Pénzügyi feladatok

Diszkrét idő

1. **a.** Legyen $Z_1, Z_2, \ldots$ független és azonos eloszlású változó véges várható értékkel, és legyen $X_n = Z_1 + \cdots + Z_n$, $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_1, \ldots, Z_n)$, $n \geq 0$. Milyen feltételek mellett lesz az $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ folyamat martingál, szubmartingál illetve szupermartingál az $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ szűrésre nézve.

b. Legyen $Z_1, Z_2, \ldots$ független és azonos eloszlású változó véges pozitív várható értékkel, és legyen $X_0 = 1$, $X_n = Z_1 \cdots Z_n$, $\mathcal{F}_0 = \{0, \Omega\}$, $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_1, \ldots, Z_n)$, $n \geq 1$. Milyen feltételek mellett lesz az $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ folyamat martingál, szubmartingál illetve szupermartingál a $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ szűrésre nézve.

c. Legyen X tetszőleges integrálható változó, és tekintsünk egy $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ szűrést a valószínűségi mezőn. Mutassuk meg, hogy az $X_n = E[X|\mathcal{F}_n]$, $n \geq 0$, sorozat martingál a megadott szűrésre nézve.

2. Legyen $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ a szimmetrikus folyongás az egész számok halmazán. Adjunk meg egy olyan $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ determinisztikus valós sorozatot, hogy az alábbi folyamat martingál legyen a bolyongás által generált szűrésre nézve:

a. $Y_n = X_n^2 - a_n$, $n = 0,1,\ldots$;

b. $Y_n = \exp(X_n - a_n)$, $n = 0,1,\ldots$

3. Tekintsük a kétlépéses bináris piacot a következő paraméterekkel: $r_1 = 10\%$, $r_2 = 0$, $a_1 = 5\%$, $b_1 = 20\%$, $a_2 = -10\%$, $b_2 = 10\%$, $B_0 = S_0 = 1$. Arbitrázsmentes a piac? Árazzuk be az előadáson definiált look-back vételi opciót, illetve adjunk fedezeti stratégiát.

4. Adott egy egylépéses bináris piac $r=10\%$, $a=0$, $b=20\%$, $B_0=S_0=10$, paraméterekkel. A piacon jelenleg $K = 11$ áron lehet forward szerződést kötni a részvényre. Tehát lehetőség van olyan szerződést kötni, hogy az 1 időpontban 11-es áron veszünk 1 db részvény, illetve olyanra is, hogy ugyanezen az áron eladunk 1 db részvényt. Ez a szerződés mindkét félre kötelező érvényű, de maga a szerződés megkötése ingyenes. Mit tegyünk? (Fedezeti stratégiát is kérek.)

5. Ilyen nem volt az órán, de érdekes játék. Tekintsünk egy olyan egylépéses piacot, melyen két(!) független részvény van. Legyen ezeknek az ára az $n=0,1$ időpontokban $S_n^{(1)}$ és $S_n^{(2)}$. Feltehető, hogy $S_0^{(1)} = S_0^{(2)} = B_0 = 10$, és mindkét részvény ára a bináris piac szabálya szerint alakul $r=0$, $a=-10\%$, $b=20\%$ paraméterekkel. Kibocsájtunk egy olyan call opciót, melyben kötelezettséget vállalunk arra, hogy $K = 11$ kötési áron eladunk 1 darabot az opció tulajdonosának abból a részvényből, amelyikből ő ezt szeretné. Árazzuk be ezt az opciót, és adjunk fedezeti stratégiát. Van tökéletes fedezet? Matematikai szempontból mi a baj ezzel a piaccal? Hogyan módosul a feladat megoldása, ha kizárjuk annak a lehetőségét, hogy egyszerre mindkét részvény ára lefelé változik?

6. (Lehet, hogy ez a feladat volt gyakorlaton.) Egylépéses piacon legyen $B_1 = (1+r)B_0$, és legyen C a K kötési árú európai call opció arbitrázsmentes ára. Mutassuk meg, hogy $C \geq (S_0 - K/(1+r))^+$.

7. Határozzuk meg az előadáson definiált buttery spread illetve a straddle kifizetési függvényét. Milyen kapcsolat van a buttery spread és a straddle arbitrázsmentes ára között? (Igen, ez utóbbi triviális.)

8. Egylépéses piacon a részvényre kötött európai call opció arbitrázsmentes ára monotonitás szempontjából hogyan függ az r kamatrátától, a K kötési ártól és az S_0 részvényártól?

9. Digitális opciónak nevezzük azokat az opciókat, melyeknél a kifizetési függvény csak a 0 és az 1 értéket veszi fel. Tekintsünk most két olyan digitális opciót, mely azonos részvényre szól azonos T lejárati idővel. Az egyik akkor fizet, ha a részvény ára a T időpontban elér egy adott K kötési árat, míg a másik pont akkor fizet, ha a részvény ára ezen K kötési ár alatt marad. Milyen matematikai kapcsolat írható fel a két opció arbitrázsmentes ára között?

10. Határozzuk meg a diszkrét idejű szimmetrikus bolyongás Doob-felbontását.

11. Ehhez a feladathoz elég a BSc-s ismeretanyag, a fogalmakkal kellképben lenni.

- **a.** Legyen a μ illetve a ν valószínűségi mérték a standard normális illetve az 1 paraméterű exponenciális eloszlás a valós egyenesen. Ekvivalens a két mérték egymással? Ha az egyik abszolút folytonos a másikra nézve, akkor adjuk meg a kapcsolatos Radon-Nykodim-deriváltat. (Tipp: Használjuk ki, mindkét mérték abszolút folytonos a Lebesgue-mértékre nézve.)
- **b.** Legyen $X : \Omega \to \mathbb{R}$ standard normális eloszlású változó az $(\Omega, \mathcal{A} = \sigma(X), P)$ val. mezőn. Definiáljunk egy olyan Q val. mértéket ezen a mezőn, mely alatt X exponenciális eloszlású 1 paraméterrel. Adjuk meg a dQ/dP Radon-Nykodim-deriváltat is.

Folytonos idő

A feladatsorban (W_t) Wiener-folyamat, és az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező a generált filtrációval van ellátva.

1.
- **a.** Mutassuk meg, hogy az $X_t = W_t^4 - 6tW_t^2 + 3t^2$ folyamat Ito-folyamat. Az (X_t) folyamat martingál?
- **b.** Legyen $f = f(t,x) \in C^{1,2}$. Milyen feltételek mellett lesz a $W_t^2 + f(t, W_t)$ folyamat martignál?

2. Tekintsük az Ornstein–Uhlenbeck-folyamatot:

$$X_t = e^{-t}x + \int_0^t e^{-(t-s)} dW_s$$

a. Mutassuk meg, hogy az OU-folyamat megoldása az alábbi sztochasztikus differenciálegyenletnek:

$$dX_t = -X_t dt + dW_t, \qquad X_0 = x.$$

(Tipp: Alkalmazzuk az Ito-formulát a diffegyenlet (X_t) megoldására és az $f(t,x) = e^t x$ függvényre.)

b. Adjuk meg az X_t változó várható értékét és szórását.

c. Mutassuk meg, hogy $\exp(X_t^2 - t)$ martingál. (Tipp: Mutassuk meg, hogy ez az folyamat Ito-folyamat.)

d. Tetszőleges α és β valós számok esetén oldjuk meg a következő sztochasztikus differenciálegyenletet:

$$dX_t = -(\alpha X_t + \beta)dt + dW_t, \qquad X_0 = x.$$

3. Az Ito-formula alkalmazásával írjuk fel az alábbi integrálokat $g(t, W_t) + \int_0^t h(s, W_s)ds$ alakban, ahol g és h megfelelő determinisztikus függvények.

a. $\int_0^t W_s^2 dW_s$

b. $\int_0^t \sin W_s dW_s$

4. Legyen (S_t) a részvény ára a Black-Scholes-modellben, amit a (W_t) Wiener-folyamat hajt meg, továbbá legyen $(\tilde{W}_t)$ egy ettől független másik Wienet folyamat. Fejezzük ki a $d(S_t W_t)$ és a $d(S_t \tilde{W}_t)$ differenciálokat a dt, dW_t és $d\tilde{W}_t$ differenciálok segítségével.

5. Tekintsük a $dX_t = \sqrt{X_t + 1} dW_t$, $X_0 = 0$, dinamikával definiált folyamatot. Adjuk meg az EX_t és az EX_t^2 várható értéket. (Feltehető, hogy $E\int_0^t X_s ds = \int_0^t EX_s ds$.)

6. Legyen (W_t) Wiener-folyamat a P valószínűségi mérték alatt. Adjunk meg egy olyan Q valószínűségi mértéket, mely ekvivalens a P-vel, és ami alatt az $X_t = W_t + \sin t$, $0 \le t \le T$, folyamat Wiener-folyamat. Az ekvivalenciát kérem bizonyítani.