Kockázati folyamatok

Szűcs Gábor

Szegedi Tudományegyetem
Bolyai Intézet, Sztochasztika Tanszék

Utolsó frissítés: 2020. december 1.

Tartalomjegyzék

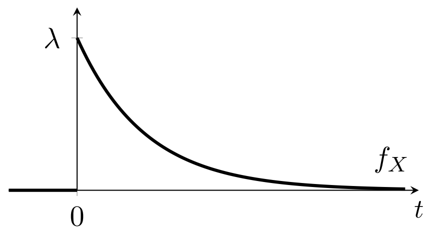
1. Az exponenciális eloszlás

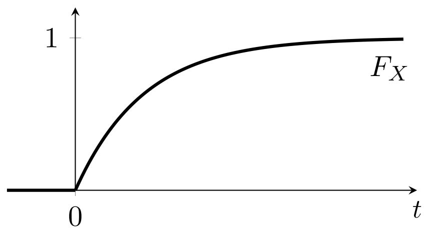
1.1. Definíció. Az X változó **exponenciális eloszlást** követ $\lambda > 0$ paraméterrel, ha sűrűségfüggvénye

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Elemi számolással megmutatható, hogy az exponenciális eloszlás eloszlásfüggvénye, változó várható értéke és szórása:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \qquad E(X) = D(X) = \frac{1}{\lambda}.$$





1.2. Tétel. *Az alábbiak ekvivalensek tetszőleges X véletlen változó esetén.*

(i) *Az X változó exponenciális eloszlást követ.*

(ii) *(Örökifjú tulajdonság.) Tetszőleges $x, y \geq 0$ valós számok esetén $P(X > y) > 0$ és*

$$P\big(X - y > x \mid X > y\big) = P(X > x).$$

(iii) *Tetszőleges $x \geq 0$ valós szám valamint az X-től független és nemnegatív értékű Y véletlen változó esetén $P(X > Y) > 0$ és*

$$P\big(X - Y > x \mid X > Y\big) = P(X > x).$$

Bizonyítás. (i) $\Rightarrow$ (ii) A feltételes valószínűség definíciójával

$$P\big(X - y > x \mid X > y\big) = \frac{P\big(X - y > x, X > y\big)}{P(X > y)} = \frac{P\big(X > x + y\big)}{P(X > y)}$$
$$= \frac{1 - F_X(x+y)}{1 - F_X(y)} = \frac{e^{-\lambda(x+y)}}{e^{-\lambda y}} = e^{-\lambda x} = P(X > x).$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Vezessük be az X változó túlélési függvényét:

$$\overline{F}(x) = P(X > x) = 1 - F_X(x) > 0, \qquad x \geq 0.$$

Az örökifjú tulajdonság szerint tetszőleges $x, y \geq 0$ valós számok esetén

$$\frac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(y)} = \frac{P\big(X > x + y\big)}{P(X > y)} = \frac{P\big(X - y > x, X > y\big)}{P(X > y)} = P\big(X - y > x \mid X > y\big) = P(X > x) = \overline{F}(x).$$

Ebből következik, hogy $\overline{F}(x+y)=\overline{F}(x)\overline{F}(y)$. Mivel az $\overline{F}$ függvény pozitív a $[0,\infty)$ intervallumon, vehetjük az előző egyenlet logaritmusát. Azt kapjuk, hogy

$$\ln\overline{F}(x+y)=\ln\overline{F}(x)+\ln\overline{F}(y)\,,\qquad x,y\geq 0\,,$$

ami a jól ismert Cauchy-féle függvényegyenlet. Az $\overline{F}$ függvény monoton csökkenő a pozitív félegyenesen, amit az $\ln\overline{F}$ függvény is örököl. A függvényegyenlet megoldásaként azt kapjuk, hogy $\ln\overline{F}(x)=-\lambda x$ valamilyen $\lambda\geq 0$ valós számra. $\lambda=0$ esetén $\overline{F}\equiv 1$ a pozitív félegyenesen, tehát $F\equiv 0$, ami nem eloszlásfüggvény. Tehát marad a $\lambda>0$ eset, amikor is $\overline{F}(x)=e^{-\lambda x}$, $x\geq 0$. Ekkor $F(x)=1-e^{-\lambda x}$ a pozitív félegyenesen, tehát az X változó exponenciális eloszlást követ.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Vezessük be az Y változó $\{X>Y\}$ eseményre vett feltételes eloszlásfüggvényét:

$$F_{Y|\{X>Y\}}(y)=P\big(Y\leq y\mid X>Y\big)\,,\qquad y\in\mathbb{R}\,,$$

A teljes várható érték tételével kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}P\big(X-Y>x\mid X>Y\big)&=\int_{-\infty}^{\infty}P\big(X-Y>x\mid Y=y,X>Y\big)\,dF_{Y|\{X>Y\}}(y)\\&=\int_{-\infty}^{\infty}P\big(X-y>x\mid X>y\big)\,dF_{Y|\{X>Y\}}(y)\\&=\int_{-\infty}^{\infty}P(X>x)\,dF_{Y|\{X>Y\}}(y)=P(X>x)\,.\end{aligned}$$

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Alkalmazzuk a (iii) egyenlőséget $Y\equiv y$ választással. □

1.3. Definíció. Azt mondjuk, hogy az X véletlen változó $\alpha>0$ rendű és $\lambda>0$ paraméteres **Gamma eloszlást** követ, ha sűrűségfüggvénye

$$f_X(x)=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}\,,\qquad x\geq 0\,.$$

Megjegyzések:

- A Gamma eloszlás várható értéke $E(X)=\alpha/\lambda$, szórásnégyzete $D^2(X)=\alpha/\lambda^2$. Általános α esetén az eloszlásfüggvényre nem adható szép formula.
- A Gamma eloszlásból $\alpha=1$ választással az exponenciális eloszlást kapjuk.
- **Erlang-eloszlásnak** is neveznik azt az esetet, amikor a Gamma eloszlás rendje egy $n\geq 1$ egész szám. Ekkor a sűrűség- és az eloszlásfüggvény:

$$f_X(x)=\frac{\lambda^n}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-\lambda x}\,,\qquad F_X(x)=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(\lambda x)^k}{k!}e^{-\lambda x}\,,\qquad x\geq 0\,.$$

1.4. Tétel. *Ha $X_1,\dots,X_n$ független és exponenciális eloszlású véletlen változók azonos λ paraméterrel, akkor az $X_1+\cdots+X_n$ összeg n rendű λ paraméteres Gamma eloszlást követ.*

Bizonyítás. A függetlenség miatt az összeg karakterisztikus függvénye

$$\phi_{X_1+\cdots+X_n}(t) = \phi_{X_1}(t)\cdots\phi_{X_n}(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda-it}\right)^n.$$

Direkt számolással ellenőrizhető, hogy ez azonos a Gamma eloszlás karakterisztikus függvényével. □

2. A Wald-azonosság

2.1. Lemma (Wald-azonosság)**.** *Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független és azonos eloszlású véletlen változók véges várható értékkel, és legyen N nemnegatív egész értékű véletlen változó szintén véges várható értékkel. Tegyük fel továbbá, hogy*

(i) *N független az $X_1, X_2, \ldots$ változóktól;*

(ii) *vagy N megállási idő az $X_1, X_2, \ldots$ sorozatra nézve. (Ebben az esetben a megállási idők definíciója szerint N csak pozitív egész értékű változó lehet.)*

Ekkor $E(X_1+\cdots+X_N) = E(N)E(X)$.

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy tetszőleges n pozitív egész szám esetén X_n független az $\{n \le N\}$ eseménytől. A (i) feltevésből ez azonnal következik. Ha N megállási idő, akkor

$$\{n \le N\} = \{n > N\}^c = \{n-1 \ge N\}^c \in \sigma(X_1, \ldots, X_{n-1}), \qquad n \ge 2.$$

Mivel X_n független az $X_1, \ldots, X_{n-1}$ változóktól, független az $\{n \le N\}$ eseménytől is. Az $n = 1$ esetben pedig $\{n \le N\} = \Omega$, ami független az X_1 változótól.

A következőkben használni fogjuk azt az azonosságot, hogy ha N nemnegatív egész értékű véletlen változó, akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(n \le N) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty} P(N=k) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{k} P(N=k) = \sum_{k=1}^{\infty} kP(N=k) = E(N).$$

Jegyezzük meg, hogy tetszőleges k esetén

$$\left|\sum_{n=1}^{k} X_n \mathbb{1}_{\{n\le N\}}\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} |X_n| \mathbb{1}_{\{n\le N\}}, \qquad \text{m.b.} \tag{1}$$

A monoton konvergenciatétel és a korábban bebizonyított függetlenség alkalmazásával

$$E\left(\sum_{n=1}^{\infty} |X_n|\mathbb{1}_{\{n\le N\}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} E\big(|X_n|\big)E\big(\mathbb{1}_{\{n\le N\}}\big) = E(|X|)\sum_{n=1}^{\infty} P(n\le N) = E(|X|)E(N) < \infty.$$

Ez azt jelenti, hogy a (1) formulában a jobb oldalon szereplő összeg integrálható. Ekkor a majorán konvergenciatétel alkalmazásával

$$E\big(X_1+\cdots+X_N\big) = E\Bigg(\sum_{n=1}^{\infty} X_n \mathbb{1}_{\{n\le N\}}\Bigg) = E\Bigg(\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k} X_n \mathbb{1}_{\{n\le N\}}\Bigg)$$

$$= \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k} E(X_n)E\big(\mathbb{1}_{\{n\le N\}}\big) = E(X)\sum_{n=1}^{\infty} P(n\le N) = E(X)E(N). \qquad \square$$

A következő állítás a Wald-azonosság egy általánosítása, melyet az előző bizonyításban bemutatott módszerrel lehet igazolni. A részletes kidolgozást az olvasóra bízzuk.

2.2. Állítás. *Legyenek $X_1, X_2, \ldots : \Omega \to \mathbb{R}^d$, $d \ge 1$, független és azonos eloszlású véletlen vektorok! Tekintsünk egy olyan $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mérhető függvényt, melyre $h(X_1)$ integrálható! Legyen továbbá N egy pozitív egész értékű véletlen változó véges várható értékkel, mely megállási idő az $X_1, X_2, \ldots$ sorozatra nézve! Ekkor*

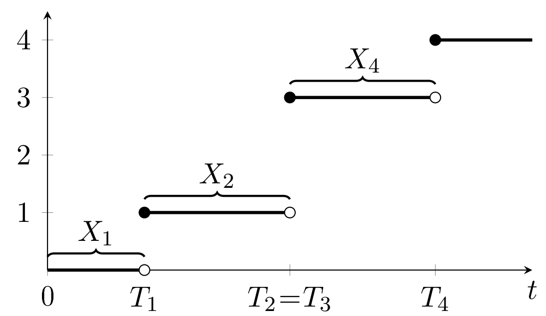
$$E\Big(h(X_1)+\cdots+h(X_N)\Big) = E(N)E\big(h(X)\big)\,.$$

3. Felújítási folyamatok és az elemi felújítási tétel

3.1. Definíció. Tekintsünk nemnegatív értékű $X_1, X_2, \ldots$ véletlen változókat, és legyen $T_0 = 0$, $T_n = X_1+\cdots+X_n$, $n = 1,2,\ldots$ Az

$$N_t = \#\big\{n\ge 1 : T_n \le t\big\} = \max\big\{n \ge 0 : T_n \le t\big\}\,, \qquad t \ge 0\,,$$

folyamatot **számláló folyamatnak** nevezzük.



A számláló folyamat valamilyen esemény bekövetkezéseit számolja. A bekövetkezések közötti idők $X_1, X_2, \ldots \ge 0$, tehát az esemény a $T_1 \le T_2 \le \ldots$ időpontokban következik be. Ekkor N_t azt mondja meg, hogy az esemény hányszor következett be a $t \ge 0$ időponttal bezárólag, míg $N_t - N_s$, $t \ge s \ge 0$, az $(s,t]$ intervallumon adja meg a bekövetkezések számát.

A számláló folyamatnak és az alább definiált speciális esetnek, a felújítási folyamatnak több alkalmazási területe van. Az egyik ilyen terület a megbízhatóságelmélet, a műszaki berendezések élettartamának modellezése. Adott egy berendezés, egy gép, melynek véges az élettartama, és amikor elromlik, azonnal kicseréljük egy újra. Amikor az is tönkremegy, akkor ismét felújítjuk a rendszert egy harmadik darabbal, és így tovább. Ekkor a felújításokat tekintjük eseményeknek, az $X_1, X_2, \ldots$ változók a berendezések élettartamai, míg a $T_1, T_2, \ldots$ értékek a felújítások időpontjai. Egy másik alkalmazási terület a tömegkiszolgálási modellek elmélete. Adott egy szerver, vagyis valamilyen kiszolgáló egység (egy bolt, egy hivatal, vagy egy számítógépes terminál), melyhez vevők (ügyfelek, lekérdezések) érkeznek $X_1, X_2, \ldots$ időközönként. Ebben az esetben a számláló folyamat a vevőket számolja, akik a $T_1, T_2, \ldots$ időpontokban érkeznek. A számláló folyamat a kockázati modellek elméletében is megjelenik, ahol a folyamat a tömegkiszolgálási modellekhez hasonlóan egy biztosítótársasághoz beérkező kárbejelentéseket számolja.

3.2. Definíció. Legyen $(N_t)_{t\geq 0}$ sztochasztikus folyamat!

- A sztochasztikus folyamat **várható érték függvénye** az $m(t) = E(N_t)$ függvény, mely azon $t \geq 0$ pontokban van értelmezve, ahol a várható érték létezik.
- Azt mondjuk, hogy a folyamat egy adott ω kimenetel esetén **felrobban** a $\tau(\omega) < \infty$ időpontban, ha $N_t(\omega) < \infty$ minden $t < \tau(\omega)$ esetén, és $\lim_{t\uparrow\tau} N_t(\omega) = \infty$. Ha az ω kimenetelre a folyamat nem robban fel véges időpontban, akkor legyen $\tau(\omega) = \infty$.

A számláló folyamatok fontosabb tulajdonságai:

- A számláló folyamat monoton növekvő és càdlàg („continue à droite, limitée à gauche", mindenhol jobbról folytonos, és mindenhol létezik baloldali határértéke).
- A számláló folyamat 1 valószínűséggel nem korlátos, ugyanis
$$P\Big(\sup_{t\geq 0} N_t < \infty\Big) = P\bigg(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{X_n = \infty\}\bigg) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(X_n = \infty) = 0\,.$$
Ebből következik, hogy $\lim_{t\to\infty} N_t = \infty$ majdnem biztosan. Ez azt jelenti, hogy a folyamat vagy felrobban véges időben, és ekkor $\tau < \infty$; vagy pedig aszimptotikusan megy el a végtelenbe, és ekkor $\tau = \infty$.
- Számláló folyamat esetén 1 valószínűséggel
$$\tau = \lim_{n\to\infty} T_n = X_1 + X_2 + \cdots \in [0, \infty]\,.$$
Emiatt $\{\tau < \infty\}$ az $X_1, X_2, \ldots$ sorozathoz tartozó farokesemény. Ha a sorozat elemei függetlenek, akkor a Kolmogorov 0-1 törvény szerint $P(\tau < \infty) \in \{0,1\}$. Tehát ebben az esetben τ majdnem biztosan véges vagy majdnem biztosan végtelen.
- Számláló folyamat esetén rögzített $n \in \mathbb{N}$ és $t \geq 0$ mellett
$$\{N_t = n\} = \{T_n \leq t < T_{n+1}\} = \{T_n \leq t\} \setminus \{T_{n+1} \leq t\}\,.$$
Ebből az X_t változó eloszlása
$$P(N_t = n) = P(T_n \leq t) - P(T_{n+1} \leq t) = F_{T_n}(t) - F_{T_{n+1}}(t)\,.$$

Most $T_0 = 0$, amiből $F_{T_0}(t) = P(T_0 \le t) = 1$, ha $t \ge 0$. Ebből kapjuk, hogy

$$P(\tau \le t) = P(X_t = \infty) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} P(X_t = n) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \left[F_{T_n}(t) - F_{T_{n+1}}(t)\right]$$
$$= 1 - \left[F_{T_0}(t) - \lim_{n\to\infty} F_{T_n}(t)\right] = \lim_{n\to\infty} F_{T_n}(t)\,, \qquad t \ge 0\,.$$

- Ha egy adott t időpontra $P(\tau \le t) = 0$, akkor N_t egy nemnegatív értékű véges véletlen változó, aminek az $m(t) = E(N_t) \in [0, \infty]$ várható értéke értelmezhető. A várható érték fel is írható eloszlásfüggények segítségével:

$$m(t) = E(N_t) = \sum_{n=0}^{\infty} n\left[F_{T_n}(t) - F_{T_{n+1}}(t)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} F_{T_n}(t)\,.$$

  Ha $X_1, X_2, \ldots$ függetlenek, akkor a $T_1, T_2, \ldots$ változók eloszlásfüggvényei konvolúcióval számolhatóak.

- Technikai okokból szükségünk lesz arra, hogy az m függvényt a negatív félegyenesen is definiáljuk. Az előző pont alapján $t < 0$ esetén legyen

$$m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} P(T_n \le t) = 0\,.$$

3.3. Definíció. A **felújítási folyamat** egy olyan $(N_t)_{t\ge 0}$ számláló folyamat, melyre az $X_1, X_2, \ldots$ véletlen változók függetlenek és azonos eloszlásúak. Ekkor a kapcsolatos $m(t) = E(N_t)$ várható érték függvényt **felújítási függvénynek** nevezzük.

3.4. Definíció. Az $(N_t)_{t\ge 0}$ felújítási folyamatot λ intenzitású **Poisson-folyamatnak** nevezzük, ha az $X_1, X_2, \ldots$ változók λ paraméteres exponenciális eloszlásúak.

A Poisson-folyamat fontosabb tulajdonságai:

- A T_n felújítási időpont n rendű és λ paraméteres Gamma eloszlást követ, és ezért várható értéke, szórásnégyzete illetve eloszlásfüggvénye

$$E(T_n) = \frac{n}{\lambda}\,, \qquad D^2(T_n) = \frac{n}{\lambda^2}\,, \qquad F_{T_n}(t) = P(T_n \le t) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}\,, \quad t \ge 0\,.$$

- Az előző észrevételből következik, hogy

$$P(N_t = n) = F_{T_n}(t) - F_{T_{n-1}}(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}\,, \qquad n \ge 0\,.$$

  Tehát az N_t változó λt paraméteres Poisson-eloszlást követ. Innen származik a folyamat elnevezése.

- A felrobbanás időpontjára

$$P(\tau \le t) = \lim_{n\to\infty} F_{T_n}(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = 0\,, \qquad t \ge 0\,.$$

  Ebből következik, hogy

$$P(\tau < \infty) = P\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} \{\tau \le k\}\Big) = \lim_{k\to\infty} P(\tau \le k) = 0\,,$$

  vagyis a folyamat 1 valószínűséggel nem robban fel véges időben.

- A Poisson-eloszlás tulajdonságaiból a felújítási függvény: $m(t) = E(N_t) = \lambda t$. A λ paramétert azért nevezzük „intenzitásnak”, mert tetszőleges $(s,t]$ intervallum esetén ide eső események számának várható értéke

$$E(N_t - N_s) = m(t) - m(s) = \lambda(t-s)\,.$$

  A felújítási függvény a számláló folyamatokra felírt formulával is meghatározható:

$$\begin{aligned} m(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} F_{T_n}(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{k} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = \lambda t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = \lambda t\,. \end{aligned}$$

3.5. Állítás. *Ha $P(X=0)<1$, akkor a felújítási folyamat 1 valószínűséggel nem robban fel véges időben.*

Megjegyzés: $P(X=0)=1$ esetén a folyamat 1 valószínűséggel felrobban a 0 időpontban.

Bizonyítás. A nagy számok erős törvényét alkalmazva kapjuk, hogy

$$\frac{T_n}{n} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \to E(X) > 0\,, \qquad n\to\infty\,, \qquad \text{m.b.} \tag{2}$$

Vegyük észre, hogy a $\{\tau < \infty\}$ eseményen

$$\frac{T_n}{n} \le \frac{\tau}{n} \to 0\,, \qquad n \to \infty\,.$$

Tehát $\{\tau<\infty\} \subseteq \{\lim_{n\to\infty} T_n/n = 0\}$. Ekkor a (2) konvergencia alkalmazásával

$$P(\tau < \infty) \le P\Big(\lim_{n\to\infty} T_n/n = 0\Big) = 0\,.$$ □

3.6. Tétel. *Legyen $(N_t)_{t\ge 0}$ felújítási folyamat, és tegyük fel, hogy $P(X=0)<1$. Ekkor teljesülnek a következő konvergenciák.*

(i) $\lim_{t\to\infty} N_t/t = 1/E(X)$ *m.b.*

(ii) *Elemi felújítási tétel:* $\lim_{t\to\infty} m(t)/t = 1/E(X)$.

Megjegyzések:

- Ha $P(X=0)<1$, akkor $E(X)\in(0,\infty]$, tehát $1/E(X)$ jól definiált.
- A tétel szerint $E(X)<\infty$ esetén N_t és $m(t)$ aszimptotikusan lineáris függvények:

$$N_t \sim \frac{t}{E(X)} \quad \text{m.b.}, \qquad m(t) \sim \frac{t}{E(X)}, \qquad t\to\infty,$$

  Ezzel szemben ha $E(X)=\infty$, akkor $N_t = o(t)$ és $m(t)=o(t)$, amint $t\to\infty$.

- A tétel első állítása azt mondja, hogy $t\to\infty$ esetén egy egységnyi hosszúságú időintervallumra jutó felújítások N_t/t átlagos száma $1/E(X)$. Ez nem meglepő, ha arra gondolunk, hogy a felújítások átlagosan $E(X)$ időközönként követik egymást, és ezáltal átlagosan $1/E(X)$ felújítás fér bele egy egységnyi hosszúságú intervallumra.

Bizonyítás. (i) Korábban már megmutattuk, hogy

$$N_t\to\infty, \qquad t\to\infty, \qquad \text{m.b.} \tag{3}$$

Tekintsük a $\{\tau<\infty\}$ eseményt, továbbá azt a két eseményt, melyeken a (2) és (3) konvernenciák teljesülnek. Mivel ezek 1 valószínűségű események, a metszetük is 1 valószínűségű. Ebből jön, hogy

$$\frac{T_{N_t}}{N_t}\to E(X), \qquad t\to\infty, \qquad \text{m.b.}$$

Mivel N_t jelöli a t időponttal bezárólag bekövetkezett események számát, nyilvánvaló, hogy $T_{N_t}\le t< T_{N_t+1}$. Ebből következik, hogy

$$E(X)\leftarrow \frac{T_{N_t}}{N_t}\le\frac{t}{N_t}<\frac{T_{N_t+1}}{N_t}=\frac{T_{N_t+1}}{N_t+1}\frac{N_t+1}{N_t}\to E(X)\cdot 1, \qquad t\to\infty, \qquad \text{m.b.}$$

A rendőr elv alkalmazásával jön az első állítás.

(ii) A célunk az alábbi két egyenlőtlenség bizonyítása, ugyanis ezekből azonnal következik az állítás:

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{m(t)}{t}\ge\frac{1}{E(X)}, \qquad \limsup_{t\to\infty}\frac{m(t)}{t}\le\frac{1}{E(X)}.$$

Először megmutatjuk, hogy $\liminf_{t\to\infty} m(t)/t\ge 1/E(X)$. Ha $E(X)=\infty$, akkor ez az egyenlőtlenség nyilvánvaló. Ha $E(X)<\infty$, akkor rögzítsünk egy $t\ge 0$ időpontot és tekintsük az alábbi változót:

$$N = N_t+1 = \text{a } t \text{ időpont után következő első felújítás sorszáma.}$$

Az N változó megállási idő az $X_1, X_2, \dots$ sorozatra nézve, hiszen tetszőleges n pozitív egész esetén

$$\{N=n\} = \big\{X_1+\dots+X_n > t, X_1+\dots+X_{n-1} \le t\big\} \in \sigma(X_1,\dots,X_n).$$

Emiatt tetszőleges $k \ge 1$ esetén a $\min(N,k)$ változó integrálható (hiszen korlátos) és megállási idő (hiszen két megállási idő minimuma). A Wald-azonosság alkalmazásával

$$E\big(X_1+\dots+X_{\min(N,k)}\big) = E\big(\min(N,k)\big)E(X)\,.$$

Jegyezzük meg, hogy $k\to\infty$ esetén $\min(N,k)\uparrow N$ majdnem biztosan. Ebből a monoton konvergenciatétel segítségével következik, hogy

$$E(T_{N_t+1}) = E\big(X_1+\dots+X_N\big) = E(N)E(X) = E(N_t+1)E(X) = \big(m(t)+1\big)E(X)\,. \quad (4)$$

Most $t < E(T_{N_t+1})$, amiből átrendezéssel jön, hogy

$$\frac{1}{E(X)} - \frac{1}{t} < \frac{m(t)}{t}.$$

Ha mindkét oldalnak vesszük a limesz inferiorát, amint $t\to\infty$, akkor megkapjuk a bizonyítani kívánt egyenlőtlenséget.

Most megmutatjuk, hogy $\limsup_{t\to\infty} m(t)/t \le 1/E(X)$. Ehhez rögzítsünk egy $a>0$ számot, és tekintsük a következő változókat:

$$X_n^a = \begin{cases} X_n\,, & X_n \le a\,,\\ a\,, & X_n > a\,, \end{cases} \qquad n = 1,2,\dots$$

Legyenek $T_1^a, T_2^a, \dots$ a kapcsolatos részletösszegek, legyen $(N_t^a)_{t\ge0}$ a kapcsolatos felújítási folyamat, és legyen $m_a(t) = E(N_t^a)$. Tekintsünk egy tetszőleges $t\ge0$ időpontot! Ekkor

$$T^a_{N_t+1} \le t + X_{N_t^a+1} \le t+a\,, \qquad \text{m.b.}$$

Jegyezzük meg azt is, hogy tetszőleges n esetén $T_n^a \le T_n$ m.b. Ebből következik, hogy $N_t^a \ge N_t$ m.b., vagyis $m_a(t) \ge m(t)$. Alkalmazzuk a (4) egyenlőséget $(N_t^a)_{t\ge0}$ felújítási folyamatra! Azt kapjuk, hogy

$$t+a \ge E\big(T^a_{N_t+1}\big) = \big(m_a(t)+1\big)E(X^a) \ge (m(t)+1)E(X^a). \quad (5)$$

Rendezzük át az egyenlőtlenséget, majd vegyük az oldalak limesz szuperiorát:

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{m(t)}{t} \le \limsup_{t\to\infty}\left(\frac{1}{E(X^a)} + \frac{a}{tE(X^a)} - \frac{1}{t}\right) = \frac{1}{E(X^a)}\,.$$

Ebből $a\to\infty$ határátmenettel és a monoton converegenciatétel alkalmazásával:

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{m(t)}{t} \le \lim_{a\to\infty}\frac{1}{E(X^a)} = \frac{1}{E(X)} \qquad \text{m.b.}$$

Ez pedig éppen a bizonyítandó egyenlőtlenség. $\square$

3.7. Állítás. *Ha $P(X=0)<1$, akkor a felújítási függvény véges, monoton növekvő és jobbról folytonos a pozitív félegyenesen. Ebből következik, hogy a felújítási függvény càdlàg (mindenhol jobbról folytonos, és mindenhol létezik bal oldali határértéke).*

Bizonyítás. Most $P(X=0)<1$, ezért $a>0$ esetén az előző bizonyításban bevezetett X^a változóra $P(X^a=0)<1$. Ez azt jelenti, hogy $E(X^a)>0$, és a (5) formulából kapjuk, hogy $m(t)<\infty$ minden $t\geq 0$ esetén.

Tetszőleges $0\leq t\leq s$ időpontok esetén $N_t\leq N_s$ m.b., amiből a monotonitás azonnal következik. A folytonossághoz vegyük észre, hogy $s\downarrow t$ esetén $N_s\downarrow N_t\geq 0$. Ebből a monoton konvergenciatétel alkalmazásával kapjuk, hogy $E(N_s)\to E(N_t)$. □

3.8. Definíció. Tekintsünk (X_n,C_n), $n=1,2,\ldots$, független és azonos eloszláslású vektorváltozókat, ahol az első komponensek nemnegatívak. Legyen $(N_t)_{t\geq 0}$ az $X_1,X_2,\ldots$ változók által meghatározott felújítási folyamat! Ekkor az

$$S_t=\sum_{n=1}^{N_t}C_n=C_1+\cdots+C_{N_t}\,,\qquad t\geq 0\,,$$

folyamatot **felújítási díjfolyamatnak** nevezzük.

A felújítási díjfolyamatokat jellemzően olyan esetekben alkalmazzuk, mikor a felújítás valamilyen költséggel jár. A modellben rendre C_n az n-edik felújítás költsége, mely függhet az előző felújítástól eltelt X_n idő hosszától, de független a többi felújítás költségétől. Ekkor S_t a t időpontig felmerülő teljes költség. Ilyen típusú problémával többek között a biztosítási matematikában találkozhatunk, ahol $C_1,C_2,\ldots$ az egyes kárbejelentésekre jutó kifizetések nagysága.

3.9. Tétel. *Tegyük fel, hogy a felújítási díjfolyamatra $P(X=0)<1$ és $E(|C|)<\infty$. Ekkor*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{S_t}{t}=\frac{E(C)}{E(X)}\qquad m.b.\qquad \text{és}\qquad \lim_{t\to\infty}\frac{E(S_t)}{t}=\frac{E(C)}{E(X)}\,.$$

Bizonyítás. Az első konvergencia azonnal következik a nagy számok Kolmogorov-féle törvényéből és az elemi felújítási tételből (3.6. Tétel (i) pontja):

$$\frac{S_t}{t}=\frac{C_1+\cdots+C_{N_t}}{N_t}\frac{N_t}{t}\to E(C)\frac{1}{E(X)}\,,\qquad t\to\infty\,,\qquad \text{m.b.}$$

A második konvergencia ilyen általános feltételek mellett történő bizonyításához további eszközökre van szükségünk, erre majd még visszatérünk a félév folyamán. Most csak azzal a speciális esettel foglalkozunk, amikor X_n és C_n rendre függetlenek egymástól. Ekkor tetszőleges $t\geq 0$ esetén N_t véges várható értékű nemnegatív egész értékű változó, és független a $C_1,C_2,\ldots$ sorozattól. A Wald-azonosság (2.1. Lemma) és az elemi felújítási tétel alkalmazásával következik, hogy

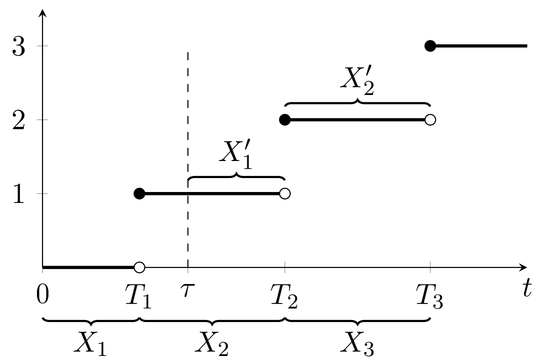
$$\frac{E(S_t)}{t}=\frac{E(C_1+\cdots+C_{N_t})}{t}=\frac{E(C)E(N_t)}{t}\to E(C)\frac{1}{E(X)}\,,\qquad t\to\infty\,.\qquad □$$

4. A Poisson-folyamat további tulajdonságai

Tekintsünk $X_1, X_2, \dots$ független és azonosan $\lambda > 0$ paraméteres exponenciális eloszlású változókat, legyen $T_n = X_1 + \dots + X_n$, $n \ge 0$, és jelölje $(N_t)_{t\ge 0}$ a kapcsolatos felújítási folyamatot. Ekkor $(N_t)_{t\ge 0}$ egy λ intenzitású Poisson-folyamat. A folyamatot úgy értelmezhetjük, hogy ha egy adott jelenség a $T_1, T_2, \dots$ időpontokban következik be, akkor N_t mondja meg a bekövetkezések számát a t időponttal bezárólag.

A továbbiakban többször elő fog majd fordulni, hogy a rendszert nem a 0 időponttól kezdve figyeljük meg, hanem csak egy $\tau \ge 0$ véletlen vagy determinisztikus időpont után. Ekkor a jelenség bekövetkezéseinek a száma a $(\tau, \tau + t]$ intervallumon előáll a következő alakban:

$$N'_t = N_{\tau+t} - N_\tau\,, \qquad t \ge 0\,.$$



4.1. Állítás. *Ha τ független az $X_1, X_2, \dots$ sorozattól, akkor $(N'_t)_{t\ge 0}$ egy λ intenzitású Poisson-folyamat, és független az $(N_t)_{0\le t\le \tau}$ változóktól.*

Megjegyzések:

- Az állítás implicit módon azt is tartalmazza, hogy $(N'_t)_{t\ge 0}$ független a τ változótól.
- Ha τ determinisztikus, akkor független az $X_1, X_2, \dots$ változóktól, tehát az állítás alkalmazható erre az esetre.
- Az állítás lényegében azt mondja, hogy a τ időpont rezeteli a folyamatot.

Bizonyítás. A definícióból azonnal következik, hogy $(N'_t)_{t\ge 0}$ számláló folyamat. Jelölje $X'_1, X'_2, \dots \ge 0$ a felújítások közötti időket! Vegyük észre, hogy

$$\sigma(N_t, 0 \le t \le \tau) = \sigma(\tau, N_\tau, X_1, \dots, X_\tau) \qquad \text{és} \qquad \sigma(N'_t, t \ge 0) = \sigma(X'_1, X'_2, \dots)\,.$$

Ez azt jelenti, hogy három dolgot kell igazolnunk:

(i) $X'_1, X'_2, \dots$ exponenciális eloszlásúak λ paraméterrel;

(ii) $X'_1, X'_2, \dots$ függetlenek egymástól;

(iii) $X'_1, X'_2, \dots$ függetlenek a $\tau, N_\tau, X_1, \dots, X_\tau$ változóktól.

Először a (iii) pontot fogjuk bebizonyítani. Tekintsünk tetszőleges n nemnegatív egész és $x_1,\dots,x_n \geq 0$ értékeket! Legyen továbbá $t_n = x_1 + \dots + x_n$. Vegyük észre, hogy ha $N_\tau = n$, akkor $X_1' = X_{n+1} - (\tau - T_n)$. Ekkor a τ függetlenségét és az exponenciális eloszlás örökifjú tulajdonságát (1.2. Tétel (ii) pontja) alkalmazva:

$$\begin{aligned}
&P\big(X_1' > y \mid \tau = t, N_\tau = n, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\big)\\
&= P\big(X_{n+1} - (\tau - T_n) > y \mid \tau = t, T_n \leq \tau < T_{n+1}, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\big)\\
&= P\big(X_{n+1} - (t - T_n) > y \mid T_n \leq t < T_{n+1}, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\big)\\
&= P\big(X_{n+1} > y + (t - t_n) \mid 0 \leq t - t_n < X_{n+1}, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\big)\\
&= P\big(X_{n+1} > y + (t - t_n) \mid 0 \leq t - t_n < X_{n+1}\big)\\
&= P(X_{n+1} > y) = e^{-\lambda y}.
\end{aligned}$$

Jegyezzük meg, hogy az $X_{n+2}, X_{n+3}, \dots$ sorozat független a $\tau, X_1, \dots, X_{n+1}$ változóktól! Ekkor a láncszabály segítségével kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&P\big(X_1' > y_1, \dots, X_m' > y_m \mid \tau = t, N_\tau = n, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\big)\\
&= P\big(X_1' > y_1 \mid \tau = t, N_\tau = n, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\big)\\
&\quad \cdot P\big(X_2' > y_2, \dots, X_m' > y_m \mid \tau = t, N_\tau = n, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n, X_1' > y_1\big)\\
&= e^{-\lambda y_1}\\
&\cdot P\big(X_{n+2} > y_2, \dots, X_{n+m} > y_m \mid \tau = t, T_n \leq \tau < T_{n+1}, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n, X_{n+1} - (\tau - T_n) > y_1\big)\\
&= e^{-\lambda y_1} P\big(X_{n+2} > y_2, \dots, X_{n+m} > y_m\big) = e^{-\lambda y_1} e^{-\lambda y_2} \cdots e^{-\lambda y_m}.
\end{aligned}$$

Ebből azonnal következik, hogy az $X_1', X_2', \dots$ függetlenek a $\tau, N_\tau, X_1, \dots, X_\tau$ változóktól. A függetlenség miatt ebből azt is megkapjuk, hogy

$$P\big(X_1' > y_1, \dots, X_m' > y_m\big) = e^{-\lambda y_1} e^{-\lambda y_2} \cdots e^{-\lambda y_m}. \tag{6}$$

Most indukcióval megmutatjuk, hogy az $X_1', \dots, X_m'$ változók λ paraméteres exponenciális eloszlást követnek. Ez $m = 1$ esetén azonnal következik a (6) formulából, hiszen $P(X_1' > y_1) = e^{-\lambda y_1}$. Tegyük fel, hogy az állítás igaz $m-1$ esetén! Ekkor X_m' szintén exponenciális eloszlású, hiszen

$$P(X_m' > y_m) = P\big(X_1' > 0, \dots, X_{m-1}' > 0, X_m' > y_m\big) = e^{-\lambda 0} \cdots e^{-\lambda 0} e^{-\lambda y_m} = e^{-\lambda y_m}.$$

Ezzel beláttuk az (i) pontot. A (6) egyenlőséget ismét alkalmazva kapjuk, hogy

$$P(X_1' > y_1, \dots, X_m' > y_m) = P(X_1' > y_1) \cdots P(X_m' > y_m),$$

tehát az $X_1', \dots, X_m'$ változók függetlenek is egymástól. Most m tetszőleges volt, emiatt a (ii) ponttal is végeztünk. □

4.2. Definíció. Tekintsünk egy $(N_t)_{t \geq 0}$ sztochasztikus folyamatot!

- A folyamat **stacionárius növekményű**, ha tetszőleges $0 \leq s < t$ esetén $N_t - N_s$ és $N_{t-s} - N_0$ azonos eloszlású.

- A sztochasztikus folyamat **független növekményű**, ha tetszőleges $k \geq 2$ pozitív egész és $0 \leq s_1 \leq t_1 \leq s_2 \leq t_2 \leq \ldots \leq s_k \leq t_k$ esetén $N_{t_1} - N_{s_1}, N_{t_2} - N_{s_2}, \ldots, N_{t_k} - N_{s_k}$ független véletlen változók.

4.3. Tétel. *Legyen $(N_t)_{t\geq 0}$ számláló folyamat! Ekkor az alábbi két tulajdonság ekvivalens:*

(i) *Az $(N_t)_{t\geq 0}$ folyamat λ intenzitású Poisson-folyamat, tehát olyan felújítási folyamat, ahol a felújítások közötti idők λ paraméteres exponenciális eloszlást követnek.*

(ii) *Az $(N_t)_{t\geq 0}$ folyamat független és stacionárius növekményű, továbbá tetszőleges $t > 0$ esetén az N_t változó Poisson-eloszlást követ λt paraméterrel.*

Bizonyítás. Csak a (i)$\Rightarrow$(ii) irányt bizonyítjuk be, a fordított irányt úgysem használjuk a későbbiekben. Azt már láttuk, hogy N_t Poisson-eloszlást követ a megadott paraméterrel. Rögzített $t \geq s \geq 0$ mellett vezessük be az $N_u^s = N_{s+u} - N_s$, $u \geq 0$, folyamatot! A 4.1. Állítás értelmében $(N_u^s)_{u\geq 0}$ Poisson-folyamat λ intenzitással, tehát $N_t - N_s = N_{t-s}^s$ Poisson-eloszlást követ $\lambda(t-s)$ paraméterrel. Viszont az $N_{t-s} - N_0$ változónak ugyanez az eloszlása, vagyis a Poisson-folyamat stacionárius növekményű.

Csak az maradt hátra, hogy a Poisson-folyamat független növekményű. Tekintsük az $N_u^{s_k} = N_{s_k+u} - N_{s_k}$, $u \geq 0$, folyamatot, ami a 4.1. Állítás értelmében független az $(N_t)_{0\leq t\leq s_k}$ változóktól. Ebből jön, hogy $N_{t_k} - N_{s_k} = N_{t_k - s_k}^{s_k}$ független az $N_{t_1} - N_{s_1}, \ldots, N_{t_{k-1}} - N_{s_{k-1}}$ növekményektől. Ezt a lépést egymást után az $s_{k-1}, s_{k-2}, \ldots, s_2$ időpontokra megismételve következik, hogy a növekmények mind függetlenek egymástól. □

4.4. Tétel. *Legyen $(N_t)_{t\geq 0}$ Poisson-folyamat λ intenzitással! Tekintsünk tetszőleges k pozitív egész számot, $0 \leq s_1 \leq \ldots \leq s_k \leq t$ időpontokat, és $0 \leq m_1 \leq \ldots \leq m_k \leq n$ egész értékeket! Ekkor*

$$P\big(N_t = n \mid N_{s_k} = m_k, \ldots, N_{s_1} = m_1\big) = P\big(N_t = n \mid N_{s_k} = m_k\big) = \frac{\big[\lambda(t - s_k)\big]^{n-m_k}}{(n - m_k)!} e^{-\lambda(t-s_k)} .$$

Tehát a Poisson-folyamat folytonos idejű homogén Markov-lánc a fenti formulában megadott átmenetvalószínűségekkel.

Bizonyítás. A 4.3. Tétel értelmében a Poisson-folyamat független és stacionárius növekményű sztochasztikus folyamat. Ebből következik, hogy

$$\begin{aligned}
&P\big(N_t = n \mid N_{s_k} = m_k, \ldots, N_{s_1} = m_1\big) \\
&= P\big(N_t - N_{s_k} = n - m_k \mid N_{s_k} - N_{s_{k-1}} = m_k - m_{k-1}, \ldots, N_{s_1} - N_0 = m_1\big) \\
&= P\big(N_t - N_{s_k} = n - m_k\big) = P\big(N_{t-s} = n - m_k\big) = \frac{\big[\lambda(t - s_k)\big]^{n-m_k}}{(n - m_k)!} e^{-\lambda(t-s_k)} .
\end{aligned}$$

Ugyanezzel a gondolatmenettel az is megmutatható, hogy

$$P\big(N_t = n \mid N_{s_k} = m_k\big) = \frac{\big[\lambda(t - s_k)\big]^{n-m_k}}{(n - m_k)!} e^{-\lambda(t-s_k)} .$$

Ezzel a tétel állítását bebizonyítottuk. □

5. Függvények és sorozatok konvolúciója

5.1. Definíció. Legyen $\phi(x)$, $G(x)$, $x \in \mathbb{R}$, valós értékű mérhető függvény, és tegyük fel, hogy G càdlàg („continue à droite, limitée à gauche”, tehát mindenhol jobbról folytonos, és mindenhol létezik baloldali határértéke) és korlátos változású minden véges intervallumon. Ekkor a két függvény **Stieltjes-konvolúciója**

$$(\phi \star G)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t-x)\, dG(x)\,.$$

A konvolúció azon $t \in \mathbb{R}$ pontokban van definiálva, ahol az integrál létezik. A G függvény **n-edik konvolúció hatványa** az n tényezős $G^{\star n} = G \star \cdots \star G$ konvolúció.

5.2. Tétel. (i) *Ha X és Y független véletlen változók rendre G és H eloszlásfüggvénnyel, akkor az $X+Y$ összegváltozó eloszlásfüggvénye $G \star H$.*

(ii) *Ha $X_1, \ldots, X_n$ független és azonos eloszlású véletlen változók G eloszlásfüggvénnyel, akkor $X_1 + \cdots + X_n$ eloszlásfüggvénye $G^{\star n}$.*

5.3. Következmény. *Ha G és H eloszlásfüggvények, akkor $G \star H$ és $G^{\star n}$ mindenhol léteznek a valós egyenesen, továbbá $G \star H = H \star G$.*

Bizonyítás. (i) Az állítás azonnal jön a teljes valószínűség tételéből:

$$\begin{aligned} P\big(X+Y \le t\big) &= \int_{-\infty}^{+\infty} P\big(X+Y \le t \mid Y = y\big) dH(y) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} P\big(X+y \le t\big) dH(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-y) dH(y) = (G \star H)(t)\,. \end{aligned}$$

(ii) Következik az (i) pontból. □

Nézzünk meg két speciális esetet! Ha az X és az Y változók abszolút folytonosak rendre g és h sűrűségfüggvénnyel, akkor a Fubini-tétel alkalmazásával

$$\begin{aligned} (G \star H)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} G(t-x)\, dH(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \bigg[\int_{-\infty}^{t} g(y-x)\, dy \bigg] h(x)\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{t} \int_{-\infty}^{\infty} g(y-x) h(x)\, dx dy\,. \end{aligned}$$

Ebből azonnal jön, hogy az $X+Y$ összeg is abszolút folytonos, és a sűrűségfüggvénye

$$(g * h)(y) := \int_{-\infty}^{\infty} g(y-x) h(x)\, dx\,, \qquad y \in \mathbb{R}\,.$$

Az $g * h$ függvényt g és h **Lebesgue-konvolúciójának** nevezzük.

Most tegyük fel, hogy X és Y egész értékű változó! Ekkor $X+Y$ szintén egész értékű. Ebből következik, hogy az G, H és $G\star H$ eloszlásfüggvények olyan lépcsős függvények, melyek az egész pontokban ugranak. Az X és az Y eloszlása:

$$p_n = P(X=n) = G(n) - G(n-1)\,, \qquad q_n = P(Y=n) = H(n) - H(n-1)\,, \qquad n\in\mathbb{Z}\,.$$

Ebből:

$$G(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} p_k\,, \qquad H(n) = \sum_{k=\infty}^{n} q_k\,, \qquad n\in\mathbb{Z}\,.$$

Ekkor a konvolúció definícióját alkalmazva

$$\begin{aligned}(G\star H)(n) &= \int_{-\infty}^{\infty} G(n-x)\,dH(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(n-k)\big[H(k)-H(k-1)\big] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{\ell=-\infty}^{n-k} p_\ell\right] q_k = \sum_{\substack{k,\ell\in\mathbb{Z}\\ k+\ell\le n}} p_\ell q_k\,.\end{aligned}$$

Azt kapjuk, hogy

$$P\big(X+Y=n\big) = (G\star H)(n) - (G\star H)(n-1) = \sum_{\substack{k,\ell\in\mathbb{Z}\\ k+\ell= n}} p_\ell q_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_{n-k}q_k\,, \qquad n\in\mathbb{Z}\,.$$

Ezt a sorozatot a p és a q **sorozatok konvolúciójának** nevezzük:

$$(p*q)_n = \sum_{k=0}^{n} p_{n-k}q_k\,, \qquad n\in\mathbb{Z}\,.$$

A továbbiakban azzal az esettel foglalkozunk, amikor $\phi(x) = G(x) = 0$ minden $x<0$ esetén. Vegyük észre, hogy ekkor $y<0$ esetén

$$(\phi\star G)(y) = \int_{-\infty}^{\infty}\phi(y-x)\,dG(x) = \int_{(-\infty,0)}\phi(y-x)\,d0 + \int_{[0,\infty)} 0\,dG(x) = 0\,.$$

Ha $y\ge 0$, akkor pedig

$$\begin{aligned}(\phi\star G)(y) &= \int_{-\infty}^{\infty}\phi(y-x)\,dG(x) = \int_{(-\infty,y)}\phi(y-x)\,d0 + \int_{[0,y]}\phi(y-x)\,dG(x) \\ &\quad + \int_{(y,\infty)} 0\,dG(x) = \int_{[0,y]}\phi(y-x)\,dG(x)\,.\end{aligned}$$

Jegyezzük meg, hogy most Lebesgue–Stieltjes-integrállal dolgoztunk, ezért általában

$$\int_{[0,y]}\phi(y-x)\,dG(x) \ne \int_0^y \phi(y-x)\,dG(x) = \int_{(0,y]}\phi(y-x)\,dG(x)\,.$$

5.4. Állítás. *Tegyük fel, hogy* $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mérhető és lokálisan korlátos (korlátos minden véges intervallumon), továbbá* $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *càdlàg és korlátos változású a véges intervallumokon, végül* $\phi(x) = G(x) = 0$ *minden* $x < 0$ *esetén! Ekkor a* $\phi\star G$ *konvolúció jól definiált a valós egyenesen, és lokálisan korlátos függvény.*

Bizonyítás. Most $\phi\star G=0$ a negatív számok halmazán, ezért a konvolúció létezését és lokális korlátosságát elég a pozitív félegyenesen bizonyítani. Legyen $t>0$ tetszőleges rögzített érték, és jelölje $V_{[0,t]}(G)$ a G függvény teljes változását a $[0,t]$ intervallumon. Ekkor

$$\begin{aligned}\sup_{0\le y\le t} \big|(\phi\star G)(y)\big| &= \sup_{0\le y\le t} \left| \int_{[0,y]} \phi(y-x)\, dG(x) \right| \\ &\le \sup_{0\le y\le t}\, \sup_{0\le x\le y} |\phi(y-x)| V_{[0,y]}(G) \le \sup_{0\le x\le t} |\phi(x)| V_{[0,t]}(G) < \infty\,. \qquad \square\end{aligned}$$

5.5. Állítás (Disztributivitás). (i) *Legyenek* $\phi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mérhető és lokálisan korlátos függvények, és legyenek* $G, H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *càdlàg és korlátos változásúak minden véges intervallumon! Tegyük fel továbbá, hogy mindegyik függvény 0 a negatív számok halmazán! Ekkor tetszőleges* $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *esetén*

$$\big(a\phi + b\psi\big)\star\big(\alpha G+\beta H\big) = a\alpha(\phi\star G) + a\beta(\phi\star H) + b\alpha(\psi\star G) + b\beta(\psi\star H)\,.$$

(ii) *Legyenek* $\phi_1, \phi_2, \ldots : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ *mérhető és lokálisan korlátos függvények, melyekre* $\phi_1+\phi_2+\ldots$ *szintén lokálisan korlátos! Legyen* $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *monoton növekvő és càdlàg! Tegyük fel továbbá, hogy mindegyik függvény 0 a negatív számok halmazán! Ekkor*

$$\big(\phi_1 + \phi_2 + \cdots\big)\star G = \phi_1\star G + \phi_2 \star G + \cdots$$

Bizonyítás. Az 5.4. Állítás értelmében a formulákban szereplő összes konvolúció létezik a valós számegyenesen. A Lebesgue–Stieltjes-mértékek definíciójából következik, hogy $\mu_{\alpha G+\beta H} = \alpha\mu_G + \beta\mu_H$. Ebből jön az (i) pont állítása, hiszen tetszőleges $t\in\mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}\big(a\phi+b\psi\big)\star\big(\alpha G+\beta H\big)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \big(a\phi+b\psi\big)(t-x)\, d\mu_{\alpha G+\beta H}(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \big(a\phi+b\psi\big)(t-x) \Big[\alpha\, d\mu_G(x) + \beta\, d\mu_H(x)\Big] \\ &= a\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t-x)\, d\mu_G(x) + a\beta \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t-x)\, d\mu_H(x) \\ &\qquad + b\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t-x)\, d\mu_G(x) + b\beta \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t-x)\, d\mu_H(x) \\ &= a\alpha(\phi\star G)(t) + a\beta(\phi\star H)(t) + b\alpha(\psi\star G)(t) + b\beta(\psi\star H)(t)\,.\end{aligned}$$

A (ii) azonossághoz alkalmazzuk a monoton konvergenciatételt:

$$\begin{aligned}\bigg(\sum_{i=1}^{\infty}\phi_i\bigg)\star G(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \phi_i(t-x)\, dG(x) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_i(t-x)\, dG(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \big(\phi_i\star G\big)(t)\,. \qquad \square\end{aligned}$$

5.6. Állítás (Kommutativitás és asszociativitás)**.** *Legyen $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mérhető és lokálisan korlátos függvény, és legyenek $G,H:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ monoton növekvő és càdlàg függvények! Tegyük fel továbbá, hogy mindhárom függvény a 0 értéket veszik fel a negatív számok halmazán. Ekkor teljesülnek az alábbi azonosságok:*

$$G\star H = H\star G \qquad \textit{és} \qquad (\phi\star G)\star H = \phi\star(G\star H)\,.$$

Bizonyítás. Most G és H monoton növekvő függvények, ezért korlátos változásúak a véges intervallumokon. Jelölje μ_G és μ_H az indukált Lebesgue–Stieltjes-mértékeket, és legyen

$$S_t = \big\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} : x+y\le t\big\}\,.$$

Ekkor a Fubini-tétel miatt

$$\begin{aligned}(G\star H)(t) &= \int_{\mathbb{R}} G(t-y)\,dH(y) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{x\le t-y\}}\,dG(x)\,dH(y)\\ &= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{(x,y)\in S_t\}}\,(\mu_G\times\mu_H)(dx,dy) = \mu_G\times\mu_H(S_t)\,.\end{aligned} \tag{7}$$

Jegyezzük meg, hogy az S_t halmaz sziimetrikus az $x=y$ egyenesre nézve, amiből következik, hogy

$$(H\star G)(t) = \mu_H\times\mu_G(S_t) = \mu_G\times\mu_H(S_t) = (G\star H)(t)\,.$$

Ezzel a kommutativitást bebizonyítottuk.

Most G és H monoton növekvő függvények, ezért $\mu_G\times\mu_H$ pozitív mérték. Ekkor a (7) egyenlőségből következik, hogy

- $G\star H$ monoton növekvő: tetszőleges $u\le t$ esetén $S_u\subseteq S_t$, tehát $(G\star H)(u)\le(G\star H)(t)$;
- $G\star H$ mindenhol jobbról folytonos: tetszőleges u valós szám esetén

$$\lim_{t\downarrow u}(G\star H)(t) = \lim_{t\downarrow u}\mu_G\times\mu_H(S_t) = \mu_G\times\mu_H\big(\cap_{t\downarrow u}S_t\big) = \mu_G\times\mu_H(S_u) = (G\star H)(u)\,.$$

Ekkor viszont $G\star H$ càdlàg függvény és korlátos változású a véges intervallumokon. Ezen túl $G\star H=0$ a negatív félegyenesen, tehát a $\phi\star(G\star H)$ konvolúció szintén véges. Kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{z\in(-\infty,t]\}}\,(G\star H)(dz) = (G\star H)(t) &= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{(x,y)\in S_t\}}\,(\mu_G\times\mu_H)(dx,dy)\\ &= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{x+y\in(-\infty,t]\}}\,(\mu_G\times\mu_H)(dx,dy)\,.\end{aligned}$$

A Carathéodory-tételből következik, hogy tetszőleges $B\subseteq\mathbb{R}$ Borel-halmaz esetén

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{z\in B\}}\,(G\star H)(dz) = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{x+y\in B\}}\,(\mu_G\times\mu_H)(dx,dy)\,.$$

Ebből viszont következik, hogy

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(t-z)\,(G\star H)(dz) = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \phi(t-x-y)\,(\mu_G\times\mu_H)(dx,dy)\,.$$

A bal oldalon éppen $\phi\star(G\star H)$ szerepel a t pontban. A jobb oldalt ismét csak a Fubini-tétellel tudjuk továbbalakítani:

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \phi(t-x-y)\,(\mu_G\times\mu_H)(dx,dy) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \phi(t-x-y)\,dG(x)\,dH(y)$$
$$= \int_{\mathbb{R}} (\phi\star G)(t-y)\,dH(y) = \big((\phi\star G)\star H\big)(t)\,.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy az assziciativitás is teljesül. □

6. A felújítási egyenlet

Tekintsünk egy $(N_t)_{t\geq 0}$ felújítási folyamatot! Tegyük fel, hogy $P(X=0)<1$, és jelölje G az $X_1, X_2, \ldots$ változók közös eloszlásfüggvényét! Ekkor a felújítási függvény véges, és a következő alakban írható fel:

$$m(t) = E(N_t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_{T_n}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_{X_1+\cdots+X_n}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} G^{\star n}(t)\,, \qquad t\geq 0\,.$$

Vezessük be az $N_t' = N_{X_1+t}-1$, $t\geq 0$, folyamatot, ami az $X_2, X_3, \ldots$ változók, mint felújítások közötti idők által definiált felújítási folyamat. Az $X_2, X_3, \ldots$ sorozat értékei meghatározzák az $(N_t')_{t\geq 0}$ folyamatot, ezért $\sigma(N_t', t\geq 0) \subseteq \sigma(X_2, X_3, \ldots)$. Viszont az $X_2, X_3, \ldots$ változók függetlenek az X_1 változótól, amiből következik, hogy az $(N_t')_{t\geq 0}$ folyamat is független az X_1 változótól. Jegyezzük meg azt is, hogy mivel a két folyamat esetében a felújítások közötti idők eloszlása azonos, (ezeknek mindkét esetben G az eloszlásfüggvénye,) ezért a fejezet elején felírt formula alapján

$$E(N_t') = \sum_{n=1}^{\infty} G^{\star n}(t) = m(t)\,, \qquad t\geq 0\,.$$

Rögzítsünk tetszőleges $t, x\geq 0$ értékeket! Ekkor

$$E\big[N_t \mid X_1 = x\big] = \begin{cases} E\big[1+N_{t-x}' \mid X_1 = x\big] = 1+E[N_{t-x}'] = 1+m(t-x)\,, & t\geq x\,,\\ E\big[0 \mid X_1 = x\big] = 0\,, & t<x\,. \end{cases}$$

Ebből a teljes várható érték tételével kapjuk, hogy

$$m(t) = E(N_t) = \int_{[0,\infty)} E\big[N_t \mid X_1 = x\big]\,dG(x)$$
$$= \int_{[0,t]} \big[1+m(t-x)\big]\,dG(x) + \int_{(t,\infty)} 0\,dG(x)$$
$$= G(t) + \int_{[0,t]} m(t-x)\,dG(x) = G(t) + (m\star G)(t)\,.$$

6.1. Definíció. Legyen $a(t)$, $t \geq 0$, valós értékű mérhető függvény. Ekkor az

$$A(t) = a(t) + \int_{[0,t]} A(t-x)\, dG(x)\,, \qquad t \geq 0\,.$$

függvényegyenletet az $A(t)$, $t{\geq}0$, függvényre vonatkozó **felújítási egyenletnek** nevezzük. Ugyanez rövidebb formalizmussal: $A = a + A \star G$.

6.2. Tétel. *Ha $a(t)$, $t \geq 0$, lokálisan korlátos függvény, és $P(X=0) < 1$, akkor az*

$$A(t) = (a + a\star m)(t) = a(t) + \int_{[0,t]} a(t-x)\, dm(x)\,, \qquad t \geq 0\,,$$

függvény lokálisan korlátos megoldása a felújítási egyenletnek, továbbá ez az egyetlen megoldás a lokálisan korlátos függvények között.

Bizonyítás. Mivel a tételben szereplő összes függvény 0 a negatív félegyenesen, az állítást elég a nemnegatív számok halmazán ellenőrizni. A 5.4. Állítás szerint az $a\star m$ konvolúció jól definiált és lokálisan korlátos. Ekkor tetszőleges $s > 0$ esetén

$$\sup_{0 \leq t \leq s} \big|(a + a\star m)(t)\big| \leq \sup_{0 \leq t \leq s} |a(t)| + \sup_{0 \leq t \leq s} \big|(a\star m)(t)\big| < \infty\,,$$

tehát $a + a\star m$ is lokálisan korlátos. A következőkben azt fogjuk ellenőrizni, hogy $a + a\star m$ megoldás. Ez következik a konvolúció azonosságaiból, ugyanis

$$a + (a + a\star m)\star G = a + a\star G + a\star\left(\sum_{n=1}^{\infty} G^{\star n}\right)\star G = a + a\star\left(G + \sum_{n=2}^{\infty} G^{\star n}\right) = a + a\star m\,.$$

Végül azt mutatjuk meg, hogy a megoldás egyértelmű. Tegyük fel, hogy A_2 szintén lokálisan korlátos megoldása az egyenletnek, és legyen $B = A - A_2$. Felhasználva, hogy A és A_2 is megoldás, kapjuk, hogy

$$B = A - A_2 = \big(a + A\star G\big) - \big(a + A_2\star G\big) = (A - A_2)\star G = B\star G\,,$$

Ebből iterációval következik, hogy $B{=}B\star G^{\star n}$ minden $n{\geq}1$ egészre. Legyen $t{\geq}0$ rögzített! A $\sum_{n=1}^{\infty} G^{\star n}(t) = m(t)$ sor pontonként konvergens, ezért $G^{\star n}(t) \to 0$, amint $n \to \infty$. Mivel a B függvény szintén lokálisan korlátos, következik, hogy $n \to \infty$ esetén

$$|B(t)| = \left|\int_{[0,t]} B(t-x)\, dG^{\star n}(x)\right| \leq V_{[0,t]}\big(G^{\star n}\big) \sup_{0 \leq x \leq t} |B(x)| = G^{\star n}(t) \sup_{0 \leq x \leq t} |B(x)| \to 0\,.$$

Tehát $0 = B(t) = A(t) - A_2(t)$ minden $t \geq 0$ pontban. Mivel a negatív számok halmazán mindkét függvény eltűnik, kapjuk, hogy $A_2 = A$. □

6.3. Példa. Legyen $a = G$, tehát tekintsük az $A = G + A\star G$ felújítási egyenletet! A most bizonyított tétel szerint ennek lokálisan korlátos megoldása a következő függvény:

$$A = G + G\star m = G + m\star G = G + \left(\sum_{n=1}^{\infty} G^{\star n}\right)\star G = G + \sum_{n=2}^{\infty} G^{\star n} = m\,.$$

Ez az eredmény nem meglepő, hiszen a fejezet elején már láttuk, hogy m megoldása az egyenletnek, és az előző tétel szerint ő az egyetlen lokálisan korlátos megoldás. Éppen az lett volna a kellemetlen, ha találunk egy másik lokálisan korlátos megoldást is.

Vegyük észre, hogy a felújítási egyenlet átrendezésével

$$G(t) = m(t) - \int_{[0,t]} G(t-x)\, dm(t) = \big(m - G\star m\big)(t)\,, \qquad t \geq 0\,.$$

6.4. Tétel. *A felújítási folyamatok körében a G eloszlásfüggvény és az m felújítási függvény kölcsönösen meghatározza egymást.*

Bizonyítás. Mivel $m = \sum_{n=1}^{\infty} G^{\star n}$, ezért a G eloszlásfüggvény meghatározza az m felújítási függvényt. A továbbiakban belátjuk, hogy a felújítási függvény is meghatározza az eloszlásfüggvényt.

Tegyük fel, hogy létezik olyan H eloszlásfüggvény, hogy a hozzá kapcsolódó felújítási folyamat felújítási függvénye szintén az m függvény! A korábbi eredmények szerint a pozitív félegyenesen teljesülnek az alábbi egyenlőségek:

$$G = m - G\star m \qquad \text{és} \qquad m = \sum_{n=1}^{\infty} H^{\star n}\,.$$

Ezekből következik, hogy

$$\begin{aligned} G\star H &= \big(m - G\star m\big)\star H = m\star H - G\star m\star H = m\star H - G\star \sum_{n=2}^{\infty} H^{\star n} \\ &= H\star m - G\star(m-H) = (H-G)\star m + G\star H\,. \end{aligned}$$

Tehát $(H-G)\star m = 0$ a nemnegatív számok halmazán. Innen azonnal jön, hogy

$$H - G = \big(m - H\star m\big) - \big(m - G\star m\big) = -(H-G)\star m \equiv 0$$

a pozitív félegyenesen. Tehát $H = G$. □

Térjünk vissza az általános felújítási egyenlethez. A következőkben azt fogjuk megvizsgálni, hogy a felújítási egyenlet megoldása hogyan viselkedik aszimptotikusan.

6.5. Definíció. Azt mondjuk, hogy az X véletlen változó **aritmetikus eloszlású**, ha létezik olyan $\delta > 0$, hogy az X változó egy valószínűséggel a $\{k\delta : k \in \mathbb{Z}\}$ halmazba esik.

6.6. Példa. Az egész értékű véletlen változók aritmetikus eloszlásúak. A folytonos változók nem azok, hiszen az értékkészletük nem megszámlálható.

6.7. Tétel. *Tegyük fel, hogy az X véletlen változó nem aritmetikus eloszlású és az $a(x)$, $x \geq 0$, függvényre teljesülnek az alábbi feltevések:*

(i) *lokálisan korlátos a pozitív félegyenesen;*

(ii) *felírható a pozitív félegyenesen impropriusan integrálható és monoton függvények véges összegeként!*

Ekkor a felújítási egyenlet egyértelmű lokálisan korlátos megoldására teljesül a következő konvergencia:

$$A(t) \to \frac{1}{E(X)} \int_0^\infty a(x)\, dx \in \mathbb{R}\,, \qquad t \to \infty\,.$$

Bizonyítás. Hosszú és nagyon unalmas. Nagyrészt analízis, kevés sztochasztika. □

6.8. Példa. Legyen $a=G$, tehát tekintsük az $A=G+A\star G$ felújítási egyenletet! Ennek az $A=m$ függvény az egyetlen lokálisan korlátos megoldása. Mit mondhatunk erről a megoldásról a most bizonyított tétel segítségével? Semmit, ugyanis most a nem integrálható. Legyen ugyanis $x_0>0$ olyan érték, melyre $a(x_0)=G(x_0)>0$. Ekkor

$$\int_0^\infty a(x)dx \ge \int_{x_0}^\infty a(x_0)dx = \infty\,.$$

Ekkor viszont az a függvény nem írható fel integrálható függvények véges összegeként sem. Ez az eredmény nem meglepő, hiszen a monoton konvergenciatétel szerint a felújítási függvénynek nem is véges a határértéke:

$$\lim_{t\to\infty} m(t) = \lim_{t\to\infty} \sum_{n=1}^\infty G^{\star n}(t) = \sum_{n=1}^\infty \lim_{t\to\infty} G^{\star n}(t) = \sum_{n=1}^\infty 1 = \infty\,.$$

7. Vissza a felújítási díjfolyamatokhoz

Tekintsünk (X_n, C_n), $n=1,2,\ldots$, független és azonos eloszlású vektorváltozókat! Legyenek az $X_1, X_2, \ldots$ változók nemnegatív értékűek, és jelölje G a közös eloszlásfüggvényüket! Jelölje továbbá $(N_t)_{t\ge 0}$ az $X_1, X_2, \ldots$ változók által meghatározott felújítási folyamatot, és tekintsük a kapcsolatos felújítási díjfolyamatot:

$$S_t = \sum_{n=1}^{N_t} C_n = C_1 + \cdots + C_{N_t}\,, \qquad t \ge 0\,.$$

A 3.9. Tételben bebizonyítottuk, hogy ha $P(X=0)<1$ és $E(|C|)<\infty$, akkor

$$\lim_{t\to\infty} \frac{S_t}{t} = \frac{E(C)}{E(X)} \qquad \text{m.b.}$$

Ugyanitt azt az állítást is megfogalmaztuk, hogy

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E(S_t)}{t} = \frac{E(C)}{E(X)}\,. \tag{8}$$

Viszont ezt a második konvergenciát a szükséges eszközök hiányában nem bizonyítottuk be. A továbbiakban ezt fogjuk majd bepótolni.

Vezessük be az $A(t)=E(S_t)$, $t\geq 0$, függvényt. Először azt fogjuk megmutatni, hogy az A függvény jól definiált és lokálisan korlátos. Rögzítsünk egy tetszőleges $t\geq 0$ időpontot! Korábban már megmutattuk, hogy az N_t+1 véletlen változó megállási idő az $X_1, X_2, \dots$ sorozatra nézve. Ebből következik, hogy megállási idő az $(X_1,C_1),(X_2,C_2),\dots$ változókra nézve is, hiszen tetszőleges n pozitív egész esetén

$$\{N_t+1=n\}\in\sigma(X_1,\dots,X_n)\subseteq\sigma(X_1,C_1,\dots,X_n,C_n)\,.$$

Ekkor a $h(x,c)=|c|$ függvény alkalmazásával a 2.2. Állításból következik, hogy

$$\begin{aligned}|A(t)|&\leq E\big(|C_1|+\dots+|C_{N_t}|\big)\leq E\big(|C_1|+\dots+|C_{N_t}|+|C_{N_t+1}|\big)\\&=E(N_t+1)E\big(|C|\big)=\big(m(t)+1\big)E\big(|C|\big)\,.\end{aligned}$$

A fenti formula jobb oldala véges és lokálisan korlátos, ezért ezekkel a tulajdonságokkal az A függvény is rendelkezik.

A következő lépésben felírunk egy felújítási egyenletet az A függvényre. Az előző fejezet elején bemutatott módszert fogjuk majd alkalmazni. Jelölje $(S'_t)_{t\geq 0}$ az (X_n,C_n), $n\geq 2$, vektorok által definiált felújítási díjfolyamatot. Ez a folyamat független az X_1 változótól, ezért

$$E\big[S_t\mid X_1=x\big]=\begin{cases}E\big[C_1+S'_{t-x}\mid X_1=x\big]=E\big[C_1\mid X_1=x\big]+E\big[S'_{t-x}\big]\,, & t\geq x\,,\\ E\big[0\mid X_1=x\big]=0\,, & t<x\,.\end{cases}$$

Jegyezzük meg továbbá, hogy $(S_t)_{t\geq 0}$ és $(S'_t)_{t\geq 0}$ azonos eloszlású folyamatok, amiből következik, hogy $E[S'_{t-x}]=A(t-x)$. Ekkor a teljes várható érték tételéből jön, hogy

$$\begin{aligned}A(t)=E\big[S_t\big]&=\int_{[0,\infty)}E\big[S_t\mid X_1=x\big]\,dG(x)\\&=\int_{[0,t]}E\big[C_1\mid X_1=x\big]\,dG(x)+\int_{[0,t]}A(t-x)\,dG(x)\,.\end{aligned}$$

Tehát A egy lokálisan korlátos függvény és megoldása a most felírt felújítási egyenletnek. Jelölje $a(t)$ az első tagot az egyenlet jobb oldalán! A 6.2. Tételt szeretnénk alkalmazni, de ehhez először meg kell mutatnunk, hogy a lokálisan korlátos függvény. A feltételes várható érték definíciójából következik, hogy

$$\begin{aligned}a(t)&=\int_{[0,t]}E\big[C_1\mid X_1=x\big]\,dG(x)=\int_{[0,\infty)}E\big[C_1\mid X_1=x\big]\mathbb{1}_{\{x\leq t\}}\,dG(x)\\&=E\Big[E\big[C_1\mid X_1\big]\mathbb{1}_{\{X_1\leq t\}}\Big]=E\big[C_1\mathbb{1}_{\{X_1\leq t\}}\big]\,.\end{aligned}$$

Ekkor

$$|a(t)|\leq E\big[|C_1|\mathbb{1}_{\{X_1\leq t\}}\big]\leq E\big[|C|\big]\,.$$

Tehát az a függvény korlátos, amiből következik, hogy lokálisan is korlátos. Továbbá a majoráns konvergenciatételből azt is kapjuk, hogy

$$\lim_{t\to\infty}a(t)=E\Big[\lim_{t\to\infty}C_1\mathbb{1}_{\{X_1\leq t\}}\Big]=E\big[C_1\big]\,.$$

Jelölje $m(t)=E(N_t)$, $t\geq 0$, a felújítási függvényt! A fenti eredmények és a 6.2. Tétel alkalmazásával

$$A(t)=a(t)+\int_{[0,t]} a(t-x)\,dm(x)\,,\qquad t\geq 0\,.$$

Sajnos ilyen általános feltételek mellett az A függvényre nem tudunk explicit formulát adni. A cél a (8) konvergencia bizonyítása. Az előző egyenletből a következőt kapjuk:

$$\left|\frac{A(t)}{t}-\frac{E(C)}{E(X)}\right|\leq\frac{|a(t)|}{t}+\frac{1}{t}\int_{[0,t]}\Big|a(t-x)-E(C)\Big|\,dm(x)+\left|\frac{1}{t}\int_{[0,t]}E(C)\,dm(x)-\frac{E(C)}{E(X)}\right| \qquad (9)$$

Most az a függvény korlátos, ezért $|a(t)|/t\to 0$, amint $t\to\infty$. Az elemi felújítási tétel (3.6. Tétel (ii) pontja) alkalmazásával

$$\frac{1}{t}\int_{[0,t]}E(C)\,dm(x)=\frac{1}{t}E(C)\big[m(t)-0\big]\to\frac{E(C)}{E(X)}\,,\qquad t\to\infty\,.$$

Tehát a (9) egyenlőtlenség harmadik tagja szintén nullához konvergál. Már csak az maradt hátra, hogy a második tag konvergenciáját is megmutassuk. Rögzítsünk egy tetszőleges $\varepsilon>0$ értéket! Az a függvény konvergens, ezért létezik olyan $T>0$ szám, hogy

$$\big|a(t)-E(C)\big|\leq\varepsilon\,,\qquad t\geq T\,.$$

Ekkor tetszőleges $t>T$ esetén

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{t}\int_{[0,t]}\big|a(t-x)-E(C)\big|\,dm(x)\\
&\quad=\frac{1}{t}\int_{[0,t-T]}\big|a(t-x)-E(C)\big|\,dm(x)+\frac{1}{t}\int_{(t-T,t]}\big|a(t-x)-E(C)\big|\,dm(x)\\
&\quad\leq\frac{1}{t}\varepsilon\big[m(t-T)-0\big]+\frac{1}{t}\sup_{x\in(t-T,t]}\big|a(t-x)-E(C)\big|\,\big[m(t)-m(t-T)\big]\\
&\quad\leq\varepsilon\frac{m(t-T)}{t}+\sup_{x\in\mathbb{R}}\big|a(x)-E(C)\big|\,\frac{m(t)-m(t-T)}{t}\,.
\end{aligned}$$

Az elemi felújítási tétel ismételt alkalmazásával kapjuk, hogy $t\to\infty$ esetén

$$\frac{m(t-T)}{t}=\frac{m(t-T)}{t-T}\frac{t-T}{t}\to\frac{1}{E(X)}\qquad\text{és}\qquad\frac{m(t)-m(t-T)}{t}\to 0\,.$$

Tehát ha t elegendően nagy, akkor

$$\frac{1}{t}\int_{[0,t]}\Big|a(t-x)-E(C)\Big|\,dm(x)\leq\varepsilon\left[\frac{1}{E(X)}+\varepsilon\right]+\varepsilon\sup_{x\in\mathbb{R}}\big|a(x)-E(C)\big|\,.$$

Mivel az $\varepsilon>0$ érték tetszőleges volt, ezzel bebizonyítottuk, hogy $t\to\infty$ esetén a (9) formula jobb oldalán a középső tag is nullához konvergál. Ez pedig azt jelenti, hogy

$$\left|\frac{E(S_t)}{t}-\frac{E(C)}{E(X)}\right|=\left|\frac{A(t)}{t}-\frac{E(C)}{E(X)}\right|\to 0\,.$$

8. Véletlen változók momentumai

Legyen X tetszőleges véletlen változó, legyen G az eloszlásfüggvénye, és tekintsünk egy $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mérhető függvényt! Ekkor

$$E\phi(X) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)\, dG(x)\,.$$

A következő tételben azt vizsgáljuk meg, hogy ez a Lebesgue–Stieltjes-integrál hogyan írható át egy Riemann-integrálba.

8.1. Tétel. *Legyen X nemnegatív értékű véletlen változó G eloszlásfüggvénnyel, továbbá tekintsünk egy $\phi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ monoton és abszolút folytonos függvényt. Ekkor*

$$E\phi(X) = \phi(0) + \int_0^\infty \phi'(x)\big[1 - G(x)\big]\, dx\,,$$

amit úgy értünk, hogy ha a kifejezés valamely oldala véges, akkor a másik oldal is véges, és a két oldal egyenlő. Továbbá ha $E\phi(X)$ véges, akkor

$$\lim_{x\to\infty} \phi'(x) P\big(X > x\big) = \lim_{x\to\infty} \phi'(x)\big[1 - G(x)\big] = 0\,.$$

Bizonyítás. A ϕ függvény abszolút folytonosságából következik, hogy majdnem mindenhol deriválható, és

$$\phi(y) = \phi(0) + \int_0^y \phi'(x)\, dx\,, \qquad y \geq 0\,.$$

Jegyezzük meg továbbá, hogy

$$\int_\Omega \mathbb{1}_{\{x<X\}}\, dP = E(\mathbb{1}_{\{x<X\}}) = P(x < X) = 1 - G(x)\,, \qquad x \geq 0\,.$$

Ekkor a Fubini-tétel alkalmazásával

$$\begin{aligned} E\phi(X) &= \int_\Omega \phi(X)\, dP = \int_\Omega \left[\phi(0) + \int_0^X \phi'(x)\, dx\right] dP \\ &= \phi(0) + \int_\Omega \int_0^\infty \mathbb{1}_{\{x<X\}} \phi'(x)\, dx\, dP = \phi(0) + \int_0^\infty \phi'(x) \int_\Omega \mathbb{1}_{\{x<X\}}\, dP\, dx \\ &= \phi(0) + \int_0^\infty \phi'(x)\big[1 - G(x)\big]\, dx\,. \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy a Fubini-tétel alkalmazásánál szükség volt arra, hogy ϕ monoton függvény legyen, ugyanis ez garantálja azt, hogy ϕ' nem vált előjelet a pozitív félegyenesen. Ezzel az első állítást bebizonyítottuk. A második állítás azonnal következik abból az analízisbeli tényből, hogy egy függvény improprius integrálja csak akkor lehet véges, ha a függvénynek létezik és nulla a határértéke a végtelenben. □

8.2. Következmény. *Legyen X nemnegatív értékű változó G eloszlásfüggvénnyel!*

(i) *Az X változó $\alpha > 0$ rendű momentumára*

$$EX^\alpha = \alpha \int_0^\infty x^{\alpha-1}\big[1 - G(x)\big]\, dx\,.$$

Továbbá, ha az α rendű momentum véges, akkor

$$\lim_{x\to\infty} x^{\alpha-1} P\big(X > x\big) = \lim_{x\to\infty} x^{\alpha-1}[1 - G(x)] \to 0\,.$$

Tehát az α rendű momentum létezésének egy szükséges feltétele, hogy a $P(X > x)$ farokvalószínűségek legalább polinomiális rendben csengjenek le a végtelenben.

(ii) *Az X változó momentumgeneráló függvénye egy tetszőleges $r \in \mathbb{R}$ pontban*

$$M_X(r) = E\big(e^{rX}\big) = 1 + r \int_0^\infty e^{rx}\big[1 - G(x)\big]\, dx\,.$$

Továbbá, ha a momentumgeneráló függvény létezik valamely $r > 0$ pontban, akkor

$$\lim_{x\to\infty} e^{rx} P\big(X > x\big) = \lim_{x\to\infty} e^{rx}[1 - G(x)] \to 0\,.$$

Tehát annak, hogy a momentumgeneráló függvény létezzen egy $r>0$ pontban, szükséges feltétele az, hogy a farokvalószínűségek legalább exponenciális rendben csengjenek le a végtelenben.

9. A Feller-paradoxon

Legyenek $X_1, X_2, \ldots \geq 0$ független és azonos eloszlású véletlen változók közös G eloszlásfüggvénnyel, és tegyük fel, hogy $P(X{=}0)<1$ és $E(X)<\infty$. Jelölje $(N_t)_{t\geq 0}$ a kapcsolatos felújítási folyamatot, és legyen

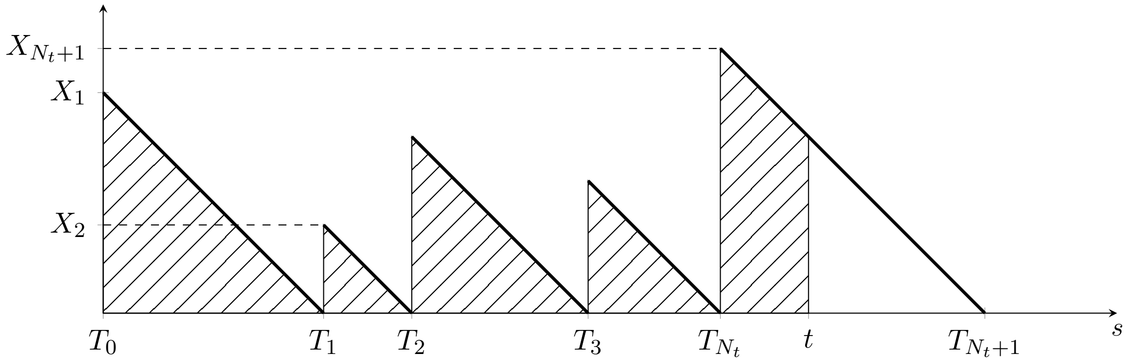
$$T_n = X_1 + \cdots + X_n\,, \qquad n = 0,1,\ldots$$

Egy rögzített $t \geq 0$ időponttal bezárólag a legutolsó felújítás időpontja $T_{N_t} \leq t$, a következő felújítás pedig a $T_{N_t+1} > t$ időpontban fog majd történni. Felújításelméletben fontos a következő mennyiségek vizsgálata:

- a rendszer kora (age): $t - T_{N_t}$;
- hátralevő élettartam, reziduális idő (residual time): $R_t = T_{N_t+1} - t$;
- teljes élettartam (total life): $T_{N_t+1} - T_{N_t} = X_{N_t+1}$.

A továbbiakban az $(R_t)_{t\geq 0}$ sztochasztikus folyamatottal foglalkozunk. Főleg a folyamat aszimptotikus viselkedésére leszünk kíváncsiak, amint $t \to \infty$. Maga az $(R_t)_{t\geq 0}$ folyamat nem konvergens, ezért a hosszú távú viselkedést másmilyen módon fogjuk értelmezni. Egyrészt megvizsgáljuk a hosszú távú átlagot: $\frac{1}{t}\int_0^t R_s ds$, másrészt a vátható értéket: $E(R_t)$. Az ember azt várná, hogy ezek a mennyiségek nagy t esetén az $E(X)/2$ értékhez vannak közel. Ki fog derülni, hogy ez jellemzően nem igaz. Ezt a meglepő eredményt **Feller-paradoxon** vagy **inspection paradox** néven szokták említeni.

Először az $\frac{1}{t}\int_0^t R_s ds$ integrálközépet vizsgáljuk meg.



Legyen C_n az ábrán az n-edik háromszög területe, tehát

$$C_n = \int_{T_{n-1}}^{T_n} R_s\, ds = \frac{X_n^2}{2}, \qquad n = 1,2,\ldots$$

Ekkor teljesülnek a következő egyenlőtlenségek:

$$C_1 + \cdots + C_{N_t} \le \int_0^t R_s\, ds \le C_1 + \cdots + C_{N_t+1}. \tag{10}$$

Jegyezzük meg, hogy a $C_1, C_2, \ldots$ változók függetlenek és azonos eloszlásúak. Ekkor a 3.6. Tétel (i) pontjából és a nagy számok erős törvényéből következik, hogy $t \to \infty$ esetén

$$\frac{C_1 + \cdots + C_{N_t}}{t} = \frac{N_t}{t} \frac{C_1 + \cdots + C_{N_t}}{N_t} \to \frac{1}{E(X)} E(C) = \frac{E(X^2)}{2E(X)}, \qquad \text{m.b.}$$

Ugyanilyen módon kapjuk azt is, hogy

$$\frac{C_1 + \cdots + C_{N_t+1}}{t} = \frac{N_t + 1}{t} \frac{C_1 + \cdots + C_{N_t+1}}{N_t + 1} \to \frac{1}{E(X)} E(C) = \frac{E(X^2)}{2E(X)}, \qquad \text{m.b.}$$

Ekkor a (10) formulából a rendőr elv alkalmazásával következik, hogy

$$\frac{1}{t} \int_0^t R_s\, ds \to \frac{E(X^2)}{2E(X)}, \qquad \text{m.b.}$$

Jegyezzük meg, hogy ha az X változó nem degenerált, tehát nem konstans, akkor

$$\frac{E(X^2)}{2E(X)} > \frac{(E(X))^2}{2E(X)} = \frac{E(X)}{2}.$$

Ez a Feller-paradoxon.

9.1. Állítás. *Ha $P(X=0) < 1$ és $E(X^2) < \infty$, akkor*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t R_s\, ds = \frac{E(X^2)}{2E(X)}, \qquad \textit{m.b.}$$

A továbbiakban az $A(t)=E(R_t)$, $t\geq 0$, várható érték függvényt fogjuk majd vizsgálni. A reziduális idők esete abból a szempontból speciális, hogy nagyon egyszerűen felírható egy explicit formula a várható érték függvényre. Rögzített t esetén az $N=N_t+1$ változó megállási idő az $X_1, X_2, \ldots$ sorozatra nézve. Ekkor a Wald-azonosság értelmében

$$E(T_{N_t+1}) = E\big(X_1+\cdots+X_{N_t+1}\big) = E(N_t+1)E(X) = \big(m(t)+1\big)E(X)\,. \tag{11}$$

Ebből viszont azonnal jön, hogy

$$A(t) = E(R_t) = E(T_{N_t+1}) - t = \big(m(t)+1\big)E(X) - t\,, \quad t \geq 0\,. \tag{12}$$

Szeretnénk meghatározni $A(t)$ határértékét, amint $t\to\infty$. Átrendezés után a 3.6. Tétel (ii) pontjának alkalmazásával:

$$A(t) = \left[\frac{m(t)}{t} - \frac{1}{E(X)}\right] tE(X) + E(X) \to 0\cdot\infty\cdot E(X) + E(X) = ?$$

Tehát a határértéket ilyen módon nem tudjuk megadni. A probléma az, hogy nem ismerjük az elemi felújítási tételben a konvergencia sebességét.

A továbbiakban a felírunk majd egy felújítási egyenletet az A függvényre, és ennek segítségével vizsgáljuk a függvény tulajdonságait. Ehhez fontos azt tudnunk, hogy az A függvény lokálisan korlátos. A lokális korlátosság problémája mindig előkerül a felújítási egyenlet alkalmazásánál, ezért most adunk néhány ötletet, hogyan is lehet ezt bizonyítani.

- Várható érték: $E(R_t)$, $t\geq 0$. A (11) formulából következik, hogy

  $$0 \leq E(R_t) \leq E(T_{N_t+1}) = \big(m(t)+1\big)E(X)\,.$$

  A jobb oldalon szereplő függvény monoton, ezért lokálisan korlátos. Ebből következik, hogy az $E(R_t)$, $t\geq 0$, függvény is lokálisan korlátos.

- Második momentum: $E(R_t^2)$, $t\geq 0$. Adott t esetén az $N=N_t+1$ változó az $X_1^2, X_2^2, \ldots$ sorozatra nézve is megállási idő. Ismét csak a Wald-azonosságot alkalmazva:

  $$E\big(X_1^2+\cdots+X_{N_t+1}^2\big) = E(N_t+1)E(X^2) = \big(m(t)+1\big)E(X^2)\,. \tag{13}$$

  Ez azt jelenti, hogy $E(X^2)<\infty$ esetén a második momentum is lokálisan korlátos:

  $$0 \leq E(R_t^2) \leq E(X_{N_t+1}^2) \leq E\big(X_1^2+\cdots+X_{N_t+1}^2\big) = \big(m(t)+1\big)E(X^2)\,.$$

- Eloszlás: $P(R_t\leq y)$ vagy $P(R_t>y)$, $t\geq 0$, ahol $y\in\mathbb{R}$ rögzített. Ezek korlátos függvények, tehát lokálisan is korlátosak.

Vezessük be az $N'_t = N_{X_1+t}-1$, $t\geq 0$, folyamatot! Korábban már meggondoltuk, hogy ez a folyamat az $X_2, X_3, \ldots$ változók által definiált felújítási folyamat, amiből két dolog következik. Egyrészt az $(N'_t)_{t\geq 0}$ folyamat független az X_1 változótól. Másrészt az $(N'_t)_{t\geq 0}$ folyamat azonos eloszlású az $(N_t)_{t\geq 0}$ felújítási folyamattal, amiből következik, hogy az

R_t véletlen változó azonos eloszlású az $(N'_t)_{t\geq 0}$ folyamatra analóg módon bevezetett R'_t hátralevő élettartammal. Ekkor viszont $E(R'_t)=A(t)$, $t\geq 0$.

Tetszőlegesen rögzített $x,t\geq 0$ időpontok esetén:

$$E\big[R_t \mid X_1=x\big]=\begin{cases} E\big[x-t \mid X_1=x\big]=x-t\,, & x>t\,,\\ E\big[R'_{t-x} \mid X_1=x\big]=E(R'_{t-x})=A(t-x)\,, & x\leq t\,.\end{cases}$$

Alkalmazzuk a teljes váható érték tételét:

$$\begin{aligned} A(t)=E(R_t)&=\int_{[0,\infty)} E\big[R_t \mid X_1=x\big]\,dG(x)\\ &=\int_{(t,\infty)}(x-t)\,dG(x)+\int_{[0,t]}A(t-x)\,dG(x)\,, \qquad t\geq 0\,. \end{aligned}$$

Ezek szerint az A függvény megoldása az $A=a+A\star G$ felújítási egyenletnek, ahol

$$a(t)=\int_{(t,\infty)}(x-t)\,dG(x)\,, \qquad t\geq 0\,.$$

Ahhoz, hogy alkalmazni tudjuk a felújítási egyenlet megoldására vonatkozó tételeket, jobban meg kell vizsgálnunk az a függvényt.

Vezessük be a $\phi_t(x)=\mathbb{1}_{\{x>t\}}(x-t)$ függvényt, ahol $x,t\geq 0$. Ekkor

$$a(t)=\int_0^\infty \phi_t(x)\,dG(x)=E\phi_t(X)\,.$$

Mi mindent mondhatunk el az a függvényről?

- Korlátos: $\phi_t(X)\leq X$ m.b., ezért $a(t)\leq E(X)$.
- Monoton csökkenő: tetszőleges $0\leq s\leq t$ esetén $\phi_s(X)\geq\phi_t(X)$ m.b, ezért $a(s)\geq a(t)$.
- A ϕ_t függvény abszolút folytonos, és a deriváltja $\phi'_t(x)=\mathbb{1}_{\{x>t\}}$. Ekkor a 8.1. Tételből:

$$a(t)=\phi_t(0)+\int_0^\infty \phi'_t(x)\big[1-G(x)\big]\,dx=0+\int_t^\infty\big[1-G(x)\big]\,dx\,, \qquad t\geq 0\,.$$

Ebből a Fubini-tétel és a 8.2. Következmény alkalmazásával

$$\begin{aligned} \int_0^\infty a(t)\,dt&=\int_0^\infty\int_t^\infty\big[1-G(x)\big]\,dxdt=\int_0^\infty\int_0^x\big[1-G(x)\big]\,dtdx\\ &=\int_0^\infty x\big[1-G(x)\big]\,dx=\frac{E(X^2)}{2}\,. \end{aligned}$$

Tehát ha $E(X^2)<\infty$, akkor a integrálható a pozitív félegyenesen.

Korábban megmutattuk, hogy az $A(t) = E(R_t)$ függvény lokálisan korlátos. Ebből következik, hogy ő a felújítási egyenlet egyértelmű lokálisan korlátos megoldása, tehát

$$A(t) = a(t) + \int_{[0,t]} a(t-x)\, dm(x)\,, \qquad t \geq 0\,. \tag{14}$$

(Valaki le tudja vezetni, hogy ez azonos a (12) formulában szereplő eredménnyel?) Ha ezen túl azt is tudjuk, hogy az X változó nem aritmetikus eloszlású, akkor a felújítási egyenlet megoldásának aszimptotikus viselkedésére vonatkozó tételünk (6.7. Tétel) szerint

$$A(t) \to \frac{1}{E(X)} \int_0^\infty a(x)\, dx = \frac{E(X^2)}{2E(X)}\,, \qquad t \to \infty\,.$$

A kapott eredményt a következő állításban mondjuk ki.

9.2. Állítás. *Ha $P(X=0) < 1$, $E(X^2) < \infty$ és X nem aritmetikus eloszlású, akkor*

$$\lim_{t\to\infty} E(R_t) = \frac{E(X^2)}{2E(X)}\,.$$

9.3. Példa. Tegyük fel, hogy az $X_1, X_2, \ldots$ változók exponenciális eloszlást követnek $\lambda > 0$ paraméterrel! Most $E(X) = 1/\lambda$ és $m(t) = \lambda t$, ezért

$$E(R_t) = \big(m(t)+1\big)E(X) - t = (\lambda t + 1)\frac{1}{\lambda} - t = \frac{1}{\lambda} = E(X)\,.$$

Ez az eredmény nem meglepő, gondoljunk a 4.1. Állításra! Az $A(t) = E(R_t)$, $t \geq 0$, függvényt a felújítási egyenletből is megkaphatjuk. Most a G eloszlásfüggvény abszolút folytonos, ezért

$$a(t) = \int_t^\infty (x-t)G'(x)\, dx = \int_t^\infty (x-t)\lambda e^{-\lambda x}\, dx = \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}.$$

Most az m függvény deriváltja $m'(x) = \lambda$. Ekkor a (14) formulából következik, hogy

$$A(t) = a(t) + \int_{[0,t]} a(t-x)\, dm(x) = \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} + \int_0^t \frac{e^{-\lambda(x-t)}}{\lambda} m'(x)\, dx = \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} + \frac{1-e^{-\lambda t}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\,.$$

Természetesen ez azt jelenti, hogy $t \to \infty$ esetén $E(R_t) \to 1/\lambda$. Ezt a konvergenciát a 9.2. Állításból is megkapjuk, hiszen exponenciális eloszlás esetén $E(X) = 1/\lambda$ és $E(X^2) = 2/\lambda^2$.

10. Rizikófolyamatok

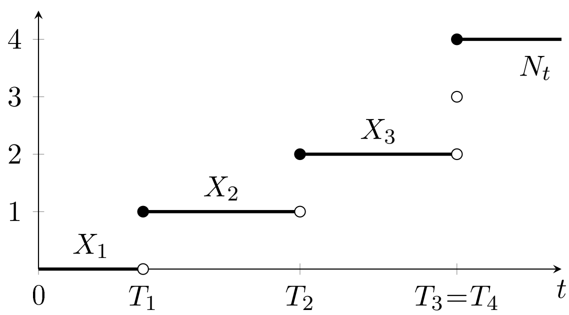
A továbbiakban egy biztosítótársaságot fogunk modellezni, és arra keressük a választ, hogy a biztosító mekkora valószínűséggel megy csődbe az idők folyamán. A modellben az alábbi jelöléseket fogjuk majd használni.

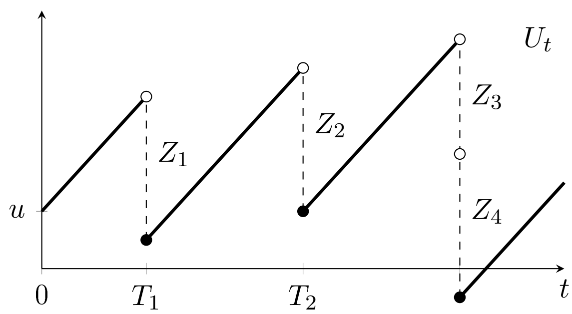
- Az egymást követő káresemények között eltelt idők: $X_1, X_2, \ldots \geq 0$ független és azonos eloszlású véletlen változók, és $P(X=0) < 1$.

- **Kárszámfolyamat**: az $X_1, X_2, \ldots$ sorozat által meghatározott $(N_t)_{t\geq 0}$ felújítási folyamat. Tehát N_t a káresemények száma a $t \geq 0$ időponttal bezárólag.
- Kárértékek: $Z_1, Z_2, \ldots \geq 0$ független és azonos eloszlású véletlen változók, melyek függetlenek a kárszámfolyamattól. Feltesszük, hogy $P(Z=0) < 1$. Jelölje F a kárértékek közös eloszlásfüggvényt, és legyen $\mu = E(Z) \in (0, \infty]$.
- **Kárértékfolyamat, kárfolyamat**: $S_t = Z_1 + \cdots + Z_{N_t}$, a biztosító teljes kifizetése a $t \geq 0$ időponttal bezárólag. Ez egy felújítási díjfolyamat.
- A biztosító díjbevétele $[0, t]$ intervallumon: P_t.
- A biztosító tőkéje a $t = 0$ időpontban: $u \geq 0$.
- **Rizikófolyamat**: $U_t = u + P_t - S_t$, a biztosító pénze a $t \geq 0$ időpontban.

10.1. Definíció. Az $(U_t)_{t\geq 0}$ sztochasztikus folyamat **klasszikus rizikófolyamat**, ha a fentieken túl teljesül az alábbi két tulajdonság is:

- az $(N_t)_{t\geq 0}$ felújítási folyamat Poisson-folyamat valamilyen $\lambda > 0$ intenzitással;
- és a díjbevétel $P_t = ct$ alakban írható fel valamilyen $c > 0$ konstans segítségével.





A klasszikus rizikófolyamatnak előnye, hogy matematikailag könnyen kezelhető. Ez annak a ténynek köszönhető, hogy a károk bekövetkezési időpontjait leíró folyamat egy Poisson-folyamat, ami felújítási folyamat és Markov-lánc egyszerre. A klasszikus eset hátránya, hogy nem minden esetben illeszkedik az empirikus adatokhoz. Például rögzített $t \geq 0$ esetén a Poisson-folyamat tulajdonságai szerint $E(N_t) = \lambda t = D^2(N_t)$. Viszont egyes biztosítástípusoknál kimutatható statisztikai eszközökkel, hogy a kárszám varianciája nem egyenlő a várható értékkel. További hátrány, hogy a modell nem vesz figyelembe szezonális ingadozásokat, a kárszámfolyamat intenzitása időtől és kárszámtól függetlenül állandó.

A kockázati folyamatok témakörében a biztosítási termék, és ezáltal a káreloszlás, a kárszámfolyamat és a díjbevétel rögzített. Egyetlen szabad változóval dolgozhatunk, az u kezdőtőke függvényében fogunk válaszolni különféle kérdésekre. A fő cél a következő függvény vizsgálata:

$$\Psi(u) = P\big(\exists t \geq 0 : U_t < 0\big) = P\big(\text{a biztosító } u \text{ kezdőtőkével indulva valaha csődbe megy}\big)\,.$$

Látni fogjuk, hogy időnként inkább az alább függvénnyel érdemes dolgozni:

$$\Phi(u) = 1 - \Psi(u) = P\big(\forall t \geq 0 : U_t \geq 0\big)$$
$$= P\big(\text{a biztosító } u \text{ kezdőtőkével sosem megy csődbe}\big)\,.$$

10.2. Tétel. *Legyenek $Y_1, Y_2, \dots$ független és azonos eloszlású változók $E(Y) \in [-\infty, +\infty]$ várható értékkel! Ekkor teljesülnek az alábbiak.*

(i) *Ha $E(Y) > 0$, akkor $\lim_{n\to\infty}(Y_1 + \dots + Y_n) = +\infty$ m.b.*

(ii) *Ha $E(Y) < 0$, akkor $\lim_{n\to\infty}(Y_1 + \dots + Y_n) = -\infty$ m.b.*

(iii) *Ha $E(Y) = 0$ és $P(Y = 0) < 1$, akkor*

$$\liminf_{n\to\infty}\,(Y_1 + \dots + Y_n) = -\infty \qquad \textit{és} \qquad \limsup_{n\to\infty}\,(Y_1 + \dots + Y_n) = +\infty \qquad \textit{m.b.}$$

Bizonyítás. Az (i) és a (ii) pont a nagy számok Kolmogorov-féle erős törvényének egy egyszerű következménye. A (iii) pont véges szórás esetén az iterált logaritmus tételből következik, az általános eset bizonyítása nehezebb. □

10.3. Állítás. *Ha $E(X) < \infty$ és $P_t = ct$, $t \geq 0$, akkor teljesülnek az alábbiak.*

(i) *Ha $c < E(Z)/E(X)$, akkor $\Phi(u) = 0$ minden $u \geq 0$ esetén.*

(ii) *Ha $c = E(Z)/E(X)$, akkor tetszőleges $u \geq 0$ esetén*

$$\Phi(u) = \begin{cases} 0\,, & \textit{ha } P(Z = cX) < 1\,,\\ 1\,, & \textit{ha } P(Z = cX) = 1\,. \end{cases}$$

(iii) *Ha $c > E(Z)/E(X)$, akkor $\lim_{u\to\infty}\Phi(u) = 1$.*
Következmény: tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén létezik $u > 0$, hogy $\Phi(u) > 1 - \varepsilon$.

(iv) *A Ψ függvény monoton csökkenő, a Φ függvény monoton növekvő, és mindkettő càdlàg a pozitív félegyenesen.*

Megjegyzések:

- Most az egységnyi időintervallumra jutó díjbevétel $P_t/t = c$, míg a 3.9. Tétel szerint az egységnyi időintervallumra jutó átlagos kifizetés

$$\lim_{t\to\infty}\frac{S_t}{t} = \frac{E(Z)}{E(X)} \qquad \text{m.b.}$$

  A 10.3. Állításban ezt a két értéket hasonlítjuk össze.

- Most X és Z független véletlen változók. Emiatt a $Z = cX$ egyenlőség csak akkor következhet be 1 valószínűséggel, ha X és Z is degenerált (konstans) változó. Ez az eset a gyakorlati alkalmazások szempontjából nem túl érdekes.
- A korábban már bevezetett jelölést használva $E(Z) = \mu$. Klasszikus rizikófolyamat esetén $E(X) = 1/\lambda$, ezért $E(Z)/E(X) = \lambda\mu$.

Bizonyítás. Vezessük be az $Y_n = Z_n - cX_n$, $n = 1,2,\ldots$, változókat! Ekkor $Y_1, Y_2, \ldots$ függetlenek és azonos eloszlásúak, továbbá a közös várható értékük

$$E(Y) = E(Z) - cE(X) \in (-\infty, +\infty]\,.$$

Jegyezzük meg, hogy a biztosító csak olyan időpillanatban mehet csődbe, amikor káresemény történik! Az n-edik káresemény időpontjában a biztosító pénze:

$$u + c\big(X_1 + \cdots + X_n\big) - \big(Z_1 + \cdots + Z_n\big) = u - \big(Y_1 + \cdots + Y_n\big)\,.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\Phi(u) = P\Big(u - \sup_{n\geq 1}\big(Y_1 + \cdots Y_n\big) \geq 0\Big) = P\Big(\sup_{n\geq 1}\big(Y_1 + \cdots + Y_n\big) \leq u\Big)\,.$$

(i) Ha $c < E(Z)/E(X)$, akkor $E(Y) > 0$, tehát a 10.2. Tétel (ii) pontja szerint

$$\sup_{n\geq 1}(Y_1 + \cdots + Y_n) = +\infty \qquad \text{m.b.}$$

Ebből következik, hogy $\Phi(u) = 1$ tetszőleges $u \geq 0$ esetén.

(ii) Most $E(Y) = 0$. Ha $P(Z = cX) < 1$, akkor $P(Y = 0) < 1$. Ekkor $\Phi(u) = 0$, hiszen a 10.2. Tétel (iii) pontja szerint ismét csak

$$\sup_{n\geq 1}(Y_1 + \cdots + Y_n) = +\infty \qquad \text{m.b.}$$

Ha $P(Z = cX) = 1$, akkor $P(Y = 0) = 1$. Ebben az esetben

$$\sup_{n\geq 1}(Y_1 + \cdots + Y_n) = 0 \qquad \text{m.b.},$$

tehát $\Phi(u) = 1$ minden $u \geq 0$ értékre.

(iii) Ha $c > E(Z)/E(X)$, akkor $E(Y) < 0$, vagyis a 10.2. Tétel (i) pontjával

$$\lim_{n\to\infty}(Y_1 + \cdots + Y_n) = -\infty \qquad \text{m.b.}$$

Vezessük be a következő véletlen változót:

$$M = \sup_{n\geq 1}(Y_1 + \cdots + Y_n) \in (-\infty, +\infty) \qquad \text{m.b.}$$

Ekkor $\Phi(u) = P(M \leq u)$, $u \geq 0$, tehát Φ éppen az M változó eloszlásfüggvénye a pozitív félegyenesen. Ebből következik az állítás.

(iv) Ha $c \leq E(Z)/E(X)$, akkor Φ és Ψ konstans függvények. Ebből minden tulajdonság következik. Ha $c > E(Z)/E(X)$, akkor Φ eloszlásfüggvény, tehát monoton növekvő és càdlàg. Emiatt $\Psi = 1 - \Phi$ monoton csökkenő és szintén càdlàg. □

11. A Lundberg-egyenlőtlenség

11.1. Definíció. Egy tetszőleges ξ véletlen változó **momentumgeneráló függvénye** a következő függvény:

$$M_\xi(r) = E\big(e^{r\xi}\big) = \int_{\mathbb{R}} e^{rx}\, dF_\xi(x)\,.$$

A függvény azon $r \in \mathbb{R}$ pontokban van definiálva, ahol a várható érték véges.

A továbbiakban az M_ξ függvény fontosabb tulajdonságait vizsgáljuk meg.

- Tetszőleges ξ véletlen változó esetén $M_\xi(0) = 1$.
- Ha $P(\xi = 0) = 1$, akkor $M_\xi(r) = 1$ minden r valós számra.
- Tegyük fel, hogy $P(\xi = 0) < 1$. Ha a momentumgeneráló függvény véges valamilyen $r_1 < r_2$ pontokban, akkor a függvény véges és szigorúan konvex az (r_1, r_2) intervallumon. Legyen ugyanis $r \in (r_1, r_2)$ tetszőleges! Ekkor létezik olyan $\alpha \in (0{,}1)$ érték, hogy $r = \alpha r_1 + (1-\alpha) r_2$, és az exponenciális függvény szigorú konvexitása miatt

$$\begin{aligned}
&M_\xi(r) = \int_{\mathbb{R}} e^{rx}\, dF_\xi(x) = e^{r\cdot 0} P(\xi = 0) + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} e^{rx}\, dF_\xi(x) \\
&< P(\xi = 0) + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \Big[\alpha e^{r_1 x} + (1-\alpha) e^{r_2 x}\Big]\, dF_\xi(x) \\
&= \alpha\Big[e^{r_1 0} P(\xi = 0) + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} e^{r_1 x}\, dF_\xi(x)\Big] + (1-\alpha)\Big[e^{r_2 0} P(\xi = 0) + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} e^{r_2 x}\, dF_\xi(x)\Big] \\
&= \alpha \int_{\mathbb{R}} e^{r_1 x}\, dF_\xi(x) + (1-\alpha) \int_{\mathbb{R}} e^{r_2 x}\, dF_\xi(x) = \alpha M_\xi(r_1) + (1-\alpha) M_\xi(r_2)\,.
\end{aligned}$$

- Ha ξ nemnegatív értékű változó, akkor az M_ξ függvény létezik a $(-\infty{,}0]$ intervallumon. Ha ezen túl $M_\xi(r)$ szintén véges valamilyen $r>0$ számra, akkor az M_ξ függvény létezik a $(-\infty, r]$ intervallumon.

Az előző fejezet jelöléseit használva legyenek X és Z a káresemények közötti idők nagysága illetve a kárérték! Ezek nemnegatív értékű és független véletlen változók. Tegyük fel továbbá, hogy $P_t = ct$, $t \geq 0$, valamilyen $c > 0$ konstansra, és tekintsük az $Y = Z - cX$ változót! Vegyük észre, hogy tetszőleges $r > 0$ esetén

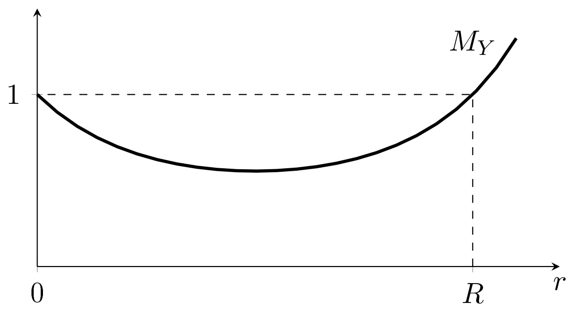
$$M_Y(r) = E\big(e^{rY}\big) = E\big(e^{r(Z-cX)}\big) = E\big(e^{rZ}\big) E\big(e^{-crX}\big) = M_Z(r) M_X(-cr). \tag{15}$$

Most X nemnegatív értékű változó, ezért $M_X(-cr) < \infty$. Ez azt jelenti, hogy az M_Y függvény pontosan akkor létezik valamilyen $r > 0$ pontban, ha ott M_Z is véges. A 8.2. Következmény (ii) pontjában viszont láttuk, hogy egy nemnegatív értékű változó momentumgeneráló függvénye nem feltétlenül létezik a pozitív félegyenesen. Ahhoz, hogy $M_Z(r)$ véges legyen valamilyen $r > 0$ számra, szükséges, hogy az $1 - F_Z(x)$ valószínűség legalább exponenciális sebességgel tartson nullához, amint $x \to \infty$.

11.2. Definíció. Tegyük fel, hogy az $M_Y(r) = 1$ egyenletnek létezik és egyértelmű a megoldása a pozitív számok halmazán! Ekkor ezt az R megoldást **Lundberg-kitevőnek** nevezzük.

Felmerülhet a kérdés, hogy általában hány megoldása lehet az $M_Y(r)=1$ egyenletnek. A fejezet elején megmutattuk, hogy $P(Y=0)<1$ esetén az M_Y függvény szigorúan konvex. Ebből következik, hogy az $M_Y(r)=1$ egyenletnek legfeljebb kettő megoldása lehet a valós számok halmazán. Az $r=0$ érték mindig megoldás, hiszen $M_Y(0)=1$. Tehát a $P(Y=0)<1$ esetben ha létezik pozitív megoldás, akkor az automatikusan egyértelmű is.

Ha $P(Y=0)=1$, akkor $M_Y(r)=1$ minden r valós számra, tehát az egyenletnek végtelen sok pozitív megoldása van. Ebben az esetben a Lundberg-kitevőt nem definiáljuk.



11.3. Tétel (Lundberg-egyenlőtlenség)**.** *Tegyük fel, hogy valamilyen $c>0$ értékre $P_t=ct$, $t \geq 0$. Ha létezik az R Lundberg-kitevő, akkor $\Psi(u) \leq e^{-Ru}$ tetszőleges $u \geq 0$ esetén.*

Bizonyítás. Jelölje $\Psi_n(u)$ annak a valószínűségét, hogy u kezdőtőkéről indulva a biztosító csődbe megy az első n káresemény során! Formálisan:

$$\Psi_n(u) = P\Big(\max_{1\leq k\leq n} \big(Y_1+\cdots+Y_k\big) > u\Big).$$

A valószínűség folytonossági tulajdonsága miatt tetszőleges $u \geq 0$ esetén

$$\Psi_n(u) \to \Psi(u) = P\Big(\sup_{k\geq 1} \big(Y_1+\cdots+Y_k\big) > u\Big), \qquad n \to \infty.$$

Tehát elegendő azt bebizonyítani, hogy $\Psi_n(u) \leq e^{-Ru}$ teljesül tetszőleges $u \geq 0$ és $n \geq 1$ esetén, hiszen ebből a rendőr-elv alkalmazásával már következik az állítás.

A $\Psi_n(u)\leq e^{-Ru}$ egyenlőtlenséget indukcióval fogjuk bizonyítani. A Markov-egyenlőtlenséget és a Lundberg-kitevő definícióját alkalmazva

$$\Psi_1(u) = P(Y_1 > u) = P\big(e^{RY_1} > e^{Ru}\big) \leq \frac{E(e^{RY_1})}{e^{Ru}} = \frac{M_{Y_1}(R)}{e^{Ru}} = \frac{1}{e^{Ru}} = e^{-Ru}.$$

Most tegyük fel, hogy $\Psi_n(u) \leq e^{-Ru}$ teljesül valamilyen $n \geq 1$ esetén! Ekkor

$$\Psi_{n+1}(u)=P\Big(\max_{1\leq k\leq n+1} \big(Y_1+\cdots+Y_k\big)>u\Big)=P\big(Y_1>u\big)+P\Big(\max_{2\leq k\leq n+1} \big(Y_1+\cdots+Y_k\big)>u, Y_1\leq u\Big).$$

Jelölje p_1 és p_2 a jobb oldalon szereplő két valószínűséget! A p_1 valószínűségre

$$p_1 = P(Y_1 > u) = \int_{(u,+\infty)} 1\, dF_{Y_1}(x) \le \int_{(u,+\infty)} e^{R(x-u)}\, dF_{Y_1}(x).$$

A teljes valószínűség tételéből és az $Y_1, Y_2, \ldots$ változók függetlenségéből kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
p_2 &= \int_{\mathbb{R}} P\Big(\max_{2\le k\le n+1}\big(Y_2+\cdots+Y_k\big) > u-Y_1,\ Y_1 \le u \mid Y_1 = x\Big)\, dF_{Y_1}(x)\\
&= \int_{\mathbb{R}} P\Big(\max_{2\le k\le n+1}\big(Y_2+\cdots+Y_k\big) > u-x,\ x \le u \mid Y_1 = x\Big)\, dF_{Y_1}(x)\\
&= \int_{(-\infty,u]} P\Big(\max_{2\le k\le n+1}\big(Y_2+\cdots+Y_k\big) > u-x\Big)\, dF_{Y_1}(x)\\
&= \int_{(-\infty,u]} P\Big(\max_{1\le k\le n}\big(Y_1+\cdots+Y_k\big) > u-x\Big)\, dF_{Y_1}(x)\\
&= \int_{(-\infty,u]} \Psi_n(u-x)\, dF_{Y_1}(x) \le \int_{(-\infty,u]} e^{-R(u-x)}\, dF_{Y_1}(x)\,.
\end{aligned}$$

A p_1 és a p_2 valószínűséget összeadva adódik, hogy

$$\begin{aligned}
\Psi_{n+1}(u) = p_1 + p_2 &\le \int_{\mathbb{R}} e^{-R(u-x)}\, dF_{Y_1}(x) = E\big(e^{-R(u-Y_1)}\big)\\
&= E\big(e^{RY_1}\big)e^{-Ru} = M_{Y_1}(R)e^{-Ru} = 1\cdot e^{-Ru} = e^{-Ru}.
\end{aligned}$$

Az utolsó sorban ismét a Lundberg-kitevő definícióját alkalmaztuk. Ezzel az állítást bebizonyítottuk. □

11.4. Példa. Klasszikus rizikófolyamat esetén az $X_1, X_2, \ldots$ változók exponenciális eloszlást követnek valamilyen $\lambda > 0$ paraméterrel. Ekkor elemi számolással

$$M_X(r) = E\big(e^{rX}\big) = \int_0^\infty e^{rx}\cdot\lambda e^{-\lambda x}\, dx = \frac{\lambda}{\lambda - r}\,, \qquad t < \lambda\,.$$

Ebből a (15) formula alkalmazásával kapjuk, hogy

$$M_Y(r) = M_Z(r)M_X(-cr) = M_Z(r)\frac{\lambda}{\lambda + cr}\,.$$

Tehát a Lundberg-kitevőt a következő egyenlet megoldásával tudjuk meghatározni:

$$M_Z(r) = 1 + \frac{cr}{\lambda}\,. \tag{16}$$

Azokban a tankönyvekben, melyek csak klasszikus rizikófolyamatokkal foglalkoznak, ezzel az egyenlettel definiálják a Lundberg-kitevőt.

Most vizsgáljuk meg azt a speciális esetet, amikor a $Z_1, Z_2, \ldots$ egyedi károk is exponenciális eloszlást követnek! Ekkor a paraméter $1/\mu$, vagyis

$$M_Z(r) = \frac{1/\mu}{1/\mu - r} = \frac{1}{1-\mu r}\,, \qquad r < \frac{1}{\mu}\,.$$

Ebben az esetben a (16) egyenletnek két megoldása van:

$$r_1 = 0 \qquad \text{és} \qquad r_2 = \frac{c-\lambda\mu}{c\mu} = \frac{1}{\mu} - \frac{\lambda}{c}\,.$$

Jegyezzük meg, hogy most $\lambda\mu{=}E(Z)/E(X)$. Ha $c{>}E(Z)/E(X)$, akkor $r_2{>}0$, tehát a (16) egyenletnek létezik egyértemű megoldása. Ebben az esetben $R = r_2$ a Lundberg-kitevő. Ha ezzel szemben $c \le E(Z)/E(X)$, akkor $r_2 \le 0$, és a Lundberg-kitevő nem létezik.

12. A csődvalószínűségre vonatkozó integrálegyenlet

12.1. Tétel. *A klasszikus rizikófolyamat esetén a Φ függvény abszolút folytonos a pozitív félegyenesen és megoldása a következő integrálegyenletnek:*

$$\Phi(u) = \Phi(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \Phi(u-z)\big[1-F(z)\big]\,dz\,, \qquad u \ge 0\,.$$

Bizonyítás. Mivel az első káresemény X_1 bekövetkezési időpontja és Z_1 nagysága független, a két változó együttes eloszlásfüggvénye

$$H(z,x) = P\big(Z_1 \le z, X_1 \le x\big) = F(z)G(x)\,,$$

ahol

$$G(x) = P(X_1 \le x) = 1 - e^{-\lambda x}\,, \qquad x \ge 0\,.$$

Most G abszolút folytonos, ezért $dG(x) = G'(x)dx = \lambda e^{-\lambda x}dx$.

Jelölje $A_x(u)$ azt az eseményt, hogy a biztosító a nem megy csődbe az $[x,\infty)$ időintervallumon, ha az x időpontban u tőkéje van. Mivel a biztosító leghamarabb az X_1 időpontban mehet csődbe, a teljes valószínűség tételével és a Fubini-tétellel kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\Phi(u) &= P\big(A_0(u)\big) = P\big(A_{X_1}(u+cX_1-Z_1)\big)\\
&= \int_{[0,\infty)\times[0,\infty)} P\big(A_{X_1}\big(u+cX_1-Z_1\big) \mid X_1 = x, Z_1 = z\big)\, H(dz,dx)\\
&= \int_{[0,\infty)}\int_{[0,\infty)} P\big(A_x\big(u+cx-z\big) \mid X_1 = x, Z_1 = z\big)\, dF(z)\, dG(x)\\
&= \int_{[0,\infty)}\int_{[0,\infty)} \Phi(u+cx-z)\, dF(z)\, \lambda e^{-\lambda x} dx\\
&= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}\int_{[0,u+cx]} \Phi(u+cx-z)\, dF(z)\, dx\,.
\end{aligned}$$

A fentiekben azt is kihasználtuk, hogy egyrészt az $X_2, Z_2, X_3, Z_3, \ldots$ függetlenek az X_1, Z_1 változóktól, másrészt $\Phi(u)=0$, ha $u<0$. Ebből helyettesítéses integrálással, az $y=u+cx$ változó bevezetésével jön, hogy

$$\Phi(u) = \int_u^\infty \frac{\lambda}{c} e^{\frac{\lambda}{c}(u-y)} \int_{[0,y]} \Phi(y-z)\, dF(z)\, dy\,. \tag{17}$$

Integráljuk mindkét oldalt a $[0,v]$ intervallumon! A Fubini-tétellel, egy kis számolással, majd végül a (17) formula kétszeri felhasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\int_0^v \Phi(u)\,du &= \int_0^v \int_u^\infty \frac{\lambda}{c} e^{\frac{\lambda}{c}(u-y)} \int_{[0,y]} \Phi(y-z)\,dF(z)\,dy\,du \\
&= \int_0^\infty \int_0^{\min(y,v)} \frac{\lambda}{c} e^{\frac{\lambda}{c}(u-y)}\,du \int_{[0,y]} \Phi(y-z)\,dF(z)\,dy \\
&= \int_0^\infty \left(e^{\frac{\lambda}{c}(\min(y,v)-y)} - e^{\frac{\lambda}{c}(0-y)}\right) \int_{[0,y]} \Phi(y-z)\,dF(z)\,dy \\
&= \int_0^v e^{\frac{\lambda}{c}(y-y)} \int_{[0,y]} \Phi(y-z)\,dF(z)\,dy + \int_v^\infty e^{\frac{\lambda}{c}(v-y)} \int_{[0,y]} \Phi(y-z)\,dF(z)\,dy \\
&\qquad - \int_0^\infty e^{\frac{\lambda}{c}(0-y)} \int_{[0,y]} \Phi(y-z)\,dF(z)\,dy \\
&= \int_0^v e^{\frac{\lambda}{c}(y-y)} \int_{[0,y]} \Phi(y-z)\,dF(z)\,dy + \frac{c}{\lambda}\Phi(v) - \frac{c}{\lambda}\Phi(0)\,.
\end{aligned}$$

Ebből átrendezéssel azt kapjuk, hogy

$$\Phi(v) = \Phi(0) + \int_0^v \left[\frac{\lambda}{c}\Phi(u) - \frac{\lambda}{c}\int_{[0,u]} \Phi(u-z)\,dF(z)\right] du\,. \tag{18}$$

Ez azt jelenti, hogy a Φ függvény abszolút folytonos, tehát majdnem mindenhol deriválható, és a derivált megegyezik a szögletes zárójelben található kifejezéssel.

Rögzítsük az $u \ge 0$ értéket! Az alábbi ϕ_u függvény abszolút folytonos és monoton növekvő a pozitív félegyenesen:

$$\phi_u(z) = \begin{cases} -\Phi(u-z)\,, & 0 \le z \le u\,, \\ -\Phi(0)\,, & z > u\,, \end{cases} \qquad \phi_u'(z) = \begin{cases} \Phi'(u-z)\,, & 0 \le z \le u\,, \\ 0\,, & z > u\,. \end{cases}$$

Ekkor egyrészt

$$E\big(\phi_u(Z)\big) = \int_{[0,\infty)} \phi_u(z)\,dF(z) = -\int_{[0,u]} \Phi(u-z)\,dF(z) - \Phi(0)\big[1-F(u)\big]\,,$$

másrészt a 8.1. Tétel alkalmazásával

$$E\big(\phi_u(Z)\big) = \phi_u(0) + \int_0^\infty \phi_u'(z)\big[1-F(z)\big]\,dz = -\Phi(u) + \int_0^u \Phi'(u-z)\big[1-F(z)\big]\,dz\,.$$

Ezekből átrendezéssel adódik, hogy

$$\Phi(u) - \int_{[0,u]} \Phi(u-z)\,dF(z) = \int_0^u \Phi'(u-z)\big[1-F(z)\big]\,dz + \Phi(0)\big[1-F(u)\big]\,.$$

A kapott eredményt a (18) formulába behelyettesítve majd a Fubini-tételt még egyszer alkalmazva

$$\begin{aligned}
\Phi(v) &= \Phi(0)+\frac{\lambda}{c}\int_0^v \int_0^u \Phi'(u-z)\big[1-F(z)\big]\,dz\,du+\frac{\lambda}{c}\int_0^v \Phi(0)\big[1-F(u)\big]\,du \\
&= \Phi(0)+\frac{\lambda}{c}\int_0^v \int_z^v \Phi'(u-z)du\,\big[1-F(z)\big]\,dz+\frac{\lambda}{c}\int_0^v \Phi(0)\big[1-F(u)\big]\,du \\
&= \Phi(0)+\frac{\lambda}{c}\int_0^v \Big(\Phi(v-z)-\Phi(z-z)\Big)\big[1-F(z)\big]\,dz+\frac{\lambda}{c}\int_0^v \Phi(0)\big[1-F(u)\big]\,du \\
&= \Phi(0)+\frac{\lambda}{c}\int_0^v \Phi(v-z)\big[1-F(z)\big]\,dz\,.
\end{aligned}$$

Ez pedig éppen az, amit bizonyítani akartunk. □

12.2. Következmény. *Klasszikus rizikófolyamatra $c>\lambda\mu$ esetén $\Phi(0)=1-\lambda\mu/c$.*

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy a 8.2. Következmény (i) pontja alapján

$$\int_0^\infty \big[1-F(z)\big]\,dz = E(Z^1)=\mu<\infty\,.$$

Tudjuk, hogy Φ eloszlásfüggvény, tehát monoton növekvő. Emiatt tetszőleges $z\geq 0$ esetén

$$\Phi(u-z)\mathbb{1}_{\{z\leq u\}}\nearrow 1\,,\qquad u\to\infty\,.$$

Ekkor a monoton konvergenciatétel alkalmazásával jön, hogy $u\to\infty$ esetén

$$\begin{aligned}
1\leftarrow\Phi(u) &= \Phi(0)+\frac{\lambda}{c}\int_0^u \Phi(u-z)\big[1-F(z)\big]\,dz \\
&= \Phi(0)+\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \Phi(u-z)\mathbb{1}_{\{z\leq u\}}\big[1-F(z)\big]\,dz \\
&\to \Phi(0)+\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \big[1-F(z)\big]\,dz \\
&= \Phi(0)+\frac{\lambda\mu}{c}\,.
\end{aligned}$$

Ebből azonnal következik az állítás. □

12.3. Tétel. *Klasszikus rizikófolyamat esetén ha $c>\lambda\mu$, akkor a Ψ csődvalószínűség függvény megoldása az alábbi egyenletnek:*

$$\Psi(u)=\frac{\lambda}{c}\int_u^\infty \big[1-F(z)\big]\,dz+\frac{\lambda}{c}\int_0^u \Psi(u-z)\big[1-F(z)\big]\,dz\,,\qquad u\geq 0\,.$$

Bizonyítás. Most

$$\Phi(0)=1-\frac{\lambda\mu}{c}=1-\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \big[1-F(z)\big]\,dz\,,$$

így a 12.1. Tétel értelmében

$$\Phi(u) = 1 - \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \big[1-F(z)\big]\,dz + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \Phi(u-z)\big[1-F(z)\big]\,dz\,, \qquad u \geq 0\,.$$

Ebből adódik, hogy

$$\begin{aligned}\Psi(u) = 1-\Phi(u) &= \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \big[1-F(z)\big]\,dz - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \big(1-\Psi(u-z)\big)\big[1-F(z)\big]\,dz\,,\\ &= \frac{\lambda}{c}\int_u^\infty \big[1-F(z)\big]\,dz + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \Psi(u-z)\big[1-F(z)\big]\,dz\,.\end{aligned}$$

□

A következő állítást bizonyítás nélkül közöljük.

12.4. Állítás (Leibnitz-formula)**.** *Tekintsünk $f(u,v)$, $a(u)$, $b(u)$, $u,v\in\mathbb{R}$, függvényeket! Tegyük fel, hogy*

- *a és b folytonosan differenciálható;*
- *továbbá f és $\partial f/\partial u$ létezik és folytonos az $\{(u,v) : a(u)\leq v\leq b(u)\}$ halmazon!*

Ekkor

$$\frac{d}{du}\left[\int_{a(u)}^{b(u)} f(u,v)\,dv\right] = f\big(u,b(u)\big)b'(u) - f\big(u,a(u)\big)a'(u) + \int_{a(u)}^{b(u)} \frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\,dv\,, \quad u\in\mathbb{R}\,.$$

12.5. Példa. A 12.1. Tétel egyenletét általában nehéz megoldani, de ha az egyedi károk például exponenciális eloszlást követnek, akkor a Φ függvényre adható explicit formula. Mivel $E(Z)=\mu$, az exponenciális eloszlás paramétere $1/\mu$, vagyis

$$F(z) = 1-e^{-z/\mu}\,, \qquad dF(z) = F'(z)dz = \frac{1}{\mu}e^{-z/\mu}dz\,, \qquad z\geq 0\,.$$

A 12.1. Tétel bizonyítása során megmutattuk, hogy a Φ függvény abszolút folytonos, azaz majdnem mindenhol deriválható, továbbá a deriváltat is megadtuk a (18) formulában. Ide beírva $dF(z)$ értékét, majd a $v=u-z$ helyettesítést végrehajtva azt kapjuk, hogy

$$\Phi'(u) = \frac{\lambda}{c}\Phi(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \Phi(u-z)\frac{1}{\mu}e^{-z/\mu}\,dz = \frac{\lambda}{c}\Phi(u) - \frac{\lambda}{c\mu}\int_0^u \Phi(v)e^{-(u-v)/\mu}\,dv\,. \tag{19}$$

A következő lépésben lederiváljuk a Φ' függvényt. Ehhez vezessük be a következő függvényeket:

$$f(u,v) = \Phi(v)e^{-(u-v)/\mu}\,, \qquad a(u)=0\,, \qquad b(u)=u\,, \qquad u,v\in\mathbb{R}\,.$$

Ekkor a 12.4. Állítás alkalmazásával

$$\begin{aligned}&\frac{d}{du}\left[\int_0^u \Phi(v)e^{-(u-v)/\mu}\,dv\right] = \frac{d}{du}\left[\int_{a(u)}^{b(u)} f(u,v)\,dv\right]\\ &= f(u,u)\cdot 1 - f(u,0)\cdot 0 + \int_0^u \frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\,dv = \Phi(u) - 0 - \frac{1}{\mu}\int_0^u \Phi(v)e^{-(u-v)/\mu}\,dv\,.\end{aligned}$$

Ezt az eredményt és a (19) formulát kétszer felhasználva kapjuk, hogy

$$\Phi''(u)=\frac{\lambda}{c}\Phi'(u)-\frac{\lambda}{c\mu}\Phi(u)+\frac{\lambda}{c\mu^2}\int_0^u \Phi(v)e^{-(u-v)/\mu}\,dv=\frac{\lambda}{c}\Phi'(u)-\frac{1}{\mu}\Phi'(u)=-R\Phi'(u)\,,$$

ahol $R=1/\mu-\lambda/c>0$ éppen a Lundberg-kitevő. Kétszeres integrálással jön, hogy megfelelően választott D_1, D_2 konstansokkal

$$\Phi(u)=D_1e^{-Ru}+D_2\,,\qquad u\geq 0\,.$$

A $\Phi(0)=1-\lambda\mu/c$ és $\lim_{u\to\infty}\Phi(u)=1$ peremfeltételek alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\Phi(u)=1-\frac{\lambda\mu}{c}e^{-Ru}\,,\qquad u\geq 0\,.$$

13. A Beekmann-féle konvolúciós formula

A 12.1. Tételben felírtunk egy egyenletet a Φ függvényre. Felmerül a kérdés, hogy tudunk-e általános feltételek mellett explicit formulát adni a Φ függvényre. A továbbiakban csak a $c>\lambda\mu$ esettel foglalkozunk, emiatt $\mu=E(Z)\in(0,\infty)$. Legyenek

$$\alpha=\frac{\lambda\mu}{c}\in(0{,}1)\qquad \text{és}\qquad F_0(u)=\frac{1}{\mu}\int_0^u[1-F(z)]dz\,,\quad u\geq 0\,.$$

Most $\int_0^\infty[1-F(z)]dz=E(Z)=\mu$, amiből következik, hogy F_0 teljesíti az eloszlásfüggvényeket karakterizáló tulajdonságokat: monoton nővekvő, càdlàg (mert folytonos), $F_0(0)=0$, és a végtelenben 1 a határérétéke. Legyenek $\eta_1,\eta_2,\ldots\geq 0$ független és azonos eloszlású véletlen változók ezzel az F_0 eloszlásfüggvénnyel. Láttuk, hogy ekkor az $\eta_1+\cdots+\eta_k$ összegnek $F_0^{\star k}$ az eloszlásfüggvénye. Természetesen adódik a gondolat, hogy definiáljuk az $F_0^{\star 0}$ kifejezést a „0 darab tagból álló összeg”, vagyis a konstans 0 változó eloszlásfüggvényével. Éppen ezért a továbbiakban legyen

$$F_0^{\star 0}(u)=P(0\leq u)=\begin{cases}0\,, & u<0\,,\\ 1\,, & u\geq 0\,.\end{cases}$$

13.1. Állítás. *[Beekman-féle konvolúciós formula] Tekintsünk egy klasszikus rizikófolyamatot, és tegyük fel, hogy $c>\lambda\mu$. Ekkor*

$$\Phi(u)=(1-\alpha)\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^kF_0^{\star k}(u)\,,\qquad u\geq 0\,.$$

Bizonyítás. A 12.1. Tétel és a 12.2. Következmény alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\Phi(u)&=\left(1-\frac{\lambda\mu}{c}\right)+\frac{\lambda\mu}{c}\int_0^u\Phi(u-z)\frac{1}{\mu}\big[1-F(z)\big]\,dz\\ &=(1-\alpha)+\alpha\int_0^u\Phi(u-z)\,dF_0(z)\\ &=(1-\alpha)+\alpha(\Phi\star F_0)(u)\,.\end{aligned}\tag{20}$$

Bebizonyítható, hogy ennek az egyenletnek $\alpha \in (-1{,}1)$ esetén létezik egyértelmű megoldása a lokálisan korlátos függvények között. Tudjuk, hogy a Φ csődvalószínűség korlátos függvény és megoldása a (20) egyenletnek. Az állításban szereplő sor szintén korlátos, hiszen $F_0^{\star k}$ eloszlásfüggvény minden $k \geq 0$ egész esetén, és így

$$\sup_{u\geq 0}\left|(1-\alpha)\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k F_0^{\star k}(u)\right| \leq (1-\alpha)\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k \sup_{u\geq 0} F_0^{\star k}(u) = (1-\alpha)\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k = 1\,.$$

Tehát csak azt kell megmutatnunk, hogy a fenti sor megoldása (20) egyenletnek. Behelyettesítéssel kapjuk, hogy a pozitív félegyenesen

$$(1-\alpha)+\alpha\left[(1-\alpha)\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k F_0^{\star k}\right]\star F_0 = (1-\alpha)F_0^{\star 0}+(1-\alpha)\sum_{k=1}^{\infty}\alpha^k F_0^{\star k} = (1-\alpha)\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k F_0^{\star k}\,.$$

Ilyen módon az állítást bebizonyítottuk. □

A Beekman-féle konvolúciós formula segítségével a Φ függvényt fel lehet írni numerikus módszerekkel. A probléma az, hogy a konvolúciók rengeteg számítási lépést igényelnek, és ez megnöveli a módszer hibáját. Az alábbiakban bemutatunk egy egyszerűbb ötletet.

A továbbiakban φ mindig karakterisztikus függvényt jelöl, ahol a véletlen változót vagy az eloszlásfüggvényt az alsó indexben fogjuk feltüntetni. Ha ismerjük a kárértékek F eloszlásfüggvényét, akkor φ_η numerikusan meghatározható:

$$\varphi_\eta(t) = E(e^{it\eta}) = \int_{[0,\infty)} e^{itx} dF_0(x) = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty e^{itx}[1-F(x)]\,dx\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

Ekkor a 13.1. Állítás alkalmazásával a Φ függvényhez tartozó karakterisztikus függvény:

$$\begin{aligned}\varphi_\Phi(t) &= \int_{[0,\infty)} e^{itx} d\Phi(x) = (1-\alpha)\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k \int_{[0,\infty)} e^{itx} dF_0^{\star k}(x)\\ &= (1-\alpha)\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k \varphi_{\eta_1+\cdots+\eta_k}(t) = (1-\alpha)\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k\varphi_\eta^k(t) = \frac{1-\alpha}{1-\alpha\varphi_\eta(t)}\,.\end{aligned}$$

Az utolsó lépésben a mértani sor összegképletét alkalmaztuk, hiszen most $|\alpha\varphi_\eta(t)| < 1$ minden $t \in \mathbb{R}$ esetén. A Φ eloszlásfüggvény folytonos a $(0,\infty)$ halmazon, így a Gil-Pelaez-tétel alkalmazásával:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{Im}(e^{-itx}\varphi_\Phi(t))}{t}\,dt, \qquad x > 0\,. \tag{21}$$

Ezzel a Φ függvényt meghatároztuk.

13.2. Példa. Tekintsük ismét azt az esetet, amikor a kárnagyságok exponenciális eloszlást követnek $1/\mu > 0$ paraméterrel! Ekkor $F(x) = 1 - e^{-x/\mu}$, $x \geq 0$, tehát

$$\varphi_\eta(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty e^{itx}[1-F(x)]\,dx = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty e^{(it-1/\mu)x}\,dx = \frac{1}{\mu}\frac{1}{1/\mu - it} = \frac{1}{1-it\mu}\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

Ebből következik, hogy

$$\varphi_\Phi(t) = \frac{1-\alpha}{1-\alpha\varphi_\eta(t)} = (1-\alpha)+\alpha\frac{R}{R-it}\,, \qquad t\in\mathbb{R}\,. \tag{22}$$

A fenti formulában $R=1/\mu-\lambda/c$ a Lundber-kitevő, és a második lépésben csak algebrai átalakításokat alkalmaztunk. A kapott függvényre a (21) egyenlőséget formális kalkulációval nehéz alkalmazni, tehát ilyen módon a Φ függvényt papíron nem tudjuk kiszámolni. Szerencsére mi a 12.5. Példában már meghatároztuk a Φ függvényt. Tekintsünk most arra az eredményre úgy, mint egy sejtés, és ellenőrizzük le ezt a sejtést:

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1-\alpha e^{-Rx}\,, & x\geq 0\,, \\ 0\,, & x<0\,. \end{cases} \tag{23}$$

Vegyük észre, hogy a μ_Φ mérték abszolút folytonos a $(0,\infty)$ intervallumon, a 0 pontban pedig van egy $1-\alpha$ nagyságú atomja. Ekkor a kapcsolatos karakterisztikus függvény:

$$\begin{aligned} \varphi_\Phi(t) &= \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\,d\Phi(x) = e^{it\cdot 0}\mu_\Phi\big(\{0\}\big) + \int_{(0,\infty)} e^{itx}\Phi'(x)\,dx \\ &= (1-\alpha)+\alpha\int_{(0,\infty)} e^{itx}Re^{-Rx}\,dx = (1-\alpha)+\alpha\frac{R}{R-it}\,. \end{aligned}$$

Mivel ez azonos a (22) egyenlőségben kapott karakterisztikus függvénnyel, a (23) formulában valóban a Φ csődvalószínűség szerepel.

14. A csődvalószínűség aszimptotikus viselkedése

A továbbiakban szükségünk lesz a Z kárérték momentumgeneráló függvényére:

$$M(r) = E\big(e^{rZ}\big) = \int_{\mathbb{R}} e^{rz}\,dF(z)\,.$$

A 8.2. Következmény (ii) pontjával a függvény a következő módon írható át:

$$M(r) = \int_{[0,\infty)} e^{rz}\,dF(z) = 1+r\int_0^\infty e^{rz}\big[1-F(z)\big]\,dz\,. \tag{24}$$

Korábban már megvizsgáltuk, hogy a momentumgeneráló függvények milyen általános tulajdonságokkal rendelkeznek, ezek a jelen esetben is teljesülnek. A további munkánk szempontjából szükségünk lesz az alábbi állításra:

14.1. Állítás. *Tegyük fel, hogy az M momentumgeneráló függvény véges egy R valós szám valamely környezetében! Ekkor a függvény deriválható az R pontban, és*

$$M'(R) = \int_{[0,\infty)} ze^{Rz}\,dF(z) = \int_0^\infty \big(e^{Rz}+Rze^{Rz}\big)\big[1-F(z)\big]\,dz\,. \tag{25}$$

Bizonyítás. Ennek bizonyításához legyen $R_2 > R$ olyan érték, melyre $M(R_2) < \infty$, és vezessük be a következő folytonos függvényt:

$$f(r,z) = \begin{cases} \left(e^{rz} - e^{Rz}\right)/(r-R)\,, & r \neq R\,, \\ ze^{Rz}\,, & r = R\,, \end{cases} \qquad z \geq 0.$$

Rögzített z esetén az f függvény monoton növekvő az r változóban, tehát

$$f(r,z) \leq f(R_2,z)\,, \qquad r \leq R_2\,, \qquad z \geq 0\,.$$

Másrészt a momentumnegeráló függvény véges a $(-\infty, R_2]$ intervallumon, tehát

$$\int_{[0,\infty)} f(R_2,z)\,dF(z) = \frac{M(R_2) - M(R)}{R_2 - R} < \infty\,.$$

Ekkor a majoráns konvergenciatétel alkalmazásával:

$$\lim_{r\to R} \frac{M(r) - M(R)}{r - R} = \lim_{r\to R} \int_{[0,\infty)} f(r,z)\,dF(z) = \int_{[0,\infty)} f(R,z)\,dF(z)\,.$$

Az (25) formula második egyenlősége a 8.1. Tételből következi. □

A 11.4. Példában megmutattuk, hogy klasszikus rizikófolyamat esetén az Lundberg-kitevő úgy definiálható, mint az alábbi egyenlet egyértelmű megoldása a pozitív számok halmazán:

$$M(r) = 1 + \frac{cr}{\lambda}\,.$$

Vezessük be a $h(r) = M(r) - 1$ függvényt! Ekkor a Lundberg-kitevő a $h(r) = cr/\lambda$ egyenletnek is egyértelmű megoldása a pozitív félegyenesen.

14.2. Tétel (Cramér–Lundberg approximáció). *Tekintsünk egy klasszikus rizikófolyamatot! Tegyük fel, hogy létezik az R Lundberg-kitevő, továbbá tegyük fel, hogy az M momentumgeneráló függvény véges az R pont valamely környezetében! Ekkor*

$$\lim_{u\to\infty} e^{Ru}\Psi(u) = \frac{c - \lambda\mu}{\lambda M'(R) - c}\,.$$

A tétel gyakorlatilag azt állítja, hogy a csőd valószínűsége az u kezdőtőke függvényében asszimptotikusan exponenciális:

$$\Psi(u) \sim \frac{c - \lambda\mu}{\lambda M'(R) - c} e^{-Ru}\,, \qquad u \to \infty\,.$$

Bizonyítás. A momentumgeneráló függvény létezik az R pontban, ezért a (24) formula szerint

$$h(R) = M(R) - 1 = R \int_0^\infty e^{Rz}\big[1 - F(z)\big]\,dz\,. \tag{26}$$

Most az R érték megoldása a $h(r) = cr/\lambda$ egyenletnek, tehát

$$1 = \frac{\lambda}{cR} h(R) = \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty e^{Rz} \big[1 - F(z)\big] dz .$$

Ebből következik, hogy az alábbi g függvény egy ξ folytonos véletlen változó sűrűségfüggvénye, továbbá $P(\xi \geq 0) = 1$. Legyen G a kapcsolatos eloszlásfüggvény!

$$g(z) = \begin{cases} \frac{\lambda}{c} e^{Rz} [1 - F(z)] , & z \geq 0 , \\ 0 , & z < 0 , \end{cases} \qquad G(z) = \int_0^z g(x)\, dx .$$

A későbbiekben szükségünk lesz a ξ változó várható értékére, ezért ezt most meghatározzuk. Tekintsük a $\phi(z) = ze^{Rz}$, $z \geq 0$, függvényt! Ekkor

$$h'(R) = M'(R) = E\big(\phi(Z)\big) \qquad \text{és} \qquad \phi(z) = \frac{\phi'(z) - e^{Rz}}{R} , \quad z \geq 0 .$$

Mivel ϕ monoton és abszolút folytonos, a 8.1. Tételből, R definíciójából és a (26) formulából kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} E(\xi) &= \int_0^\infty z g(z)\, dz = \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \phi(z) \big[1 - F(z)\big]\, dz \\ &= \frac{\lambda}{cR} \int_0^\infty \phi'(z) \big[1 - F(z)\big]\, dz - \frac{\lambda}{cR} \int_0^\infty e^{Rz} \big[1 - F(z)\big]\, dz \\ &= \frac{\lambda}{cR} \Big[E\phi(Z) - \phi(0)\Big] - \frac{\lambda}{cR^2} h(R) = \frac{\lambda}{cR} M'(R) - \frac{1}{R} = \frac{\lambda M'(R) - c}{cR} . \end{aligned}$$

Vezessük be a következő függvényeket:

$$a(u) = \frac{\lambda}{c} e^{Ru} \int_u^\infty \big[1 - F(z)\big]\, dz , \qquad A(u) = e^{Ru} \Psi(u) , \qquad u \in \mathbb{R} .$$

Ekkor a 12.3. Tétel függvényegyenletéből

$$e^{Ru} \Psi(u) = \frac{\lambda}{c} e^{Ru} \int_u^\infty \big[1 - F(z)\big]\, dz + \frac{\lambda}{c} \int_0^u e^{R(u-z)} \Psi(u - z) e^{Rz} \big[1 - F(z)\big]\, dz .$$

Ez a bevezetett jelölésekkel a következő felújítási egyenletet adja:

$$A(u) = a(u) + \int_0^u A(u - z) h(z)\, dz = a(u) + \int_0^u A(u - z)\, dG(z) \tag{27}$$

Szeretnénk alkalmazni a 6.7. Tételt erre a felújítási egyenlere, de ehhez először le kell ellenőriznünk a tétel feltételeit:

- Most ξ folytonos változó, tehát nem aritmetikus eloszlású.
- Az a és A függvények folytonosak, ezért lokálisan korlátosak.

- Az a függvény előáll két monoton csökkenő függvény különbségeként:

$$a(u)=a_1(u)-a_2(u)=\frac{\lambda}{c}\int_u^\infty e^{Rz}\big[1-F(z)\big]\,dz-\frac{\lambda}{c}\int_u^\infty \big(e^{Rz}-e^{Ru}\big)\big[1-F(z)\big]\,dz\,.$$

- Meg kell mutatnunk, hogy a_1 és a_2 Riemann-integrálható a pozitív félegyenesen. Mivel $a_1\ge a_2\ge 0$, elég az a_1 függvénnyel foglalkozni. Ekkor a Fubini-tétel alkalmazásával:

$$\int_0^\infty\int_u^\infty e^{Rz}\big[1-F(z)\big]\,dz\,du=\int_0^\infty\int_0^z e^{Rz}\big[1-F(z)\big]\,du\,dz=\int_0^\infty ze^{Rz}\big[1-F(z)\big]\,dz\,.$$

  Ez viszont véges a (24) formula miatt.

Térjünk vissza a (27) felújítási egyenlethez! A 6.7. Tétel alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\lim_{u\to\infty}A(u)=\frac{1}{E(\xi)}\int_0^\infty a(z)dz=\frac{cR}{\lambda M'(R)-c}\int_0^\infty a(z)dz\,. \tag{28}$$

Tehát csak annyi a feladatunk, hogy meghatározzuk az a függvény integrálját. Tekintsük a következő függvényt:

$$H(u)=\begin{cases}0\,, & u<0\,,\\ \frac{1}{\mu}\int_0^u[1-F(z)]dz\,, & u\ge 0\,.\end{cases}$$

Vegyük észre, hogy H eloszlásfüggvény, hiszen monoton nővekvő, càdlàg (mert abszolút folytonos), és a határértéke a két végtelenben 0 illetve 1. Legyen η egy olyan változó, melynek H az eloszlásfüggvénye! Az abszolút folytonosság miatt $dH(u)=H'(u)du$, tehát a (26) formula alkalmazásával

$$E\big(e^{R\eta}\big)=\int_0^\infty e^{Ru}\,dH(u)=\int_0^\infty e^{Ru}\frac{1}{\mu}\big[1-F(u)\big]\,dz=\frac{h(R)}{\mu R}=\frac{c}{\lambda\mu}\,.$$

Ekkor a (24) egyenlőség segítségével

$$\begin{aligned}\int_0^\infty a(u)\,du&=\frac{\lambda\mu}{cR}\int_0^\infty Re^{Ru}\frac{1}{\mu}\int_u^\infty\big[1-F(z)\big]\,dzdu=\frac{\lambda\mu}{cR}\int_0^\infty Re^{Ru}\big[1-H(z)\big]\,du\\&=\frac{\lambda\mu}{cR}\Big[E\big(e^{R\eta}\big)-1\Big]=\frac{\lambda\mu}{cR}\Big[\frac{c}{\lambda\mu}-1\Big]=\frac{c-\lambda\mu}{cR}\,.\end{aligned}$$

Ha ezt beírjuk a (28) formulába, akkor éppen megkapjuk a bizonyítandó állítást. □

14.3. Példa. Ha az egyedi károk exponenciális eloszlást követnek $1/\mu$ paraméterrel, akkor

$$M(r)=E\big(e^{rZ}\big)=\frac{1}{1-\mu r}\,,\quad h(r)=M(r)-1=\frac{\mu r}{1-\mu r}\,,\quad h'(r)=\frac{\mu}{(1-\mu r)^2}\,,\quad r<\frac{1}{\mu}\,.$$

A $h(r)/r = c/\lambda$ egyenletnek van pozitív megoldása, ami

$$R = \frac{1}{\mu} - \frac{\lambda}{c}\,.$$

Vegyük észre, hogy most $R < 1/\mu$, tehát a h függvény létezik az R Lundberg-kitevő valamely környezetében. Behelyettesítés után kapjuk, hogy

$$M'(R) = \mu\Big(\frac{c}{\lambda\mu}\Big)^2,$$

amiből

$$\Psi(u) \sim \frac{c-\lambda\mu}{\lambda M'(R)-c}e^{-Ru} = \frac{\lambda\mu}{c}e^{-Ru}, \qquad u \to \infty\,.$$

Jegyezzük meg, hogy exponenciális eloszlás esetén nem csak aszimptotikus egyenlőség van, hanem ennél több is teljesül: az előző fejezetben láttuk, hogy

$$\Psi(u) = \frac{\lambda\mu}{c}e^{-Ru}, \qquad u \geq 0\,.$$

További kérdések:

- Milyen állítást fogalmazhatunk meg a csődvalószínűségekre olyan esetben, amikor a Cramér–Lundberg-tétel feltételei nem teljesülnek?
- Feltéve, hogy a biztosító csődbe megy valamikor, mit állíthatunk a csőd nagyságáról?
- Milyen módon becsülhető meg a Lundberg-kitevő és a csődvalószínűség statisztikai módszerekkel?

15. Az M/G/1/1 modell

A tömegkiszolgálási vagy másnéven sorbanállási modellekben egy rendszert vizsgálunk, melybe vevők, ügyfelek érkeznek. A vevőket ki kell szolgálnunk, ez valamennyi időt igényel. A kiszolgálás után a vevők távoznak a rendszerből. A következő jelöléseket fogjuk majd használni:

- A vevők közötti érkezési idők: $X_1, X_2, \ldots \geq 0$ független és azonos eloszlású változók.
- A vevők kiszolgálási ideje: $Y_1, Y_2, \ldots \geq 0$ független és azonos eloszlású változók, melyek az érkezések közötti időktől is függetlenek.
- A szerverek száma: $a \in \{1,2,\ldots,\infty\}$, ennyi vevőt tudunk egymással párhuzamosan kiszolgálni. Ha egy vevő úgy érkezik a rendszerhez, hogy nincs szabad szerver, akkor beáll a sor végére és várakozik.

- A rendszer kapacitása: $b \in \{1,2,\ldots,\infty\}$, ennyi vevő fér be a rendszerbe. Ha egy vevő úgy érkezik a rendszerhez, hogy nincs szabad kapacitás, akkor azonnal távozik.

- A fő feladat a rendszer méretének a vizsgálata. Jelölje L_t azt, hogy összesen hány vevő tartózkodik a rendszerben a $t \geq 0$ időpontban. Feltesszük, hogy $L_0 = 0$.

A tömekiszolgálási rendszerek nagyban különböznek abból a szempontból, hogy mi az eloszlása a fentiekben bevezetett változóknak, illetve mekkora az a és b paraméterek értéke. Az 1950-es évek óta a modelleket a Kendall-féle jelöléssel különböztetjük meg. A Kendall-jelölés $A/B/a$ vagy $A/B/a/b$ szokott lenni, ahol:

- A egy betű, mely az $X_1, X_2, \ldots$ változók eloszlására utal. Tipikus értékei:
  - $M =$ exponenciális (Markovian),
  - $G =$ általános (general),
  - $D =$ determinisztikus.

- B szintén egy betű, mely a kiszolgálási idők eloszlására utal. Tipikus értékei: M, G és D.

- a a szerverek száma.

- b a rendszer kapacitása. Ha nem jelöljük, akkor $b = \infty$.

Néhány példa:

- $M/M/a/b$: az érkezések közötti idők és a kiszolgálási idők is exponenciális eloszlásúak. Ekkor $(L_t)_{t \geq 0}$ folytonos idejű homogén Markov-lánc, és a rendszer könnyen vizsgálható a Markov-láncok általános elméletével.

- $M/G/1$ avagy $M/G/1/\infty$: a vevők exponenciális időközönként érkeznek, de a kiszolgálási idő tetszőleges eloszlású lehet. Egy szerverünk van, de a rendszer kapacitása korlátlan.

- $M/G/1/1$: az előzőhöz viszonyítva annyi a változás, hogy a rendszer kapacitása 1. Ha egy vevő érkezésekor a rendszer üres, akkor betér, és kiszolgáljuk. Ha az érkezéskor az egyetlen szerver foglalt, akkor a vevő távozik.

- $G/G/\infty/\infty$: önkiszolgáló rendszer. Korlátlan a kapacitás, és tetszőleges sok vevőt ki tudunk szolgálni egymással párhuzamosan.

A fejezet hátralevő részében az $M/G/1/1$ rendszerrel foglalkozunk. Néhány további jelölés és feltevés:

- λ az $X_1, X_2, \ldots$ exponenciális eloszlású változók közös paramétere.

- A vevők érkezési időpontja: $T_n = X_1 + \cdots + X_n$, $n \geq 0$.

- Az érkező vevőket számoló Poisson-folyamat: $(N_t)_{t\geq 0}$.
- A rendszer mérete (length) a $t\geq 0$ időpontban: L_t.
- A hátralévő munka (work) a $t\geq 0$ időpontban: W_t.
- A rendszerben üres és nem üres időtartamok követik egymást. A nem üres időtartamok hossza a vevők kiszolgálási ideje, tehát $Y_1, Y_2, \dots$ Jelölje $\xi_1, \xi_2, \dots$ azon időtartamok hosszát, amikor a rendszer üres!

15.1. Állítás. *Az $M/G/1/1$ rendszerben teljesülnek az alábbi tulajdonságok:*

(i) $\xi_1, Y_1, \xi_2, Y_2, \dots$ *független véletlen változók;*

(ii) $\xi_1, \xi_2, \dots$ *exponenciális eloszlást követnek λ paraméterrel.*

15.2. Következmény. *A rendszer rezetelődik minden egyes kiszolgált vevő távozásakor, ami dolgot jelent:*

- *egyrészt az eloszlásbeli tulajdonságokat tekintve a távozás után a rendszer pontosan úgy viselkedik, mintha a $t=0$ időpontban lennénk;*
- *másrészt a távozás utáni viselkedés független a távozás előtti eseményektől.*

Bizonyítás (15.1. Állítás). A rendszer az üres állapotból indul, és az első vevő X_1 idő múlva érkezik, tehát $\xi_1 = X_1$. Ez azt jelenti, hogy ξ_1 és Y_1 függetlenek egymástól és az $X_2, Y_2, X_3, Y_3, \dots$ változóktól. Tekintsük a következő számláló folyamatokat:

$$N'_t = N_{X_1+t} - N_{X_1}\,, \qquad N''_t = N_{X_1+Y_1+t} - N_{X_1+Y_1}\,, \qquad t\geq 0\,.$$

Vegyük észre, hogy $(N'_t)_{t\geq 0}$ az $X_2, X_3, \dots$ változók által definiált Poisson-folyamat! Ebből következik, hogy ez a folyamat független X_1-től és az összes kiszolgálási időtől. Jegyezzük meg továbbá, hogy

$$N''_t = N'_{Y_1+t} - N'_{Y_1}\,, \qquad t\geq 0\,.$$

Ekkor a 4.1. Állítás értelmében $(N''_t)_{t\geq 0}$ egy olyan Poisson-folyamat, mely független az Y_1 kiszolgálási időtől. Természetesen ez a folyamat független az $X_1, Y_2, Y_3, \dots$ változóktól is, hiszen $(N'_t)_{t\geq 0}$ és Y_1 is független volt. Foglaljuk össze, hogy mit kaptunk:

- $\xi_1, Y_1, Y_2, \dots$ függetlenek egymástól és az $(N''_t)_{t\geq 0}$ folyamattól;
- $(N''_t)_{t\geq 0}$ egy λ intenzitású Poisson-folyamat, tehát a ξ_2 változó szintén exponenciális eloszlást követ λ paraméterrel.

A fenti gondolatmenetet meg tudjuk ismételni az összes kiszolgált vevőre, amiből már következik az állítás. $\square$

A továbbiakban legyen $Z_n = \xi_n + Y_n$, $n = 1,2,\dots$ Ez előző állítás értelmében $Z_1, Z_2, \dots$ független és azonos eloszlású változók és $Z_1 = X_1 + Y_1$. Jelölje M_t a kiszolgátl vevők számát a $t\geq 0$ időponttal bezárólag. Ekkor $(M_t)_{t\geq 0}$ a $Z_1, Z_2, \dots$ felújítások közötti idők által definiált felújítási folyamat.

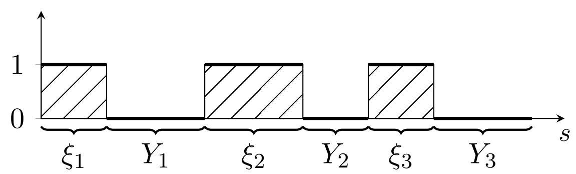
15.3. Állítás. *Az $M/G/1/1$ rendszerben az üres állapot hosszútávú időaránya*

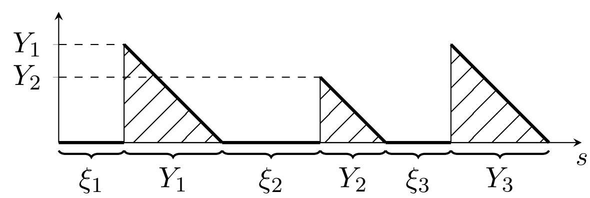
$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{1}_{\{L_s=0\}}\, ds = \frac{E(X_1)}{E(X_1)+E(Y_1)} \qquad m.b.$$

Ha $E(Y^2)<\infty$, akkor az átlagos hátralévő munka

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t W_s\, ds = \frac{1}{2}\frac{E(Y_1^2)}{E(X_1)+E(Y_1)} \qquad m.b.$$

Bizonyítás. Az alábbi grafikonokon az $\mathbb{1}_{\{L_s=0\}}$ illetve a W_s folyamat van ábrázolva:





Az első ábrán az egyes téglalapok területe $\xi_1, \xi_2, \ldots$ Tetszőleges $t\geq 0$ esetén

$$\xi_1+\cdots+\xi_{M_t} \leq \int_0^t \mathbb{1}_{\{L_s=0\}}\, ds \leq \xi_1+\cdots+\xi_{M_t+1}\,.$$

A 3.6. Tétel (i) pontját és a nagy számok erős törvényét alkalmazva következik, hogy 1 valószínűséggel

$$\frac{\xi_1+\cdots+\xi_{M_t}}{t} = \frac{M_t}{t}\frac{\xi_1+\cdots+\xi_{M_t}}{M_t} \to \frac{1}{E(Z_1)}E(\xi_1)\,, \qquad t\to\infty\,,$$

és

$$\frac{\xi_1+\cdots+\xi_{M_t+1}}{t} = \frac{M_t+1}{t}\frac{\xi_1+\cdots+\xi_{M_t+1}}{M_t+1} \to \frac{1}{E(Z_1)}E(\xi_1)\,, \qquad t\to\infty\,.$$

Ekkor a rendőr elvből kapjuk, hogy

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{1}_{\{L_t=0\}}\, dt \to \frac{E(\xi_1)}{E(Z_1)} = \frac{E(X_1)}{E(X_1)+E(Y_1)}\,, \qquad t\to\infty\,.$$

A második ábrán a háromszögek területe rendre $Y_1^2/2, Y_2^2/2, \ldots$, vagyis

$$\frac{Y_1^2}{2}+\cdots+\frac{Y_{M_t}^2}{2} \leq \int_0^t W_s\, ds \leq \frac{Y_1^2}{2}+\cdots+\frac{Y_{M_t+1}^2}{2}\,.$$

Ismét a 3.6. Tétel (i) pontját és a nagy számok erős törvényét alkalmazzuk, amikből következik, hogy 1 valószínűséggel

$$\frac{Y_1^2/2+\cdots+Y_{M_t}^2/2}{t} = \frac{M_t}{t}\frac{Y_1^2/2+\cdots+Y_{M_t}^2/2}{M_t} \to \frac{1}{E(Z_1)}E\big(Y_1^2/2\big)\,, \qquad t\to\infty\,,$$

és

$$\frac{Y_1^2/2+\cdots+Y_{M_t+1}^2/2}{t}=\frac{M_t+1}{t}\frac{Y_1^2/2+\cdots+Y_{M_t+1}^2/2}{M_t+1}\to\frac{1}{E(Z_1)}E\big(Y_1^2/2\big)\,,\qquad t\to\infty\,.$$

Ezekből a rendőr elv segítségével jön, hogy

$$\frac{1}{t}\int_0^t W_s\,ds\to\frac{E(Y_1^2/2)}{E(Z_1)}=\frac{1}{2}\frac{E(Y_1^2)}{E(X_1)+E(Y_1)}\,,\qquad t\to\infty\,.\qquad\square$$

15.4. Állítás. *Ha $E(Y^2)<\infty$, akkor az $M/G/1/1$ rendszerben a hátralévő munka várható értékére*

$$\lim_{t\to\infty}E(W_t)=\frac{1}{2}\frac{E(Y_1^2)}{E(X_1)+E(Y_1)}\,.$$

Bizonyítás. Vezessük be az $A(t)=E(W_t)$, $t\geq 0$, függvényt! Ekkor a teljes várható érték tételével kapjuk, hogy

$$A(t)=E[W_t]=\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}E\big[W_t\mid X_1=x,Y_1=y\big]F_{X_1,Y_1}(dx,dy)\,,\qquad t\geq 0\,.\tag{29}$$

A 15.1. Állítás szerint a rendszer rezetelődik az X_1+Y_1 időpontban, ezért

$$E\big[W_t\mid X_1=x,Y_1=y\big]=\begin{cases}0\,, & t<x\,,\\ x+y-t\,, & x\leq t<x+y\,,\\ E\big[W_{t-(x+y)}\big]\,, & t\geq x+y\,.\end{cases}$$

Ekkor a (29) formulát a következő módon tudjuk folytatni:

$$A(t)=\int_{\{(x,y):x\leq t<x+y\}}(x+y-t)\,F_{X_1,Y_1}(dx,dy)+\int_{\{(x,y):x+y\leq t\}}A(t-x-y)F_{X_1,Y_1}(dx,dy)\,.$$

Jelölje $a(t)$ a jobb oldal első tagját az előző egyenlőségben! A második tag a következő módon írható át:

$$\begin{aligned}\int_{\{(x,y):x+y\leq t\}}A(t-x-y)F_{X_1,Y_1}(dx,dy)&=\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}A(t-x-y)\mathbb{1}_{\{x+y\leq t\}}F_{X_1,Y_1}(dx,dy)\\&=E\Big[A\big(t-X_1-Y_1\big)\mathbb{1}_{\{X_1+Y_1\leq t\}}\Big]=E\Big[A\big(t-Z_1\big)\mathbb{1}_{\{Z_1\leq t\}}\Big]\\&=\int_{\mathbb{R}}A(t-z)\mathbb{1}_{\{z\leq t\}}F_{Z_1}(dz)=\int_{[0,t]}A(t-z)\,dF_{Z_1}(z)\,.\end{aligned}$$

Ilyen módon a következő felújítási egyenlethez jutunk:

$$A(t)=a(t)+\int_{[0,t]}A(t-z)\,dF_{Z_1}(z)\,,\qquad t\geq 0\,.\tag{30}$$

Ahhoz, hogy alkalmazni tudjuk a felújítási egyenletre vonatkozó tételeket, először szebb alakra kell hoznunk az a függvényt. Most X_1 és Y_1 függetlenek és X_1 exponenciális eloszlást követ, ezért, ezért

$$F_{X_1,Y_1}(dx,dy) = F_{X_1}(dx)F_{Y_1}(dy) = \lambda e^{-\lambda x}\,dx\,dF_{Y_1}(y)\,, \qquad x,y \geq 0\,.$$

Ekkor a Fubini-tétel alkalmazásával a következő kifejezést kapjuk:

$$\begin{aligned} a(t) &= \int_{\{(x,y):x\leq t\}} (x+y-t)\,dF_{X_1,Y_1}(x,y) - \int_{\{(x,y):x+y\leq t\}} (x+y-t)\,dF_{X_1,Y_1}(x,y) \\ &= \int_0^\infty \int_0^t (x+y-t)\lambda e^{-\lambda x}\,dx\,dF_{Y_1}(y) - \int_0^t \int_{[0,t-y]} (x+y-t)\,\lambda e^{-\lambda x}\,dx\,dF_{Y_1}(y)\,. \end{aligned} \tag{31}$$

Az előző formulában az első tag szépen kiszolható:

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \int_0^t (x+y-t)\lambda e^{-\lambda x}\,dx\,dF_{Y_1}(y) = \int_0^\infty \left[\left[1-e^{-\lambda t}\right]\left[\frac{1}{\lambda}+y\right]-t\right] dF_{Y_1}(y) \\ &= \int_0^\infty \left[F_{X_1}(t)\big[E(X_1)+y\big]-t\right] dF_{Y_1}(y) = F_{X_1}(t)\big[E(X_1)+E(Y_1)\big]-t\,. \end{aligned}$$

A második tagra a következő kifejezést kapjuk:

$$\begin{aligned} \int_{[0,t]}\int_0^{t-y} (x+y-t)\lambda e^{-\lambda x}\,dx\,dF_{Y_1}(y) &= \int_{[0,t]} \left[\frac{1}{\lambda}\big[1-e^{-\lambda(t-y)}\big]-(t-y)\right] dF_{Y_1}(y) \\ &= \int_{[0,t]} \Big[E(X_1)F_{X_1}(t-y)-(t-y)\Big]\,dF_{Y_1}(y) \\ &= E(X_1)\int_{[0,t]} F_{X_1}(t-y)\,dF_{Y_1}(y) - \int_{[0,t]} t\,dF_Y(y) + \int_{[0,t]} y\,dF_{Y_1}(y) \\ &= E(X_1)\big(F_{X_1}\star F_{Y_1}\big)(t) - tF_{Y_1}(t) + \int_{[0,t]} y\,dF_{Y_1}(y) \\ &= E(X_1)F_{Z_1}(t) - tF_{Y_1}(t) + E(Y_1) - \int_t^\infty y\,dF_{Y_1}(y)\,. \end{aligned}$$

Ha a kapott eredményeket visszaírjuk a (31) formulába, majd rendezzük a tagokat, akkor azt kapjuk, hogy

$$a(t) = E(X_1)\big[F_{X_1}(t)-F_{Z_1}(t)\big] - t\big[1-F_{Y_1}(t)\big] - E(Y_1)\big[1-F_{X_1}(t)\big] + \int_t^\infty y\,dF_{Y_1}(y)\,. \tag{32}$$

Az a függvény túl bonyolultnak tűnik ahhoz, hogy a 6.2. Tételt alkalmazzuk, tehát nem fogunk explicit formulát felírni az $A(t) = E(W_t)$, $t \geq 0$, függvényre. Ehelyett a 6.7. Tétel segítségével az A függvény határértékét fogjuk meghatározni. Az előző állításban már láttuk, hogy Z_1 nem aritmetikus eloszlású, továbbá ellenőrizhető, hogy most a 6.7. Tétel többi feltétele is teljesül. A feladatunk az $\int_0^\infty a(t)dt$ integrál kiszámolása. Ehhez egyesével fogjuk integrálni a (32) formulában szereplő tagokat. A 8.2. Következmény alkalmazásával a második és a harmadik tag integrálja:

$$\int_0^\infty t\big[1-F_{Y_1}(t)\big]\,dt=\frac{E(Y_1^2)}{2}\,,\qquad \int_0^\infty E(Y_1)\big[1-F_{X_1}(t)\big]\,dt=E(Y_1)E(X_1)\,.$$

Hasonló módon tudunk elbánni az első taggal is:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty E(X_1)\big[F_{X_1}(t)-F_{Z_1}(t)\big]\,dt&=E(X_1)\int_0^\infty \big[1-F_{Z_1}(t)\big]\,dt-E(X_1)\int_0^\infty \big[1-F_{X_1}(t)\big]\,dt\\&=E(X_1)E(Z_1)-E(X_1)E(X_1)=E(X_1)E(Y_1)\,.\end{aligned}$$

Végül a Fubini-tétel segítségével a negyedik tag integrálja:

$$\int_0^\infty\int_t^\infty y\,dF_{Y_1}(y)\,dt=\int_0^\infty\int_0^y y\,dt\,dF_{Y_1}(y)=\int_0^\infty y^2\,dF_{Y_1}(y)=E(Y_1^2)\,.$$

A (32) formulából és a fenti eredményekből azt kapjuk, hogy

$$\int_0^\infty a(t)\,dt=E(X_1)E(Y_1)-\frac{E(Y_1^2)}{2}-E(Y_1)E(X_1)+E(Y_1^2)=\frac{E(Y_1^2)}{2}\,.$$

Ekkor a 6.7. Tétel alkalmazásával már következik, hogy

$$A(t)\to\frac{1}{E(Z_1)}\int_0^\infty a(t)\,dt=\frac{1}{E(X_1)+E(Y_1)}\frac{E(Y_1^2)}{2}\,,\qquad t\to\infty\,.$$

Ez éppen a bizonyítandó konvergencia. □

16. Gyakorló feladatok

1. Legyenek M és N pozitív egész értékű véletlen változók, és tekintsük változóknak egy $X_1,X_2,\dots$ sorozatát. Mutassuk meg, hogy teljesülnek az alábbi tulajdonságok!

- **a.** Ha $N\equiv n$ valamely n pozitív egész számra, akkor N megállási idő a sorozatra nézve.
- **b.** Ha N megállási idő a sorozatra nézve, akor $N+k$ is megállási idő tetszőleges k pozitív egész szám esetén.
- **c.** Ha M és N megállási idők a sorozatra nézve, akkor $\min(M,N)$ és $\max(M,N)$ is megállási idő.

2. Legyenek $X_1,X_2,\dots$ független és azonos eloszlású változók, melyekre

$$P(X_n=0)=P(X_n=1)=1/2\,,\qquad n=1,2,\dots$$

Legyen továbbá $N=\min\{n\ge 2: X_n=1\}-1$.

a. Az N változó független az $X_1, X_2, \ldots$ sorozattól? Esetleg megállási idő a sorozatra nézve?

b. Határozzuk meg az $E(N)$ és $E(X_1+\cdots+X_N)$ várható értékeket! Teljesül ebben az esetben a Wald-azonosság egyenlősége?

3. Bizonyítsuk be a 2.2. Állítást!

4. Konstruáljunk meg egy olyan számláló folyamatot, melynél $P(\tau<\infty)=1/2$. (A τ változó a felrobbanás időpontját jelöli.)

5. Tekintsünk egy olyan $(N_t)_{t\geq 0}$ felújítási folyamatot, melyre $E(X)\in(0,\infty)$. Rögzítsünk egy $t\geq 0$ időpontot!

a. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $k\geq 1$ egész esetén $N=N_t+k$ megállási idő az $X_1, X_2, \ldots$ sorozatra nézve. Ennek segítségével adjuk meg a T_{N_t+k} változó várható értékét!

b. Ugyanezzel a módszerrel meg tudjuk határozni T_{N_t} várható értékét is?

6. Legyen M egy geometriai eloszlású változó $p\in(0,1)$ paraméterrel, továbbá legyenek

$$X_n = \begin{cases} 1\,, & n\leq M\,, \\ 2\,, & n>M\,, \end{cases} \qquad n=1,2,\ldots$$

Jelölje $(N_t)_{t\geq 0}$ az $X_1, X_2, \ldots$ sorozat által definiált számláló folyamatot! Tetszőleges $t\geq 0$ esetén adjuk meg az N_t változó eloszlását, továbbá írjuk fel az m várható érték függvényt!

7. Egy gyárban az egyik berendezés időnként magától leáll. A szerelő 60 percenként néz rá a gépre, és ha leállt, akkor újraindítja. A gép egy óra alatt a korábbiaktól függetlenül $p\in(0,1)$ valószínűséggel áll le újra. Jelölje N_t azt, hogy a szerelő hányszor indította újra a berendezést a $t\geq 0$ időponttal bezárólag. (A gép a $t=0$ időpontban működött, nem kellett újraindítani.)

a. Mutassuk meg, hogy $(N_t)_{t\geq 0}$ felújítási folyamat! Határozzuk meg a felújítások közötti idők eloszlását és a felújítási időpontok eloszlását!

b. Adjuk meg az N_t véletlen változó eloszlását, és írjuk fel a felújítási függvényt!

8. Zoli bácsinak van egy régi elemes rádiója, mindig azon hallgatja a Kossuthot. Amikor az elem lemerül, Zoli bácsi azonnal kicseréli azt egy ugyanolyan típusú új elemre. Feltehető, hogy az elemek élettartamai egyenletes eloszlást követnek 8 és 12 óra között és függetlenek egymástól. Egy új elem 200 forintba kerül.

a. Jelölje N_t azt, hogy Zoli bácsi hányszor cserélt elemet a rádióban a t időponttal bezárólag! Mit állíthatunk az N_t folyamatról és az $E(N_t)$ várható értékről, amint $t\to\infty$?

b. Jelölje S_t azt, hogy Zoli bácsi hány forintot költött elemekre a t időponttal bezárólag! Az első elemet a rádióval kapta, azért nem kellett külön fizetnie. Mit mondhatunk az S_t változóról és az $E(S_t)$ várható értékről $t \to \infty$ esetén?

9. Egy autószerelő műhelyben egy-egy autó órákban számolt javítási ideje $\lambda = 2$ paraméteres exponenciális eloszlást követ. A szerelő egyszerre csak egy autón dolgozik, de az autók folyamatosan jönnek, tehát a műhelyben mindig van munka. Feltehető, hogy az egyes autók javítási idejei függetlenek egymástól. Jelölje N_t azt, hogy a szerelő hány autó javítását fejezte be a $t \geq 0$ időpontig!

a. Adjunk explicit formulát az $E(N_t)$ várható értékre! Mit állíthatunk az N_t folyamatról és az $E(N_t)$ függvényről, amint $t \to \infty$?

b. Ha egy autó javítási ideje legfeljebb 1 óra, akkor a szerelő 1000 forintot kér a munkáért. Ha a javítási idő nagyobb, mint 1 óra, akkor a szerelő 1000 forintos órabér szerint számláz. Átlagosan mennyibe kerül az autók javítása?

c. Tegyük fel, hogy a tulajdonosok a helyszínen megvárják az autójuk javítását, és a munka végén azonnal fizetnek! Jelölje S_t a műhely teljes bevételét a $[0, t]$ intervallumon! Mennyi az egy órára jutó hosszú távú átlagos bevétel, tehát mekkora a $\lim_{t \to \infty} S_t / t$ határérték?

10. Egy repülőgép két város, A és B között ingázik oda-vissza. A szélirány miatt a gép a két irányban eltérő idő alatt tudja megtenni az utat. Az A városba menet az út időtartama egyenletes eloszlást követ 10 és 12 óra között, visszafelé pedig az időtartam egyenletes eloszlást követ 8 és 10 óra között. Ezek az időtartamok teljesen függetlenek egymástól.

a. Átlagosan mennyi ideig tart megtenni egy teljes fordulót?

b. Jelölje N_t azt, hogy a repülőgép hány fordulót tett meg t-edik órával bezárólag! Mit állíthatunk az N_t folyamatról és az $E(N_t)$ várható értékről, amint $t \to \infty$?

c. Jelölje S_t azt, hogy a gép összesen mennyi időt töltött az A-ba vezető úton a t-edig órával bezárólag. (Csak a befejezett fordulókat vegyük figyelembe!) Mit állíthatunk az S_t változóról és az $E(S_t)$ várható értékről, ha $t \to \infty$.

d. Hosszú távon a gép az időnek mekkora hányadában repül az A város felé?

11. Egy boltba független és azonos eloszlású, exponenciális időközönként érkeznek vevők, óránként átlagosan 10. Legyen $(N_t)_{t \geq 0}$ a vevőket számláló folyamat.

a. A nyitás után várhatóan mennyi idő elteltével érkezik meg a harmadik vevő? Hány perc a szórása az érkezési időnek? Mennyi annak a valószínűsége, hogy a harmadik vevő fél órán belül megérkezik?

b. Mi annak a valószínűsége, hogy az első 1 órában nem jön vevő? Várhatóan hány vevő érkezik a nyitást követő 1 óra alatt?

c. Mekkora valószínűséggel fog a nyitást követő 2 és 4 között legfeljebb 3 vevő érkezni? Mennyi a vevők számának a várható értéke?

d. Milyen valószínűséggel fog az első órában pontosan 5, majd 2 és 4 óra között pontosan 10 vevő érkezni? Mekkora eséllyel fog 2 és 3 óra között pontosan 5, továbbá 2 és 4 óra között pontosan 10 vevő érkezni?

e. Tegyük fel, hogy az első órában 5 vevő érkezett érkezett. Adjuk meg a 2 és 4 óra között érkezett vevők számának feltételes eloszlását és feltételes várható értékét. Mennyi annak az esélye, hogy 2 és 4 között pontosan 10 vevő érkezik?

f. Tegyük fel, hogy az első órában 5 vevő érkezett érkezett. Adjuk meg a nyitás utáni első 2 órában érkezett vevők számának feltételes eloszlását és feltételes várható értékét.

12. Tekintsünk egy $(N_t)_{t\geq 0}$ felújítási folyamatot, ahol $P(X=0)<1$. A megfelelő regularitási feltételek mellett adjuk meg az alábbi határértékeket!

a. Teljes élettartam: $\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^s X_{N_s+1}ds$.

b. A rendszer kora: $\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^s (t-T_{N_s})ds$.

13. Tekintsük az alábbi G függvény által generált μ_G Lebesgue–Stieltjes-mértéket! Határozzuk meg μ_G atomjait, illetve az atomok mértékét! Mennyi a $[-1,1]$ és a $[0,1]$ halmaz mértéke? Számoljuk ki az $\int_{-\infty}^{\infty} x dG(x)$ integrál értékét!

a.

$$G(x)=\exp(-|x|)\,,\quad x\in\mathbb{R}\,.$$

b.

$$G(x)=\begin{cases} x^2\,, & 0<x\leq 1\,,\\ 1\,, & \text{egyébként.}\end{cases}$$

c.

$$G(x)=\begin{cases} \{x\}\,, & x\geq 0\,,\\ 0\,, & x<0\,.\end{cases}$$

14. **a.** Legyenek μ és ν (nem előjeles) mértékek a valós egyenesen, továbbá tetszőleges $B\subseteq\mathbb{R}^2$ esetén jelölje B' a B halmaznak az $x=y$ egyenesre vett tükörképét! Mutassuk meg, hogy ekkor $\mu\times\nu(B)=\nu\times\mu(B')$ minden B Borel-halmazra.

b. Legyenek $G,H:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ monoton növekvő és càdlàg függvények, és tekintsünk $a,b\geq 0$ valós számokat. Mutassuk meg, hogy ekkor $\mu_{aG+bH}=a\mu_G+b\mu_H$.

c. Legyenek $G,H:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ càdlàg függvények, melyek korlátos változásúak a véges intervallumokon, továbbá tekintsünk a és b valós számokat. Mutassuk meg, hogy ekkor $\mu_{aG+bH}=a\mu_G+b\mu_H$.

15. Tekintsünk egy $(N_t)_{t\geq 0}$ felújítási folyamatot, ahol $P(X=0)<1$. Megfelelő feltételek mellett adjuk meg az alábbi határértékeket! Mi a gyakorlati jelentése ezen határértékeknek?

a. $\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t X_{N_s+1}ds$.

b. $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t (s - T_{N_s}) ds$.

c. $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{1}_{\{X_{N_s+1} > x\}} ds, \quad x > 0$.

16. Tekintsünk egy $(N_t)_{t\geq 0}$ felújítási folyamatot, ahol $P(X=0)<1$. Írjunk fel felújítási egyenleteket az alább definiált $A(t)$, $t\geq 0$, függvényre, és adjunk explicit formulát az egyenlet megoldására! Megfelelő matematikai feltételek mellett határozzuk meg a $\lim_{t\to\infty} A(t)$ határértéket! Ellenőrizzük le az A függvény lokálisan korlátosságát is! Mit mindhatunk az A függvényről abban az esetben, ha $(N_t)_{t\geq 0}$ Poisson-folyamat?

a. $A(t) = E(T_{N_t+1})$.

b. $A(t) = E(T_{N_t})$.

c. $A(t) = E(X_{N_t+1})$.

d. $A(t) = P(X_{N_t+1} > y)$, ahol $y \geq 0$ rögzített.

e. $A(t) = E(N_t^2)$.

17. Adjunk példát olyan felújítási folyamatra, hogy $P(X=0)<1$ és $E(X^2)<\infty$, de az $E(R_t)$ várható érték nem konvergens, amint $t\to\infty$.

18. Legyenek X és Z független véletlen változók, továbbá tekintsünk a és b valós konstansokat! Mutassuk meg, hogy ha a $Z=aX+b$ egyenlőség 1 valószínűséggel teljesül, akkor X és Z degenerált (konstans) változók.