (Wiener 1894-ben született, 14 évesen szerzett BA diplomát.)
- Kolmogorov (1931): Markov-folyamatok, Kolmogorov-egyenletek.
- Paley, Wiener, Zygmund (1933): A folyamat nem differenciálható.
- Hincsin (1933): Iterált logaritmustétel.
- Donsker (1951): A szimmetrikus bolyongás eloszlásban konvergál a Wiener-folyamathoz.
- Itô, Sztratonovics, Fisk ('40–'60): Sztochasztikus integrál bevezetése.
- Black, Scholes (1973): Pénzügyi matematika. (Nobel-díj: 1997.)