Az állapotváltozások dinamikája

Ebben az alfejezetben azt vizsgáljuk meg, hogy egy folytonos idejű homogén Markov-lánc mennyi időt tölt el egy-egy állapotban, és amikor elhagy egy állapotot, akkor mekkora valószínűséggel ugrik át a lehetséges célállapotokba. A fő tétel kimondása előtt be kell vezetnünk néhány jelölést.

Legyen $\mathbb{X}=\{X_t : t\geq 0\}$ tetszőleges sztochasztikus folyamat az $\mathcal{I}=\mathbb{N}_0\cup\{+\infty\}$ állapottéren. Azt mondjuk, hogy az $\mathbb{X}$ folyamat **càdlàg**, ha tetszőleges $\omega\in\Omega$ kimenetel esetén az $\mathbb{X}(\omega):[0,\infty)\to\mathcal{I}$ trajektória càdlàg függvény, tehát mindenhol jobbról folytonos, és mindenhol rendelkezik baloldali határértékkel. Mivel a folyamat minden pontban jobbról folytonos, minden meglátogatott állapotban eltölt egy pozitív hosszúságú időt. Legyenek $0=T_0<T_1<T_2<\dots$ azok az időpontok, amikor a folyamat állapotot vált, tehát legyen

$$T_n=\min\left\{t\geq T_{n-1} : X_t\neq X_{T_{n-1}}\right\}, \qquad n=1,2,\dots,$$

ahol $\min\emptyset=+\infty$. A korábbiakhoz hasonlóan most is tegyük fel, hogy a $+\infty$ állapotot nem lehet elhagyni. Ekkor egy rögzített $\omega\in\Omega$ kimenetel esetén a $T_n(\omega)$ sorozat háromféleképpen viselkedhet.

1. Ha a folyamat nem robban fel véges időben, és nem is nyelődik el véges sok lépés után egy állapotban, akkor végtelen sok T_n időpontunk van, és $T_n\to\infty$, amint $n\to\infty$.

2. Ha a folyamat felrobban egy $\tau<\infty$ véletlen vagy determinisztikus időpontban, akkor $T_n\to\tau$, amint $n\to\infty$. Mivel a ∞ állapot elnyelő, nem vizsgáljuk a folyamat viselkedését a τ időpont után.

3. Ha a folyamat véges sok, (mondjuk N,) lépés után elnyelődik egy állapotban, akkor csak véges sok $T_0,\dots,T_N$ időpontunk van. Ekkor a definíció értelmében $T_n=+\infty$, minden $n>N$ esetén.

Legyen $Y_n=X_{T_{n-1}}$ a meglátogatott állapotok sorozata, és jelölje $S_n=T_n-T_{n-1}$ az egyes állapotokban eltöltött időt, ahol $n=1,2,\dots$ Ezen definíciók alól jelentsen kivételt a 3. eset, amikor az elnyelő állapot elérése után, tehát $n>N+1$ esetén legyen $Y_n=Y_{N+1}$ és $S_n=+\infty$.

1. Definíció. Az $\mathbb{Y}=\{Y_n : n\in\mathbb{N}\}$ sorozatot az $\mathbb{X}$ folyamathoz tartozó **beágyazott folyamatnak** nevezzük.

Jegyezzük meg, hogy ha egy folytonos idejű homogén Markov-lánc càdlàg, akkor standard is, de nem feltétlenül konzervatív. A következő tétel a folytonos idejű Markov-láncokkal foglalkozó fejezet fő eredménye.

2. Tétel (Az állapotváltozások dinamikája)**.** *Legyen $\mathbb{X}=\{X_t : t\geq 0\}$ càdlàg folyamat az $\mathcal{I}\subseteq\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$ állapottéren, és tekintsünk egy $\mathbf{Q}\in\mathbb{R}^{\mathcal{I}\times\mathcal{I}}$ mátrixot, melyben tetszőleges $i,j\in\mathcal{I}$, $i\neq j$, állapotok esetén*

$$q_{i,i}\leq 0, \qquad q_{i,j}\geq 0, \qquad \sum_{k\in\mathcal{I}} q_{i,k}=0.$$

Jelölje továbbá $\mathbb{Y}$ a kapcsolatos beágyazott folyamatot. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.

(i) *A $\mathbb{X}$ folyamat konzervatív folytonos idejű homogén Markov-lánc, és $\mathbf{Q}$ az infinitezimális generátora.*

(ii) *Az $\mathbb{Y}$ folyamat diszkrét idejű homogén Markov-lánc, melynek átmenetmátrixa*

$$\mathbf{R} = \big[r_{i,j}\big]_{i,j\in\mathcal{I}}, \qquad r_{i,j} = -\frac{q_{i,j}}{q_{i,i}}, \qquad r_{i,i} = 0\,.$$

(Legyen $0/0=0$.) Emellett, tetszőleges $n\in\mathbb{N}_0$ esetén az $\{Y_n=i\}$ eseményre feltételesen Y_{n+1} és S_n független egymástól, az $Y_1,\dots,Y_{n-1}$ állapotoktól és az $S_1,\dots,S_{n-1}$ időktől. Továbbá, S_n az $\{Y_n=i\}$ eseményre feltételesen exponenciális eloszlást követ $\lambda_i=-q_{i,i}$ paraméterrel.

Bizonyítás. Az idő rövidsége miatt csak az (i)$\Rightarrow$(ii) irányt bizonyítjuk. Ehhez elég annyit megmutatni, hogy tetszőleges $i\neq j$ állapotok, tetszőleges $s\geq 0$ érték, valamint tetszőleges $B\in\sigma(Y_1,S_1,\dots,Y_{n-1},S_{n-1})$ esemény mellett

$$P\big(S_n>s, Y_{n+1}=j \,|\, Y_n=i, B\big) = r_{i,j}e^{q_{i,i}s}.$$

Ebből az egyenlőségből $s=0$ mellett kapjuk, hogy

$$P\big(Y_{n+1}=j \,|\, Y_n=i, B\big) = r_{i,j} = P(Y_{n+1}=j \,|\, Y_n=i),$$

tehát az $\mathbb{Y}_n$, $n=1{,}2,\dots$, sorozat diszkrét idejű Markov-lánc a megadott átmenetvalószínűségekkel. A fenti egyenlőséget j-re összegezve az is jön, hogy

$$P\big(S_n>s \,|\, Y_n=i, B\big) = \sum_{j\neq i} r_{i,j}e^{q_{i,i}s} = e^{q_{i,i}s} = P\big(\mathrm{Exp}(-q_{i,i})>s\big),$$

azaz S_n feltételesen független a B eseménytől, és feltételesen exponenciális eloszlású $-q_{i,i}$ paraméterrel. Végül kapjuk, hogy

$$P\big(S_n>s, Y_{n+1}=j \,|\, Y_n=i, B\big) = r_{i,j}e^{q_{i,i}s} = P(S_n>s \,|\, Y_n=i)P(Y_{n+1}=j \,|\, Y_n=i),$$

tehát S_n és Y_{n+1} feltételesen független egymástól és a B eseménytől.

Jegyezzük meg, hogy T_{n-1} megállási idő az $\mathbb{X}$ folyamatra nézve, továbbá $B\in\mathcal{F}_{T_{n-1}}$. Tekintsük az $\mathbb{X}'=\{X'_t=X_{T_{n-1}+t}: t\geq 0\}$ sztochasztikus folyamatot, továbbá jelölje Y'_n és S'_n, $n=1{,}2,\dots$, a beágyazott Markov-láncot és az állapotokban eltöltött idő hosszát az $\mathbb{X}'$ folyamat esetében. Ekkor a folytonos idejű Markov-láncokra kimondott erős Markov-tulajdonság értelmében

$$P\big(S_n>s, Y_{n+1}=j \,|\, Y_n=i, B\big) = P\big(S'_1>s, Y'_2=j \,|\, Y'_1=i, B\big) = P\big(S_1>s, Y_2=j \,|\, Y_1=i\big).$$

Tehát a (ii) pont bizonyításához elég annyit megmutatni, hogy ezen utolsó formula jobb oldala pontosan $r_{i,j}e^{q_{i,i}s}$.

Legyen $A=\{S_1>s, Y_2=j\}$, és tekintsük az

$$A_n=\Big\{\text{létezik } \ell\geq\lfloor 2^n s\rfloor+1 \text{ egész, hogy } X_{k/2^n}=i, k=0,\dots,\ell, \text{ és } X_{(l+1)/2^n}=j\Big\}$$
$$=\bigcup_{\ell=\lfloor 2^n s\rfloor+1}^{\infty}\Big\{X_{k/2^n}=i,\ k=1,\dots,\ell,\ \text{és } X_{(l+1)/2^n}=j\Big\}.$$

eseményeket. Jegyezzük meg, hogy az A_n eseménysorozat nem monoton, tehát a mérték folytonosságából az nem jön ki, hogy $P(A_n|X_0=i)\to P(A|X_0=i)$. Viszont, felhasználva, hogy az $\mathbb{X}$ folyamat càdlàg, megmutatható, hogy tetszőleges ω kimenetel mellett létezik $n_0(\omega)$ küszöbszám, hogy $n\geq n_0(\omega)$ esetén $\omega\in A_n$ pontosan akkor teljesül, ha $\omega\in A$. Ebből azonnal következik, hogy

$$\big|P(A_n|X_0=i)-P(A|X_0=i)\big|\leq P\big(A_n\triangle A\,|\,X_0=i\big)\to 0\,,\qquad n\to\infty\,,$$

vagyis $P(A_n|X_0=i)\to P(A|X_0=i)$.

Vegyük észre, hogy az A_n esemény definíciójában szereplő unió elemei kizáróak, így a multiplikációs formula alkalmazásával

$$\begin{aligned}P(A_n|X_0=i)&=\sum_{\ell=\lfloor 2^n s\rfloor+1}^{\infty}P\big(X_{k/2^n}=i,\ k=1,\dots,\ell,\ \text{és } X_{(\ell+1)/2^n}=j\,|\,X_0=i\big)\\&=\sum_{\ell=\lfloor 2^n s\rfloor+1}^{\infty}\big(p_{i,i}^{(1/2^n)}\big)^{\ell}p_{i,j}^{(1/2^n)}=\big(p_{i,i}^{(1/2^n)}\big)^{\lfloor 2^n s\rfloor+1}p_{i,j}^{(1/2^n)}\sum_{\ell=0}^{\infty}\big(p_{i,i}^{(1/2^n)}\big)^{\ell}\\&=\big(p_{i,i}^{(1/2^n)}\big)^{\lfloor 2^n s\rfloor}p_{i,i}^{(1/2^n)}\frac{p_{i,j}^{(1/2^n)}}{1-p_{i,i}^{(1/2^n)}}.\end{aligned}$$

Mivel a folyamat konzervatív, $p_{i,i}^{(1/2^n)}\to p_{i,i}^{(0)}=1$, továbbá az átmenetvalószínűségek deriválhatóak a $t=0$ pontban, és így

$$\frac{p_{i,j}^{(1/2^n)}}{1-p_{i,i}^{(1/2^n)}}=\frac{p_{i,j}^{(1/2^n)}-p_{i,j}^{(0)}}{1/2^n}\frac{1/2^n}{p_{i,i}^{(0)}-p_{i,i}^{(1/2^n)}}\to q_{i,j}\frac{1}{-q_{i,i}}=r_{i,j},\qquad n\to\infty.$$

Ismert, hogy ha $a_n\to a$, akkor $(1+a_n/n)^n\to e^a$, amint $n\to\infty$. Mivel most $\lfloor 2^n s\rfloor/2^n\to s$, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\big(p_{i,i}^{(1/2^n)}\big)^{\lfloor 2^n s\rfloor}&=\left(1+\frac{2^n(p_{i,i}^{(1/2^n)}-1)}{2^n}\right)^{\lfloor 2^n s\rfloor}=\left[\left(1+\frac{(p_{i,i}^{(1/2^n)}-p_{i,i}^{(0)})/(1/2^n)}{2^n}\right)^{2^n}\right]^{\lfloor 2^n s\rfloor/2^n}\\&\to\big[e^{q_{i,i}}\big]^s=e^{q_{i,i}s},\qquad n\to\infty.\end{aligned}$$

Ezek alapján

$$P(A|X_0=i)=\lim_{n\to\infty}P(A_n|X_0=i)=e^{q_{i,i}s}\cdot 1\cdot r_{i,j},$$

ami pontosan az, amit bizonyítani akartunk. □

A következő állítás a konzervítav Markov-láncoknak egy másik reprezentációját adja.

3. Következmény. *A 2. Tétel feltételei mellett tekintsünk minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $S_n(j)$, $j \neq i$, változókat, melyek az $\{Y_n = i\}$ eseményre feltételesen exponenciális eloszlást követnek rendre $q_{i,j}$ paraméterrel, és feltételesen függetlenek egymástól, az $Y_0, \dots, Y_{n-1}$ állapotoktól és az $S_0, \dots, S_{n-1}$ időktől. Tegyük fel továbbá, hogy az $\{Y_n = i\}$ eseményre feltételesen tetszőleges $j \neq i$ állapotra*

$$S_n = \min\big\{S_n(j) : j \neq i\big\}, \qquad \big\{Y_{n+1} = j\big\} = \big\{S_n = S_n(j)\big\}.$$

Ekkor az $\mathbb{X}$ folyamat konzervatív folytonos idejű homogén Markov-lánc, és $\mathbf{Q}$ a generátora.

A következmény azonnal következik az alábbi állításból.

4. Tétel. *Legyen $S_1, S_2, \dots$ véges vagy végtelen sok független exponenciális eloszlású (esetleg általános értelemben vett) véletlen változó rendre $\lambda_1, \lambda_2, \dots \geq 0$ paraméterrel. Legyen továbbá $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots$, és tekintsük az $S = \inf\{S_1, S_2, \dots\}$ (általános értelemben vett) véletlen változót. Ekkor érvényesek az alábbiak.*

(i) *Ha $\lambda \in [0, \infty)$, akkor az S változó exponenciális eloszlású λ paraméterrel, míg ha $\lambda = \infty$, akkor $S = 0$ majdnem biztosan.*

(ii) *Ha $\lambda \in (0, \infty)$, akkor az infinimum felvétetik, tehát létezik olyan N egész értékű változó, melyre $P(S = S_N) = 1$. Az N változó független az S értéktől, és eloszlása*

$$P(N = n) = P(S = S_n) = \frac{\lambda_n}{\lambda} = \frac{\lambda_n}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots}.$$

Bizonyítás. (i) Ha $\lambda = 0$, akkor az $S_1, S_2, \dots$ változók mind 0 paraméteres exponenciális eloszlást követnek, amiből $P(S = +\infty) = 1$, vagyis S szintén exponenciális eloszlást követ $\lambda = 0$ paraméterrel.

Abban az esetben, mikor $\lambda > 0$, az S változó 1 valószínűséggel véges. Legyen a változó eloszlásfüggvénye $F(s) = P(S \leq s)$, $s \in \mathbb{R}$. Kapjuk, hogy ha $s < 0$, akkor $F(s) = 0$, míg ha $s \geq 0$, akkor a változók függetlenségét felhasználva

$$1 - F(s) = P(S > s) = P\big(S_1 > s, S_2 > s, \dots\big) = P(S_1 > s) P(S_2 > s) \cdots = e^{-\lambda_1 s} e^{-\lambda_2 s} \cdots = e^{-\lambda s}.$$

Ha $\lambda < \infty$, akkor F a λ paraméteres exponenciális eloszlás eloszlásfüggvénye. Ha $\lambda = \infty$, akkor $P(S > s) = 1 - F(s) = 0$ minden $s > 0$ értékre, tehát S a nulla pontban degenerált változó.

(ii) Tetszőleges rögzített n esetén az $S' = \inf\{S_m : m \neq n\}$ (általános értelemben vett) változó független az S_n-től, továbbá a tétel (i) pontja szerint exponenciális eloszlást követ

$$\lambda' = \sum_{m \neq n} \lambda_m \geq 0$$

paraméterrel. Ha $\lambda' = 0$, akkor az S_m, $m \neq n$ változók mind degeneráltak a végtelenben, és így $\lambda > 0$ miatt $\lambda_n > 0$. Ekkor S_n egy véges exponenciális változó, tehát $N = n$ majdnem biztosan, és az állítás azonnal következik. Ha ezzel szemben $\lambda' > 0$, de $\lambda_n = 0$, akkor az $S_n = +\infty$ változó sosem lesz minimális, azaz $P(N = n) = 0$.

Csak az az eset maradt hátra, mikor $\lambda', \lambda_n > 0$. Ekkor S_n és S' független véges exponenciális eloszlású változó, tehát létezik az együttes sűrűségfüggvényük, mely a külön-külön vett sűrűségfüggvények szorzata:

$$f_{S_n,S'}(x,y) = f_{S_n}(x) f_{S'}(y) = \begin{cases} \lambda_n \lambda' e^{-(\lambda_n x + \lambda' y)}, & x, y \geq 0\,, \\ 0\,, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Legyen $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y\}$. Ekkor a kérdéses valószínűség

$$\begin{aligned} P(N=n) &= P(S=S_n) = P(S_n \leq S') = P\big((S_n, S') \in R\big) = \int_R f_{S_n,S'}(x,y)\,dxdy \\ &= \int_0^\infty \lambda_n e^{-\lambda_n x} \int_x^\infty \lambda' e^{-\lambda' y}\,dy\,dx = \int_0^\infty \lambda_n e^{-(\lambda_n + \lambda')x}\,dx = \frac{\lambda_n}{\lambda_n + \lambda'}\,. \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy

$$\sum_n P(N=n) = \sum_n \frac{\lambda_n}{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots} = 1\,,$$

tehát 1 valószínűséggel létezik minimális az $S_1, S_2, \ldots$ változók között. A függetlenséghez legyen $R_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y, x \leq z\}$, $z \geq 0$. Ekkor

$$\begin{aligned} P\big(N=n, S \leq z\big) &= \int_{R_z} f_{S_n,S'}(x,y)\,dxdy = \int_0^z \lambda_n e^{-\lambda_n x} \int_x^\infty \lambda' e^{-\lambda' y}\,dy\,dx \\ &= \int_0^z \lambda_n e^{-(\lambda_n + \lambda')x}\,dx = \frac{\lambda_n}{\lambda_n + \lambda'}\big[1 - e^{-\lambda z}\big] = P(N=n)P(S \leq z)\,, \end{aligned}$$

tehát N és S független. $\square$