Pénzügyi matematika

Szűcs Gábor

Szegedi Tudományegyetem, Bolyai Intézet

2016. őszi félév

Értékpapírpiacok

A **tőzsde** (piac, market) egy olyan intézmény, melyen a résztvevők különféle eszközökkel (értékpapírral, devizával, áruval, energiával, stb.) kereskednek. Mi az értéktőzsdével, tehát a devizák és értékpapírok piacával foglalkozunk.

Törvényileg előírt szabályok:

- minden résztvevő ugyanazokhoz az információkhoz juthat hozzá (tiltott a **bennfentes kereskedés**);
- minden pénzügyi eszköz esetén engedélyezett a **short selling** (**fedezetlen eladás**).

Modellfeltevések, melyek a valóságban nem teljesülnek:

- minden pénzügyi eszköz (deviza és értékpapír) korlátlanul osztható és likvid (bármikor eladható és megvásárolható);
- nincsenek tranzakciós költségek, megbízási jutalékok;
- a banki betét- és hitelkamatok egyenlőek;
- nincs korlátozás a bankkölcsön és az értékpapírvásárlás volumenére.

A matematikai modellekben

- mindig egy rögzített és determinisztikus $[0, T]$ időintervallumot vizsgálunk, a $T > 0$ értéket **lejárati időpontnak** nevezzük;
- a cél bizonyos termékek piaci árának modellezése;
- további cél egy optimális kereskedési stratégia kidolgozása.

Modellek típusai:

- diszkrét idejű modellek: csak bizonyos $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$ **kereskedési időpontokban** vásárolhatunk vagy adhatunk el eszközt;
- folytonos idejű modellek: a $[0, T]$ intervallumon bármely időpontban kereskedhetünk, ezért az árakat folytonos időben modellezzük.

A piaci szereplők a tranzakciós költségek miatt csak véges sok időpontban kereskednek, akkor is, ha folytonos idejű modelleket alkalmaznak.

Részvény (Stock)

Olyan eszköz, melynek nincs rögzített hozama. A piaci ára egy $t \in [0, T]$ időpontban egy S_t véletlen változó, melynek értéke a t időpont előtt (általában) nem ismert.

Kötvény (Bond)

Olyan eszköz, melynek előre bejelentett kamata van, tehát kockázatmentes. Értéke egy $t \in [0, T]$ időpontban B_t, mely a t időpont előtt is ismert.

Például diszkrét idejű piacokon: $(0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T)$

- a részvény ára a t_k időpontban S_{t_k}, mely csak a t_k időpontban válik ismerté;
- a kötvény ára ugyanebben az időpontban B_{t_k}, melyet legkésőbb a t_{k-1} időpontban kihirdetnek.

A matematikai modellekben egy vagy több részvénnyel, de csak egy kötvénnyel dolgozunk. Ha a piacon több kötvény is létezik, akkor mi azt választjuk, amelyik a legmagasabb hozamot biztosítja.

Származtatott értékpapírok

A tőzsdén nem csak azonnali (spot) vétel és eladás történik, hanem a jövőre vonatkozó szerződéseket is kötnek. Ezek közül mi kettővel foglalkozunk.

Határidős ügylet

Határidős ügyletnek nevezünk egy olyan megállapodást, melyben két fél megállapodik, hogy egy adott jövőbeli időpontban az egyik fél elad egy adott terméket a másik félnek a szerződésben meghatározott áron.

A határidős ügyletek két fontosabb típusa:

- **Future:** Tőzsdei termék, mely sok szempontból (minőség, mennyiség, lejárati idő) standardizált.
- **Forward:** Olyan megállapodás, mely eltérhet a tőzsdei standardoktól.

Opció (Option)

Opciónak nevezünk egy olyan szerződést, melyben az egyik fél vételi vagy eladási kötelezettséget vállal bizonyos piaci termékre a másik féllel szemben.

A határidős és az opciós szerződéseket tovább lehet adni a piacon, gyakorlatilag értékpapírnak tekinthetőek. A standardizált ügyleteknek (például Futures) van spot árfolyama, úgy lehet velük kereskedni, mint bármelyik részvénnyel. A kevésbé standardizált eszközökkel (például a Forward szerződésekkel) az OTC (over-the-counter) piacon kereskednek.

Származtatott értékpapírok, derivatívák (Derivatives)

A **származtatott értékpapírok** olyan pénzügyi eszközök, melyek értéke más eszközök értékétől függ.

Milyen célból köt valaki határidős vagy opciós szerződést?

- Spekuláció: pénzt akar keresni.
- Kockázatcsökkentés: árkockázat (árfolyamkockázat, alapanyagárak ingadozása, stb.) és ellátási biztonság.

A célok függvényében az opció tulajdonosa (a kedvezményezett) nem mindig érvényesíti a vételi vagy eladási jogát, gyakran az eladó az aktuális piaci árak alapján készpénzzel is válthatja a kötelezettségét. (Ezt a lehetőséget természetesen rögzíteni kell a szerződésben.)

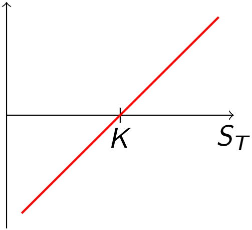
Határidős ügylet kifizetési függvénye

A határidős ügylet **kifizetési függvénye** azt mutatja meg, hogy a szerződés teljesítésekor az egyes felek mekkora hasznot realizálnak.

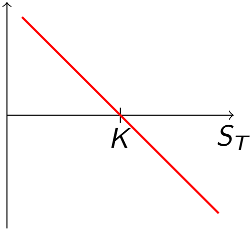
A kifizetési függvény paraméterei:

- a **lejárati időpont**, amikor a szerződést teljesítik: $T > 0$;
- az eszköz ára előre rögzített, ez a **kötési ár**: K;
- az eszköz piaci ára a lejáratkor: S_T.

A vevő illetve az eladó kifizetési függvénye:



$f(S_T) = S_T - K$



$f(S_T) = K - S_T$

Az opciók közös jelemzői:

- a kötelezettséget vállaló felet az opció **eladójának, kibocsájtójának** nevezzük, és azt mondjuk, hogy **rövid (short)** pozícióban van;
- a másik felet **vevőnek** hívjuk, aki **hosszú (long)** pozícióban van;
- az opció mindig egy rögzített és véges $[0, T]$ időintervallumra vonatkozik, T a szerződés **lejárati időpontja**;
- a kötelezettség általában csak akkor lép életbe, ha bizonyos piaci feltételek teljesülnek, az opció érvényesítését **lehívásnak** nevezzük;
- a vevő a szerződés megkötésekor a kötelezettségvállalásért cserébe díjat fizet az eladónak, ez az opció **ára**.

Opció kifizetési függvénye

A kifizetési függvény azt mutatja meg, hogy az opció tulajdonosa mekkora pénzösszeget realizál, ha optimálisan használja fel a jogosultságát.

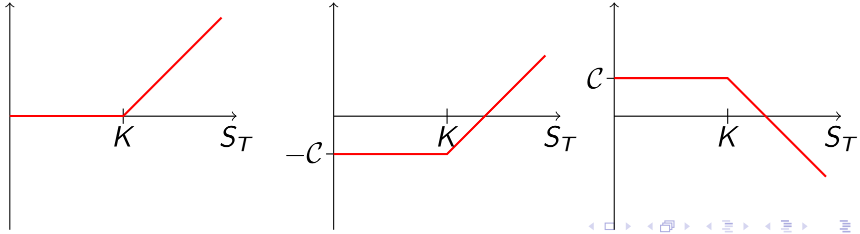
A kifizetési függvény ezen definíciója a határidős szerződésekre is alkalmazható, ugyanis ott csak egyféleképpen lehet felhasználni a szerződést, így ez egyben optimális is.

Európai vételi (call) opció

Vételi jog (de nem kötelesség) egy adott eszközre. Az eladó vállalja, hogy a T lejárati időpontban a szerződésben rögzített K **kötési áron (strike)** elad egy darab eszközt az opció aktuális tulajdonosának, ha az ezt akarja.

Az európai vételi opció jellemzői:

- a továbbiakban $\mathcal{C}$ jelöli az európai call opció piaci árát;
- kifizetési függvény: $f(S_T) = (S_T - K)^+$;
- a vevő nyeresége: $f(S_T) - \mathcal{C} = (S_T - K)^+ - \mathcal{C}$;
- az eladó nyeresége: $\mathcal{C} - f(S_T) = \mathcal{C} - (S_T - K)^+$.

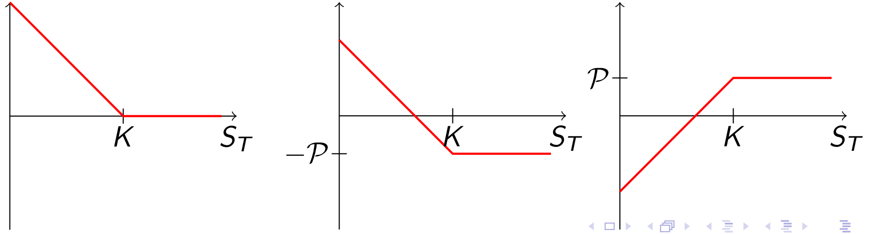


Európai eladási (put) opció

Eladási jog (de nem kötelesség) egy adott részvényre. Az eladó vállalja, hogy a T lejárati időpontban a szerződésben rögzített K áron megvesz egy darab részvényt az opció aktuális tulajdonosától, ha az ezt akarja.

Az európai eladási opció jellemzői:

- a továbbiakban $\mathcal{P}$ jelöli az európai put opció piaci árát;
- kifizetési függvény: $f(S_T) = (K - S_T)^+$;
- a vevő nyeresége: $f(S_T) - \mathcal{P} = (K - S_T)^+ - \mathcal{P}$;
- az eladó nyeresége: $\mathcal{P} - f(S_T) = \mathcal{P} - (K - S_T)^+$.



Kombinált opciók

Kombinált opciónak nevezzük azt, amikor az opciós szerződés több ugyanazon értékpapírra vonatkozó opciót egyesít.

Példák:

- **Bull spread:** (K_1, T) vételi opció vétele + (K_2, T) vételi opció eladása, ahol $K_1 < K_2$;
- **Bear spread:** (K_1, T) vételi opció vétele + (K_2, T) vételi opció eladása, ahol $K_1 > K_2$;
- **Calendar spread:** (K, T_1) vételi opció vétele + (K, T_2) vételi opció eladása;
- **Straddle (terpeszállás):** (K, T) vételi opció vétele + (K, T) eladási opció vétele;
- **Buttery spread:** (K_1, T) vételi opció vétele + (K_2, T) vételi opció vétele + 2 db $((K_1 + K_2)/2, T)$ vételi opció eladása.

A kombinált opciók kifizetési függvénye az elemeik kifizetési függvényeinek az összege. Feladat: Írjuk fel a fenti kombinált opciók kifizetési függvényeit.

Példa olyan opcióra, melynek kifizetési függvénye nem csak az értékpapír lejáratkori árától függ:

Look-back vételi opció

Vételi jog (de nem kötelesség) egy adott eszközre a szerződésben adott T időpontban $\min_{0 \le t \le T} S_t$ áron. Kifizetési függvénye:

$$f\left(S_t, t \in [0, T]\right) = S_T - \min_{0 \le t \le T} S_t = \max_{0 \le t \le T} (S_T - S_t) \ge 0\,.$$

Példa olyan opcióra, mely a lejárat előtt is lehívható:

Amerikai vételi opció

Vételi jog (de nem kötelesség) egy adott részvényre adott K kötési áron, melyet a vevő a T időpontig bármikor lehívhat. A lehívás időpontja egy τ véletlen változó (megállási idő), a kifizetési függvény $f = (S_\tau - K)^+$.

Feladat: Definiáljuk a look-back eladási és az amerikai eladási opciót, és írjuk fel a kifizetési függvényüket.

A félév fő kérdése: Hogyan árazzunk egy derivatívát, tehát mennyiért adjuk el vagy vásároljuk meg, hogy megérje nekünk? Van a derivatíváknak „igazságos ára”?

- Szerencsejátékoknál és biztosításmatematikában a nagy számok törvénye miatt az igazságos ár a várható kifizetés, tehát a kifizetés várható értéke.
- Ez most nem jó ötlet, a nagy számok törvénye nem alkalmazható, ugyanis egy-egy opciót csak egyszer kötünk meg, és az egyes opciók nem is függetlenek. De akkor most mit csináljunk?
- Egy észrevétel: a szerződésben vállalt kötelezettség teljesítéséhez elég, ha az opció eladója a lejáratkor rendelkezik akkora pénzösszeggel, amekkora a kifizetési függvény értéke.
- Válasz az árazási kérdésre: határozzuk meg, hogy a 0 időpontban minimálisan mennyi pénzre van szükségünk ahhoz, hogy a lejáratkor a rendelkezésünkre álljon a fenti összeg.
- Put-call paritás: az európai (és egyes más) opciók esetében elég a vételi opciót árazni, ebből az eladási opció ára meghatározható.

Opciórazás egylépéses bináris piacon

Kereskedési időpontok: $0 = t_0 < t_1 = 1$.

A részvény ára: S_0 (determinisztikus) és S_1 (véletlen).

A kötvény ára: B_0 és $B_1 = (1+r)B_0$, ahol $r > -1$.

Adott egy opció, a kifizetési függvénye a részvény árától függ: $F = f(S_1)$.

Az eseménytér: $\Omega = \{\omega^\uparrow, \omega^\downarrow\}$.

Valószínűségek: $P(\{\omega^\uparrow\}) = p$, $P(\{\omega^\downarrow\}) = 1 - p$, $0 < p < 1$;

A részvény és a kifizetési függvény értéke: $(s^\uparrow \geq s^\downarrow)$

$$s^\uparrow := S_1(\omega^\uparrow), \quad f^\uparrow := F(\omega^\uparrow) = f(s^\uparrow),$$
$$s^\downarrow := S_1(\omega^\downarrow), \quad f^\downarrow := F(\omega^\downarrow) = f(s^\downarrow).$$

$$\begin{tikzcd}
 & \boxed{S_1 = s^\uparrow, F = f^\uparrow} \\
\boxed{S_0} \arrow[ur, "\omega^\uparrow"] \arrow[dr, "\omega^\downarrow"'] & \\
 & \boxed{S_1 = s^\downarrow, F = f^\downarrow}
\end{tikzcd}$$

Feladat: Árazzuk az opciót, tehát adjunk meg egy olyan x_0 értéket, mellyel gazdálkodva az opció eladója a lejáratkor át tud adni $F = f(S_1)$ összeget az opció tulajdonosának.

A továbbiakban fel fogjuk tenni, hogy $s^{\downarrow} < (1+r)S_0 < s^{\uparrow}$, ugyanis ha ez a feltétel nem teljesül, akkor **arbitrázsra**, kockázatmentes nyereségre lenne lehetőség, amit a piac korrigálna:

- Ha $(1+r)S_0 \leq s^{\downarrow}$ teljesülne, akkor adjunk el S_0 darab kötvényt (hitelfelvétel), és vásároljunk B_0 darab részvényt. Ennek értéke a 0 időpontban $(-S_0)B_0 + B_0 S_0 = 0$, míg az 1 időpontban:
$$(-S_0)B_1 + B_0 S_1 \geq -S_0(1+r)B_0 + B_0 s^{\downarrow} \geq 0 \qquad \text{m.b.}$$
Mivel ezt a piac minden szereplője észrevenné, mindenki részvényt akarna venni, vagyis a részvény kiindulási S_0 ára megemelkedne.
- Ha $(1+r)S_0 \geq s^{\uparrow}$, akkor adjunk el B_0 darab részvényt (short selling), és vásároljunk S_0 darab kötvényt. Ennek értéke a 0 időpontban $S_0 B_0 + (-B_0)S_0 = 0$, míg az 1 időpontban:
$$S_0 B_1 + (-B_0)S_1 \geq S_0(1+r)B_0 - B_0 s^{\uparrow} \geq 0 \qquad \text{m.b.}$$
Emiatt mindenki próbálna megszabadulni a részvényeitől, hogy a pénzét kötvénybe fektesse, vagyis a részvény S_0 ára leesne.

Portfólió

A birtokunkban lévő részvények és kötvények együttesét portfóliónak nevezzük. Egy adott $t \in [0, T]$ időpontban a kötvények és a részvények számát β_t illetve γ_t, portfóliót pedig $\pi_t = (\beta_t, \gamma_t)$ jelöli. A portfólió értékét **értékfolyamatnak** nevezzük: $X_t = \beta_t B_t + \gamma_t S_t, \quad 0 \leq t \leq T$.

A portfólióban a kötvények és a részvények száma lehet negatív is. A negatív β_t hitelfelvételt, a negatív γ_t fedezetlen eladást jelent.

Fedezet, replikáló portfólió

Azt mondjuk, hogy egy π portfólió **fedezet** egy F kifizetési függvényű opcióra, ha a lejáratkori értéke $X_T \geq F$ m.b. A portfólió **replikálja** avagy **tökéletesen fedezi** az opciót, ha $X_T = F$ m.b.

Feladat: Adjuk meg azt a minimális x_0 értéket, melyből kiindulva összeállíthatunk egy replikáló portfóliót. Tehát adjuk egy $\pi_1 = (\beta_1, \gamma_1)$ portfóliót úgy, hogy

$$\beta_1 B_0 + \gamma_1 S_0 = x_0 \qquad \text{és} \qquad \beta_1 B_1 + \gamma_1 S_1 = F \quad \text{m.b.}$$

Az így kapott x_0 érték valóban igazságos ár az opcióra, ugyanis bármely más opcióár esetén **arbitrázsra**, kockázatmentes nyereségre van lehetőség:

- Ha az opció piaci ára $C > x_0$, akkor adjuk el az opciót C áron, majd x_0 összegből állítsuk össze a π_1 replikáló portfóliót. A portfóliónk értéke az opció lejártakor egyenlő lesz a kifizetési függvénnyel, ilyen módon ki tudjuk fizetni az opció tulajdonosát. Ez azt jelenti, hogy kockázatmentesen kerestünk $C - x_0$ összeget.
- Ha az opció piaci ára $C < x_0$, akkor adjuk el β_1 kötvényt és γ_1 részvényt (short selling). A befolyó összeg pontosan x_0, melyből C áron vegyük meg az opciót a piacon. Az általunk fedezettlenül eladott kötvényeket és részvényeket a lejáratkor vissza kell ugyan vásárolnunk, de a birtokunkban lévő opció éppen fedezi azt az összeget, ami szükséges. Az $x_0 - C$ különbözet pedig kockázatmentes nyereség.

A piacon természetesen megjelenhet arbitrázslehetőség, de ezt a piaci mechanizmusok gyorsan megszüntetik. Éppen ezért rövid idő után beáll az $x_0 = C$ egyenlőség.

Egy $\pi_1 = (\beta_1, \gamma_1)$ replikáló portfólióra $\beta_1 B_1 + \gamma_1 S_1 = F$ m.b., ezért

$$\beta_1(1+r)B_0 + \gamma_1 s^{\downarrow} = f^{\downarrow} \qquad \text{és} \qquad \beta_1(1+r)B_0 + \gamma_1 s^{\uparrow} = f^{\uparrow}.$$

Ennek az egyenletrendszernek létezik egyértelmű megoldása:

$$\gamma_1 = \frac{f^{\uparrow} - f^{\downarrow}}{s^{\uparrow} - s^{\downarrow}}, \qquad \beta_1 = \frac{f^{\uparrow} - \gamma_1 s^{\uparrow}}{(1+r)B_0} = \frac{s^{\uparrow} f^{\downarrow} - s^{\downarrow} f^{\uparrow}}{(s^{\uparrow} - s^{\downarrow})(1+r)B_0}.$$

A portfólió értéke a 0 időpontban, tehát az opció arbitrázsmentes ára:

$$X_0 = \beta_1 B_0 + \gamma_1 S_0 = \frac{1}{1+r} \frac{\left[(1+r)S_0 - s^{\downarrow}\right] f^{\uparrow} + \left[s^{\uparrow} - (1+r)S_0\right] f^{\downarrow}}{s^{\uparrow} - s^{\downarrow}}$$
$$= \frac{1}{1+r}\left[p^* f^{\uparrow} + (1-p^*) f^{\downarrow}\right] = \frac{1}{1+r} E^*(F) = \frac{1}{1+r} E^*(X_1),$$

ahol E^* a P^* valószínűségi mérték szerinti várható érték, és

$$P^*(F = f^{\uparrow}) = P^*(\{\omega^{\uparrow}\}) := p^* := \frac{(1+r)S_0 - s^{\downarrow}}{s^{\uparrow} - s^{\downarrow}}.$$

Most $s^{\downarrow} < (1+r)S_0 < s^{\uparrow}$, ezért $0 < p^* < 1$ tényleg valószínűség.

Példa: Európai call opció $K = 1$ kötési árral:
$r = 0$, $S_0 = B_0 = 1$, $s^{\uparrow} = 2$, $s^{\downarrow} = 0{,}5$, $f^{\uparrow} = 1$, $f^{\downarrow} = 0$.
A formulák alkalmazásával: $\beta_1 = -1/3$ és $\gamma_1 = 2/3$.
A portfólió értéke a 0 időpontban: $X_0 = \beta_1 B_0 + \gamma_1 S_0 = 1/3$.
A mesterségesen bevezetett valószínűség: $p^* = 1/3$, amivel

$$E^*(X_1) = E^*(F) = p^* f^{\uparrow} + (1 - p^*) f^{\downarrow} = 1/3 = (1 + r) X_0 \,.$$

Diszkontált értékfolyamat

A $V_t = X_t / B_t$, $0 \le t \le T$, folyamatot **diszkontált értékfolyamatnak** nevezzük.

A korábbiak miatt:

$$E^*(V_1) = \frac{E^*(X_1)}{(1 + r) B_0} = \frac{X_0}{B_0} = V_0 \,.$$

Opcióárazás kétlépéses bináris piacon

Kereskedési időpontok: $t_0 = 0, \quad t_1 = 1, \quad t_2 = 2.$

A kötvény ára: $B_1 = B_0(1 + r_1)$ és $B_2 = B_1(1 + r_2)$, ahol B_0 és r_1 determinisztikus, r_2 lehetséges értéke $r^{\uparrow}$ és $r^{\downarrow}$.

A részvény ára S_0, S_1, S_2, ahol S_0 determinisztikus, S_1 lehetséges értékei $s^{\uparrow}, s^{\downarrow}$, továbbá S_2 lehetséges értékei $s^{\uparrow\uparrow}, s^{\uparrow\downarrow}, s^{\downarrow\uparrow}, s^{\downarrow\downarrow}$.

Az $F = f(S_0, S_1, S_2)$ kifizetési függvény értékei $f^{\uparrow\uparrow}, f^{\uparrow\downarrow}, f^{\downarrow\uparrow}, f^{\downarrow\downarrow}$.

$$
\begin{tikzcd}
 & & \boxed{\begin{array}{l} B_2 = B_1(1 + r^{\uparrow}), \\ S_2 = s^{\uparrow\uparrow},\ F = f^{\uparrow\uparrow} \end{array}} \\
 & \boxed{B_1, S_1 = s^{\uparrow}} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & \boxed{\begin{array}{l} B_2 = B_1(1 + r^{\uparrow}), \\ S_2 = s^{\uparrow\downarrow},\ F = f^{\uparrow\downarrow} \end{array}} \\
\boxed{B_0, S_0} \arrow[uur] \arrow[ddr] & & \\
 & & \boxed{\begin{array}{l} B_2 = B_1(1 + r^{\downarrow}), \\ S_2 = s^{\downarrow\uparrow},\ F = f^{\downarrow\uparrow} \end{array}} \\
 & \boxed{B_1, S_1 = s^{\downarrow}} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & \boxed{\begin{array}{l} B_2 = B_1(1 + r^{\downarrow}), \\ S_2 = s^{\downarrow\downarrow},\ F = f^{\downarrow\downarrow} \end{array}}
\end{tikzcd}
$$

Feladat: Határozzuk meg az opció igazságos árát, és adjunk meg egy replikáló stratégiát.

Megoldás: Visszavezetjük a problémát három egylépéses piacra:

- Meghatározzuk, hogy az 1 időpontban mekkora tőkével kell rendelkeznünk ahhoz, hogy a 2 időpontban legyen egy replikáló portfóliónk. Jelölje F_1 ezt a tőkét, melynek lehetséges értékei
$$F_1 = \begin{cases} f^{\uparrow}, & S_1 = s^{\uparrow}, \\ f^{\downarrow}, & S_1 = s^{\downarrow}. \end{cases}$$
- Kiszámoljuk, hogy a 0 időpontban mekkora F_0 tőkével kell rendelkeznünk ahhoz, hogy az 1-ben legyen F_1 pénzünk.
- Mindeközben az egylépéses piacok portfóliói stratégiát is adnak.

Mindehhez fel kell tennünk, hogy mindhárom piac arbitrázsmentes, tehát

$$s^{\downarrow} < (1+r_1)S_0 < s^{\uparrow}, \qquad s^{\uparrow\downarrow} < (1+r^{\uparrow})s^{\uparrow} < s^{\uparrow\uparrow}, \qquad s^{\downarrow\downarrow} < (1+r^{\downarrow})s^{\downarrow} < s^{\downarrow\uparrow}.$$

Kérdés: Milyen kereskedési stratégiát lenne érdemes folytatni akkor, ha a három közül valamelyik piac nem lenne arbitrázsmentes?

Martingálok diszkrét időben

A továbbiakban egy $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mezőn dolgozunk, minden véletlen változó ezen van értelmezve. Az $N \in \{1, 2, \ldots, \infty\}$ érték rögzített.

Sztochasztikus folyamat, szűrés

- **Diszkrét idejű sztochasztikus folyamat:** Változóknak egy véges vagy végtelen sorozata. Jelölésben: $\mathbb{X} = \{X_0, \ldots, X_N\} = (X_n)_{n=0}^N$.
- **Trajektória:** Az $X_0(\omega), \ldots, X_N(\omega)$ értékek sorozata adott $\omega \in \Omega$ kimenetel mellett.
- **Szűrés, filtráció:** Az $\mathcal{F}$ σ-algebra rész-σ-algebráinak egy bővülő sorozata. Jelölésben: $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n=0}^N$, ahol $\mathcal{F}_0 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{F}_N \subseteq \mathcal{F}$.
- **Generált szűrés:** $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n=0}^N$, ahol $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$.
- **Filtrált valószínűségi mező:** Egy valószínűségi mező ellátva egy szűréssel. Jelölésben: $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbb{F})$.

Diszkrét idejű piacokon az $\mathcal{F}_n$ σ-algebra az n időpontban rendelkezésre álló információt jelenti, ami az idő előrehaladtával bővül.

Példa: generált szűrés

Legyen $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.

1. Az n időpontban tudjuk, hogy az $\mathcal{F}_n$ σ-algebrában található események közül melyek következik be, és melyek nem.
2. Az n időpontban ismerjük az $X_0, \ldots, X_n$ változók értékét.
3. Ismerjük minden olyan véletlen változó értékét, mely mérhető függvénye az $X_0, \ldots, X_n$ változóknak.

Adaptált és előrejelezhető folyamatok

Tekintsünk egy $\mathbb{X} = (X_n)_{n=0}^N$ folyamatot és egy $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n=0}^N$ szűrést.

- Az $\mathbb{X}$ folyamat **adaptált** az $\mathbb{F}$ szűréshez, ha tetszőleges $0 \leq n \leq N$ esetén X_n mérhető az $\mathcal{F}_n$ σ-algebrára nézve.

  Jelentése: Az X_n változó értéke ismert az n időpontban.
- Az $\mathbb{X}$ folyamat **előrejelezhető** vagy **predikálható**, ha tetszőleges $1 \leq n \leq N$ esetén X_n mérhető az $\mathcal{F}_{n-1}$ σ-algebrára nézve.

  Jelentése: Az X_n változó értéke ismert az $n-1$ időpontban is.

Martingál, szubmartingál, szupermartingál

Legyen $\mathbb{X} = (X_n)_{n=0}^N$ az $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n=0}^N$ szűréshez adaptált folyamat, melyre $E|X_n| < \infty$ minden n esetén. Ekkor az $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^N$ sorozat

- **martingál**, ha $E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n, \quad n = 0, \dots, N-1.$
- **szubmartingál**, ha $E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \geq X_n, \quad n = 0, \dots, N-1.$
- **szupermartingál**, ha $E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \leq X_n, \quad n = 0, \dots, N-1.$

Ekvivalens definíciók

Legyen $\mathbb{X} = (X_n)_{n=0}^N$ az $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n=0}^N$ szűréshez adaptált folyamat, melyre $E|X_n| < \infty$ minden n esetén. Ekkor az $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^N$ sorozat

1. pontosan akkor martingál, ha $E[X_{n+k}|\mathcal{F}_n] = X_n, \quad n \geq 0,\ k \geq 1.$
   Ebben az esetben $E(X_N) = E(X_{N_1}) = \cdots = E(X_0).$
2. pontosan akkor szubmartingál, ha $E[X_{n+k}|\mathcal{F}_n] \geq X_n, \quad n \geq 0,\ k \geq 1.$
   Ebben az esetben $E(X_N) \geq E(X_{N_1}) \geq \cdots \geq E(X_0).$
3. pontosan akkor szupermartingál, ha $E[X_{n+k}|\mathcal{F}_n] \leq X_n, \ n \geq 0,\ k \geq 1.$
   Ebben az esetben $E(X_N) \leq E(X_{N_1}) \leq \cdots \leq E(X_0).$

A véletlen bolyongás

Legyen $Z_1, Z_2, \ldots$ független és azonos eloszlású változó, $p \in (0,1)$, és

$$P(Z_n = 1) = p, \qquad P(Z_n = -1) = 1 - p, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Tekintsük az $X_0 = 0$, $X_n = Z_1 + \cdots + Z_n$, $n = 1, 2, \ldots$, véletlen bolyongást és az $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$, $n \geq 0$, generált szűrés. Ekkor

- a bolyongás adaptált a szűréshez;
- $P(-n \leq X_n \leq n) = 1$, amiből $E|X_n| < \infty$, $n \geq 0$.
- $E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n + (2p-1)$, $n \geq 0$.

Kapjuk, hogy a bolyongás a generált szűréssel

- martingál, ha $p = 1/2$;
- szubmartingál, ha $p \geq 1/2$;
- szupermartingál, ha $p \leq 1/2$.

Hasonló módon megmutatható, hogy a szimmetrikus esetben az $(X_n^2)_{n=0}^{\infty}$ folyamat szubmartingál.

Megállási idő

A $\tau : \Omega \to \{0, \ldots, N\}$ véletlen változó **megállási idő** az $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n=0}^N$ szűrésre nézve, ha tetszőleges $n = 0, \ldots, N$ esetén $\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$.

Példák

Tekintsük az $\mathbb{X} = (X_n)_{n=0}^\infty$ a véletlen bolyongást, legyen $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n=0}^N$ a generált szűrés, és legyen $a \in \mathbb{Z}$.

- Első elérési idő: $\tau = \inf\{n \geq 0 : X_n = a\}$ megállási idő.
- Első lokális maximum: $\tau = \inf\{n \geq 0 : X_n > X_{n+1}\}$ nem megállási idő.
- Ha τ determinisztikus, akkor megállási idő.

Ekvivalens definíciók a megállási időre

Legyen $\tau : \Omega \to \{0, \ldots, N\}$. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.

1. τ megállási idő.
2. $\{\tau > n\} \in \mathcal{F}_n, \quad n = 0, \ldots, N.$
3. $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n, \quad n = 0, \ldots, N.$

Diszkrét idejű piacok és stratégiák

Diszkrét idejű piac

Egy $\{\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbb{F}, \mathbb{B}, \mathbb{S}, N\}$ halmazt N lépéses diszkrét idejű piacnak nevezünk, (rövidebb jelölésben: $(B, S)_N$), ha

- N egy determinisztikus pozitív egész szám;
- $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbb{F})$ filtrált valószínűségi mező, és az $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n=-1}^{N}$ szűrésre $\mathcal{F}_{-1} = \mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ és $\mathcal{F}_N = \mathcal{F}$.
- A $\mathbb{B} = (B_n)_{n=0}^{N}$ folyamat előrejelezhető, és $B_n > 0$, $n \geq 0$.
- Az $\mathbb{S} = (S_n)_{n=0}^{N}$ folyamat adaptált a szűréshez, és $S_n > 0$, $n \geq 0$.

A fenti fogalmak jelentése:

- $\mathcal{F}_n$ az n időpontban rendelkezésünkre álló információ;
- B_n és S_n a kötvény illetve a részvény ára az n időpontban.

A továbbiakban a kötvény ára determinisztikus lesz. A legtöbb állítás ezen feltevés nélkül is igaz, de néhány eredményt nehezebb lenne bizonyítani.

Diszkrét idejű bináris piac

Egy $(B,S)_N$ diszkrét idejű piac **bináris** $(r_1,\dots,r_N)$ kamatlábakkal, valamint $(a_1,\dots,a_N)$ és $(b_1,\dots,b_N)$ együtthatókkal, ha

- $r_n > -1$ és $b_n > a_n > -1$ minden $n = 1,\dots,N$ értékre;
- a kötvény ára determinisztikus és $B_n = (1+r_n)B_{n-1}$, $n = 1,\dots,N$;
- a részvény ára $S_n = (1+\rho_n)S_{n-1}$, ahol valamilyen $p_n \in (0,1)$-re
$$P(\rho_n = b_n) = p_n, \qquad P(\rho = a_n) = 1 - p_n, \qquad n = 1,\dots,N;$$
- minden információt a részvény árából szerzünk, tehát
$$\mathcal{F}_n = \sigma(S_0,\dots,S_n) = \sigma(\rho_1,\dots,\rho_n), \qquad n = 1,\dots,N;$$

Diszkrét idejű homogén bináris piac (binomiális piac)

Egy diszkrét idejű bináris piac **homogén**, ha

- valamely r, a, b, p értékekre
$$r_n = r, \quad a_n = a, \quad b_n = b, \quad p_n = p, \qquad n = 1,\dots,N;$$
- a $\rho_1,\dots,\rho_N$ változók függetlenek.

Egy techikai feltevés

A továbbiakban diszkrét idejű piacok esetén mindig feltesszük, hogy az eseménytér véges, és minden kimenetelnek pozitív a valószínűsége.

Jegyezzük meg, hogy egy diszkrét idejű bináris piac mindig reprezentálható az alábbi $(\Omega_0, \mathcal{F}_0, P_0)$ valószínűségi mezőn:

$$\Omega_0 := \Big\{(x_1, \dots, x_N) : x_n \in \{a_n, b_n\},\ n = 1, \dots, N\Big\}, \qquad \mathcal{F}_0 := 2^{\Omega_0}.$$

$$P_0\Big(\big\{(x_1, \dots, x_N)\big\}\Big) := P(\rho_1 = x_1, \dots, \rho_N = x_N).$$

Speciálisan homogén bináris piacon legyen $k = k(\omega)$ azon komponensek száma az $\omega = (x_1, \dots, x_N)$ vektorban, melyek egyenlőek b-vel. Ekkor

$$P_0\big(\{\omega\}\big) = P(\rho_1 = x_1) \cdots P(\rho_N = x_N) = p^k (1-p)^{N-k}.$$

Ebből adódik, hogy homogén bináris (azaz binomiális) piacon

$$P_0\Big(S_N = S_0(1+b)^k(1+a)^{N-k}\Big) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}, \quad k = 0, 1, \dots, N.$$

Stratégia

Stratégiának nevezzük az előrejelezhető

$$\pi = \{\pi_n = (\beta_n, \gamma_n) : n = 0, \dots, N\}$$

portfóliósorozatokat. A stratégia **értékfolyamata** illetve **diszkontált értékfolyamata**

$$X_n^\pi = \beta_n B_n + \gamma_n S_n, \qquad V_n^\pi = X_n^\pi / B_n, \qquad n = 1, \dots, N.$$

Megjegyzések:

- π_0 az eredetileg rendelkezésre álló portfólió, gyakran $\pi_0 = (\beta_0, 0)$.
- $n \geq 1$ esetén π_n az $n-1$ időpontban összeállított portfólió.
- Nálunk $\mathcal{F}_{-1} = \mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, ezért π_0 és π_1 determinisztikus.
- A portfóliósorozat előrejelezhetőségéből következik, hogy a $(\beta_n)_{n=1}^N$ és a $(\gamma_n)_{n=1}^N$ folyamat szintén előrejelezhető.
- Az $(X_n)_{n=1}^N$ és a $(V_n)_{n=1}^N$ folyamat adaptált.

Önfinanszírozó stratégia

A π stratégia **önfinanszírozó**, ha

$$X_{n-1} = \beta_n B_{n-1} + \gamma_n S_{n-1}, \qquad n = 1, \ldots, N.$$

Jelentése: Nem teszünk be és nem veszünk ki pénzt a rendszerből.

Differenciasorozat

Egy $(\alpha_n)_{n=0}^N$ véletlen vagy determinisztikus sorozat **differenciasorozata**

$$\Delta\alpha_n = \alpha_n - \alpha_{n-1}, \qquad n = 1, \ldots, N.$$

Önfinanszírozó stratégiák

Legyen π stratégia. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.

1. A π stratégia önfinanszírozó.
2. $\Delta X_n^\pi = \beta_n \Delta B_n + \gamma_n \Delta S_n, \qquad n = 1, \ldots, N.$
3. $B_{n-1}\Delta\beta_n + S_{n-1}\Delta\gamma_n = 0, \qquad n = 1, \ldots, N.$

Fedezeti stratégia (hedging stratégia)

Egy $(B,S)_N$ diszkrét idejű piacon tekinstünk egy $x \in \mathbb{R}$ értéket és egy $f_N : \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}$ mérhető függvény. Egy π stratégiát (x, f_N) **hedging stratégiának**, **fedezeti stratégiának** vagy csak **fedezetnek** nevezünk, ha

$$X_0^\pi = x \qquad \text{és} \qquad X_N^\pi \geq f_N(S_0, \ldots, S_N) \quad \text{m.b.}$$

A fedezeti stratégiát **minimálisnak** vagy **tökéletesnek** nevezzük, ha

$$X_N^\pi = f_N(S_0, \ldots, S_N) \quad \text{m.b.}$$

Megjegyzések:

- Mivel az eseménytéren minden kimenetelnek pozitív a valószínűsége, a m.b. egyenlőségek/egyenlőtlenségek minden kimenetelre teljesülnek.
- Mi csak önfinanszírozó (x, f_N) fedezeti stratégiákat vizsgálunk. Ezek halmazát a következőképpen fogjuk jelölni: $\Pi(x, f_N)$.
- Sok alkalmazásban $f_N(S_0, \ldots, S_N) = g(S_N)$. Példa: Európai opciók.

Arbitrázsstratégia

Egy $(B, S)_N$ diszkrét idejű piacon egy π önfinanszírozó stratégia **arbirázsstratégia** vagy **arbitrázs**, ha teljesülnek az alábbiak

- $X_0^\pi = 0$ m.b.;
- $X_n^\pi \geq 0$ m.b., $n = 1, \ldots, N$;
- $P(X_N^\pi > 0) > 0$, tehát létezik $\omega \in \Omega$, melyre $X_N^\pi(\omega) > 0$.

Általában feltesszük, hogy a piac arbitrázsmentes, „nincsen ingyenebéd."

Arbitrázsstratégia létezése

Tegyük fel, hogy a $(B, S)_N$ diszkrét idejű piacon egy π önfinanszírozó stratégiára teljesül, hogy

$$X_0^\pi = 0 \text{ m.b.}, \qquad X_N^\pi \geq 0 \text{ m.b.} \qquad \text{és} \qquad P(X_N^\pi > 0) > 0.$$

Ekkor ezen a piacon létezik arbitrázsstratégia.

Ekvivalens martingálmértékek

Ekvivalens mértékek

Legyen μ és μ' mérték egy $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ mérhető téren. Azt mondjuk, hogy a két mérték **ekvivalens**, ha abszolút folytonosak egymásra nézve, tehát tetszőleges $A \in \mathcal{F}$ mérhető halmazra

$$\mu(A) = 0 \quad \text{pontosan akkor teljesül, ha} \quad \mu'(A) = 0\,.$$

Ekvivalens mértékek megszámlálható alaphalmazon

Legyen μ és μ' mérték az $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ téren, ahol $\mathcal{X}$ megszámlálható halmaz és $\mathcal{F} = 2^{\mathcal{X}}$. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.

1. A két mérték ekvivalens.
2. Tetszőleges $x \in \mathcal{X}$ elem esetén

$$\mu(\{x\}) = 0 \quad \text{pontosan akkor teljesül, ha} \quad \mu'(\{x\}) = 0\,.$$

Ekvivalens martingálmérték

Azt mondjuk, hogy P^* **martingálmérték** a $(B,S)_N$ diszkrét idejű piacon, ha teljesíti az alábbi feltételeket:

- P^* valószínűségi mérték az $(\Omega,\mathcal{F})$ téren;
- az $(S_n/B_n)_{n=0}^N$ folyamat martingál a P^* mértékre nézve.

Ha ezen túl P és P^* ekvivalens mértékek, akkor a P^* mértéket **ekvivalens martingálmértéknek** nevezzük. A továbbiakban E^* jelöli a P^* szerinti várható értéket.

Martingálmértékek diszkrét idejű piacon

Egy $(B,S)_N$ diszkrét idejű piacon az alábbiak ekvivalensek.

1. P^* martingálmérték a piacon.
2. Bármely π önfinanszírozó stratégia esetén a $(V_n^\pi)_{n=0}^N$ diszkontált értékfolyamat martingál a P^* mérték alatt az $\mathbb{F}$ szűrésre nézve.

Ekvivalens martingálmértékek diszkrét idejű bináris piacon

Tegyük fel, hogy a $(B, S)_N$ diszkrét idejű bináris piacon $a_n < r_n < b_n$, $n = 1, \ldots, N$, és tekintsük a korábban bevezetett $(\Omega_0, \mathcal{F}_0, P_0)$ mezőt. Ekkor teljesülnek az alábbiak.

1. A piacon létezik egy P^* egyértelmű martingálmérték. A P^* valószínűségre nézve a $\rho_1, \ldots, \rho_N$ változók függetlenek egymástól, és
$$P^*(\rho_n = b_n) = p_n^* := \frac{r_n - a_n}{b_n - a_n}, \qquad n = 1, \ldots, N.$$
Ebből következik, hogy tetszőleges $(x_1, \ldots, x_N) \in \Omega_0$ kimenetel esetén
$$P^*\Big(\big\{(x_1, \ldots, x_N)\big\}\Big) = \prod_{\substack{1 \le n \le N \\ x_n = b_n}} p_n^* \prod_{\substack{1 \le n \le N \\ x_n = a_n}} (1 - p_n^*).$$
2. Ha teljesül a technikai feltevés, tehát minden kimenetelnek pozitív a P_0 valószínűsége, akkor P^* ekvivalens martingálmérték.

Jegyezzük meg ismét, hogy egy $(B,S)_N$ diszkrét idejű homogén bináris piacon az S_N részvényár lehetséges értékei az alábbi alakúak:

$$s_k = S_0(1+b)^k(1+a)^{N-k}\,, \qquad k = 0,\ldots,N\,.$$

A részvényár pontosan akkor s_k, ha az ár k alkalommal lépett felfelé, és $N-k$ alkalommal lépett lefelé. A binomiális fán az ilyen utak száma $\binom{N}{k}$.

Ekvivalens martingálmértékek diszkrét idejű homogén bináris piacon

Tegyük fel, hogy a $(B,S)_N$ diszkrét idejű homogén piacon $a<r<b$. Ekkor a piacon létezik egy egyértelmű ekvivalens martingálmérték, melyre

$$P^*\Big(S_N = S_0(1+b)^k(1+a)^{N-k}\Big) = \binom{N}{k}{p^*}^k(1-p^*)^{N-k}\,, \quad k = 0,1,\ldots,N\,,$$

ahol $p^* = (r-a)/(b-a)$.

A közgazdászok az ekvivalens martingálmértéket **kockázatsemleges valószínűségnek** nevezik, aminek a következő az oka. Az egyszerűség kedvért legyen $B_0 = 1$, és tegyük fel, hogy S_0 összeget fektetünk be.

- Ha 1 darab részvényt veszünk, akkor a befektetés diszkontált lejáratkori értékének várható értéke P^* szerint
$$E^*(S_N/B_N) = S_0/B_0 = S_0.$$
- Ha a teljes összeget kötvénybe fektetjük, akkor a lejáratkori érték determinisztikus, és diszkontált értéke
$$S_0 B_N/B_N = S_0.$$

Tehát a kockázatos részvénybefektetés várható értékben pontosan akkora hozamot ad, mint a kötvény. Speciálisan, diszkrét idejű bináris piacon
$$E^*(S_N) = S_0(1+r_1)\cdots(1+r_N).$$

A két főtétel

A martingálok egy további ekvivalens definíciója

Legyen $N < \infty$ és $\mathbb{X} = (X_n)_{n=0}^N$ adaptált folyamat az $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbb{F})$ filtrált valószínűségi mezőn. Ha minden $\tau : \Omega \to \{0, \dots, N\}$ megállási idő esetén $E(X_\tau) = E(X_0)$, akkor az $\mathbb{X}$ folyamat martingál.

Megjegyzés: Ha a folyamat martingál, akkor az opcionális megállási tétel szerint $E(X_\tau) = E(X_0)$. Tehát ez egy szükséges és elegendő feltétel.

Az arbitrázsmentességre vonatkozó főtétel

Egy diszkrét idejű $(B, S)_N$ piacon az alábbiak ekvivalensek.

1. Létezik ekvivalens martingálmérték.
2. A piac kizárja az arbitrázslehetőséget.

Arbitrázsmentesség diszkrét idejű bináris piacon

Egy $(B, S)_N$ diszkrét idejű bináris piac pontosan akkor arbitrázsmentes, ha $a_n < r_n < b_n$, $n = 1, \dots, N$.

A piac teljessége

A $(B,S)_N$ diszkrét idejű piac **teljes**, ha bármely f_N kifizetési függvényhez létezik minimális fedezet, tehát olyan π önfinanszírozó stratégia, melyre

$$X_N^\pi = f_N(S_0, \ldots, S_N) \qquad \text{m.b.}$$

A teljességre vonatkozó főtétel

Tegyük fel, hogy a $(B,S)_N$ diszkrét idejű piacon létezik P^* ekvivalens martingálmérték. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.

1. A piac teljes.
2. P^* az egyetlen ekvivalens martingálmérték a piacon.
3. Tetszőleges $(M_n, \mathcal{F}_n, P^*)_{n=0}^N$ martingál előáll

$$M_n = M_0 + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \left(\frac{S_k}{B_k} - \frac{S_{k-1}}{B_{k-1}} \right), \qquad n = 1, \ldots, N,$$

alakban, ahol $(\gamma_k)_{k=1}^N$ előrejelezhető folyamat.

Az előző tétel bizonyításából is látszik, hogy a teljesség fogalma csak egy összekötő kapocs az állítás (2) és (3) pontja között. Ha adott egy részvényopció, akkor a tételt a következőképpen lehet alkalmazni:

(2) Létezik egyértelmű ekvivalens martingálmérték
$\Longrightarrow$ (1) Az opcióra létezik fedezeti stratégia, bár nem ismerjük
$\Longrightarrow$ (3) A fedezeti stratégia felírható, az opció árazható

Teljesség diszkrét idejű bináris piacon

Tegyük fel, hogy a $(B, S)_N$ diszkrét idejű bináris piacon teljesül a korábbi technikai feltevésünk, tehát minden kimenetelnek pozitív a P mérték szerinti valószínűsége. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.

1. A piac teljes.
2. $a_n < r_n < b_n, \quad n = 1, \ldots, N.$
3. A piac arbitrázsmentes.

Opciók árazása

Befektetési költség

Egy $(B, S)_N$ diszkrét idejű piacon tekintsünk egy $x \in \mathbb{R}$ értéket és egy $f_N : \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}$ mérhető függvényt. Legyen $\Pi(x, f_N)$ azon π önfinanszírozó stratégiák halmazát, melyekre teljesül az alábbi két feltétel:

- A stratégia kezdőértéke x: $X_0^\pi = x$
- A stratégia fedezet az $f_N(S_0, \ldots, S_N)$ kifizetési függvényre, tehát
$$X_N^\pi \geq f_N(S_0, \ldots, S_N) \quad \text{m.b.}$$

A kapcsolatos opció **befektetési költségének** az alábbi értéket nevezzük:

$$\mathcal{C}_{N,f_N} = \inf \left\{ x \in \mathbb{R} : \Pi(x, f_N) \neq \emptyset \right\}$$

Fedezeti stratégia létezése

Egy $(B, S)_N$ piacon tetszőleges f_N kifizetési függvény esetén létezik $x \in \mathbb{R}$ érték, melyre $\Pi(x, f_N) \neq \emptyset$. Ebből következik, hogy $\mathcal{C}_{N,f_N} < \infty$.

Feltételes követelések árazása

Tegyük fel, hogy a $(B, S)_N$ diszkrét idejű piacon létezik P^* ekvivalens martingálmérték, és tekintsünk egy $f_N(S_0, \ldots, S_N)$ kifizetési függvényt. Ekkor

$$\mathcal{C}_{N,f_N} \geq E^* \left[\frac{B_0}{B_N} f_N(S_0, \ldots, S_N) \right].$$

Továbbá, ha a piac teljes, akkor a kifizetési függvény replikálható, és a befektetési költség

$$\mathcal{C}_{N,f_N} = E^* \left[\frac{B_0}{B_N} f_N(S_0, \ldots, S_N) \right].$$

Megjegyzések:

- Teljes piacon az opció igazságos (arbitrázsmentes) ára C_{N,f_N}.
- Ha π egy minimális fedezeti stratégia, akkor

$$\frac{X_n^\pi}{B_n} = E^* \left[\frac{X_N^\pi}{B_N} \middle| \mathcal{F}_n \right] = E^* \left[\frac{1}{B_N} f_N(S_0, \ldots, S_N) \middle| \mathcal{F}_n \right]$$

Árazás diszkrét idejű bináris piacon

Tegyük fel, hogy a $(B,S)_N$ diszkrét idejű bináris piacon $a_n < r_n < b_n$, $n = 1,\dots,N$, és tegyük fel, hogy teljesül a technikai feltevés. Jelölje P^* az egyetlen ekvivalens martingálmértéket, és tekintsünk egy tetszőleges $f_N(S_0,\dots,S_N)$ kifizetési függvényt. Ekkor az opcióra létezik minimális fedezeti stratégia, és az opció árbitrázsmentes ára

$$\mathcal{C}_{N,f_N} = \frac{1}{d} E^* f_N(S_0,\dots,S_N)\,, \qquad \text{ahol} \qquad d = \prod_{n=1}^{N}(1+r_n)\,.$$

Speciálisan, ha $f_N(S_0,\dots,S_N) = g(S_N)$, akkor

$$\mathcal{C}_{N,f_N} = \frac{1}{d} \sum_{H\subseteq\{1,\dots,N\}} g\left(S_0 \prod_{n\in H}(1+b_n) \prod_{n\notin H}(1+a_n)\right) \prod_{n\in H} p_n^* \prod_{n\notin H}(1-p_n^*)\,.$$

Fedezeti stratégia diszkrét idejű bináris piacon

Az előző tétel feltételei mellett legyen

$$M_n = \frac{1}{B_N} E^* \left[f_N(S_0, \dots, S_N) \mid \mathcal{F}_n \right], \qquad n = 1, \dots, N.$$

Ekkor teljesülnek az alábbiak.

1. Léteznek $h_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mérhető determinisztikus függvények, hogy

$$M_n = h_n(\rho_1, \dots, \rho_n) \quad \text{m.b.}, \qquad n = 1, \dots, N.$$

2. Az alábbi stratégia egy lehetséges fedezet a kifizetési függvényre:

$$\beta_0 = M_0, \qquad \gamma_0 = 0, \qquad \beta_n = M_{n-1} - \gamma_n \frac{S_{n-1}}{B_{n-1}}, \quad n = 1, \dots, N,$$

$$\gamma_n = \frac{B_n}{S_{n-1}(b_n - a_n)} \left[h_n(\rho_1, \dots, \rho_{n-1}, b_n) - h_n(\rho_1, \dots, \rho_{n-1}, a_n) \right].$$

Cox–Ross–Rubinstein (CRR) árazási formula

A $(B,S)_N$ diszkrét idejű homogén bináris piacon legyen $a < r < b$. Ekkor az európai call opció arbitrázsmentes ára K kötési ár esetén

$$\mathcal{C}_{N,K} = S_0 B(k_0, N, \tilde{p}) - K(1+r)^{-N} B(k_0, N, p^*),$$

ahol

$$p^* = \frac{r-a}{b-a}, \qquad \tilde{p} = \frac{1+b}{1+r} p^*, \qquad k_0 = 1 + \left\lfloor \frac{\log \frac{K}{S_0(1+a)^N}}{\log \frac{1+b}{1+a}} \right\rfloor,$$

továbbá $j \in \mathbb{Z}$ és $0 < p < 1$ esetén

$$B(j, N, p) = \begin{cases} \sum_{k=j}^{N} \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}, & 0 \le j \le N, \\ 0, & j > N, \\ 1, & j < 0. \end{cases}$$

Put-Call paritás

Ha a $(B,S)_N$ diszkrét idejű piac teljes, akkor a K kötési árhoz tartozó európai eladási (put) opció arbitrázsmentes árára

$$\mathcal{P}_{N,K} = \mathcal{C}_{N,K} - S_0 + KB_0/B_N\,.$$

Speciálisan teljes bináris piacon $\mathcal{P}_{N,K} = \mathcal{C}_{N,K} - S_0 + K/\prod_{n=1}^{N}(1+r_n)$.

Amerikai típusú opciók árazása

Egy opciót amerikai típusúnak nevezünk, ha a lejárati idő előtt is lehívható.
Tegyük fel, hogy a $(B,S)_N$ piacon létezik P^* ekv. martingálmérték.
Az opció fedezéséhez szükséges összeg: $\mathcal{C}_n^{\mathrm{Am}}$ $n = 0,\dots,N$.
A kifizetés, ha az opciót lehívják az n. időpontban: $\mathcal{C}_n^{\mathrm{L}}$, $n = 0,\dots,N$.
Ekkor a befektetési költség $\mathcal{C}_0^{\mathrm{Am}}$, ahol visszafelé haladó rekurzióval

$$\mathcal{C}_n^{\mathrm{Am}} = \max\left(\mathcal{C}_n^{\mathrm{L}}, \mathcal{C}_n^{\mathrm{Eu}}\right), \quad \mathcal{C}_n^{\mathrm{Eu}} = E^*\left[\frac{B_n}{B_{n+1}}\mathcal{C}_{n+1}^{\mathrm{Am}} \mid \mathcal{F}_n\right], \quad n = 0,\dots,N\,.$$

Folytonos idejű martingálok

Szűrés, megállási idő

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező, és legyen $T > 0$ rögzített.

Egy $(\mathcal{F}_t)_{t=0}^T$ rendszert **szűrésnek** vagy **filtrációnak** nevezünk , ha

- $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{A}$ rész-σ-algebra minden $0 \leq t \leq T$ esetén;
- $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$, minden $0 \leq s \leq t \leq T$ esetén.

Azt mondjuk, hogy a szűrés teljesíti a **szokásos feltételeket**, ha

- $\mathcal{F}_0$ tartalmazza a ***P*-null** halmazokat, tehát azon A eseményeket, melyekre $P(A) = 0$;
- a szűrés jobbról folytonos, tehát $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+} := \cap_{s>t} \mathcal{F}_s$.

Egy $\tau : \Omega \to [0, T]$ véletlen változót **megállási időnek** nevezünk, ha $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ teljesül minden $t \in [0, T]$ esetén.

Adaptáltság, progresszív mérhetőség

Legyen $(X_t)_{t=0}^T$ sztochasztikus folyamat az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, ami értelmezhető úgy is, mint egy $X : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}$ függvény.

Azt mondjuk, hogy a folyamat **adaptált** az $(\mathcal{F}_t)_{t=0}^T$ szűréshez, ha az X_t változó mérhető az $\mathcal{F}_t$ σ-algebrára nézve minden $t \in [0, T]$ esetén.

Azt mondjuk, hogy a folyamat **progresszív mérhető**, ha tetszőleges rögzített $t \in [0, T]$ esetén az $X : \Omega \times [0, t] \to \mathbb{R}$, $(\omega, s) \mapsto X_s(\omega)$, kétváltozós függvény mérhető az $\mathcal{F}_t \times \mathcal{B}[0, t]$ σ-algebrára nézve.

Kapcsolat a mérhetőségi tulajdonságok között

1. Ha az $(X_t)_{t=0}^T$ folyamat progresszív mérhető, akkor:
   - a folyamat adaptált, tehát az $X_t : \Omega \to \mathbb{R}$ függvény $\mathcal{F}_t$-mérhető minden $t \in [0, T]$ esetén;
   - a trajektóriák mérhetőek, tehát az $X(\omega) : [0, T] \to \mathbb{R}$ függvény Borel-mérhető minden $\omega \in \Omega$ kimenetel mellett.
2. Ha a sztochasztikus folyamat adaptált és jobbról folytonos, akkor progresszív mérhető is.

Martingálok

Az $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t=0}^T$ folyamat **martingál**, ha teljesülnek az alábbi feltételek:

- az $(X_t)_{t=0}^T$ folyamat adaptált az $(\mathcal{F}_t)_{t=0}^T$ szűréshez;
- $E|X_t| < \infty, \quad 0 \leq t \leq T;$
- $E[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s, \quad 0 \leq s \leq t \leq T.$

Az $(X_t)_{t=0}^T$ folyamat **szubmartingál** illetve **szupermartingál**, ha a harmadik pontban az egyenlőség helyett $\geq$ illetve $\leq$ áll.

Martingálok konvex transzformáltjai

Legyen $(X_t)_{t=0}^T$ martingál, és tekintsünk egy $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex függvényt. Ha a $\varphi(X_t)$ változó integrálható minden $t \in [0, T]$ esetén, akkor a $(\varphi(X_t))_{t=0}^T$ folyamat szubmartingál.

Doob maximál egyenlőtlensége

Legyen $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ diszkrét idejű szubmartingál, és $M_n = \max_{1 \le k \le n} X_k$. Ekkor tetszőleges $n = 1, 2, \ldots$ és $x > 0$ esetén

$$xP(M_n > x) \le \int_{\{M_n > x\}} X_n \, dP \le EX_n^+ .$$

Egy lemma

Legyen X és Y olyan nemnegatív értékű véletlen változó, melyre

$$xP(X > x) \le \int_{\{X > x\}} Y \, dP , \qquad x > 0 .$$

Ekkor tetszőleges $p > 1$ esetén

$$EX^p \le \left(\frac{p}{p-1} \right)^p EY^p .$$

Diszkretizálás

Tekintsünk egy determinisztikus $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$ beosztást. Ha az $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t=0}^T$ folyamat folytonos idejű martingál, szubmartingál vagy szupermartingál, akkor a $(X_{t_n}, \mathcal{F}_{t_n})_{n=0}^N$ diszkrét idejű martingál, szubmartingál vagy szupermartingál.

Doob maximál egyenlőtlensége folytonos időben

Legyen $(X_t)_{t\geq 0}$ jobbról folytonos szubmartingál, és legyen $0 \leq S \leq T$ tetszőleges.

1. Bármely $x > 0$ esetén
$$xP\Big(\sup_{S\leq t\leq T} X_t > x\Big) \leq \int_{\{\sup_{S\leq t\leq T} X_t > x\}} X_T \, dP \leq EX_T^+ .$$
2. Ha a folyamat majdnem biztosan nemnegatív, akkor
$$E\Big(\sup_{S\leq t\leq T} X_t\Big)^p \leq \Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p EX_T^p , \qquad p > 1 .$$

Doob–Meyer-felbontás

Legyen $(X_t)_{t=0}^T$ jobbról folytonos szubmartingál, melyre tetszőleges $a \in [0, T]$ esetén az alábbi változók egyenletesen integrálhatóak:

$$\left\{X_\tau \mid \tau : \Omega \to [0, a] \text{ megállási idő}\right\}.$$

Ekkor a szubmartingál felírható $X_t = M_t + A_t$, $t \in [0, T]$, alakban, ahol $(M_t)_{t=0}^T$ jobbról folytonos martingál és $(A_t)_{t=0}^T$ jobbról folytonos és monoton növekvő adaptált folyamat. Továbbá ez az előállítás egyértelmű.

Martingál monoton növekvő folyamata

Ha $(X_t)_{t=0}^T$ martingál, akkor $(X_t^2)_{t=0}^T$ szubmartingál. Ha ennek a szubmartingálnak létezik a Doob–Meyer-felbontása, akkor a kapcsolatos $(A_t)_{t=0}^T$ folyamatot a martingál **monoton növekvő folyamatának** nevezzük. Jelölésben: $\langle X \rangle_t = A_t$.

A standard Wiener-folyamat

A standard Wiener-folyamat (standard Brown-mozgás)

A $(W_t)_{t\geq 0}$ sztochasztikus folyamat **standard Wiener-folyamat** vagy **standard Brown-mozgás**, ha teljesülnek az alábbi tulajdonságok:

W1 $W_0 = 0$ m.b.

W2 A folyamat független növekményű.

W3 Tetszőleges $t \geq s \geq 0$ esetén $W_t - W_s \sim \mathrm{N}(0, t-s)$.
(Ebből az is következik, hogy a folyamat stacionárius növekményű.)

W4 A folyamat mintafolytonos.

A standard Wiener-folyamat ekvivalens definíciói

Az alábbiak ekvivalensek:

1. W1 és W2 és W3.
2. W1 és W2, továbbá tetszőleges $t \geq 0$ esetén $W_t \sim \mathrm{N}(0, t)$.
3. Gauss-folyamat, $E(W_t) = 0$, $\mathrm{Cov}(W_s, W_t) = \min(s, t)$, $s, t \geq 0$.

A standard Wiener-folyamat néhány eloszlásbeli tulajdonsága

Legyen $(W_t)_{t\geq 0}$ standard Wiener-folyamat, és tekintsünk egy tetszőleges $c>0$ értéket. Ekkor teljesülnek az alábbiak.

1. Az alábbi folyamatok szintén standard Wiener-folyamatok:
$$W_{t+c}-W_c, \quad \sqrt{c}W_{t/c}, \quad t\geq 0.$$
2. Az alábbi folyamatok martingálok az $\mathcal{F}_t=\sigma(W_s:s\leq t)$, $t\geq 0$, generált szűrésre nézve:
$$W_t, \quad W_t^2-t, \quad e^{aW_t-a^2t/2}, \quad t\geq 0.$$
Ebből következik, hogy a standard Wiener-folyamat monoton növekvő folyamata: $\langle W\rangle_t=t$.

Tekintsünk egy $\Pi = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ beosztás egy adott $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ intervallumon. A beosztás finomsága: $|\Pi| = \max\limits_{1 \le k \le n} |t_k - t_{k-1}|$.

A Wiener-folyamat trajektóriánkénti tulajdonságai

Legyen $(W_t)_{t \ge 0}$ Wiener folyamatra, $0 \le a \le b$ pedig tetszőleges.

1. A Wiener-folyamat négyzetes megváltozása: ha $|\Pi| \to 0$, akkor
$$\sum_{k=1}^{n} \left[W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\right]^2 \xrightarrow{L^2} b - a\,.$$
2. A Wiener-folyamat teljes megváltozása: ha $|\Pi| \to 0$, akkor
$$\sum_{k=1}^{n} \left|W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\right| \xrightarrow{P} \infty\,.$$
3. A diadikus beosztássorozat esetén a fenti konvergenciák majdnem biztos értelemben is teljesülnek.
4. A standard Wiener-folyamat 1 valószínűséggel sehol sem deriválható.

A továbbiakban szeretnénk a Wiener-folyamat szerint integrálni. Hogyan definiáljuk az $I = \int_0^T f(t)dW_t$ integrált? Az első ötlet a trajektóriánkénti Lebesgue–Stieltjes-integrál, tehát minden $\omega \in \Omega$ kimenetel esetén legyen

$$I(\omega) = \int_0^T f(t)dW_t(\omega) = \int_{[0,T]} f\, d\mu_{W(\omega)},$$

ahol $\mu_{W(\omega)}$ a Wiener-folyamat $W(\omega)$ trajektóriája által generált Lebesgue–Stieltjes-mérték. Ez a mérték $\mu_{W(\omega)} = \mu_{W^+(\omega)} - \mu_{W^-(\omega)}$ alakban van definiálva, máramennyiben léteziknek olyan monoton növekvő $(W_t^+)_{t=0}^T$ és $(W_t^-)_{t=0}^T$ folyamatok, melyekre $W_t = W_t^+ - W_t^-$, $t \in [0, T]$. Vajon a standard Wiener-folyamatra létezik ilyen felbontás?

Egy függvény pontosan akkor írható fel két monoton növekvő függvény különbségeként, ha a függvény korlátos változású. Ez azt jelenti, hogy a standard Wiener-folyamat fenti reprezentációja csak a korlátos változású trajektóriákra működik. Láttuk, hogy a trajektóriák 1 valószínűséggel nem korlátos változásúak! Ez azt jelenti, hogy a fenti módon bevezetett I integrál 1 valószínűséggel nem jól definiált. Valami mást kell kitalálni...

A sztochasztikus integrál

Egyszerű folyamatok sztochasztikus integrálja

Legyen $(W_t)_{t=0}^T$ standard Wiener-folyamat, $(\mathcal{F}_t)_{t=0}^T$ a generált szűrés. Az $X = (X_t)_{t=0}^T$ sztochasztikus folyamat **egyszerű**, ha

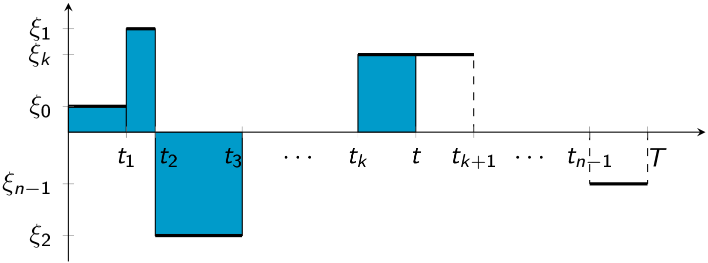
$$X_t = \xi_0 \mathbb{1}_{\{t=0\}} + \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i \mathbb{1}_{\{t \in (t_i, t_{i+1}]\}}, \quad t \in [0, T],$$

ahol $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ egy determinisztikus beosztás, és a ξ_i változó rendre $\mathcal{F}_{t_i}$-mérhető. Tetszőleges $t \in (0, T]$ esetén legyen k azaz érték, melyre $t \in (t_k, t_{k+1}]$. Az X **egyszerű folyamat sztochasztikus integrálja** a következő folyamat: legyen $I_0(X) := 0$ és

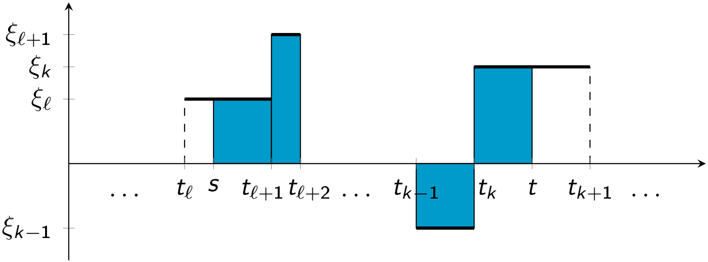
$$I_t(X) := \sum_{i=0}^{k-1} \xi_i \left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i} \right) + \xi_k \left(W_t - W_{t_k} \right), \qquad t \in (0, T].$$

Jegyezzük meg, hogy ez egy trajektóriánkénti Riemann–Stieltjes-integrál. Legyen továbbá $\int_s^t X_t dW_t := I_t(X) - I_s(X)$, $\quad 0 \le s \le t \le T$.

Az $I_t(X) = \int_0^t X_u dW_u$ integrál:



Az $I_t(X) - I_s(X) = \int_s^t X_u dW_u$ integrál:



A sztochasztikus integrál tulajdonságai egyszerű folyamat esetén

1. Az egyszerű folyamatok adaptáltak az $(\mathcal{F}_t)_{t=0}^T$ szűréshez.
2. Az integrál lineáris, tehát ha X és Y egyszerű folyamat és $a, b \in \mathbb{R}$, akkor $I_t(aX + bY) = aI_t(X) + bI_t(Y)$, $t \in [0, T]$.
3. Az $I(X) = (I_t(X))_{t=0}^T$ integrálfolyamat folytonos martingál.
4. Tetszőleges $0 \leq s \leq t \leq T$ esetén $E\big[\int_s^u X_u\, dW_u \mid \mathcal{F}_s\big] = 0$ és
$$E\left[\left(\int_s^t X_u\, dW_u\right)^2 \Big| \mathcal{F}_s\right] = E\left[\int_s^t X_u^2\, du \Big| \mathcal{F}_s\right]$$
Ebből következik, hogy $E\int_s^t X_u\, dW_u = 0$ és
$$\mathrm{Var}\left(\int_s^t X_u\, dW_u\right) = E\left(\int_s^t X_u\, dW_u\right)^2 = E\int_s^t X_u^2\, du\,.$$
5. $E\sup_{0\leq t\leq T}\left(\int_0^t X_u\, dW_u\right)^2 \leq 4E\int_0^T X_u^2\, du.$

Jelölje $\mathcal{M}$ a folytonos martingálok halmazát. Az I sztochasztikus integál egy $\mathcal{M}$ értékű függvény az egyszerű folyamatok halmazán. Célunk a definíciót kiterjeszteni a következő $\mathcal{H}$ halmazra:

$$\mathcal{H} = \left\{X = (X_t)_{t=0}^T : X \text{ adaptált és } E\int_0^T X_t^2\,dt < \infty\right\} \subseteq L^2(\Omega \times [0, T]).$$

Jegyezzük meg, hogy $L^2(\Omega \times [0, T])$ egy Hilbert-tér, melyben az $X = (X_t)_{t=0}^T$ elem normanégyzete $\|X\|_{L^2}^2 = E\int_0^T X_t^2\,dt$.

A sztochasztikus integrál kiterjesztése

1. Tetszőleges $X \in \mathcal{H}$ esetén léteznek $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots \in \mathcal{H}$ egyszerű folyamatok olyan módon, hogy
$$\left\|X - X^{(n)}\right\|_{L^2}^2 = E\int_0^T \left(X_t - X_t^{(n)}\right)^2 dt \to 0, \qquad n \to \infty.$$
2. Az egyszerű folyamatokon definiált I leképezésnek létezik folytonos kiterjesztése a $\mathcal{H}$ halmazra. Az így kapott $I : \mathcal{H} \to \mathcal{M}$ függvényt nevezzük **Itô-féle sztochasztikus integrálnak**.
3. A kiterjesztett operátorra teljesülnek az előző oldalon felsorolt tulajdonságok tetszőleges $X, Y \in \mathcal{H}$ esetén.

A Riemann-integrál esetében annak nincs szerepe, hogy az integrálközelítő összegben az integrálandó függvény értékét a beosztásköz mely pontjában vesszük, az integrálközelítő összeg mindig konvergált az integrálhoz. A sztochasztikus integrál esetében a helyzet jóval bonyolultabb.

Az osztáspontok szerepe az integrálközelítő összegben

Célunk meghatározni az $\int_0^t W_u dW_u$ integrál értékét. Tekintsünk egy $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t$ beosztást és egy $\varepsilon \in [0,1]$ értéket. Ekkor többféle integrálközelítő összeg is felírható, és

$$S_{\varepsilon,n} = \sum_{i=0}^{n-1} \big(\varepsilon W_{t_{i+1}} + (1-\varepsilon) W_{t_i}\big)\big(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\big) \xrightarrow{L^2} \frac{W_t^2}{2} + \left(\varepsilon - \frac{1}{2}\right) t \,,$$

amint a beosztás finomsága fut nullához. Speciálisan $\varepsilon = 0$ mellett visszakapjuk az Itô-integrált, tehát $\int_0^t W_u dW_u = (W_t^2 - t)/2$. Vegyük észre, hogy ez a folyamat valóban folytonos martingál. Ezzel szemben $\varepsilon > 0$ esetén a határfolyamat nem martingál.

Itô-folyamatok

Itô-folyamatok

Legyen $(W_t)_{t=0}^T$ standard Wiener-folyamat, és legyen $(\mathcal{F}_t)_{t=0}^T$ a generált szűrés. Legyen továbbá

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s \, ds + \int_0^t H_s \, dW_s \,, \qquad 0 \le t \le T \,,$$

ahol

- X_0 $\mathcal{F}_0$-mérhető;
- $(K_t)_{t=0}^T$ és $(H_t)_{t=0}^T$ adaptált sztochasztikus folyamat;
- $\int_0^T |K_s| ds < \infty$ és $\int_0^T H_s^2 ds < \infty$ majdnem biztosan.

Ekkor az $(X_t)_{t=0}^T$ folyamatot **Itô-folyamatnak** nevezzük, és a folyamatra a következő diffegyenletes jelölést alkalmazzuk: $dX_t = K_t dt + H_t dW_t$.

A folyamat definíciójában $\int_0^t K_s ds$ a folyamat **korlátos változású része** és $\int_0^t H_s dW_s$ a folyamat **martingál része**. Azt is szoktuk mondani, hogy a $(W_t)_{t=0}^T$ Wiener-folyamat **hajtja meg** az Itô-folyamatot.

Az Itô-folyamatok egyértelműsége

1. Tegyük fel, hogy $\int_0^T |K_s| ds < \infty$ m.b., és legyen $M_t = \int_0^t K_s ds$. Ha az $(M_t)_{t=0}^T$ folyamat martingál, akkor $M_t \equiv 0$ m.b. Ebből következik, hogy $P(K_t = 0 \text{ m.m. } t\text{-re}) = 1$.
2. Egy Itô-folyamat pontosan akkor martingál, ha $K_t \equiv 0$ m.b.
3. Az Itô-folyamatok definíciójában szereplő $(K_t)_{t=0}^T$ és $(H_t)_{t=0}^T$ folyamat egyértelműen meghatározott.

Az Itô-formula (Itô-lemma)

Legyen $(X_t)_{t=0}^T$ Itô-folyamat, és a továbbiakban alkalmazzuk az Itô-folyamatok definíciójában szereplő jelöléseket. Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kétszer folytonosan differenciálható determinisztikus függvény, akkor

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s) H_s^2\, ds\,, \\ &= f(X_0) + \int_0^t \left[f'(X_s) K_s + \frac{1}{2} f''(X_s) H_s^2 \right] ds + \int_0^t f'(X_s) H_s\, dW_s\,, \end{aligned}$$

Ebből következik, hogy $(f(X_t))_{t=0}^T$ szintén Itô-folyamat.

Exponenciális Brown-mozgás

Tetszőleges $\mu \in \mathbb{R}$ és $\sigma > 0$ mellett oldjuk meg a következő sztochasztikus differenciálegyenletet: $dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t$.

Mutassuk meg, hogy az **exponenciális Brown-mozgás** a megoldás:

$$X_t = X_0 \exp\Big(\sigma W_t + (\mu - \sigma^2/2)\,t\Big)\,.$$

Egy martingál

Legyen $(X_t)_{t=0}^T$ adaptált folyamat, és legyen

$$\zeta_t = \int_0^t X_s\,dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t X_s^2\,ds\,.$$

Ekkor a $Z_t = e^{\zeta_t}$ folyamatra $Z_t = 1 + \int_0^t Z_s X_s\,dW_s$. Ebből következik, hogy $(Z_t)_{t=0}^T$ Itô-folyamat és martingál, továbbá $E(Z_t) = 1$.
Az $X_t \equiv a$ speciális esetben $Z_t = \exp(W_t - t/2)$. Ezzel a folyamattal már találkoztunk a Wiener-folyamat elemi tulajdonságainál.

Az Itô-formula általánosabb alakja

Legyen $(X_t)_{t=0}^T$ Itô-folyamat, és a továbbiakban alkalmazzuk az Itô-folyamatok definíciójában szereplő jelöléseket. Ha $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in C^{1,2}$, determinisztikus függvény, akkor

$$\begin{aligned} f(t, X_t) &= f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s)\, ds \\ &\quad + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s) H_s^2\, ds \\ &= f(0, X_0) + \int_0^t \left[\frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s) + \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) K_s + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s) H_s^2\right] ds \\ &\quad + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) H_s\, dW_s\,. \end{aligned}$$

A kapott azonosságot röviden így is lehet írni:

$$df(t, X_t) = \left[\frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t) + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t) K_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t) H_t^2\right] dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t) H_t\, dW_t$$

Az Ornstein–Uhlenbeck-folyamat

Tekintsük az úgynevezett Langevin-egyenletet: $dY_t = -\mu Y_t dt + \sigma dW_t$, és legyen Y_0 független a $(W_t)_{t=0}^T$ Wiener-folyamattól. Ennek az egyenletenek a megoldása az **Ornstein–Uhlenbeck-folyamat**:

$$Y_t = e^{-\mu t}\left(Y_0 + \sigma \int_0^t e^{\mu s} dW_s\right), \qquad t \geq 0\,.$$

A folyamat pontonkénti várható értéke és második momentuma:

$$EY_t = e^{-\mu t} EY_0\,, \qquad EY_t^2 = e^{-2\mu t} EY_0^2 + \frac{\sigma}{2\mu}(1 - e^{-2\mu t})\,.$$

Ha az Y_0 változó normális eloszlást követ 0 várható értékkel és $\sigma^2/(2\mu)$ szórásnégyzettel, akkor az $(Y_t)_{t=0}^T$ stacionárius Gauss-folyamat, és kovarianciafüggvénye:

$$\mathrm{Cov}(Y_t, Y_s) = \frac{\sigma^2}{2\mu} e^{-\mu(t-s)}\,.$$

Többdimenziós Itô-folyamatok

Az $X_t = (X_t^1, \dots, X_t^d)$, $t \in [0, T]$, folyamat ***d*-dimenziós Itô-folyamat**, ha minden komponense előáll a következő alakban:

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t K_s^i \, ds + \sum_{j=1}^r \int_0^t H_s^{i,j} \, dW_s^j ,$$

ahol

- $X_0 = (X_0^1, \dots, X_0^d)$ $\mathcal{F}_0$-mérhető;
- (K_t^i) és $(H_t^{i,j})$ adaptált folyamat minden i, j-re;
- $\int_0^T |K_t^i| dt < \infty$ és $\int_0^T (H_t^{i,j})^2 dt < \infty$ minden i, j-re;
- $(W_t^1), \dots, (W_t^r)$ független standard Wiener-folyamatok.

A fenti formula vektoros alakban is felírható:

$$\begin{bmatrix} X_t^1 \\ \vdots \\ X_t^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0^1 \\ \vdots \\ X_0^d \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} K_s^1 \\ \vdots \\ K_s^d \end{bmatrix} ds + \int_0^t \begin{bmatrix} H_s^{1,1} & \dots & H_s^{1,r} \\ \vdots & & \vdots \\ H_s^{d,1} & \dots & H_s^{d,r} \end{bmatrix} d \begin{bmatrix} W_t^1 \\ \vdots \\ W_t^r \end{bmatrix}$$

A többdimenziós Itô-formula

Legyen (X_t) d-dimenziós Itô-folyamat, és alkalmazzuk a definícióban bevezetett jelöléseket. Legyen továbbá $f : \mathbb{R}^{1+d} \to \mathbb{R}$, $f \in C^{1,2}$, determinisztikus függvény. Ekkor

$$
\begin{aligned}
f(t, X_t^1, \ldots, X_t^d) = f(0, X_0^1, \ldots, X_0^d) &+ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t} f(s, X_s^1, \ldots, X_s^d)\, ds \\
&+ \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i} f(s, X_s^1, \ldots, X_s^d)\, dX_s^i \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} f(s, X_s^1, \ldots, X_s^d) \sum_{k=1}^r H_s^{i,k} H_s^{j,k}\, ds\,.
\end{aligned}
$$

Parciális integrálás

Legyen (X_t, Y_t), $t \in [0, T]$, kétdimenziós Itô-folyamat, ahol

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s\, ds + \int_0^t H_s\, dW_s, \quad Y_t = Y_0 + \int_0^t L_s\, ds + \int_0^t G_s\, d\widetilde{W}_s\,.$$

1. Ha $(W_t) = (\widetilde{W}_t)$, tehát a két folyamatot azonos Wiener-folyamat hajtja meg, akkor

$$\int_0^t X_s\, dY_s = X_t Y_t - X_0 Y_0 - \int_0^t Y_s\, dX_s - \int_0^t G_s H_s\, ds\,.$$

2. Ha (W_t) és $(\widetilde{W}_t)$ független Wiener-folyamatok akkor

$$\int_0^t X_s\, dY_s = X_t Y_t - X_0 Y_0 - \int_0^t Y_s\, dX_s\,.$$

Martingál reprezentációs tétel

Tegyük fel, hogy az $(\mathcal{F}_t)$ szűrés teljesíti a szokásos feltételeket. Ekkor tetszőleges (M_t) folytonos és négyzetesen integrálható martingál esetén létezik olyan (Y_t) adaptált folyamat, melyre

$$M_t = M_0 + \int_0^t Y_s \, dW_s \,, \qquad t \in [0, T] \,.$$

Lévy tétele a Wiener-folyamat karakterizációjáról

Legyen $(M_t)_{t \geq 0}$ folytonos martingál. Ha $(M_t^2 - t)_{t \geq 0}$ szintén martingál, akkor $(M_t)_{t \geq 0}$ standard Wiener-folyamat.

A Poisson-folyamat

Az előző tételben a folytonossági feltevést nem lehet elhagyni. Legyen $(N_t)_{t \geq 0}$ Poisson-folyamat $\lambda = 1$ intenzitással, és legyen $M_t = N_t - t$, $t \geq 0$. Ekkor $(M_t)_{t \geq 0}$ és $(M_t^2 - t)_{t \geq 0}$ martingál, pedig $(M_t)_{t \geq 0}$ nem standard Wiener-folyamat.

Mértékváltás

Legyen adva egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező, és legyen a Q mérték abszolút folytonos a P-re nézve ($Q \ll P$), ami azt jelenti, hogy létezik olyan $M_\infty : \Omega \to \mathbb{R}$ mérhető függvény, (tehát véletlen változó,) melyre

$$Q(A) = \int_A M_\infty \, dP \,, \qquad A \in \mathcal{A} \,.$$

Ekkor azt mondjuk, hogy az M_∞ változó a Q mértéknek a P mértékre vett **Radon–Nikodym-deriváltja**: $M_\infty = dQ/dP$.

A két mérték szerinti várható értékek: $E_P X = \int_\Omega X dP$, $E_Q X = \int_\Omega X dQ$.

Tekintsünk egy $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ szűrést, és legyen $M_t = E_P[M_\infty | \mathcal{F}_t]$, $t \geq 0$, ami egy P-martingál. Ekkor igaz a következő állítás:

Kapcsolat a P- és a Q-martingálok között

Az $(X_t)_{t \geq 0}$ folyamat pontosan akkor P-martingál, ha az $(M_t X_t)_{t \geq 0}$ folyamat Q-martingál.

Girsanov-tétel

Legyen $(\theta_t)_{t=0}^T$ olyan adaptált folyamat, melyre $\int_0^T \theta_s^2 ds < \infty$ m.b., és tegyük fel, hogy

$$\Lambda_t = \exp\left(- \int_0^t \theta_s \, dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 \, ds \right), \qquad t \in [0, T],$$

P-martingál, ahol $(W_t)_{t=0}^T$ standard Wiener-folyamat a P mérték alatt. Legyen

$$Q_\theta(A) = \int_A \Lambda_T \, dP, \qquad A \in \mathcal{F}_T .$$

Ekkor $\widetilde{W}_t = W_t + \int_0^t \theta_s \, ds$, $t \in [0, T]$, standard Wiener-folyamat a Q mérték alatt.

Vegyük észre, hogy a definíció értelmében $dQ_\theta / dP = \Lambda_T$.

Folytonos idejű piacok

Folytonos idejű piacok

Egy $\{\Omega, \mathcal{A}, P, \mathbb{F}, \mathbb{B}, \mathbb{S}, T\}$ halmazt **folytonos idejű piacnak** nevezünk, ha

- $T \in (0, \infty)$ rögzített valós szám;
- $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=0}^T$ szűrés az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn;
- $\mathbb{B} = (B_t)_{t=0}^T$ determinisztikus folyamat, a **kötvény ára**;
- $\mathbb{S} = (S_t)_{t=0}^T$ Itô-folyamat (és ezáltal adaptált), a **részvény ára**.

Stratégiának nevezünk egy olyan $\pi_t = (\beta_t, \gamma_t)$, $t \in [0, T]$, adaptált folyamatot, melyre $\int_0^T |\beta_t| dt < \infty$ és $\int_0^T \gamma_t^2 dt < \infty$ m.b.

A **részvény diszkontált ára**, a stratégia **értékfolyamata** illetve a stratégia **diszkontált értékfolyamata**:

$$\overline{S}_t = \frac{B_0}{B_t} S_t\,, \qquad X_t = \beta_t B_t + \gamma_t S_t\,, \qquad \overline{X}_t = \frac{B_0}{B_t} X_t\,, \qquad t \in [0, T]\,.$$

A továbbiakban legyen $B_t = B_0 e^{rt}$, ahol $r > 0$ determinisztikus.

Önfinanszírozó stratégiák, arbitrázs

Azt mondjuk, hogy a $(\pi_t)_{t=0}^T$ stratégia **önfinanszírozó**, ha

$$dX_t = \beta_t dB_t + \gamma_t dS_t.$$

Egy önfinanszírozó stratégia **arbitrázsstratégia**, ha $X_0 = 0$ m.b., $X_T \geq 0$ m.b., és $P(X_T > 0) > 0$.

A Q valószínűségi mértéket **ekvivalens martingálmértéknek** nevezzük, ha ekvivalens a P mértékkel, és $(\overline{S}_t)_{t=0}^T$ Q-martingál.

Az önfinanszírozó stratégiák és arbitrázsmentesség

Tegyük fel, hogy a folytonos idejű piacon $B_t = B_0 e^{rt}$. Ekkor teljesülnek az alábbiak:

1. Egy stratégia pontosan akkor önfinanszírozó, ha $d\overline{X}_t = \gamma_t d\overline{S}_t$.
2. Ha a piacon létezik ekvivalens martingálmérték, akkor a piac **arbitrázsmentes**, tehát nem létezik arbitrázsstratégia.

Véletlen követelés, fedezeti stratégia

Folytonos idejű piacon egy $\mathcal{F}_T$-mérhető f_T véletlen változót **véletlen követelésnek** nevezünk. Egy $(\pi_t)_{t=0}^T$ önfinanszírozó stratégia **fedezeti stratégia** a véletlen követelésre x kezdőtőkével, ha $X_0 = x$ és $X_T \geq f_T$ majdnem biztosan. Ilyenkor azt mondjuk, hogy a stratégia egy (f_T, x)-fedezet. Az f_T **követelés igazságos ára**:

$$C_T(f_T) = \inf \left\{ x \in \mathbb{R} : \text{ létezik } (f_T, x)\text{-fedezet} \right\}.$$

Véletlen követelések igazságos ára

Ha a folytonos idejű piacon létezik Q ekvivalens martingálmérték, akkor

$$C_T(f_T) \geq E_Q\left(e^{-rT} f_T\right).$$

A Black–Scholes-modell

Legyen $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma, r > 0$. A **Black–Scholes-modell** egy olyan folytonos idejű piac, ahol a kötvény és a részvény ára a következő dinamikát követi:

$$dB_t = rB_t\,dt, \qquad B_0 = 1,$$

$$dS_t = \mu S_t\,dt + \sigma S_t\,dW_t, \qquad S_0 = S_0.$$

A Black–Scholes-modell tulajdonságai

1. A kötvény és a részvény ára explicit formulával:

$$B_t = e^{rT}, \qquad S_t = S_0 \exp\left(\sigma W_t + (\mu - \sigma^2/2)t\right).$$

2. Legyen $\theta = (\mu - r)/\sigma$ és $\Lambda_t = \exp(-\theta W_t - \theta^2 t/2)$. Ekkor a

$$Q(A) = \int_A \Lambda_T\,dP, \qquad A \in \mathcal{A},$$

mérték ekvivalens martingálmérték a Black–Scholes-piacon. Ebből következik, hogy a piac arbitrázsmentes.

Tekintsünk egy f_T véletlen követelést, és legyen $N_t = E_Q[e^{-rT} f_T | \mathcal{F}_t]$, $t \in [0, T]$. Ekkor a martingál reprezentációs tétel értelmében létezik olyan $(Y_t)_{t=0}^T$ adaptált folyamat, hogy

$$N_t = N_0 + \int_0^t Y_s \, d\widetilde{W}_s \, .$$

Árazás és fedezeti stratégia

A Black–Scholes-modellben egy tetszőleges f_T véletlen követelés igazságos ára $C_T(f_T) = E_Q[e^{-rT} f_T]$, és a következő stratégia egy tökéletes fedezet:

$$\beta_t = N_t - \frac{Y_t}{\sigma} \, , \qquad \gamma_t = \frac{Y_t e^{rt}}{\sigma S_t} \, , \qquad t \in [0, T] \, .$$

Egy egyben azt is jelenti, hogy a Black–Scholes-piac teljes.

A Black–Scholes-formula

A Black–Scholes-modellben a K kötési árhoz tartozó európai call opció igazságos ára

$$C_T(K) = S_0\Big(1 - \Phi(\gamma - \sigma\sqrt{T})\Big) - e^{-rT}K\Big(1 - \Phi(\gamma)\Big),$$

ahol

$$\gamma = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[\ln\frac{K}{S_0} - \left(\frac{\sigma^2}{2} - r\right)T\right].$$

A fenti formula 1973-ból származik, és a szerzők 1997-ben kaptak érte közgazdasági Nobel-díjat. Jegyezzük meg, hogy a formulát nem az általunk bemutatott módon bizonyították be, ugyanis a piacok matematikájának az elmélete akkor még nem volt kidolgozva. Black és Scholes közgazdasági megfontolások alapján levezette, hogy a $V(t, S)$ árfüggvény kielégíti az alábbi parciális differenciálegyenletet, és a fenti formula ennek a megoldása:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0.$$

Markov-folyamatok

Markov-folyamatok

Egy $(X_t)_{t\geq 0}$ sztochasztikus folyamatot **Markov-folyamatnak** nevezünk, ha tetszőleges $\tau \geq t \geq 0$ időpontok esetén

$$P\big(X_\tau \in B \mid X_s, s \leq t\big) = P\big(X_\tau \in B \mid X_t\big), \qquad B \in \mathcal{B}.$$

Ekkor a

$$p_{\tau,t}(B|x) = P\big(X_\tau \in B \mid X_t = x\big)$$

valószínűségeket **átmenetvalószínűségeknek** nevezzük. A Markov-folyamat **időhomogén**, ha $p_{\tau,t}(B|x) = p_{\tau-t,0}(B|x) =: p_{\tau-t}(B|x)$.

Chapman–Kolmogorov-egyenletek

Ha $(X_t)_{t\geq 0}$ Markov-folyamat, akkor tetszőleges $0 \leq t \leq s \leq \tau$ esetén

$$p_{\tau,t}(B|x) = \int_{\mathbb{R}} p_{\tau,s}(B|y)p_{s,t}(dy|x).$$

Infinitezimális generátor

Tegyük fel, hogy az $(X_t)_{t\geq 0}$ **Markov-folyamat** időhomogén és sztochasztikusan folytonos a 0 pontban, tehát $X_t \to_P X_0$, amint $t \to 0$. Legyen továbbá

$$P_x(X_t \in B) = P\big(X_t \in B \mid X_0 = x\big)\,, \qquad E_x f(X_t) = E\big[f(X_t) \mid X_0 = x\big]\,.$$

A folyamat **infinitezimális generátora** a következő formulával definiált $f \mapsto Sf$ operátor:

$$(Sf)(x) = \lim_{t\to 0} \frac{E_x f(X_t) - f(x)}{t}\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Az operátort azon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényekre definiáljuk, melyekre ez a határérték minden x valós szám esetén létezik. Az S operátor értelmezési tartományát jelölje $D(S)$. Megmutatható, hogy a korlátos és mérhető függvények elemei az értelmezési tartománynak.

Kolmogorov-egyenletei

Legyen $(X_t)_{t\geq 0}$ időhomogén Markov-folyamat, mely sztochasztikusan folytonos a 0 pontban. Egy μ mérték esetén $S^*\mu$ jelölje azt a mértéket, melyre

$$\int_{\mathbb{R}} (Sf)(y)\mu(dy) = \int_{\mathbb{R}} f(y)(S^*\mu)(dy)\,.$$

Az S^* operátort az S **adjungáltjának** nevezzük. Ekkor megfelelő további feltételek mellett teljesülnek az alábbiak:

1. **Kolmogorov visszafelé haladó egyenlete.**

$$\frac{\partial}{\partial t} p_t(B|x) = \Big((Sp_t)(B|\cdot)\Big)(x)\,.$$

2. **Kolmogorov előrefelé haladó egyenlete.**

$$\frac{\partial}{\partial t} p_t(B|x) = \Big((S^* p_t)(\cdot|x)\Big)(B)\,.$$

A Poisson-folyamat

A $\lambda = 1$ intenzitású Poisson-folyamat időhomogén Markov-folyamat, melynek átmenetvalószínűségei

$$p_t(y|x) = \frac{e^{-1}}{(y-x)!}, \qquad x, y \in \mathbb{N}_0, \ y \geq x.$$

A folyamat infinitezimális generátora:

$$(Sf)(x) = f(x+1) - f(x), \quad x \in \mathbb{N}_0.$$

A Kolmogorov hátra egyenlet:

$$\frac{\partial}{\partial t} p_t(B|x) = p_t(B|x+1) - p_t(B|x),$$

Az előre egyenlet:

$$\frac{\partial}{\partial t} p_t(B|x) = p_t(B-1|x) - p_t(B|x).$$

A standard Wiener-folyamat

A standard Wiener-folyamat időhomogén Markov-folyamat, melynek átmenet-sűrűségfüggvénye illetve átmenetvalószínűségei:

$$\rho_t(y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(\frac{(y-x)^2}{(2t)}\right), \qquad p_t(B|x) = \int_B \rho_t(y|x)\,dy\,.$$

A folyamat generátora: $(Sf)(x) = f''(x)/2, \quad f \in C^2, \quad x \in \mathbb{R}.$

A hátra illetve az előre egyenlet:

$$\frac{\partial}{\partial t} p_t(B|x) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} p_t(B|x)\,, \qquad \frac{\partial}{\partial t} p_t(y|x)dy = \frac{\partial^2}{\partial y^2} p_t(y|x)dy\,.$$

Mindez a sűrűségfüggvényekre átírva:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_t(B|x) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho_t(B|x)\,, \qquad \frac{\partial}{\partial t} \rho_t(y|x)dy = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \rho_t(y|x)\,.$$

Diffúziós folyamatok

Diffúziós folyamatnak nevezünk egy olyan $(X_t)_{t\geq 0}$ sztochasztikus folyamatot, mely megfelelő $\mu, \sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények mellett megoldása a következő egyenletnek: $dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$.

Diffúziós folyamatok infinitezimális generátora

Diffúziós folyamat esetén

$$(Sf)(x) = \mu(x)f'(x) + \sigma(x)\frac{f''(x)}{2}, \qquad f \in C^2, \; x \in \mathbb{R}.$$

A Kolmogorov hátra egyenlet:

$$\frac{\partial}{\partial t}p_t(B|x) = \mu(x)\frac{\partial}{\partial x}p_t(B|x) + \sigma^2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}p_t(B|x).$$

Az előre egyenlet a sűrűségfüggvényre: $p_t(B|x) = \int_B \rho_t(y|x)dy$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_t(B|x) = -\frac{\partial}{\partial y}\Big(\mu(y)\rho_t(y|x)\Big) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big(\sigma^2(y)\rho_t(y|x)\Big).$$