Gyakorló feladatok a Véletlen matematikája című továbbképzéshez

1. Kombinatorikus valószínűség

1.1. **a.** Három barátnő, Anna, Bori és Cili véletlenszerű sorrendben leül egymás mellé egy padra. Hány lehetséges kimenetele van a kísérletnek? Mennyi annak a valószínűsége, hogy Anna és Bori a pad két szélére kerül? Mennyi az esélye annak, hogy Anna és Cili egymás mellé kerül?

b. A három lányhoz csatlakozik Dóri és Emma is, és most már öten ülnek a padon. A sorrend továbbra is véletlenszerű. Most mennyi az esélye annak, hogy Anna és Bori a pad két szélére kerül? És annak, hogy Anna és Dóri között pontosan ketten ülnek? Mekkora valószínűséggel fog Anna, Cili és Emma egymás mellé kerülni?

1.2. Véletlenszerűen felírunk egy valódi ötjegyű számot, tehát egy olyan ötjegyű számot, melynek nem 0 az első jegye. Mi annak a valószínűsége, hogy a szám jegyei különböző páratlan számok? Mekkora eséllyel lesznek a számban azonos számjegyek?

1.3. Egy vendéglő egyik asztalánál 9 vendég ül, és mindenki rendel egy italt, összesen 3 sört, 4 vörös és 2 fehér bort. A pincér véletlenszerűen osztja ki az italokat. Mennyi a valószínűsége, hogy mindenki olyan italt kap, amilyet kért? Mennyi az esélye annak, hogy a pincér a söröket jól osztja ki, de legalább egy bort rossz vendégnek ad?

1.4. Többször egymás után feldobunk egy szabályos dobókockát.

a. Mennyi az esélye, hogy az első hatos pontosan a negyedik dobásra jön? Mi annak a valószínűsége, hogy az első hatost pontosan az n-edik dobásra kapjuk?

b. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az első négy dobás során kapunk legalább egy hatost? Mekkora eséllyel kapunk legalább egy hatost az első n dobás során?

c. Hányszor dobjuk fel a kockát, ha az a célunk, hogy legalább 90% valószínűséggel legyen hatos a dobások között?

2. Mintavételezési feladatok

2.1. A 32 lapos magyar kártyapakliból kihúzunk véletlenszerűen 6 lapot visszatevés nélkül. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kihúzott lapok között

- **a.** pontosan 2 ász lesz;
- **b.** pontosan 3 piros, 2 zöld és 1 makk lesz;
- **c.** lesz legalább egy ász;
- **d.** lesz piros vagy lesz ász?

2.2. Oldjuk meg az előző feladatot azzal a módosítással, hogy a lapokat visszatevéssel húzzuk ki.

2.3. Egy óvodás csoportba 9 gyerek jár, köztük egy testvérpár. Hányféleképpen lehet a gyerekeket egy négy-, egy három- és egy kétfős csoportba besorolni? Ha véletlenszerű a besorolás, akkor milyen valószínűséggel fog a két testvér ugyanabba a csoportba kerülni?

2.4. Egy vizsgán egy hallgató a 100 lehetséges kérdésből n-re tudja a választ. A hallgató két kérdést kap véletlenszerűen. Mekkora eséllyel fogja teljesíteni a vizsgát, ha

- **a.** megbukik, ha valamelyik kérdésre nem tud válaszolni;
- **b.** a kérdések közül elég az egyikre válaszolni?

Az egyes vizsgáztatási módok esetén a vizsgázó hány kérdésre tanulja meg a választ, ha az a célja, hogy legalább 80% valószínűséggel teljesítse a vizsgát?

3. A valószínűség általános tulajdonságai

3.1. Egy hedge fund három cégbe fekteti pénzét, melyek rendre 19%, 25% illetve 28% valószínűséggel mennek tönkre az elkövetkező öt évben. 1/20 annak az esélye, hogy az első és a második cég is csődbe megy; 1/10 a valószínűsége, hogy az első és a harmadik is elveszti a vagyonát; és 1/10 az esélye annak is, hogy a második és a harmadik is becsődöl. Annak az esélye, hogy mindhárom vállalat csődbe megy, 2%. Mennyi a valószínűsége, hogy az elkövetkező öt évben

a. az első vagy a második vállalat csődbe megy;

b. az első becsődöl, de a harmadik nem;

c. pontosan két vállalat megy csődbe, és közöttük lesz a harmadik;

d. legalább két vállalat becsődöl;

e. egyik vállalat sem megy csődbe?

3.2. Kiválasztunk egy végzős hallgatót, és megnézzük, hogy hány kurzusfelvétellel tudta teljesíteni a tárgyait. Jelölje A_n azt, hogy a Kalkulust az n-edik kurzusfelvételkor teljesítette, tehát például A_3 az az esemény, hogy a tárgyat a harmadik alkalommal sikerült abszolválnia. Hasonló módon jelölje B_n azt, hogy a Lineáris algebrához pontosan n felvétel volt szükséges, C_n pedig az az esemény, hogy a Valószínűségszámítás az n-edik alkalommal sikerült. Formalizáljuk a következő eseményeket:

a. a Kalkulust az első, a Lineáris algebrát a második felvételkor sikerült teljesíteni;

b. a Kalkulus sikerült elsőre, de a Valószínűségszámítás nem;

c. a három közül legalább egy kurzust sikerült az első alkalommal teljesíteni;

d. a három közül legalább egy kurzust nem sikerült az első alkalommal teljesíteni;

e. a Kalkulushoz és a Valószínűségszámításhoz összesen négy felvétel kellett.

3.3. Legyenek A és B olyan események, melyek valószínűsége 0,7 illetve 0,8. Ezen információ birtokában meg tudjuk határozni egyértelműen a $P(A \cup B)$ és a $P(A \cap B)$ valószínűséget? Ha nem, akkor adjunk alsó és felső korlátot ezekre a valószínűségekre. A megoldást illusztráljuk Venn-diagrammal.

4. Geometriai valószínűségi mezők, feltételes valószínűség

4.1. Ejtőernyős ugrást hajtanak végre egy 500 m^2 területű mezőn. Az ugrás akkor sikeres, ha az ugró a mezőn kijelölt 10 m oldalhosszúságú négyzetben ér földet. Különdíjat kap az, aki a négyzet közepén megrajzolt 2 m sugarú körön belül érkezik. Feltehető, hogy az érkezés helye a mezőn megfelel az egyenletességi hipotézisnek. Mekkora valószínűséggel lesz sikeres az ugrás? Mennyi az esélye annak, hogy az ugró különdíjat kap feltéve, hogy az ugrás sikeres? Milyen kapcsolat van az ugrás sikeressége és a különdíj megszerzése között: kizárják egymást, vagy valamelyik maga után vonja a másikat?

4.2. Adott egy kör alakú céltábla, melynek 10 centiméter a sugara. A céltáblára felrajzolunk egy vízszintes és egy függőleges egyenest úgy, hogy mindkettő átmenjen a kör középpontján. Ilyen módon a táblát négy tartományra osztjuk fel. Véletlenszerűen rálövünk a céltáblára. Adjuk meg a következő események valószínűségét:

$A =$ a céltáblát a középponttól legalább 5 centiméterre találjuk el

$B =$ a találat a bal alsó tartományba esik

Mennyi az A esemény valószínűsége, ha tudjuk, hogy B bekövetkezik? Független a két esemény egymástól? Kizárják egymást? Valamelyik maga után vonja a másikat?

4.3. Véletlenszerűen választunk egy x értéket a $[0, 1]$ intervallumon. Ez az érték egy x és egy $1 - x$ hosszúságú szakaszra bontja az egységnyi hosszúságú intervallumot. Mennyi annak az esélye, hogy a szakaszok hosszának szorzata nagyobb, mint 5/36?

4.4. Legyen A és B két esemény, és legyen $P(B) > 0$. Mennyi az $P(A|B)$ feltételes valószínűség értéke, ha **a.** A és B kizáró események; **b.** B maga után vonja az A eseményt; **c.** A és B független események?

4.5. A Monty Hall-paradoxon, részletekért lásd a Wikipediat. Csak szorgalmi feladat.

a. Egy tévés vetélkedőben három egyforma ajtó mögött egy főnyeremény és két kis értékű ajándék van véletlenszerűen elhelyezve. A játékos megjelöl egyet az ajtók közül, de azt most még nem nyitják ki neki. Ehelyett a műsorvezető nyit ki egyet véletlenszerűen a megmaradt ajtók közül. Tegyük fel, hogy a kinyitott ajtó mögött nem a főnyeremény található. A játékosnak ezen a ponton lehetősége van módosítani a választásán, és az eredetileg megjelölt ajtó helyett a harmadik, kimaradt ajtót kinyitni. Figyelembe véve, hogy a műsorvezető kis értékű ajándékot talált, a főnyeremény mekkora eséllyel van a játékos által megjelölt ajtó illetve a kimaradt ajtó mögött? Ezek alapján a játékosnak érdemes módosítania az eredeti választásán?

b. Módosítsuk a feladat **a.** részét annyiban, hogy a műsorvezető tudja, melyik ajtó mögött mi található, és mindig egy olyan ajtót nyit ki, mely mögött kis értékű nyeremény van. Ha két ilyen ajtó is rendelkezésre áll, akkor véletlenszerűen választ. Ebben az esetben milyen választ adhatunk az **a.** pont kérdéseire?

5. Feltételes valószínűség, a teljes valószínűség tétele

5.1. Egy óvodás csoportba 9 gyerek jár, köztük egy testvérpár, egy fiú és egy lány. Egy foglalkozáson véletlenszerűen kiválasztanak 4 gyereket. Mennyi a valószínűsége annak, hogy

- **a.** a testvérpár mindkét tagját kiválasztják;
- **b.** a testvérpár mindkét tagját kiválasztják, feltéve, hogy a fiú ki lett választva;
- **c.** a testvérpár mindkét tagját kiválasztják, feltéve, hogy legalább az egyikük ki lett választva?

5.2. Stephen Curry, a Golden Gate Warriors kosárlabdázója a 2016/17-es szezonban a kétpontos, a hárompontos illetve a büntető dobásokat rendre 54, 41 és 90 százalékos hatékonysággal értékesítette. A próbálkozásainak 44, 36 és 20 százaléka volt kétpontos, hárompontos illetve büntető dobás.

- **a.** Curry összes próbálkozásának hány százaléka volt sikeres hárompontos dobás? Az összes próbálkozásának mekkora hányadát értékesítette?
- **b.** A sikertelen próbálkozások milyen arányban voltak kétpontos, hárompontos illetve büntető dobások?

5.3. Egy vizsgán egy tesztkérdéshez négy lehetséges válasz van megadva, melyek közül egy helyes. A vizsgázó $2/3$ valószínűséggel tudja a helyes választ, és ebben az esetben meg is jelöli azt. Ha nem tudja a helyes választ, akkor a vizsgázó tippel, tehát véletlenszerűen jelöl egyet a négy válasz közül. A javítás során azt látjuk, hogy a vizsgázó helyes választ adott a kérdésre. Mennyi a valószínűsége, hogy csak tippelt?

6. A láncszabály, események függetlensége

6.1. A fogadóirodák szerint amerikai kosárlabdabajnokságban (NBA) a Chicago Bulls, a San Antonio Spurs illetve a Los Angeles Lakers rendre 0,5, 0,8 és 0,3 valószínűséggel nyeri meg a következő meccsét. (A csapatok nem egymással játszanak.) Feltehető, hogy a három mérkőzés eredménye független egymástól. Határozzuk meg az alábbi események valószínűségét:

- **a.** mindhárom csapat megnyeri a következő mérkőzését;
- **b.** a Bulls nyer, viszont a Lakers veszít;
- **c.** a három csapat közül pontosan egy nyer;
- **d.** a három csapat közül legfeljebb egy nyer.

Feltéve, hogy a három csapat közül pontosan egy nyer, mennyi annak az esélye, hogy a Bulls, a Spurs illetve a Lakers éri el a győzelmet?

6.2. Adott egy urna, benne pedig 4 piros és 2 zöld golyó. Kihúzunk három golyót visszatevés nélkül.

- **a.** Mennyi annak a valószínűsége, hogy sorban egy pirosat, egy zöldet, és még egy pirosat kapunk? Mennyi az esélye, hogy a kihúzott golyók között pontosan egy zöld lesz?
- **b.** Mennyi annak az esélye, hogy a második golyó zöld? Feltéve, hogy a második golyó zöld, mi annak a valószínűsége, hogy az első golyó piros volt? Függ az első golyó színe attól, hogy milyen színű a második?

Miben változik a megoldás menete akkor, ha a golyókat visszatevéssel húzzuk ki.

6.3. Egy 120 km hosszú autópályán a 40. és a 100. kilométernél van mentőállomás, nevezzük ezeket X-nek és Y-nak. Ha baleset történik, akkor azt az állomást riasztják, amelyik közelebb esik a baleset helyszínéhez.

- **a.** Egy véletlenszerű baleset esetén mennyi az esélye annak, hogy az X állomást riasztják?
- **b.** Tegyük fel, hogy négy baleset történik egymástól függetlenül. Mennyi annak a valószínűsége, hogy időrendben az első két esethez az X, a második kettőhöz pedig az Y állomást riasztják? Mennyi az esélye, hogy pontosan két alkalommal riasztják az X állomást? Mi a valószínűsége annak, hogy a négyből legalább egy esethez az X állomást riasztják?
- **c.** Hány baleset esetén teljesül az, hogy legalább 99% eséllyel valamelyik esethez az X állomást fogják majd riasztani?

7. Diszkrét valószínűségi változók

7.1. Magyarországon minden autótulajdonosnak kötnie kell kötelező gépjármű felelősségbiztosítást. Ezen biztosítás esetében úgynevezett bonus-malus rendszert alkalmaznak. Ez azt jelenti, hogy a biztosítók az autósokat különböző fokozatokba sorolják attól függően, hogy azok a múltban hányszor okoztak balesetet. A fokozatokat egész számokkal jelölik, tipikusan -4-től $+10$-ig, és a biztosítási díj fokozatonként eltérő.

Újdonsült autótulajdonosként biztosítást kötök, és ezzel a 0 fokozatba sorolnak. A szerződés értelmében ha egy adott évben nem okozok balesetet, akkor a következő évben eggyel magasabb fokozatba kerülök; ha egynél több balesetet okozok, akkor eggyel alacsonyabb fokozatba sorolnak; míg ha pontosan egy belesetet okozok, akkor maradok a fokozatban. Tegyük fel, hogy egy adott évben 0,5 eséllyel nem okozok balesetet, 0,4 valószínűséggel okozok pontosan egy balesetet, és 0,1 eséllyel okozok egynél több balesetet. Feltehető, hogy a különböző évek eseményei függetlenek egymástól. Az alábbi táblázat azt tartalmazza, hogy az egyes fokozatokban mennyi az éves biztosítási díj.

Fokozat	-2	-1	0	$+1$	$+2$
Éves díj (ezer Ft)	200	130	100	90	85

Jelölje ξ azt, hogy két év múlva mennyi biztosítási díjat kell fizetnem. Adjuk meg a ξ valószínűségi változó értékkészletét, eloszlását, várható értékét és szórását.

7.2. Adott egy vírusos megbetegedés, melyet az emberek 1% eséllyel kapnak el. A betegségre kifejlesztettek egy tesztet, mely a vérben található antitestek alapján mutatja ki a betegség jelenlétét, de az eljárás drága, egy-egy tesztelés ezer dollárba kerül. Egy kórházban a következő módon végzik el a páciensek vizsgálatát. Nem egyesével tesztelik le őket, hanem összevárnak tíz pácienst, és összeöntik a mintáikat. Ha az eredmény negatív, akkor egyik mintában sincs antitest, tehát mindeki egészséges. Ha a teszt eredménye pozitív, akkor ismét elvégzik a tesztet, de ezúttal már mind a tíz emberen külön-külön, hogy kiderüljön, kik betegek közülük. Határozzuk meg, hogy ezzel a módszerrel átlagosan mennyibe kerül egy páciens letesztelése.

7.3. Biztosítást szeretnénk kötni egy 9 millió forint értékű lakóházra. Tegyük fel, hogy az elkövetkezendő egy évben 99,9% valószínűséggel nem lesz kárunk, és 0,1% eséllyel teljesen leég a ház. Ha van biztosításunk, akkor a biztosító a keletkezett kárt teljes mértékben megtéríti. Mi az a minimális biztosítási díj, amit a biztosító ki fog majd szabni ránk? Ha a vagyoni helyzetünket az $u(x) = \sqrt{x}$ hasznossági függvényen keresztül értékeljük, akkor racionálisan gondolkodó fogyasztóként mi az a maximális összeg, amit még hajlandóak vagyunk kifizetni ezért a biztosításért?

8. A nevezetesebb diszkrét eloszlások

8.1. **a.** Tízszer feldobunk egy szabályos dobókockát. Jelölje ξ azt, hogy hányszor kapunk páratlan számot. Határozzuk meg ξ eloszlását, várható értékét és szórását. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a 10 dobásból pontosan annyi páratlan értéket kapunk, mint párosat?

b. Ötször feldobunk két dobókockát. Jelölje η azt, hogy hányszor dobtunk két páratlan számot. Határozzuk meg η eloszlását és várható értékét.

8.2. Egy csatában az egyik harcoló fél ejtőernyőkkel próbál utánpótlást eljuttatni egy körbevett alakulathoz. Az erős szél miatt az ejtőernyők egymástól függetlenül és véletlenszerű helyen érnek földet a 15 km^2 területű csatatéren. Az alakulat egy 1 km^2 területű magaslaton védekezik, és az utánpótlást csak akkor kapják meg, ha az ernyő ezen a magaslaton ér földet. Éppen ezért a vezérkar addig dob le újabb és újabb ejtőernyőket, míg valamelyiket meg nem szerzi az alakulat. Mennyi annak az esélye, hogy pontosan öt ejtőernyőt kell majd ledobni? Mi a valószínűsége annak, hogy ötnél több ledobásra lesz majd szükség? Várhatóan hány ejtőernyőt kell ledobni?

8.3. Egy szelvénnyel játszunk a Skandináv lottón, ahol 35 számból 7-et kell megjelölni. A szabályok szerint a számok két sorsoláson is részt vesznek, egy gépin és egy kézin, ez az úgynevezett ikersorsolás. Mindkét számsorsolás alkalmával 7 számot húznak ki, és akkor nyerünk pénzt, ha valamelyik sorsoláson elérünk legalább 4 találatot.

a. Mennyi annak az esélye, hogy a gépi sorsoláson pontosan 4 találatot érünk el? Mekkora valószínűséggel érünk el legalább 4 találatot? Mennyi a gépi sorsoláson a találatok számának a várható értéke?

b. Mennyi annak az esélye, hogy a két sorsolás közül az egyiken nincs találatunk, a másikon pedig pontosan 1 találatot érünk el? Mekkora annak a valószínűsége, hogy valamelyik soroláson lesz legalább 4 találatunk, tehát nyerünk pénzt?

9. Folytonos valószínűségi változók

9.1. Egy ξ folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f_\xi(x) = a\sqrt{x}$, ha $0 \leq x \leq 1$, és $f_\xi(x) = 0$ minden más x valós számra. Határozzuk meg az a paraméter értékét, ábrázoljuk a sűrűségfüggvényt, és írjuk fel ξ értékkészletét. Mi a $P(0{,}5 < \xi < 1{,}5)$ valószínűség értéke? Milyen t értékre teljesül, hogy $P(\xi > t) = 20\%$? Adjuk meg a változó várható értékét és szórását is.

9.2. Amikor telefonálok, a beszélgetéseim percekben kifejezett hosszúsága egy ξ valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye $f_\xi(x) = a/x^2$, ha $1 \leq x \leq 5$, és $f_\xi(x) = 0$ egyébként.

- **a.** Ábrázoljuk az f_ξ sűrűségfüggvényt. Határozzuk meg az a paraméter értékét és a ξ változó értékkészletét. Mennyi annak az esélye, hogy egy telefonhívásom hossza 3 és 10 perc közé esik? Átlagosan milyen hosszúak a beszélgetéseim, és mennyi a hívások hosszának a szórása?
- **b.** Egy ξ változó (elméleti) mediánja az a t valós szám, melyre $P(\xi < t) = 1/2$. Határozzuk meg a telefonhívásaim hosszának mediánját.
- **c.** A szolgáltatóval olyan szerződést kötöttem, hogy a telefonhívásokért percenként 50 forintot kell fizetnem. Fejezzük ki a hívás árát a hívás hosszának segítségével. A beszélgetéseim mekkora hányada drágább 150 forintnál? Átlagosan mennyibe kerül egy-egy telefonhívás?

9.3. Magyarországon az éves búzatermés közelítőleg egyenletes eloszlást követ 3,5 millió és 5,5 millió tonna között. A nagyobb termésmennyiség alacsonyabb piaci árat jelent. Amennyiben a teljes búzatermés x millió tonna, akkor a modellünkben a búza tonnánkénti felvásárlási ára legyen mondjuk $100 - 10x$ ezer forint.

- **a.** Jelölje ξ az éves búzatermést millió tonnában kifejezve. Adjuk meg a ξ sűrűségfüggvényét. Mennyi annak az esélye, hogy egy évben 5 millió tonnánál több búza terem? Adjuk meg azt a t valós számot, melyre $P(\xi > t) = 90\%$. Mennyi az éves búzatermés várható értéke és szórása?
- **b.** Jelölje η a búza tonnánként felvásárlási árát ezer forintban kifejezve. Egy megfelelően választott h függvény segítségével írjuk fel az η változót a $h(\xi)$ alakban. Mennyi annak az esélye, hogy a tonnánkénti felvásárlási ár 50 ezer forint alatt lesz? Mennyi a felvásárlási ár várható értéke?

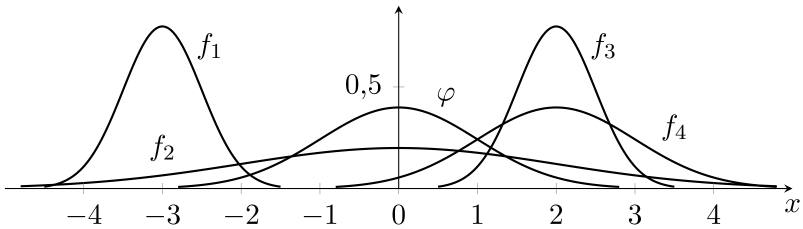
10. A normális eloszlás

10.1. Az alábbi ábrán φ a standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye. Határozzuk meg, hogy az f_1, f_2, f_3, f_4 sűrűségfüggvények közül melyik tartozik az alábbi μ várható értékkel és σ szórással definiált normális eloszlásokhoz. Adjuk meg a kimaradt sűrűségfüggvényhez tartozó várható értéket és szórást is.

a. $\mu = 2, \sigma = 0{,}5$

b. $\mu = 2, \sigma = 1$

c. $\mu = 0, \sigma = 2$



10.2. Legyen ξ egy véletlenszerűen kiválasztott felnőtt ember szisztolés vérnyomása higanymilliméterben (mmHg) kifejezve. A statisztikai adatok alapján ξ egy-egy földrajzi területen lognormális eloszlást követ, ami azt jelenti, hogy az $\ln \xi$ valószínűségi változó normális eloszlású. A paraméterek országonként változóak, például az Egyesült Államokban az $\ln \xi$ változó várható értéke és szórása $\mu = 4{,}78$ illetve $\sigma = 0{,}16$. (Forrás: National Health and Nutrition Examination Survey, 2006.) Az orvosi szakirodalom a 140 mmHg feletti vérnyomást tekinti kórosan magasnak. Ez az amerikai felnőtt népesség mekkora hányadát érinti? Az emberek mekkora hányadának esik a vérnyomása az egészségesnek tekintett tartományba, tehát 90 és 130 mmHg közé? Adjunk meg egy olyan intervallumot, melyre teljesül, hogy a felnőtt népesség 95 százalékának a szisztolés vérnyomása ide esik.

10.3. Feldobok 500 szabályos dobókockát. Mennyi a kapott hatosok számának a várható értéke és szórása? Mennyi annak a valószínűsége, hogy 100-nál több hatos kapok? Adjunk meg egy olyan intervallumot, melyre teljesül, hogy a hatosok száma 95% százalék valószínűséggel ebbe az intervallumba esik.

10.4. Egy biztosítónak 10 ezer ügyfele van, akik egymástól függetlenül 1% valószínűséggel szenvednek el káreseményt egy adott évben. Jelölje ξ a káresemények számát a biztosítottak körében. Határozzuk meg a ξ valószínűségi változó eloszlását, várható értékét és szórását. Mennyi annak az esélye, hogy a káresemények száma 85 és 115 közé esik? Adjunk meg egy olyan t értéket, melyre teljesül, hogy $P(\xi \geq t) = 10\%$.

11. Pontbecslések, konfidencia intervallumok, hipotézisvizsgálat

11.1. Egy ξ valószínűségi változó értékeit megfigyelve a következő statisztikai mintát kapjuk: 6,5, 7,3, 5,4, 6,5, 2,1.

a. Ábrázoljuk a minta empirikus eloszlásfüggvényét, valamint számoljuk ki a következő statisztikákat: empirikus várható érték, korrigálatlan/korrigált empirikus variancia és empirikus szórás, medián.

b. Tegyük fel, hogy a ξ háttérváltozó normális eloszlást követ 2 szórással. Adjunk 95% megbízhatósági szintű konfidencia intervallumot a ξ várható értékére. Teszteljük 5%-os szignifikancia szinten azt a nullhipotézist, hogy a ξ változó elméleti várható értéke 8.

11.2. Bejelentés érkezik a fogyasztóvédelemhez, hogy az egyik tejgyár 1 literes kiszerelésű dobozos teje a névleges tartalomnál kevesebbet tartalmaz. Tudni kell, hogy a töltőberendezések véletlen nagyságú hibával dolgoznak, így ténylegesen egyik dobozban sincs pontosan 1 liter tej. Feltehető, hogy a dobozokba töltött mennyiség egy ξ normális eloszlású valószínűségi változó, melynek 1 liter a várható értéke, ha a gép jól van beállítva. A fogyasztóvédelem emberei beszereznek hat doboz tejet, és azt találják, hogy ezek 975, 980, 985, 995, 1000, 1010 ml tejet tartalmaznak. (A dobozokban található tej mennyisége független egymástól.)

a. Ábrázoljuk a minta empirikus eloszlásfüggvényét, valamint számoljuk ki a következő statisztikákat: empirikus várható érték, korrigálatlan/korrigált empirikus variancia és empirikus szórás, medián.

b. Tegyük fel, hogy a ξ háttérváltozó normális eloszlást követ 10 ml szórással. Adjunk 90% megbízhatósági szintű konfidencia intervallumot a ξ várható értékére. Teszteljük 10%-os szignifikancia szinten az a nullhipotézist, hogy a töltőberendezés jól van beállítva, tehát a ξ változó várható értéke 1000 ml.

11.3. Régészek radiokarbonos kormeghatározással szeretnék meghatározni egy lelőhely korát. Ismert, hogy a radiokarbonos módszert az egyazon ásatáson talált különböző leleteken alkalmazva nem pontosan ugyanazt a kort fogjuk megkapni minden lelet esetében, hanem a kapott korok (közelítőleg) normális eloszlást követnek, melynek elméleti várható értéke a lelőhely igazi kora. A radiokarbonos módszert hét leleten alkalmazva a következő korokat kapjuk: 1180, 1220, 1230, 1250, 1270, 1290 és 1340.

a. Határozzuk meg a következő statisztikákat: empirikus várható érték, korrigálatlan/korrigált empirikus variancia és empirikus szórás, medián.

b. Írjunk fel egy 95% megbízhatósági szintű konfidencia intervallumot a lelőhely igazi korára. Teszteljük 5%-os szignifikancia szinten azt a nullhipotézist, hogy a lelőhely kora 1220 év.

Megoldások

1.1. **a.** 6; 2/6; 4/6; **b.** $2 \cdot 3!/5!$; $2 \cdot 2 \cdot 3!/5!$; $3 \cdot 3! \cdot 2!/5!$

1.2. $5!/(9 \cdot 10^4)$; $(9 \cdot 10^4 - 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6)/(9 \cdot 10^4)$.

1.3. $3! \cdot 4! \cdot 2!/9!$; $(3! \cdot 4 \cdot 2 \cdot 4! + 3! \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4! + 3! \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4!)/9!$

1.4. **a.** $(5^3 \cdot 1)/6^4$; $(5^{n-1} \cdot 1)/6^n$; **b.** $(6^4 - 5^4)/6^4$; $(6^n - 5^n)/6^n$; **c.** 13.

2.1. **a.** $\binom{4}{2}\binom{28}{4}/\binom{32}{6}$; **b.** $\binom{8}{3}\binom{8}{2}\binom{8}{1}/\binom{32}{6}$; **c.** $\left[\binom{32}{6} - \binom{28}{6}\right]/\binom{32}{6}$; **d.** $\left[\binom{32}{6} - \binom{21}{6}\right]/\binom{32}{6}$.

2.2. **a.** $\binom{6}{2}4^2 28^4/32^6$; **b.** $\binom{6}{3}\binom{3}{2}8^3 8^2 8/32^6$; **c.** $(32^6 - 28^6)/32^6$; **d.** $(32^6 - 21^6)/32^6$.

2.3. $\binom{9}{4}\binom{5}{3}\binom{2}{2} = 1260$; $\left[\binom{7}{2}\binom{5}{3}\binom{2}{2} + \binom{7}{4}\binom{3}{1}\binom{2}{2} + \binom{7}{4}\binom{3}{3}\right]/1260$.

2.4. **a.** $\binom{n}{2}/\binom{100}{2}$; 90; **b.** $\left[\binom{100}{2} - \binom{100-n}{2}\right]/\binom{100}{2}$; 55.

3.1. **a.** 0,39; **b.** 0,09; **c.** 0,16; **d.** 0,21; **e.** 0,51.

3.2. **a.** $A_1 \cap B_2$; **b.** $A_1 \setminus C_1$; **c.** $A_1 \cup B_1 \cup C_1$; **d.** $\overline{A_1} \cup \overline{B_1} \cup \overline{C_1}$; **e.** $(A_1 \cap C_3) \cup (A_2 \cap C_2) \cup (A_3 \cap C_1)$.

3.3. A kettő közül egyik esemény valószínűsége sem határozható meg egyértelműen, az események valószínűsége az alábbi korlátok között bármilyen értéket felvehet:

$0{,}5 \leq P(A \cap B) \leq 0{,}7$; $0{,}8 \leq P(A \cup B) \leq 1$.

4.1. 0,2; $\pi/25 \approx 0{,}126$; a különdíj maga után vonja azt, hogy az ugrás sikeres.

4.2. $P(A) = 0{,}75$; $P(B) = 0{,}25$; $P(A|B) = 0{,}75$; nem zárják ki egymást, egyik sem vonja maga után a másikat, de függetlenek egymástól.

4.3. $P(x(1-x) > 5/36) = P(1/6 < x < 5/6) = 2/3$.

4.4. **a.** 0; **b.** 1; **c.** $P(A)$.

4.5. **a.** A főnyeremény 1/2-1/2 eséllyel található az eredetileg megjelölt illetve a kimaradt ajtó mögött. Mindegy, hogy a játékos kitart a választása mellett vagy módosít.

b. A főnyeremény 1/3 eséllyel található az eredetileg megjelölt ajtó, és 2/3 eséllyel a kimaradt ajtó mögött. Érdemes módosítani a választáson.

5.1. **a.** $\binom{7}{2}/\binom{9}{4}$; **b.** $\binom{7}{2}/\binom{8}{3}$; **c.** $\binom{7}{2}/\left[\binom{9}{4} - \binom{7}{4}\right]$.

5.2. **a.** 14,76%; 56,52%; **b.** 46,55%; 48,85%; 4,5%.

5.3. 1/9.

6.1. **a.** 0,12; **b.** 0,35; **c.** 0,38; **d.** 0,45; utolsó kérdés: $\approx 0{,}184$; $\approx 0{,}737$; $\approx 0{,}079$.

6.2. Visszatevés nélkül: **a.** $4/6 \cdot 2/5 \cdot 3/4$; $3/5$; **b.** $2/6$; $4/5$; igen, függ.

Visszatevéssel: **a.** $4/6 \cdot 2/6 \cdot 4/6$; $4/9$; **b.** $2/6$; $4/6$; nem függ.

6.3. **a.** $7/12$; **b.** $(7/12)^2 \cdot (5/12)^2$; $6 \cdot (7/12)^2 \cdot (5/12)^2$; $1 - (5/12)^4$; **c.** 6.

7.1. Mindent összeget ezer forintban értünk: $R_\xi = \{85, 90, 100, 130, 200\}$, az eloszlás:

k	200	130	100	90	85
$P(\xi = k)$	0,01	0,08	0,26	0,4	0,25

$E(\xi) = 95{,}65$; $D(\xi) = 15{,}79$.

7.2. Jelölje ξ azt, hogy egy 10 fős betegcsoportot hány vizsgálattal lehet letesztelni.

$P(\xi = 1) = P(\text{mindenki egészséges}) = 0{,}99^{10} \approx 0{,}9$,

$P(\xi = 11) = P(\text{van közöttük beteg}) = 1 - P(\text{mindenki egészséges}) \approx 0{,}1$,

$E(\xi) \approx 2$, tehát a 10 fős betegcsoportok átlagosan 2 vizsgálattal tesztelhetőek le, ami átlagosan 2000 dollár költség. Ez 1 főre vetítve átlagosan 200 dollárt jelent.

7.3. Legyen ξ a keletkezett kár nagysága: $P(\xi = 0) = 0{,}999$, $P(\xi = 9.000.000) = 0{,}001$. A biztosító által kiszabott minimális díj = átlagos kárérték = $E(\xi) = 9.000$.

8.1. **a.** A ξ binomiális eloszlású $n = 10$ és $p = 0{,}5$ paraméterrel: $R_\xi = \{0, 1, \ldots, 10\}$, $P(\xi = k) = \binom{10}{k} 0{,}5^k 0{,}5^{10-k}$, $E(\xi) = 5$, $D(\xi) \approx 1{,}58$, $P(\xi = 5) \approx 0{,}246$.

b. Az η binomiális eloszlású $n = 5$ és $p = 0{,}25$ paraméterrel: $R_\eta = \{0, 1, \ldots, 5\}$, $P(\eta = k) = \binom{5}{k} 0{,}25^k 0{,}75^{5-k}$, $E(\xi) = 1{,}25$.

8.2. Legyen ξ a ledobott ejtőernyők száma, ami geometriai eloszlást követ $p = 1/15$ paraméterrel: $R_\xi = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $P(\xi = 5) = (14/15)^4 \cdot (1/15)$, $P(\xi > 5) = (14/15)^5$, $E(\xi) = 15$.

8.3. Legyen ξ és η a találatok száma a gépi illetve a kézi sorsoláson. A két változó független egymástól és hipergeometrikus eloszlású $N = 35$, $M = 7$ és $n = 7$ paraméterrel: $R_\xi = R_\eta = \{0, 1, \ldots, 7\}$, $P(\xi = k) = P(\eta = k) = \binom{7}{k}\binom{28}{7-k} / \binom{35}{7}$.

a. $P(\xi = 4) \approx 0{,}017$, $P(\xi \geq 4) \approx 0{,}018$, $E(\xi) = 7 \cdot 7/35 = 1{,}4$.

b. $P(\xi = 0, \eta = 1 \text{ vagy } \xi = 1, \eta = 0) = P(\xi = 0)P(\eta = 1) + P(\xi = 1)P(\eta = 0) = 0{,}138$,

$P(\xi \geq 4 \text{ vagy } \eta \geq 4) = 1 - P(\xi < 4 \text{ és } \eta < 4) \approx 1 - (1 - 0{,}018)^2 \approx 0{,}034$.

Másik megoldás: $P(\xi \geq 4 \text{ vagy } \eta \geq 4) = P(\xi \geq 4) + P(\eta \geq 4) - P(\xi \geq 4 \text{ és } \eta \geq 4)$ $\approx 2 \cdot 0{,}018 - 0{,}018^2 \approx 0{,}034$.

9.1. $a = 1{,}5$; $R_\xi = [0, 1]$; $P(0{,}5 < \xi < 1{,}5) \approx 0{,}65$; $t \approx 0{,}86$; $E(\xi) = 0{,}6$; $D(\xi) \approx 0{,}26$.

9.2. **a.** $a = 1{,}25$; $R_\xi = [1,5]$; $P(3 \le \xi \le 10) \approx 0{,}17$; $E(\xi) \approx 2{,}01$; $D(\xi) \approx 0{,}98$.

b. $t = 5/3$.

c. Egy ξ hosszúságú telefonhívás ára $\eta = 50\xi$, ezért
$P(\eta > 150) = P(\xi > 3) \approx 0{,}17$; $E(\eta) = E(50\xi) = 100{,}5$;

9.3. **a.** A ξ változó egyenletes eloszlású a $[3{,}5, 5{,}5]$ intervallumon, sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}5\,, & 3{,}5 \le x \le 5{,}5\,, \\ 0\,, & \text{különben;} \end{cases}$$

$P(\xi > 5) = 0{,}25$; $t = 3{,}7$; $E(\xi) = 4{,}5$; $D(\xi) = 0{,}58$.

b. Most $\eta = 100 - 10\xi$, tehát $h(x) = 100 - 10x$; $P(\eta < 50) = P(\xi > 5) = 0{,}25$;
$E(\eta) = E(h(\xi)) = 55$.

10.1. **a.** f_3; **b.** f_4; **c.** f_2. Kimaradt sűrűségfüggvény (f_1): $\mu = -3$, $\sigma = 0{,}5$.

10.2. 15,6%; 66,8%; $[87, 163]$.

10.3. 83,3; 8,3; 0,023; $[67, 100]$;

10.4. Binomiális $n = 10.000$ és $p = 0{,}01$ paraméterrel; 100; 9,95; 87%; $t \approx 112{,}7$.

11.1. **a.** $n = 5$; $E_n(\xi) = 5{,}56$; $V_n(\xi) = 3{,}36$; $D_n(\xi) = 1{,}83$; $V_n^*(\xi) = 4{,}2$; $D_n^*(\xi) = 2{,}05$; median $= 6{,}5$;

$$F_n(x) = \begin{cases} 0\,, & x \le 2{,}1\,, \\ 0{,}2\,, & 2{,}1 < x \le 5{,}4\,, \\ 0{,}4\,, & 5{,}4 < x \le 6{,}5\,, \\ 0{,}8\,, & 6{,}5 < x \le 7{,}3\,, \\ 1\,, & 7{,}3 < x\,. \end{cases}$$

b. $[3{,}81, 7{,}31]$ $\quad (x_\alpha = 1{,}96)$

$H_0 : \mu = \mu_0$, ahol most $\mu_0 = 8$. u-próba: $u = -2{,}73$, $u_\alpha = 1{,}96$, elvetjük.

11.2. **a.** $n = 6$; $E_n(\xi) = 990{,}83$; $V_n(\xi) = 145{,}14$; $D_n(\xi) = 12{,}05$; $V_n^*(\xi) = 174{,}17$; $D_n^*(\xi) = 13{,}2$; median $= 990$;

$$F_n(x) = \begin{cases} 0\,, & x \le 975\,, \\ 1/6\,, & 975 < x \le 980\,, \\ 2/6\,, & 980 < x \le 985\,, \\ 3/6\,, & 985 < x \le 995\,, \\ 4/6\,, & 995 < x \le 1000\,, \\ 5/6\,, & 1000 < x \le 1010\,, \\ 1\,, & 1010 < x\,. \end{cases}$$

b. $[984{,}10, 997{,}57]$ $\quad (x_\alpha = 1{,}65)$

$H_0 : \mu = \mu_0$, ahol most $\mu_0 = 1000$. u-próba: $u = -2{,}25$, $u_\alpha = 1{,}65$, elvetjük.

11.3. **a.** $n = 7$, $\quad E_n(\xi) = 1254{,}3$, $\quad V_n(\xi) = 2310{,}2$, $\quad V_n^*(\xi) = 2695{,}2$, $\quad D_n^*(\xi) = 51{,}9$.

b. $x_\alpha = 2{,}775$, $\quad [1199{,}8, 1308{,}8]$;

$H_0 : \mu = \mu_0$, ahol most $\mu_0 = 1220$. t-próba: $t = 1{,}75$, $t_\alpha = 2{,}447$, elfogadjuk.