

A véletlen matematikája

Szűcs Gábor

Szegedi Tudományegyetem, Bolyai Intézet

Amit mindenki tanul:

- Szemlélet kialakítása: véletlen jelenségek, valószínűség.
- A valószínűség kombinatorikus kiszámítási módja.
- Binomiális eloszlás.
- Statisztikai alapfogalmak.

Matematika tagozatos osztályok, szakkör, stb.:

- A valószínűség általános definíciója.
- Véletlen jelenségek végtelen sok kimenetellel.
- Feltételes valószínűség, események függetlensége.
- Valószínűségi változók.
- Matematikai statisztika.

A valószínűesszámítás rövid története

- Már az ókori görögök is? Filozófiai okokból tipikusan nem foglalkoztak véletlen jelenségekkel, nem történt elmélet építés.
- 16.–17. század: Nagyrészt szerencsejátékokkal kapcsolatos feladatok.
- 18.–19. század: Lassú fejlődés, melyet nagyrészt az alkalmazások motiváltak. (Bernoulli, Laplace, Bayes, Gauss)
- 19. század vége – 20. század eleje: A valószínűesszámítás kezd önálló tudományterületté válni. Megjelennek az első általánosabb tételek. (Markov, Csebisev, Lévy)
- Ezzel párhuzamosan fejlődésnek indul a matematikai statisztika.
- 1933: Andrej Nyikolajevics Kolmogorov. „A valószínűesszámítás alapfogalmai” című művében bevezeti a róla elnevezett axiómákat. Azóta mindenki ezt az axiómarendszert használja.
- Az élet egyre több területén alkalmaznak sztochasztikus modelleket: biztosításmatematika, tőzsdei matematika, időjárás és természeti katasztrófák modellezése, orvosi kutatások, mesterséges intelligencia.

A valószínűség kombinatorikus modellje

A **valószínűségszámítás** (másnéven **sztochasztika**) a matematikának a véletlen jelenségekkel foglalkozó területe. A fontosabb fogalmak:

- **Véletlen jelenség:** Olyan jelenség, melynek lefolyását az általunk figyelembe vehető tényezők nem határozzák meg egyértelműen.
- **Véletlen kísérlet, valószínűségi kísérlet:** Egy véletlen jelenség megfigyelése. Nincs jelentősége annak, hogy mi idézzük elő, vagy csak külső megfigyelők vagyunk.
- **Tömegjelenség:** Olyan jelenség, melyet tetszőleges sokszor meg lehet figyelni változatlan körülmények között. Egyes tankönyvek ezt is beleveszik a véletlen kísérlet definíciójába.
- **Kimenetek:** A véletlen kísérlet lehetséges eredményei. (Jelük: ω .)
- **Események:** A kísérlet aktuális kimeneteléhez kapcsolódó állítások. Egy esemény **bekövetkezik**, ha a kísérlet aktuális végrehajtásakor olyan kimenetelt kapunk, melyre ez az állítás igaz.
- **Esemény valószínűsége:** Ha sokszor megismételjük a kísérletet, akkor az esemény a végrehajtások mekkora hányadában következik be. (Ez egy rossz definíció, de egyelőre megteszi...)

Feladat. Feldobunk egy szabályos dobókockát. Mik a kísérlet lehetséges kimenetelei? Hány kimenetel létezik? Mely kimenetek esetén következnek be az alábbi események, és mennyi a valószínűségük?

- *Hatost dobunk.*
- *Páratlan számot dobunk.*

Összesen 6 darab kimenetel létezik: 1, 2, 3, 4, 5, 6

Az első esemény csak a 6-os kimenetel esetén következik be.

$$P(\text{hatost dobunk}) = 1/6$$

A második esemény a 1-es, a 3-as és a 5-ös kimenetel esetén következik be.

$$P(\text{páratlant dobunk}) = P(\text{egyes}) + P(\text{hármás}) + P(\text{ötös}) = 3 \cdot 1/6 = 3/6$$

Laplace-formula; a valószínűség kombinatorikus kiszámítási módja

Tegyük fel, hogy a véletlen kísérletnek véges sok kimenetele van, és minden kimenetelnek azonos a valószínűsége. Ekkor egy tetszőleges A esemény valószínűsége a következő formulával számolható ki:

$$P(A) = \frac{\text{kedvező kimenetek száma}}{\text{összes kimenetek száma}}$$

Feladat. Feldobunk egy szabályos dobókockát kétszer egymás után. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 7?

1. megközelítés. A lehetséges összegek: 2, 3, ..., 12.

$$P(\text{a dobott számok összege } 7) = 1/11$$

Ez nincs összhangban a hétköznapi tapasztalatokkal! Mit rontottunk el?

2. megközelítés. Minden számpárt különböző kimenetelnek tekintünk. Ez $6 \cdot 6 = 36$ kimenetelt jelent, és ezeknek már azonos a valószínűsége.

$$P(\text{a dobott számok összege } 7) = 6/36 = 1/6$$

Ez összhangban van a hétköznapi tapasztalatokkal.

	1	2	3	4	5	6
1						7
2					7	
3				7		
4			7			
5		7				
6	7					

Feladat. Hogyan változik a megoldás az alábbi esetekben?

- a. Egyszerre dobunk fel két különböző színű kockát.
- b. Egyszerre dobunk fel két azonos színű kockát.

Fontos. A természet az elemi részecskéknél nagyobb objektumokat mindig meg tudja különböztetni egymástól.

Feladat. (Születésnap paradoxon.) Egy 30 fős osztályban mennyi az esélye annak, hogy van legalább 2 tanuló, aki az évnek azonos napján született? Feltehető, hogy az osztályban nincsenek ikrek!

Képzeljük el, hogy a tanulók ábécé sorrendben felírják a születésnapjukat egy lapra. A lap lehetséges kitöltései az egyes esetek.

Összes eset: $365 \cdot 365 \cdot \dots \cdot 365 = 365^{30}$

Rossz esetek (mindenki különböző napon született): $365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot 336$

Kedvező esetek: $365^{30} - 365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot 336$

A kérdéses valószínűség:

$$\frac{365^{30} - 365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot 336}{365^{30}} \approx 0.706 = 70,6\%$$

Feladat. Hány tanuló esetén éri el az $1/2$ -et annak a valószínűsége, hogy van legalább két tanuló, aki azonos napon született?

Feladat. (Cardano, 1564.) Hányszor dobjunk egy szabályos kockával, ha az a célunk, hogy legalább $1/2$ legyen annak a valószínűsége, hogy a dobások között van legalább egy hatos?

Feladat. (Galilei, 1620.) Ha feldobunk három szabályos dobókockát, akkor az egyes összegek többféle kombinációban is előállhatnak. Például az 5 kétféleképpen állhat elő összegként: $1 + 1 + 3 = 5$ és $1 + 2 + 2 = 5$.

Azt már Galilei előtt is tudták, hogy a 9 és a 10 ugyanannyi (hatféle) különböző kombinációban áll elő összegként. Ezek alapján azt várnánk, hogy a 9 és a 10 azonos eséllyel lesz a dobott számok összege. Viszont a gyakorlati tapasztalat azt mutatja, hogy a 9-es összeg gyakrabban fordul elő, mint a 10-es összeg. Mi ennek a magyarázata? Mennyi az 9-es illetve a 10-es összeg pontos valószínűsége?

Feladat. (Chevalier de Méré, Pascal, 1654.) Az alábbiak közül melyiknek nagyobb a valószínűsége:

- 4 alkalommal feldobva egy szabályos dobókockát legalább egyszer hatost kapunk;
- 24 alkalommal feldobva két szabályos dobókockát legalább egyszer dupla hatost kapunk?

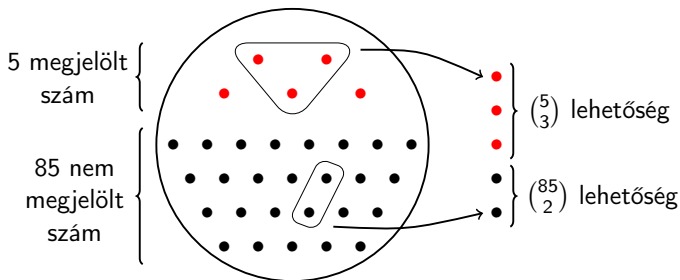
Feladat. Mik az ötöslottó sorsolás lehetséges kimenetelei? Hány lehetséges kimenetele van a kísérletnek?

A kimenetek a lehetséges számötösök. Összes eset: $\binom{90}{5}$.

Feladat. Egy szelvénnel játszunk az ötöslottón. Mennyi annak az esélye, hogy pontosan 3 találatot érünk el?

Pontosan 3 találatot akkor érünk el, ha a mi számaink közül 3-at, a többi szám közül pedig 2-őt húznak ki. A kérdéses valószínűség:

$$P(\text{pontosan 3 találat}) = \frac{\text{kedvező}}{\text{összes}} = \frac{\binom{5}{3} \binom{85}{2}}{\binom{90}{5}} \approx \frac{1}{1231}.$$



Feladat. Mennyi annak az esélye, hogy pontosan k találatot érünk el?
Mennyi az esélye, hogy nyerünk valamennyi pénzt?

Az előző oldal gondolatmenetével:

$$P(\text{pontosan } k \text{ találat}) = \frac{\text{kedvező}}{\text{összes}} = \frac{\binom{5}{k} \binom{85}{5-k}}{\binom{90}{5}}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Találat	Valószínűség
5	$\approx 1 : 44.000.000$
4	$\approx 1 : 100.000$
3	$\approx 1 : 1000$
2	$\approx 2,25\%$
1	$\approx 23\%$
0	$\approx 74,6\%$

Pénzt akkor nyerünk, ha elérünk legalább 2 találatot:

$$P(\text{nyerünk pénzt}) = \frac{\binom{5}{2} \binom{85}{3} + \binom{5}{3} \binom{85}{2} + \binom{5}{4} \binom{85}{1} + 1}{\binom{90}{5}} \approx 2,33\%.$$

Műveletek eseményekkel, eseményalgebrák

Eseménytér: A lehetséges kimenetek halmaza. (Jele: Ω vagy U)

Az események, mint logikai állítások, reprezentálhatóak az eseménytér részhalmazaiival: összegyűjtjük azokat a kimeneteket, melyekre az adott esemény bekövetkezik

- Ennek a reprezentációnak az az oka, hogy a valószínűségi számítás sok eszközt átemel a mértékelméletből. Ehhez viszont halmazokra van szükség, nem logikai állításokra.
- A halmazokkal történő reprezentációnak didaktikai előnye is van: ez egy jó vizualizációs eszköz, le lehet „rajzolni” az eseményeket.

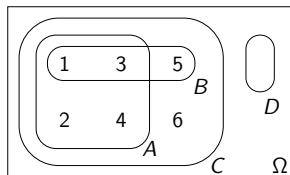
Feladat. Feldobunk egy szabályos dobókockát. Mely halmazokkal reprezentálhatóak az alábbi események?

A = 5-nél kisebbet dobunk = $\{1, 2, 3, 4\}$

B = páratlan számot dobunk = $\{1, 3, 5\}$

C = egész számot dobunk = Ω

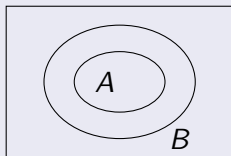
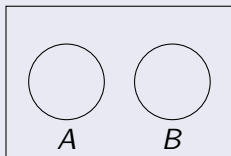
D = negatív számot dobunk = $\emptyset$



Eddig számunkra egy esemény egy logikai állítás volt, melyet egy halmazzal reprezentáltunk. A valószínűségelméletben az esemény maga a halmaz.

Nevezetes események, kapcsolat az események között

- Az Ω eseményt **biztos eseménynek** nevezzük, az $\emptyset$ esemény pedig a **lehetetlen esemény**.
- Az **elemi esemény** olyan esemény, melyben pontosan egy kimenetel található: $A = \{\omega\}$.
- Azt mondjuk, hogy A és B **kizáró** események, ha diszjunktak, tehát $A \cap B = \emptyset$. A kizáró események „kizárják” egymást, nem következhetnek be egyszerre.
- Azt mondjuk, hogy az A esemény **maga után vonja** a B eseményt, ha $A \subset B$. Jelentése: ha A bekövetkezik, akkor B is bekövetkezik; tehát $A \Rightarrow B$.

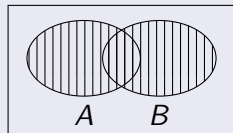


Műveletek eseményekkel

Legyenek A és B események!

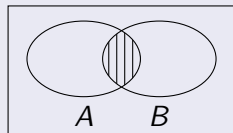
- Események **összege**:

$$A + B = A \text{ vagy } B = A \cup B$$



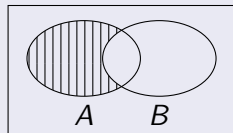
- Események **szorzata**:

$$A \cdot B = A \text{ és } B = A \cap B$$



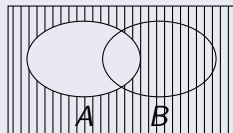
- Események **különbsége**:

$$A - B = (A \text{ igen, de nem } B) = A \setminus B$$



- Egy esemény **tagadása**:

$$-A = \text{nem } A = \bar{A}$$



Tekintsünk egy tetszőleges véletlen kísérletet. Láttuk, hogy

- az eseménytér (Ω) a lehetséges kimenetek halmaza;
- az események halmazok, az eseménytér részhalmazai;
- az eseményeken pedig műveleteket lehet végrehajtani.

Természetes követelmény: az eseményalgebrai műveletek révén kapott halmazok legyenek események!

Jelölés: $\mathcal{P}(\Omega)$ az Ω halmaz hatványhalmaza.

Eseményalgebra

Legyen $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ tetszőleges halmazrendszer. Az $\mathcal{A}$ halmazrendszer **eseményalgebra** az Ω halmazon, ha teljesülnek az alábbi tulajdonságok:

- $\Omega \in \mathcal{A}$;
- az $\mathcal{A}$ halmazrendszer zárt az elemi halmazelméleti műveletek megszámlálható sokszor való alkalmazására.

Megjegyzések:

- Ha $\mathcal{A}$ eseményalgebra, akkor $\emptyset = \overline{\Omega} \in \mathcal{A}$.
- Ha Ω véges halmaz, akkor elég a véges sok műveletre való zártságot megkövetelni.

Események

Tekintsünk egy tetszőleges véletlen kísérletet, és legyen Ω az eseménytér. **Eseményeknek** nevezzük egy *megfelelően megválasztott* $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ eseményalgebra elemeit.

Melyik eseményalgebrát válasszuk? Érdemes a lehető legbővebbet!

- Látni fogjuk, hogy valószínűsége csak eseményeknek van. Ami nem esemény, annak formálisan nem létezik valószínűsége.
- Véges vagy megszámlálhatóan végtelen számosságú eseménytér $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ mindig jó választás.
- Viszont nem megszámlálható eseménytér mellett látni fogunk olyan példát, amikor nem minden részhalmaz esemény!

Feladat. Tegyük fel, hogy a kísérletnek véges sok lehetséges kimenetele van. Legfeljebb hány különböző esemény definiálható a kísérlethez?

Legyen $N = |\Omega|$. Ekkor a hatványhalmaz számossága: $|\mathcal{P}(\Omega)| = 2^N$. Legfeljebb 2^N különböző esemény definiálható.

Feladat. Tekintsük azt a kísérletet, hogy feldobunk egy dobókockát. Mi a legnagyobb és a legkisebb elemszámú eseményalgebra az eseménytéren? Adjunk meg egy 4-elemű eseményalgebrát!

Eseménytér: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $|\Omega| = 6$.

- Legnagyobb elemszámú (legbővebb) eseményalgebra: $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$
Számossága: $|\mathcal{A}| = 2^6 = 64$.
- Legkisebb számosságú (legsűkebb) eseményalgebra: $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$
Számossága: $|\mathcal{A}| = 2$
- Tekintsük például a következő eseményeket:
 $B = \text{páratlan számot dobunk} = \{1, 3, 5\}$
 $\overline{B} = \text{páros számot dobunk} = \{2, 4, 6\}$
Példa 4-elemű eseményalgebrára: $\mathcal{A} = \{\Omega, \emptyset, B, \overline{B}\}$

Fontos. Valószínűsége csak eseményeknek van!

A valószínűség definíciója és tulajdonságai

Bekövetkezési gyakoriság és relatív gyakoriság

Tekintsünk egy kísérletet, és egy ehhez kapcsolódó A eseményt. Hajtsuk végre a kísérletet egymás után n alkalommal!

- **Bekövetkezési gyakoriság:** $k_n(A)$ = hányszor következett be az A esemény az n ismételés során.
- **Relatív gyakorisága:** $r_n(A) = k_n(A)/n$ = a végrehajtások mekkora hányadában következett be az A esemény.

Észrevételek:

- A valószínűség hétköznapi jelentése: a kísérletet sokszor végrehajtva ilyen arányban következik be a vizsgált esemény.
- Ez matematikailag nem pontos! Egy szabályos pénzérmét $n = 101$ alkalommal feldobva a fej aránya (relatív gyakorisága) nem lehet $1/2$.
- Tapasztalati tény: a kísérletet sokszor végrehajtva a relatív gyakoriság egy valós szám körül ingadozik, közelít hozzá. Ezt a számot nevezzük valószínűségnek: $r_n(A) \approx P(A)$.

Milyen tulajdonságokat várunk el a valószínűségtől?

- Egy A esemény relatív gyakorisága mindig 0 és 1 közé esik.

Elvárás: Legyen $0 \leq P(A) \leq 1$ minden A eseményre.

- A biztos esemény relatív gyakorisága:

$$r_n(\Omega) = \frac{k_n(\Omega)}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

Elvárás: A biztos esemény valószínűsége legyen $P(\Omega) = 1$.

- Ha A és B kizáró események, akkor

$$r_n(A \cup B) = \frac{k_n(A \cup B)}{n} = \frac{k_n(A) + k_n(B)}{n} = r_n(A) + r_n(B)$$

Hasonló módon mutatható meg, hogy ha $A_1, A_2, \dots$ páronként kizáró eseményeknek véges vagy végtelen sorozata, akkor

$$r_n(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = r_n(A_1) + r_n(A_2) + \dots$$

Elvárás: Az ilyen eseményekre legyen

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$$

Valószínűség definíciója; Kolmogorov-axiómák (1933)

Tekintsünk az Ω eseményteret, és a $\mathcal{A}$ az eseményalgebrát, tehát az események halmazát. Azt mondjuk, hogy a $P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ függvény **valószínűség** vagy **valószínűségi mérték** az eseményalgebrán, ha teljesíti az alábbi két tulajdonságot:

- A biztos esemény valószínűsége $P(\Omega) = 1$.
- **σ -additivitás:** Ha $A_1, A_2, \dots$ páronként kizáró eseményeknek egy végtelen sorozata, akkor az egyesítésük valószínűsége

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$$

Az A eseményhez rendelt $P(A)$ értéket úgy nevezzük, hogy az A **valószínűsége**. Az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ hármast **valószínűségi mezőnek** hívjuk.

Ha az eseménytér véges, akkor a σ -additivitás ekvivalens az **additivitással**: tetszőleges $n \geq 1$ egészre és $A_1, \dots, A_n$ páronként kizáró eseményekre

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + \dots + P(A_n)$$

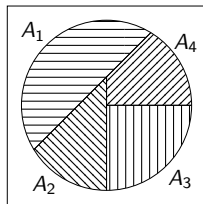
Ez pedig már tanítható középiskolás szinten is...

Az additivitás azt fejezi ki, hogy ha egy eseményt felbontunk több kizáró eseményre, akkor

egész valószínűsége = részek valószínűségeinek az összege

A matematikában az additivitási szabály nem csak a valószínűségekre teljesül, hanem más fogalmakra is. Például: terület, térfogat, tömeg. Ezeket a fogalmakat összefoglaló néven **mértékeknek** nevezzük.

$$t(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = t(A_1) + t(A_2) + \dots$$



Hogyan érdemes elképzelni a valószínűséget? Egységnyi nagyságú súlyt szétterítünk az eseménytéren, és az A esemény valószínűsége az A halmaz összsúlya.

A véletlen kísérleteket mindig egy megfelelően megkonstruált $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezővel írjuk le:

- az Ω alaphalmaz a kimenetek halmaza,
- a $\mathcal{A}$ eseményalgebra az események halmaza,
- a P függvény mondja meg az egyes események valószínűségét.

A valószínűség tulajdonságai

A valószínűség definíciójából következnek az alábbi tulajdonságok:

- Lehetetlen esemény valószínűsége: $P(\emptyset) = 0$.
- **Additivitás:** Tetszőleges $n \geq 1$ egészre és $A_1, \dots, A_n$ páronként kizáró eseményekre:

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + \dots + P(A_n).$$

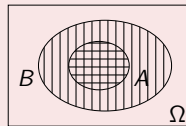
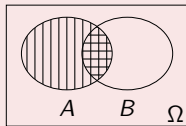
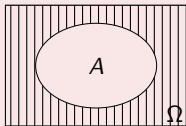
Véges eseménytéren az additivitás ekvivalens a σ -additivitással.

- Komplementer esemény valószínűsége: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
- **Kivonási szabály:** Tetszőleges A és B események mellett

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B).$$

- **Monotonitás:** Ha A maga után vonja a B eseményt, akkor

$$P(A) \leq P(B).$$



A valószínűség további tulajdonságai

- **Szubadditivitás:** Ha $A_1, A_2, \dots$ tetszőleges eseményeknek egy véges vagy végtelen sorozata, akkor

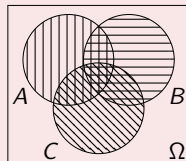
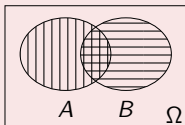
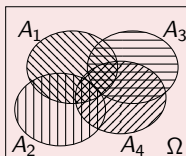
$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) \leq P(A_1) + P(A_2) + \dots$$

- Két esemény uniója: Tetszőleges A és B eseményekre

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- Három esemény uniója: Tetszőleges A , B és C eseményekre

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) = & P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) \\ & - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$



A valószínűség további tulajdonságai

- **Poincaré-formula** avagy **szitaformula**: tetszőleges $A_1, \dots, A_n$ események mellett

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup \dots \cup A_n) &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n \\ \text{különböző egészek}}} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) \\ &= P(A_1) + \dots + P(A_n) \\ &\quad - \text{ketteses metszetek valószínűsége} \\ &\quad + \text{hármass metszetek valószínűsége} \\ &\quad - \text{négyes metszetek valószínűsége} \\ &\quad \dots \pm P(A_1 \cap \dots \cap A_n) \end{aligned}$$

Hogyan lehet bebizonyítani ezeket a formulákat?

- Formális levezetés a valószínűség definíciójából.
- Heurisztikus megközelítés: mennyi a halmazok súlya?
- Ha a Laplace-formula alkalmazható: visszavezetjük számosságokra.

Feladat. Egy társaságban az emberek 40 százaléka beszél angolul, 35 százaléka németül, 30 százaléka franciául, 15 százaléka angolul és németül, 20 százaléka angolul és franciául, 20 százaléka németül és franciául, végül az emberek 10 százaléka beszél mindhárom nyelven. Véletlenszerűen kiválasztunk egy embert. Hogyan lehet matematikailag leírni a kísérletet?

Kísérlet: véletlenszerűen kiválasztunk egy embert.

Lehetséges kimenetek: az emberek a társaságban.

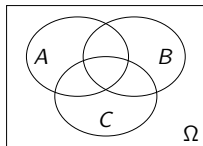
Eseménytér (kimenetek halmaza): a teljes társaság.

Bevezetünk eseményeket:

A = a kiválasztott ember beszél angolul

B = a kiválasztott ember beszél németül

C = a kiválasztott ember beszél franciául



Véletlenszerű választás $\Rightarrow$ valószínűség = arány.

$$P(A) = 0,4, \quad P(B) = 0,35, \quad P(C) = 0,3, \quad P(A \cap B \cap C) = 0,1,$$

$$P(A \cap B) = 0,15, \quad P(A \cap C) = 0,2, \quad P(B \cap C) = 0,2.$$

Mennyi az alábbi események valószínűsége?

- A kiválasztott ember beszél angolul, de nem beszél franciául.

beszél angolul, de nem beszél franciául = A teljesül, de C nem = $A \setminus C$

$$P(A \setminus C) = P(A) - P(A \cap C) = 0,4 - 0,2 = 0,2$$

- A kiválasztott ember beszél németül vagy franciául.

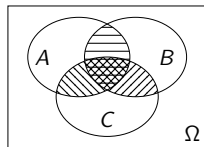
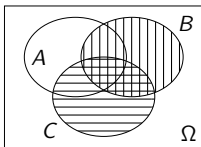
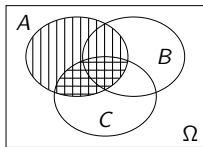
beszél németül vagy franciául = $B \cup C$

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = 0,35 + 0,3 - 0,2 = 0,45$$

- A kiválasztott ember beszél legalább két nyelven.

D = beszél legalább két nyelven = $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$

$$P(D) = P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C) - 2P(A \cap B \cap C) = 0,35$$



- Mennyi annak az esélye, hogy a kiválasztott ember egyik nyelvet sem beszéli a három közül?

egyk nyelvet sem beszéli = nem A és nem B és nem $C = \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$

Ez így nem fog működni: nincsen formulánk a metszet valószínűségére.

Térjünk át az esemény tagadására (komplementer esemény):

beszéli valamelyik nyelvet = A vagy B vagy $C = A \cup B \cup C$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) = 0,6$$

$$P(\text{egyk nyelvet sem beszéli}) = 1 - P(\text{beszéli valamelyik nyelvet}) = 0,4$$

Miért érdemes ilyen típusú feladatot tanítani?

- Szeretnénk gyakorolni a valószínűség azonosságait. De a valószínűség egy új fogalom, és az azonosságok elsőre nem feltétlenül intuitívek.
- A feladatban minden valószínűség egy arány a társaságon belül.
- Ezek az azonosságok az arányokra természetes módon teljesülnek.

Diszkrét valószínűségi mezők

Diszkrét valószínűségi mező

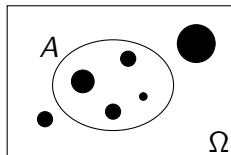
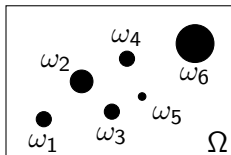
Azt mondjuk, hogy egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező **diszkrét valószínűségi mező**, ha teljesülnek az alábbi tulajdonságok.

- Az eseménytér megszámlálható halmaz, tehát a lehetséges kimenetek egy véges vagy végtelen sorozatot alkotnak: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$.
- Minden részhalmaz esemény: $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Diszkrét valószínűségi mezőn a kimenetek összvalószínűsége:

$$P(\{\omega_1\}) + P(\{\omega_2\}) + \dots = P(\{\omega_1, \omega_2, \dots\}) = P(\Omega) = 1.$$

Egy tetszőleges $A \subset \Omega$ esemény valószínűsége: $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})$.



Klasszikus valószínűségi mező

Azt mondjuk, hogy egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező **klasszikus valószínűségi mező**, ha teljesülnek az alábbi tulajdonságok.

- Az eseménytér véges: $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$.
- Minden részhalmaz esemény: $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.
- Minden elemi eseménynek azonos a bekövetkezési valószínűsége:

$$P(\{\omega_1\}) = \dots = P(\{\omega_N\}).$$

Laplace-formula; a valószínűség kombinatorikus kiszámítási módja

Klasszikus valószínűségi mezőn egy tetszőleges A esemény valószínűsége:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{kedvező kimenetek száma}}{\text{összes kimenetek száma}}$$

Bizonyítás. Mivel minden kimenetelnek azonos a valószínűsége, ezért minden kimenetelnek $1/|\Omega|$ a valószínűsége. Emiatt:

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in A} \frac{1}{|\Omega|} = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Feladat. Lajos kulcscsomóján három kulcs található, ezek közül az egyik a bejárati ajtót nyitja. Egy este a barátaival italozik, és hazatérve nem tudja megkülönböztetni a kulcsait. Emiatt véletlenszerűen és visszatevéssel választ újabb és újabb kulcsot, míg ki nem nyitja az ajtót.

- *Hány lehetséges kimenetele van a kísérletnek?*

ω_n = az n . próbálkozásra választja ki a helyes kulcsot, $n = 1, 2, \dots$

ω_∞ = sosem választja ki a helyes kulcsot

Megszámlálhatóan végtelen sok kimenetel: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\infty\}$

- *Mennyi az egyes kimenetek (elemi események) valószínűsége?*

Képzeljük el, hogy Lajos pontosan n alkalommal próbálkozik:

$$P(\{\omega_n\}) = P(\text{az } n. \text{ az első sikeres választás}) = \frac{\text{kedvező}}{\text{összes}} = \frac{2^{n-1} \cdot 1}{3^n}$$

$$\begin{aligned} P(\text{véges sok húzással megtalálja a helyes kulcsot}) &= P(\{\omega_1, \omega_2, \dots\}) \\ &= P(\{\omega_1\}) + P(\{\omega_2\}) + \dots = \frac{1}{3} \left[1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots \right] = \frac{1}{3} \frac{1}{1 - 2/3} = 1 \end{aligned}$$

Kapjuk: $P(\{\omega_\infty\}) = 0$. Tehát az ω_∞ kimenetel nem következhet be?

Geometriai valószínűségi mezők

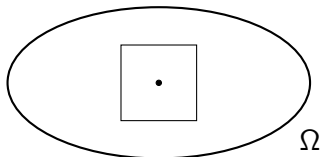
Feladat. Ejtőernyős ugrást hajtanak végre egy 500 m^2 területű réten. Az ugrás akkor sikeres, ha az ugró a réten kijelölt 10 m oldalhosszúságú négyzetben ér földet. Lajos kezdő ejtőernyős, és a réten egy véletlenszerű helyen ér földet. Mekkora valószínűséggel lesz sikeres az ugrása? Mennyi az esélye, hogy Lajos pontosan a négyzet geometriai középpontjára érkezik?

Kimenetek: a rét pontjai.

Eseménytér: maga a rét.

Mit jelent a *véletlenszerű hely*?

Heurisztikus megoldás:



$$P(\text{a négyzetben landol}) = \frac{\text{négyzet területe}}{\text{rét területe}} = \frac{10^2}{500} = \frac{1}{5}$$

$$P(\text{a négyzetben középpontjában landol}) = \frac{\text{pont területe}}{\text{rét területe}} = \frac{0}{500} = 0$$

Az előző feladat tanulságai:

- Az eseménytér egy geometriai alakzat, a valós sík egy részhalmaza. Ez egy nem megszámlálható halmaz, tehát nem diszkrét valószínűségi mezőről van szó.
- Lajos *véletlenszerű* helyen ér földet, de ez az információ most nem a Laplace-formulára utal. Ennek ellenére mi mégis a kedvező/összes formulát alkalmaztuk.
- A feladatban az események valószínűsége ténylegesen nem függött az események alakjától és elhelyezkedésétől, csak a nagyságuktól.
- Jelölje $t(A)$ egy $A \subset \mathbb{R}^d$ geometriai alakzat mértékét. A mérték dimenziótól függően a hosszúság, a terület vagy a térfogat.
- **Mérhetőnek** nevezzük azokat az A alakzatokat, melyeknek létezik a mértéke. Nem minden alakzat mérhető! Emiatt nem minden $A \subset \Omega$ halmaznak létezik valószínűsége.
- Szerencsére a nem mérhető halmazok rendkívül bonyolultak, ezekkel az egyszerűbb alkalmazásokban nem találkozunk. Amilyen alakzatot egy középiskolás diák el tud képzelni, az mind mérhető. (Amilyen alakzatot Önök el tudnak képzelni, az is mind mérhető...)

Geometriai valószínűségi mezők

Azt mondjuk, hogy egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező **geometriai valószínűségi mező**, ha rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

- $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ valamilyen $d \geq 1$ egész számra.
- Az Ω halmaz mérhető és $0 < t(\Omega) < \infty$.
- Az események az Ω mérhető részhalmazai. (Tehát $\mathcal{A} \neq \mathcal{P}(\Omega)$.)
- **Egyenletességi hipotézis:** Az események valószínűsége egyenesen arányos az események mértékével, tehát minden $A \in \mathcal{A}$ halmazra $P(A) = ct(A)$ valamilyen $c > 0$ konstans mellett.

Formula a valószínűségre

Geometriai valószínűségi mezőn tetszőleges A eseményre:

$$P(A) = \frac{t(A)}{t(\Omega)} = \frac{\text{kedvező hosszúság/terület/térfogat}}{\text{összes hosszúság/terület/térfogat}}$$

Bizonyítás. A biztos esemény valószínűsége: $1 = P(\Omega) = ct(\Omega)$.
Ebből $c = 1/t(\Omega)$, vagyis $P(A) = ct(A) = t(A)/t(\Omega)$.

Feladat. (Bertrand-paradoxon, 1889.) Tekintsünk egy kört, és írjunk bele egy szabályos háromszöget. Véletlenszerűen válasszunk ki egy húrt! Mennyi az esélye, hogy a húr hosszabb, mint a beírt háromszög oldala?

- ❶ Rögzítjük a húr egyik végpontját, és a másik végpontot véletlenszerűen választjuk a körvonalon.

Kimenetek: a körvonal pontjai.

A kérdéses valószínűség: $p = 1/3$.

- ❷ Rögzítünk egy sugarat (a középpontot a körvonallal összekötő szakaszt), és véletlenszerűen választunk egy erre merőleges húrt.

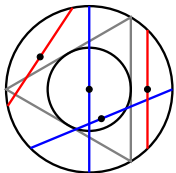
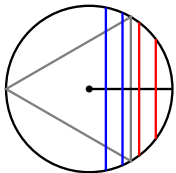
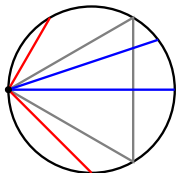
Kimenetek: a sugár (szakasz) pontjai.

A kérdéses valószínűség: $p = 1/2$.

- ❸ Véletlenszerűen választunk egy pontot a körlapon, majd megszerkesztjük azt az egyértelmű húrt, melynek ez a pont a felezőpontja.

Kimenetek: a körlap pontjai.

A kérdéses valószínűség: $p = 1/4$.



A matematikában paradoxonoknak nevezzük azokat az állításokat, melyek ellentmondanak a várakozásoknak, és emiatt matematikai ellentmondásnak tűnnek. Viszont ezek ténylegesen nem matematikai ellentmondások, csak a várakozásaink voltak tévesek.

A Bertrand-paradoxon esetében:

- Három különböző gondolatmenettel három különböző megoldást kaptunk. Ez ellentmondásnak tűnik.
- A paradoxonnak az a feloldása, hogy a feladat nem volt egyértelműen megfogalmazva: mit jelent az, hogy *véletlenszerűen választott húr*? Véletlenszerűen csak egy pontot tudunk választani, és ebből tudunk egy húrt megszerkeszteni.
- Viszont a véletlenszerű pont különböző módon történő választásaival teljesen eltérő matematikai kísérleteket kapunk, és emiatt eltér a kérdéses esemény valószínűsége.
- Tanulság: véletlen jelenségeknél pontosan meg kell fogalmazni, hogy milyen algoritmussal hajtjuk végre a kísérletet. Az eltérő algoritmusok eltérő valószínűségekhez vezethetnek.

A feltételes valószínűség

Feladat. Feldobunk egy szabályos dobókockát, és legyen A az az esemény, hogy páratlan számot dobunk. Ekkor: $P(A) = 1/2$.

Adjuk meg A valószínűségét, ha rendelkezünk az alábbi információval!

- Ha tudjuk, hogy prímszámot dobtunk: $P(A) = 2/3$.
- Ha tudjuk, hogy 5-nél kisebbet dobtunk: $P(A) = 2/4 = 1/2$.
- Ha tudjuk, hogy 3-ast vagy 5-öst dobtunk: $P(A) = 2/2 = 1$.
- Ha tudjuk, hogy páros számot dobtunk: $P(A) = 0/3 = 0$.

1 3 5 2 4 6 A Ω	1 3 5 2 4 6 A Ω	1 3 5 2 4 6 A Ω	1 3 5 2 4 6 A Ω
---	--	--	---

A háttérinformáció nagy mértékben befolyásolja a valószínűséget. Hogyan számoljunk feltételes valószínűséget nem klasszikus valószínűségi mezőn?

Adott egy véletlen kísérlet és az ezt leíró $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező.

- Egy $A \in \mathcal{A}$ esemény valószínűsége: a kísérletet sokszor megismételve a relatív gyakoriság a valószínűség körül ingadozik, $r_n(A) \approx P(A)$.
- Tegyük fel, hogy van egy háttér-információnk: tudjuk azt, hogy a B esemény bekövetkezik. Ezen háttér-információ birtokában mennyi az A esemény valószínűsége?

Feltételes relatív gyakoriság

Tekintsünk egy kísérletet, és legyenek A és B tetszőleges események. Hajtsuk végre a kísérletet n alkalommal egymás után. Az A eseménynek a B eseményre vett **feltételes relatív gyakorisága**:

$$r_n(A|B) = \frac{k_n(A \cap B)}{k_n(B)}.$$

Jelentése: az A esemény bekövetkezéseinek az aránya azon végrehajtások között, amikor B bekövetkezett. Csak akkor értelmezhető, ha $k_n(B) > 0$.

Példa. Tegyük fel, hogy a kísérlet $n = 10$ végrehajtása után a következő eredményt kapjuk:

Kísérlet sorszáma	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
A bekövetkezései	A		A			A		A		A
B bekövetkezései		B	B		B	B		B		B

Az A esemény relatív gyakorisága: $r_{10}(A) = k_{10}(A)/10 = 5/10 = 1/2$

Az A feltételes relatív gyakorisága: $r_{10}(A|B) = k_{10}(A \cap B)/k_{10}(B) = 4/6$

Vegyük észre:

$$r_n(A|B) = \frac{k_n(A \cap B)}{k_n(B)} = \frac{k_n(A \cap B)/n}{k_n(B)/n} = \frac{r_n(A \cap B)}{r_n(B)} \approx \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Tehát a feltételes relatív gyakoriság a $P(A \cap B)/P(B)$ hányados körül ingadozik. Ez az észrevétel motiválja a következő definíciót.

Feltételes valószínűség

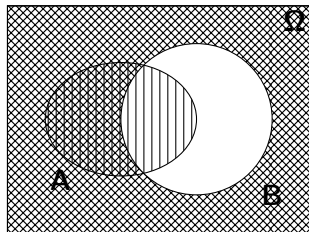
Legyenek A és B események, és tegyük fel, hogy $P(B) > 0$. Ekkor az A eseménynek a B eseményre vett **feltételes valószínűsége**

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

A feltételes valószínűség megmutatja, hogy mennyi az A esemény valószínűsége, ha tudjuk, hogy a B esemény bekövetkezik.

Szemléletesen a következő dolog történik:

- Kidobjuk azokat a kimeneteket, melyek nem következhetek be ($\bar{B}$ elemei).
- $A \cap B$ egy „szűkített eseménytér,” ezen belül nézzük az A halmaz súlyarányát.



Feltételes valószínűség klasszikus és geometriai valószínűségi mezőn

Legyenek A és B események, $P(B) > 0$. A $P(A|B)$ feltételes valószínűség a következő módon is meghatározható: kidobjuk a $\bar{B}$ halmazba eső kimeneteket, majd alkalmazzuk az alábbi formulákat.

❶ Klasszikus valószínűségi mező esetén

$$P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{\text{megmaradt kedvező}}{\text{megmaradt összes}}.$$

❷ Geometriai valószínűségi mező esetén

$$P(A|B) = \frac{t(A \cap B)}{t(B)} = \frac{\text{megmaradt kedvező}}{\text{megmaradt összes}}.$$

Bizonyítás.

$$1. \quad P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{|A \cap B|/|\Omega|}{|B|/|\Omega|} = \frac{|A \cap B|}{|B|}$$

$$2. \quad P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{t(A \cap B)/t(\Omega)}{t(B)/t(\Omega)} = \frac{t(A \cap B)}{t(B)}$$

Feladat. Véletlenszerűen kiválasztunk egy háromgyerekes családot, és tekintjük az alábbi eseményeket:

- $A = a$ gyerekek között legfeljebb egy lány van
- $B = a$ gyerekek között van fiú és lány is

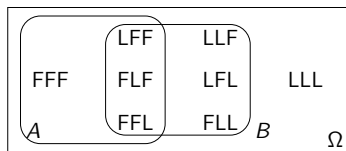
Adjuk meg az A és a B esemény valószínűségét! Mennyi a $P(A|B)$ feltételes valószínűség értéke, és hogyan értelmezhető ez az eredmény?

A kísérletnek 8 lehetséges kimenetele van, és ezek azonos valószínűségűek.

$$P(A) = 4/8 = 1/2, \quad P(B) = 6/8 = 3/4, \quad P(A \cap B) = 3/8$$

1. megoldás: definíció

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{3/8}{6/8} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$



2. megoldás: kidobjuk a B eseményen kívül eső kimeneteleket

$$P(A|B) = \frac{\text{megmaradt kedvező}}{\text{megmaradt összes}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Észrevétel: ebben a feladatban $P(A|B) = P(A)$.

Feladat. Egy metróvonalon pontosan 10 perces követési idővel járnak a szerelvények. Véletlenszerű időpontban lemegyünk az állomásra.

- Mennyi annak a valószínűsége, hogy a következő szerelvényre legfeljebb 5 percet kell várni?

Eseménytér: $\Omega = [0, 10]$

Véletlenszerű időpont $\Rightarrow$ teljesül az egyenletességi hipotézis.

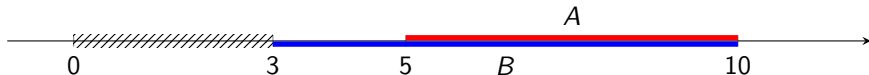
A = a következő szerelvényre legfeljebb 5 percet kell várni = $[5, 10]$

$$P(A) = 5/10 = 1/2$$

- Mennyi a valószínűsége ugyanennek, ha tudjuk, hogy a legutóbbi szerelvény már legalább 3 perce elment?

B = a legutóbbi szerelvény már legalább 3 perce elment = $[3, 10]$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{5/10}{7/10} = \frac{5}{7}$$



A feltételes valószínűség tulajdonságai

Felmerülhet a kérdés, hogy a feltételes valószínűség valóban valószínűség, azaz valószínűségi mérték-e.

A feltételes valószínűség valószínűségi mérték

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ tetszőleges valószínűségi mező, $B \in \mathcal{A}$ pedig egy pozitív valószínűségű esemény. Ekkor teljesülnek az alábbiak:

- Tetszőleges A eseményre $P(A|B) \in [0, 1]$.
- A biztos esemény feltételes valószínűsége: $P(\Omega|B) = 1$.
- σ -additivitás: tetszőleges $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ kizáró eseményekre

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots | B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) + \dots$$

Ez azt jelenti, hogy a B eseményre vett feltételes valószínűség egy valószínűségi mérték. Következmény: a feltételes valószínűségre teljesül minden olyan azonosság, amit bebizonyítottunk a valószínűségi mértékekre.

Mivel a feltételes valószínűség valószínűségi mérték, teljesülnek a következő tulajdonságok:

- A lehetetlen esemény feltételes valószínűsége: $P(\emptyset|B) = 0$.

- Additivitás: ha $A_1, \dots, A_n$ kizáró események, akkor

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n | B) = P(A_1|B) + \dots + P(A_n|B).$$

- A komplementer esemény valószínűsége: $P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B)$.

- Monotonitás: Ha $A_1 \subset A_2$, akkor $P(A_1|B) \leq P(A_2|B)$.

- Két esemény uniójának a valószínűsége:

$$P(A_1 \cup A_2 | B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) - P(A_1 \cap A_2 | B).$$

- Poincaré-formula...

Fontos. A fenti azonosságokban a B esemény rögzített! A feltételes valószínűségben a feltételt nem lehet ilyen könnyen manipulálni. Például általában $P(A|\bar{B}) \neq 1 - P(A|B)$.

Láncszabály

Legyenek $A_1, \dots, A_n$ olyan események, melyekre $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) > 0$.

Ekkor

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_1 \cap A_2) \\ \dots P(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

Bizonyítás. A feltételes valószínűség definícióját többször alkalmazva:

$$\begin{aligned} & P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_1 \cap A_2) \dots P(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \\ &= P(A_1) \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)} \dots \frac{P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1} \cap A_n)}{P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})} \\ &= P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1} \cap A_n) \end{aligned}$$

Feladat. Egy urnában 2 piros és 4 zöld golyó található. Véletlenszerűen és visszatevés nélkül kihúzunk 3 golyót. Mennyi annak az esélye, hogy sorban pirosat, zöldet, majd ismét piros golyót kapunk?

$$\begin{aligned} & P(1. \text{ piros}, 2. \text{ zöld}, 3. \text{ piros}) \\ &= P(1. \text{ piros}) \cdot P(2. \text{ zöld} | 1. \text{ piros}) \cdot P(3. \text{ piros} | 1. \text{ piros}, 2. \text{ zöld}) \\ &= \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4} \end{aligned}$$

Bayes-formula (Bayes, 1763)

Ha A és B pozitív valószínűségi események, akkor

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}.$$

Bizonyítás. A feltételes valószínűség definíciójából és a láncszabályból is következik, hogy $P(B \cap A) = P(A|B)P(B)$. Ekkor pedig:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}.$$

Feladat. Egy gyárban anyaghibás és mérethibás gyártmányok is készülnek, és ezek a teljes mennyiség 25 illetve 40 százalékát teszik ki. A mérethibás darabok ötöde anyaghibás is egyben. Az anyaghibás gyártmányok mekkora hányada mérethibás?

$$\begin{aligned} P(\text{mérethibás} | \text{anyaghibás}) &= \frac{P(\text{anyaghibás} | \text{mérethibás}) \cdot P(\text{mérethibás})}{P(\text{anyaghibás})} \\ &= \frac{0,2 \cdot 0,4}{0,25} = 0,32 = 32\% \end{aligned}$$

Teljes eseményrendszer

Azt mondjuk, hogy a $B_1, \dots, B_r$ események **teljes eseményrendszert** (t.e.r.) alkotnak, ha teljesítik az alábbi tulajdonságokat:

- páronként diszjunktak: tetszőleges $i \neq j$ esetén $B_i \cap B_j = \emptyset$;
- együttesen lefedik az eseményteret: $B_1 \cup \dots \cup B_r = \Omega$.

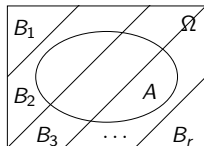
A teljes valószínűség tétele

Legyen $B_1, \dots, B_r$ pozitív valószínűségű eseményeket tartalmazó teljes eseményrendszer! Ekkor egy tetszőleges A esemény valószínűsége:

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + \dots + P(A|B_r)P(B_r)$$

Bizonyítás. Az additivitásból és a feltételes valószínűség definíciójából:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B_1) + \dots + P(A \cap B_r) \\ &= P(A|B_1)P(B_1) + \dots + P(A|B_r)P(B_r) \end{aligned}$$

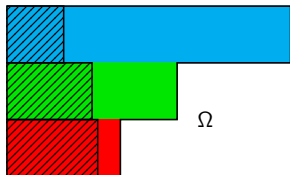


Feladat. Lajosnak lejárt a bérlete, mégis felszáll az első járműre, ami hazaviszi. A megállóban 50% valószínűséggel érkezik először busz, 30% valószínűséggel trolis, a többi esetben pedig villamos. A buszon 20% eséllyel jön ellenőr, a trolin 50% eséllyel, a villamoson pedig 80% eséllyel.

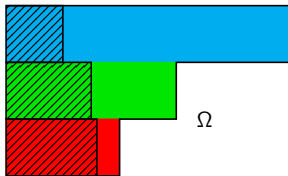
- Mennyi annak az esélye, hogy hazafelé utazva találkozik ellenőrrel?
- Ha otthon szomorúan meséli el, hogy megbüntették, akkor mennyi a valószínűsége, hogy villamossal utazott?

Bevezetünk eseményeket: A = találkozik ellenőrrel = megbüntetik,
 B_1 = busszal utazik, B_2 = trolival utazik, B_3 = villamossal utazik
 Vegyük észre: B_1, B_2, B_3 teljes eseményrendszert alkot.

jármű	valószínűség	ellenőr esélye
busz	$P(B_1) = 0,5$	$P(A B_1) = 0,2$
trolis	$P(B_2) = 0,3$	$P(A B_2) = 0,5$
villamos	$P(B_3) = 0,2$	$P(A B_3) = 0,8$
összesen	1	$P(A) = ?$



jármű	valószínűség	ellenőr esélye
busz	$P(B_1) = 0,5$	$P(A B_1) = 0,2$
troli	$P(B_2) = 0,3$	$P(A B_2) = 0,5$
villamos	$P(B_3) = 0,2$	$P(A B_3) = 0,8$
összesen	1	$P(A) = ?$



- *Mennyi annak az esélye, hogy hazafelé utazva találkozik ellenőrrel?*

Teljes valószínűség tétele:

$$\begin{aligned}
 P(A) &= P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3) \\
 &= 0,2 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,3 + 0,8 \cdot 0,2 = 0,41
 \end{aligned}$$

- *Ha megbüntették, akkor mennyi az esélye, hogy villamossal utazott?*

Bayes-formula:

$$P(B_3|A) = \frac{P(A|B_3)P(B_3)}{P(A)} = \frac{0,8 \cdot 0,2}{0,41} \approx 0,39$$

Itt igazából ezt történt:

$$P(B_3|A) = \frac{P(A \cap B_3)}{P(A)} = \frac{\text{fekete és piros}}{\text{fekete}}$$

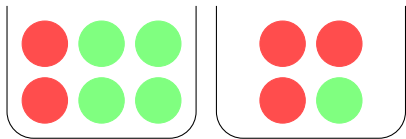
Feladat. Adott két urna. Az egyikben 2 piros és 4 zöld, a másikban 3 piros és 1 zöld golyót találhatók. Véletlenszerűen kiválasztunk egy urnát, és kiveszünk belőle egy golyót. Mennyi annak az esélye, hogy pirosat húzunk?

Bevezetünk eseményeket:

A = pirosat húzunk,

B_1 = az 1. urnát választjuk,

B_2 = az 2. urnát választjuk.



Ekkor: $P(B_1) = P(B_2) = 1/2$, $P(A|B_1) = 2/6$, $P(A|B_2) = 3/4$.

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{13}{24}$$

Tegyük fel, hogy a húzás során zöld golyót kaptunk! Mennyi az esélye, hogy az 1. urnából húztunk?

A Bayes-formula alkalmazásával

$$P(B_1|\bar{A}) = \frac{P(\bar{A}|B_1)P(B_1)}{P(\bar{A})} = \frac{4/6 \cdot 1/2}{11/24} = \frac{8}{11} > \frac{1}{2} = P(B_1)$$

Feladat. Összeöntjük a golyókat egy urnába, majd abból húzunk egyet.
Mennyi az esélye, hogy pirosat kapunk?

Az összeöntés után 5 piros és 5 zöld golyó van egy urnában, így

$$P(A) = 5/10 = 1/2.$$

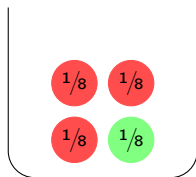
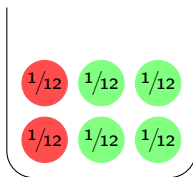
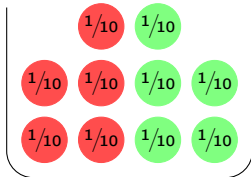
Miért változott meg a valószínűség az előző elrendezéshez viszonyítva?

- Az egyurnás elrendezésnél minden golyónak $1/10$ az esélye, ezért

$$P(A) = 5 \cdot 1/10 = 5/10.$$

- A kéturnás elrendezésnél az első urnában minden golyónak $1/12$, a másodikban $1/8$ az esélye, ezért

$$P(A) = 2 \cdot 1/12 + 3 \cdot 1/8 = 13/24.$$



Két esemény függetlensége

Két esemény függetlensége

Legyen A és B két tetszőleges esemény. Azt mondjuk, hogy a két esemény **független** egymástól, ha $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

A függetlenséggel ekvivalens tulajdonságok

Ha A és B pozitív valószínűségű, akkor az alábbiak ekvivalensek:

- 1 A és B független egymástól.
- 2 $P(A|B) = P(A)$.
- 3 $P(B|A) = P(B)$.

Bizonyítás. Ha A és B független, akkor

$$P(A|B) = P(A \cap B)/P(B) = P(A)P(B)/P(B) = P(A).$$

A fordított irányért, ha $P(A|B) = P(A)$, akkor

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(A)P(B).$$

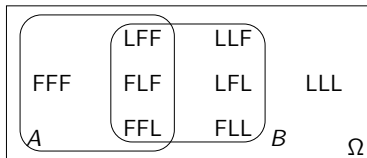
Feladat. Véletlenszerűen kiválasztunk egy háromgyerekes családot, és tekintsük az alábbi eseményeket:

- $A = a$ gyerekek között legfeljebb egy lány van
- $B = a$ gyerekek között van fiú és lány is

Független egymástól a két esemény?

Korábban láttuk, hogy

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{3}{4}, \quad P(A \cap B) = \frac{3}{8}, \quad P(A|B) = \frac{1}{2}$$



1. megoldás: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, tehát függetlenek.

2. megoldás: $P(A|B) = P(A)$, tehát függetlenek.

Feladat. Számoljuk végig ugyanezt négygyerekes családokra is!

Feladat. Feldobunk két szabályos dobókockát. Mutassuk meg, hogy ha a két dobás független, akkor mind a 36 kimenetelnek azonos a valószínűsége.

Tetszőleges $i, j \in \{1, \dots, 6\}$ esetén legyen

$A =$ az 1. kockával i -t dobunk, $B =$ a 2. kockával j -t dobunk.

A feltevés szerint ezek független események, tehát

$$\begin{aligned} P(\text{az 1. kockával } i\text{-t, a 2. kockával } j\text{-t dobunk}) \\ = P(A \cap B) = P(A)P(B) = 1/6 \cdot 1/6 = 1/36. \end{aligned}$$

Feladat. Mutassunk példát olyan kísérletre, mikor a két kockadobás nem független! Ekkor is azonos a kimenetek valószínűsége?

A kísérlet: feldobok egy szabályos dobókockát, felveszem filmre, majd ezt lejátszom újra. Ekkor két szabályos kockadobást kapok, de ezek nem függetlenek. A kimenetek valószínűsége:

$$P(\text{az 1. kockával } i\text{-t, a 2. kockával } j\text{-t dobunk}) = \begin{cases} 1/6, & \text{ha } i = j, \\ 0, & \text{ha } i \neq j. \end{cases}$$

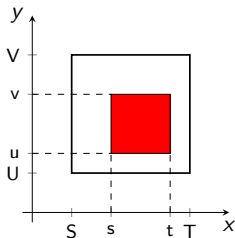
Feladat. Véletlenszerűen és egymástól függetlenül választunk egy x és egy y értéket rendre az $[S, T]$ illetve az $[U, V]$ intervallumból. Mutassuk meg, hogy ekkor az (x, y) pont teljesíti az egyenletességi hipotézist az $[S, T] \times [U, V]$ téglalapon!

Azt kell megmutatnunk, hogy az $[S, T] \times [U, V]$ téglalap tetszőleges A részhalmaza esetén

$$P((x, y) \in A) = \frac{\text{kedvező terület}}{\text{összes terület}} = \frac{A \text{ területe}}{(T - S)(V - U)}$$

Legyen először A egy téglalap: $A = [s, t] \times [u, v]$

$$\begin{aligned} P((x, y) \in A) &= P(x \in [s, t], y \in [u, v]) \\ &= P(x \in [s, t]) \cdot P(y \in [u, v]) = \frac{t - s}{T - S} \cdot \frac{v - u}{V - U} \\ &= \frac{(t - s)(v - u)}{(T - S)(V - U)} = \frac{A \text{ területe}}{(T - S)(V - U)} \end{aligned}$$



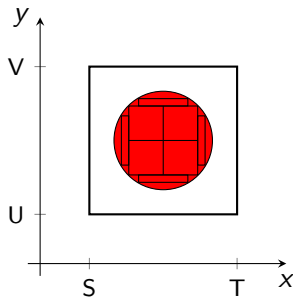
Most legyen A egy folytonos görbével határolt síkidom!

A síkidom felbontható megszámlálható sok diszjunkt téglalagra:

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \dots$$

Ekkor:

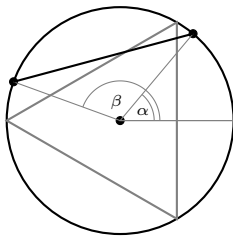
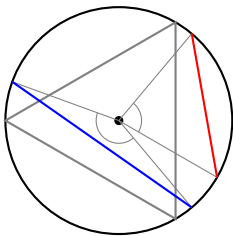
$$\begin{aligned} P((x, y) \in A) &= \sum_i P((x, y) \in A_i) \\ &= \sum_i \frac{A_i \text{ területe}}{(T - S)(V - U)} = \frac{A \text{ területe}}{(T - S)(V - U)} \end{aligned}$$



Feladat. (Bertrand-paradoxon, 1889.) Tekintsünk egy kört, és írjunk bele egy szabályos háromszöget. Véletlenszerűen és egymástól függetlenül válasszunk két pontot a körvonalon, és kössük össze őket egy egyenessel! Mennyi az esélye, hogy az így kapott húr hosszabb, mint a beírt háromszög oldala?

Meggondolható, hogy a húr pontosan akkor hosszabb, mint a háromszög oldala, ha a húr középpontból 120° -nál nagyobb szögben látszik.

A körvonal pontjait a hozzájuk tartozó forgásszöggel is leírhatjuk. Ha a pont véletlenszerű a körvonalon, akkor a forgásszög véletlenszerű a $[0^\circ, 360^\circ]$ intervallumon. Jelölje α és β a két forgásszöget!



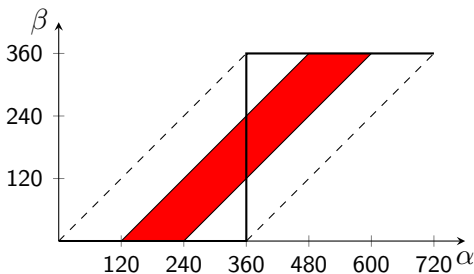
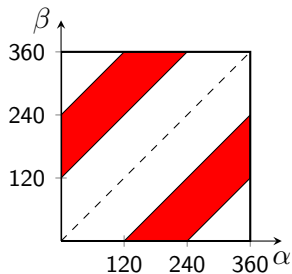
Most α és β egymástól függetlenek és véletlenszerűek a $[0^\circ, 360^\circ]$ intervallumon, azért az (α, β) pont teljesíti az egyenletességi hipotézist a $[0^\circ, 360^\circ] \times [0^\circ, 360^\circ]$ négyzeten.

Geometriai módszerekkel megmutatható, hogy a kapott húr pontosan akkor látszik a kör középpontjából 120° -nál nagyobb szög alatt, ha

$$120^\circ < |\alpha - \beta| < 240^\circ.$$

Ezek az egyenlőtlenségek definiálják a kedvező tartományt.

Direkt területszámolással vagy átdarabolással megmutatható, hogy a kedvező terület a négyzet $1/3$ része, ezért a kérdéses valószínűség $p = 1/3$.

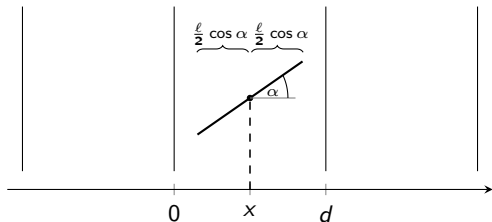


Feladat. (Buffon-féle tűprobléma, 1777.) Adott egy papírlap, melyre egymástól $d > 0$ távolságra párhuzamos egyeneseket rajzoltunk. Véletlenszerűen leejtünk egy $\ell < d$ hosszúságú pálcikát a papírlapra. Mennyi annak az esélye, hogy a pálcika metszi valamelyik egyenest?

Megjegyzések:

- A pálcika pozícióját tökéletesen le tudjuk írni a felezéspont (x, y) koordinátaival és az $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2]$ forgásszöggel.
- Feltehető, hogy $x \in (0, d]$. Az y értékkel nem kell foglalkoznunk.
- A pálcika pontosan akkor metszi valamelyik egyenest, ha

$$x - \frac{\ell}{2} \cos \alpha \leq 0 \quad \text{vagy} \quad x + \frac{\ell}{2} \cos \alpha \geq d.$$



Mit jelent az, hogy véletlenszerűen ejtjük le a pálcát? Ez számunkra a következőt jelenti:

- x véletlenszerű érték a $(0, d]$ intervallumból;
- α véletlenszerű érték a $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2]$ intervallumból;
- x és α választása egymástól független.

Ekkor az (α, x) pont véletlenszerű a $(-\pi/2, \pi/2] \times (0, d]$ téglalapon.

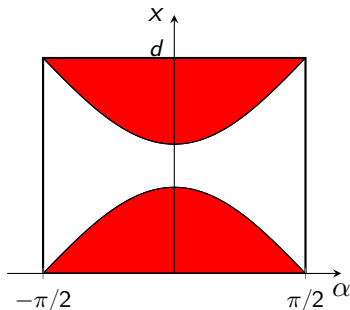
Kedvező tartomány: $x \leq \frac{\ell}{2} \cos \alpha$ vagy $x \geq d - \frac{\ell}{2} \cos \alpha$.

Integrálással a kedvező terület:

$$2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\ell}{2} \cos(x) dx = 2\ell$$

A kérdéses valószínűség:

$$p = \frac{\text{kedvező terület}}{\text{összes terület}} = \frac{2\ell}{\pi d}$$



Miért érdekes a Buffon-féle tűprobléma? Azért, mert kísérleti úton becslést adhatunk π értékére:

- Hajtsuk végre a kísérletet n alkalommal, ahol n nagy szám.
- Jelölje r_n azon végrehajtások relatív gyakoriságát (tehát arányát), amikor a pálca metszi valamelyik egyenest. Ekkor

$$r_n \approx p = \frac{2\ell}{\pi d}, \quad \text{tehát} \quad \pi \approx \frac{2\ell}{r_n d}.$$

Például $d = 2\ell$ választással: $\pi \approx 1/r_n$.

Ezt hogyan lehet a gyakorlatban megvalósítani?

- Fizikailag végrehajtjuk a kísérletet.
- Írunk egy számítógépes programot.

Kettőnél több esemény függetlensége

Legyen $A_1, A_2, \dots$ eseményeknek egy véges vagy végtelen sorozata.

- Azt mondjuk, hogy az események **páronként függetlenek**, ha bármely kettő független egymástól, tehát tetszőleges A_i és A_j különböző eseményeket kiválasztva teljesül, hogy $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$.
- Azt mondjuk, hogy az események **(teljesen) függetlenek**, ha bármely $n \geq 1$ egész esetén tetszőleges $A_{i_1}, \dots, A_{i_n}$ különböző eseményeket kiválasztva

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n}) = P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_n}).$$

A továbbiakban, ha csak az ellenkezőjét külön nem hangsúlyozzuk, akkor függetlenség alatt teljes függetlenséget értünk.

A páronkénti függetlenség azt jelenti, hogy akárhogyan is választunk ki két különböző eseményt, ezek függetlenek lesznek egymástól:

$$P(A_j | A_i) = P(A_j) \quad \text{minden } i \neq j \text{ esetén.}$$

A teljes függetlenség azt fejezi ki, hogy semmilyen kapcsolat sincs az események között: tetszőleges $A_{i_1}, \dots, A_{i_n}, A_j$ különböző eseményekre

$$\begin{aligned} P(A_j | A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n}) &= \frac{P(A_j \cap A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n})}{P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n})} \\ &= \frac{P(A_j)P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_n})}{P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_n})} = P(A_j) \end{aligned}$$

Az nyilvánvaló, hogy a teljes függetlenségből következik a páronkénti függetlenség. Felmerül a kérdés, hogy a kettő vajon ekvivalens-e egymással.

Kapcsolat a kétféle függetlenség között

Ha az $A_1, A_2, \dots$ események teljesen függetlenek, akkor páronként is függetlenek. Az állítás megfordítása nem igaz, tehát a páronkénti függetlenségből nem következik a teljes függetlenség.

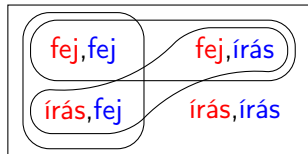
Bizonyítás. Ha az események teljesen függetlenek, akkor $n = 2$ mellett azonnal következik a páronkénti függetlenség. A következő példa pedig illusztrálja, hogy az állítás nem megfordítható.

Feldobunk két szabályos pénzérmét, egy pirosat és egy kékét. Legyen

A = a piros érmével fejet dobunk,

B = a kék érmével fejet dobunk,

C = összesen 1 fejet dobunk.



Ekkor megmutatható, hogy a három esemény páronként független. Ezzel szemben a három esemény nem teljesen független, ugyanis

$$P(A \cap B \cap C) = 0 \neq P(A)P(B)P(C) > 0.$$

Feladat. Háromgyerekes családokban vizsgáljuk a gyerekek nemét. Tegyük fel, hogy a gyerekek neme független egymástól!

- A feltevés mennyire van összhangban a hétköznapi tapasztalatokkal?
- Mutassuk meg, hogy ha a gyerekek $1/2$ – $1/2$ eséllyel születnek fiúnak és lánynak, akkor mind a 8 lehetséges családtípusnak azonos a valószínűsége!

Tekintsük a például a következő családtípust:

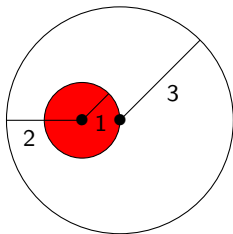
FLF = az 1. gyerek fiú, a 2. gyerek lány, a 3. gyerek fiú

A függetlenség alkalmazásával:

$$\begin{aligned} P(\text{az 1. gyerek fiú és a 2. gyerek lány és a 3. gyerek fiú}) \\ &= P(\text{az 1. gyerek fiú}) \cdot P(\text{a 2. gyerek lány}) \cdot P(\text{a 3. gyerek fiú}) \\ &= (1/2)^3 = 1/8 \end{aligned}$$

Feladat. Egy kör alakú és 3 méter sugarú kerti tó felszínén, a tó szélétől 2 méterre egy molnárka áll lesben. A víz felszínére eső apró rovarok közül azokat veszi észre, amik tőle legfeljebb 1 méterre vannak. Ha egy rovar véletlenszerűen esik a vízbe, akkor mennyi az esélye, hogy ezt a molnárka észreveszi?

$$P(\text{a molnárka észreveszi a rovar}) = \frac{\text{kedvező terület}}{\text{összes terület}} = \frac{1^2\pi}{3^2\pi} = \frac{1}{9} \approx 11\%$$



Ha 3 rovar esik egymástól függetlenül a vízre, akkor mennyi az esélye, hogy a molnárka mindhármat észreveszi?

Legyen: A_i = a molnárka észreveszi az i . rovar, $i = 1, 2, 3$.

$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 1/9$, és A_1, A_2, A_3 független események.

$P(\text{mindhármat észreveszi}) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = (1/9)^3$

Ha 3 rovar esik egymástól függetlenül a vízre, akkor mennyi a valószínűsége az alábbi eseményeknek?

- *A molnárka észreveszi az elsőt, de a harmadikat nem.*

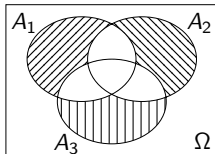
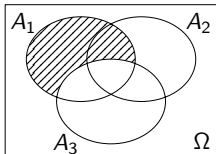
$$P(A_1 \setminus A_3) = P(A_1) - P(A_1 \cap A_3) = P(A_1) - P(A_1)P(A_3) = 1/9 - (1/9)^2$$

Alternatív megoldás:

$$P(A_1 \setminus A_3) = P(A_1 \cap \bar{A}_3) = P(A_1)P(\bar{A}_3) = 1/9 \cdot 8/9 \approx 10\%$$

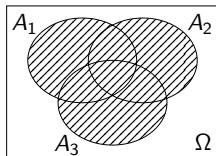
- *A molnárka a három közül pontosan egy rovart vesz észre.*

$$\begin{aligned} &P(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) + P(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) + P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) \\ &= P(A_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1)P(A_2)P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(A_3) \\ &= 1/9 \cdot 8/9 \cdot 8/9 + 8/9 \cdot 1/9 \cdot 8/9 + 8/9 \cdot 8/9 \cdot 1/9 \approx 26\% \end{aligned}$$



Ha 3 rovar esik egymástól függetlenül a vízre, akkor mennyi a valószínűsége annak, hogy a molnárka észrevesz legalább egyet a három közül?

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}) \\ &= 1 - P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) \\ &= 1 - (8/9)^3 \approx 30\% \end{aligned}$$



Hány rovarnak kell egymástól függetlenül a vízre esnie ahhoz, hogy a molnárka 90% eséllyel észrevegyen közülük legalább egyet?

Ha n rovar esik a víz felszínére, akkor

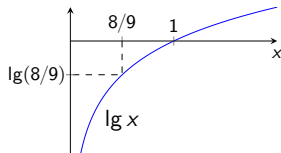
$$\begin{aligned} P(\text{a molnárka észrevesz legalább egyet}) &= 1 - P(\text{egyet sem vesz észre}) \\ &= 1 - P(\overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_n}) = 1 - P(\overline{A_1}) \dots P(\overline{A_n}) = 1 - (8/9)^n \geq 0,9 \end{aligned}$$

$$(8/9)^n \leq 0,1$$

$$n \lg(8/9) = \lg(8/9)^n \leq \lg 0,1$$

$$n \geq \lg 0,1 / \lg(8/9) = 19,5$$

$$n \geq 20$$



Diszkrét valószínűségi változók

Véletlen jelenségeket vizsgálva előfordul, hogy nem közvetlenül a kísérlet kimenetelére vagyunk kíváncsiak, hanem egy véletlen mennyiségre, melyet valamilyen módon származtatunk a kimenetelből.

Feladat. Egy kaszinóban a következő játékot lehet játszani: a játékos feldob egy szabályos dobókockát, és a nyereményét az alábbi táblázat alapján határozzák meg.

<i>dobott szám</i>	<i>nyeremény</i>
1, 2	0 Ft
3, 4, 5	1000 Ft
6	6000 Ft

- *Mi a véletlen kísérlet és mik a lehetséges kimenetek?*
Feldobunk egy szabályos dobókockát, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- *Milyen hozzárendelési szabállyal írhatjuk fel a nyeremény nagyságát?*
 $1 \mapsto 0, 2 \mapsto 0, 3 \mapsto 1000, 4 \mapsto 1000, 5 \mapsto 1000, 6 \mapsto 6000$.

Valószínűségi változó; véletlen változó

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ tetszőleges valószínűségi mező! Az $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ alakú függvényeket **valószínűségi változóknak** vagy **véletlen változóknak** nevezzük. Az X **értékkészlete** a lehetséges értékek halmaza. Jele: R_X .

Megjegyzések:

- Ez a definíció nem teljesen pontos így, erre majd még visszatérünk.
- A véletlen változó gyakorlatilag egy véletlen szám: $X(\omega)$.
Nem attól véletlen, mert a hozzárendelési szabály véletlen, hanem attól, hogy a kísérlet ω kimenetele véletlen.

Diszkrét valószínűségi változók

Az X véletlen változó **diszkrét**, ha az értékkészlete megszámlálható halmaz. (Például: az értékkészlet véges halmaz.) A diszkrét véletlen változó **valószínűségeloszlása** avagy **súlyfüggvénye**:

$$p_x = P(X = x), \quad x \in R_X.$$

Egy diszkrét véletlen változó **módusai** azok az értékek, melyeket a változó a legnagyobb valószínűséggel vesz fel. A módusz nem mindig egyértelmű.

Valószínűségeloszlások karakterizációja

Tekintsünk egy megszámlálható $R = \{x_1, x_2, \dots\} \subset \mathbb{R}$ halmazt és egy ezzel azonos elemszámú $p_1, p_2, \dots \in \mathbb{R}$ számsorozatot. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.

- 1 Létezik olyan X diszkrét valószínűségi változó, melynek az R halmaz az értékkészlete, és $P(X = x_i) = p_i$ minden i indexre.
- 2 $p_1, p_2, \dots > 0$ és $p_1 + p_2 + \dots = 1$.

Bizonyítás. Az $(1) \Rightarrow (2)$ irány nyilvánvaló.

A fordított irányért tegyük fel, hogy (2) teljesül!

- Tekintsünk egy tetszőleges olyan $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ halmazt, melynek a számossága azonos R számosságával!
- Legyen $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, és legyen $P(\{\omega_i\}) = p_i$ minden i -re!
- Legyen $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $X : \omega_i \mapsto x_i$ minden i -re!

Ekkor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ egy diszkrét valószínűségi mező, X egy valószínűségi változó, $R_X = R$, és

$$P(X = x_i) = P(\{\omega_i\}) = p_i.$$

Feladat. A kaszinós feladatban jelölje X a nyeremény nagyságát!

dobott szám	1	2	3	4	5	6
nyeremény	0	0	1000	1000	1000	6000

- Az X véletlen változó diszkrét?

Értékkészlet: $R_X = \{0, 1000, 6000\}$. A változó diszkrét.

- Adjuk meg X valószínűségeloszlását!

$$p_0 = P(X=0) = P(\text{a dobott érték 1 vagy 2}) = 2/6$$

$$p_{1000} = P(X=1000) = P(\text{a dobott érték 3, 4 vagy 5}) = 3/6$$

$$p_{6000} = P(X=6000) = P(\text{a dobott érték 6}) = 1/6$$

- Mennyi annak az esélye, hogy a játékos nyer valamennyi pénzt?

$$P(X > 0) = P(X=1000) + P(X=6000) = 4/6$$

- Hány módusza van a változónak, és mik ezek?

Egy módusz van, az 1000-es érték.

Adott egy X diszkrét valószínűségi változó, $R_X = \{x_1, x_2, \dots\}$.

Kérdés: mennyi a megfigyelt értékek számtani átlaga?

Tegyük fel, hogy többször megismételjük a véletlen kísérletet, és jelölje $X_1, \dots, X_n$ a valószínűségi változó értékeit az egyes végrehajtások során.

$$\begin{aligned}\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} &= \frac{k_n(X = x_1) \cdot x_1 + k_n(X = x_2) \cdot x_2 + \dots}{n} \\ &= r_n(X = x_1) \cdot x_1 + r_n(X = x_2) \cdot x_2 + \dots \\ &\approx P(X = x_1) \cdot x_1 + P(X = x_2) \cdot x_2 + \dots\end{aligned}$$

Várható érték

Legyen X diszkrét valószínűségi változó, és tegyük fel, hogy

$$\sum_{x \in R_X} |x| P(X = x) = |x_1| P(X = x_1) + |x_2| P(X = x_2) + \dots < \infty$$

Ekkor az X **várható értéke**:

$$E(X) = \sum_{x \in R_X} x P(X = x) = x_1 P(X = x_1) + x_2 P(X = x_2) + \dots$$

Megjegyzések:

- Szokásos jelölések a várható értékre: E (expected value); M (mean).
- A várható érték jelentése: az X változó hosszútávú átlagos értéke.
- A várható érték és a módusz a helyzeti mutatószámok közé tartozik.
- Jellemzően: várható érték $\neq$ módusz.
- A várható érték nem mindig eleme az értékkészletnek.
- A feltétel azt követeli meg, hogy a várható értéket definiáló sor abszolút konvergens legyen. Ha ez teljesül, akkor az $E(X)$ összeg garantáltan egy véges valós szám.
- Véges értékkészlet esetén a feltétel mindig teljesül, ezért ebben az esetben a feltétel kihagyható a definícióból.

Feladat. *Mennyi a nyeremény várható értéke a kaszinós feladatban?*

Valószínűségeloszlás:

$$P(X=0) = 2/6, \quad P(X=1000) = 3/6, \quad P(X=6000) = 1/6$$

Várható érték: $E(X) = 0 \cdot 2/6 + 1000 \cdot 3/6 + 6000 \cdot 1/6 = 1500$

Sok játékot játszva 1500 forint az egy játékra jutó átlagos nyeremény.

A várható értéket definiáló összegnek fontos jelentése van a fizikában.

- Képzeljük el, hogy az x tengely egy végtelen hosszú súlytalan rúd.
- Minden $x \in R_X$ pontban a rúdra egy kiterjedés nélküli és p_x nagyságú tömeg van erősítve.
- A rudat egy $a \in \mathbb{R}$ pontban alátámasztjuk.
- Az x pontban található p_x nagyságú tömeg forgatónyomatéka:

$$M_x = \text{erőkar} \cdot \text{forgató erő} = (x - a) \cdot p_x g$$

ahol g a gravitációs gyorsulás. Az eredő forgatónyomaték:

$$M = \sum_{x \in R_X} M_x = g \sum_{x \in R_X} (x - a) p_x$$

A rendszer egyensúlya szempontjából három eset lehetséges:

- Ha $M > 0$, akkor a rúd az óramutató járásának irányába billen el.
- Ha $M < 0$, akkor a rúd az ellentétes irányba billen el.
- Ha $M = 0$, akkor a rúd egyensúlyban marad.

Átrendezéssel kapjuk, hogy az egyensúly pontosan akkor teljesül, ha $a = \sum_{x \in R_X} x p_x$, tehát ha a rudat a várható értéknél támasztjuk alá. Ezt a pontot a fizikában **súlypontnak** nevezik.

Szóródási mutatószámok

Legyen X olyan diszkrét változó, melynek létezik a várható értéke!

- **Várható értéktől való átlagos eltérés:**

$$E(|X - E(X)|) = \sum_{x \in R_X} |x - E(X)| P(X = x)$$

- **Variancia, szórásnégyzet:**

$$\text{Var}(X) = E([X - E(X)]^2) = \sum_{x \in R_X} [x - E(X)]^2 P(X = x)$$

Jelentése: a várható értéktől vett átlagos négyzetes eltérés.

- **Szórás:** $D(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$

- A várható értéktől való átlagos eltérés egy könnyen értelmezhető mutatószám. Hátránya: nincsenek szép matematikai tulajdonságai.
- Vegyük észre:

$$D(X) = \sqrt{E([X - E(X)]^2)} \approx E(\sqrt{[X - E(X)]^2}) = E(|X - E(X)|)$$

Tehát: szórás $\approx$ várható értéktől való átlagos eltérés.

Feladat. Mennyi a várható értéktől vett átlagos eltérés illetve a szórás a kaszinós feladatban?

$$E(X) = 1500 \quad \begin{array}{c|ccc} X & 0 & 1000 & 6000 \\ \hline p_X & 2/6 & 3/6 & 1/6 \end{array}$$

Várható értéktől vett átlagos eltérés:

$$\begin{aligned} E(|X - E(X)|) &= |0 - 1500| \cdot \frac{2}{6} + |1000 - 1500| \cdot \frac{3}{6} + |6000 - 1500| \cdot \frac{1}{6} \\ &= 1500 \cdot \frac{2}{6} + 500 \cdot \frac{3}{6} + 4500 \cdot \frac{1}{6} = 1500 \end{aligned}$$

Variancia (várható értéktől vett átlagos négyzetes eltérés):

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= [0 - 1500]^2 \cdot \frac{2}{6} + [1000 - 1500]^2 \cdot \frac{3}{6} + [6000 - 1500]^2 \cdot \frac{1}{6} \\ &= 1500^2 \cdot \frac{2}{6} + 500^2 \cdot \frac{3}{6} + 4500^2 \cdot \frac{1}{6} = 4\,250\,000 \end{aligned}$$

Szórás:

$$D(X) = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{4\,250\,000} \approx 2061,6$$

Véges sokaságok

Statisztikában gyakran találkozunk az alábbi problémakörrel.

- Adott egy véges sokaság, vagyis egy véges halmaz. Ez gyakran embereknek egy csoportja, élőlényeknek egy populációja.
- Adott egy mennyiség a sokaságon. Például: testtömeg, jövedelem, stb. Ennek a mennyiségnek az eloszlását vizsgáljuk.

Tegyük fel, hogy a sokaságban N elem/egyed található, és a mennyiség értékei az egyes elemeken: $x_1, \dots, x_N$. Kérdések:

- Milyen arányok vannak a sokaságon belül a mennyiség szempontjából?
- Mennyi a vizsgált mennyiség átlagos értéke?

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \dots + x_N}{N}$$

- Mennyi a vizsgált mennyiség szórása?

$$\sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2}{N}}$$

Feladat. Egy családban 4 gyerek van, a testtömegük: 50, 54, 60, 70 kg.

- A gyerekek mekkora hányada esik az $[50, 60]$ intervallumba?

Válasz: 50%.

- Mennyi az átlagos testtömeg?

$$\bar{x} = \frac{50 + 54 + 60 + 70}{4} = 58,5$$

- Mennyi a testtömeg szórása?

$$\sqrt{\frac{(50 - 58,5)^2 + (54 - 58,5)^2 + (60 - 58,5)^2 + (70 - 58,5)^2}{4}} = 7,53$$

Felmerül a kérdés, hogy mindez hogyan illeszkedik a diszkrét valószínűségi változóknál tanult fogalmakhoz?

Véletlenszerűen kiválasztunk egy elemet a sokaságból, és legyen X a vizsgált mennyiség értéke a kiválasztott elemen. Ekkor:

- Az X változó diszkrét, ugyanis $R_X = \{x_1, \dots, x_N\}$.
- Valószínűségeloszlás: $P(X = x_1) = \dots = P(X = x_N) = 1/N$.
- Tetszőleges $a < b$ valós számok esetén:

$P(a \leq X \leq b) =$ az $[a, b]$ intervallumba eső elemek aránya

- Várható érték = sokaságon belüli átlag:

$$E(X) = \sum_{x \in R_X} x P(X = x) = \frac{x_1 + \dots + x_N}{N} = \bar{x}$$

- Variancia:

$$\text{Var}(X) = \sum_{x \in R_X} [x - E(X)]^2 P(X = x) = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2}{N}$$

- Szórás: $D(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$