Pénzügyi folyamatok folytonos időben

Kevei Péter

2014. március 4.

Tartalomjegyzék

Előszó

A jegyzet a Szegedi Tudományegyetem Alkalmazott matematika MSc szakos hallgatói számára tartott Pénzügyi és kockázati folyamatok c. tárgy pénzügyi matematika részéhez készült.

A tárgy keretében a diszkrét idejű értékpapírpiacok elméletét Gáll József és Pap Gyula *Bevezetés a pénzügyi matematikába* c. jegyzetének Opcióelmélet fejezete alapján tárgyaljuk. Jelen jegyzet a folytonos idejű piaci modellek elméletét tartalmazza. A sztochasztikus integrál elméletének kiépítésekor Karatzas és Shreve [4] jegyzetét követjük. Azonban egy heti 2 órás tárgynál nem jut idő a sztochasztikus integrálás általános elméletének kiépítésére. Emiatt a bizonyításokat általában csak speciális esetben végezzük, és nem tetszőleges folytonos martingál, hanem csak a Wiener-folyamat, ill. Itô-folyamatok szerinti integrálást vezetjük be. Ugyanakkor hangsúlyozzuk, hogy a legtöbb tétel bizonyítása szerepel a jegyzetben. A pénzügyi matematika résznél sok helyen Elliott és Kopp *Pénzpiacok matematikája* [3] c. könyvét követjük, a diffúziós folyamatokat pedig Breiman [1] jegyzete alapján tárgyaljuk. A diszkrét idejű martingálok felépítését Csörgő Sándor [2] jegyzetéből vettük át.

A jegyzet írása a TÁMOP 4.2.4.A/2-11-1-2012-0001 Nemzeti Kiválóság Program című kiemelt projekt keretében zajlott. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.

1. Martingálok

1.1. Diszkrét időben

Ebben a fejezetben összefoglaljuk a diszkrét idejű martingálokra vonatkozó legfontosabb állításokat. Csörgő Sándor jegyzetét [2] követjük.

1.1.1. Definíciók, alapvető tulajdonságok

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ egy valószínűségi mező, és ezen $(\mathcal{F}_n)_n$ egy *filtráció* (azaz σ-algebrák monoton bővülő rendszere, $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1} \subset \ldots \subset \mathcal{A}$), és $(X_n)_n$ véletlen változók sorozata. Az $(X_n)_n$ sorozat *adaptált* az $(\mathcal{F}_n)$ filtrációhoz, ha minden n esetén X_n mérhető $\mathcal{F}_n$ szerint. Az $(X_n, \mathcal{F}_n)$ sorozat *martingál*, ha

(i) (X_n) adaptált az $(\mathcal{F}_n)$ filtrációhoz;

(ii) $\mathbf{E}|X_n| < \infty$ minden n esetén;

(iii) $\mathbf{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n$ m.b.

Az $\{X_n, \mathcal{F}_n\}$ sorozat *szubmartingál (szupermartingál)*, ha (i), (ii) teljesül, és $\mathbf{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \geq X_n$ ($\mathbf{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \geq X_n$) m.b. minden n esetén.

Vegyük észre, hogy $(X_n, \mathcal{F}_n)$ pontosan akkor martingál, ha szubmartingál és szupermartingál. Továbbá, szubmartingál mínusz egyszerese szupermartingál, ezért minden szubmartingálokra bizonyított állítás megfelelője igaz szupermartingálokra, és martingálokra is.

1. Állítás. *Legyen I véges vagy végtelen intervallum a számegyenesen, $\mathbf{P}\{X_n \in I\} = 1$ minden n esetén, $\varphi : I \to \mathbb{R}$ konvex függvény, $\varphi(X_n)$ integrálható.*

(i) Ha $(X_n, \mathcal{F}_n)$ martingál, akkor $(\varphi(X_n), \mathcal{F}_n)$ szubmartingál.

(ii) Ha $(X_n, \mathcal{F}_n)$ szubmartingál és φ monoton nemcsökkenő függvény, akkor $(\varphi(X_n), \mathcal{F}_n)$ szubmartingál.

Bizonyítás. (i): A martingál definíciója és a feltételes várható értékre vonatkozó Jensen-egyenlőtlenség szerint

$$\varphi(X_n) = \varphi\left(\mathbf{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]\right) \leq \mathbf{E}\left[\varphi(X_{n+1})|\mathcal{F}_n\right],$$

ami éppen az állítás. A (ii) bizonyítása hasonlóan megy. □

Feladat. Lássuk be (ii) állítást!

Véletlen változók egy (Z_n) sorozata *előrejelezhető* az $(\mathcal{F}_n)$ filtrációra nézve, ha minden n esetén Z_{n-1} mérhető $\mathcal{F}_n$ szerint.

Doob-felbontás. *Legyen $(X_n, \mathcal{F}_n)$ szubmartingál, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. Ekkor létezik (M_n, Z_n) sorozat, melyre $(M_n, \mathcal{F}_n)$ martingál, $Z_1 = 0$, $Z_1 \leq Z_2 \leq \dots$ m.b., és Z_n előrejelezhető. Továbbá, ez az előállítás egyértelmű.*

Az állítás azt mondja, hogy a szubmartingálban benne levő driftet le tudjuk választani.

Bizonyítás. Legyen $Z_1 = 0$ m.b., és $n \geq 2$ esetén $Z_n = \sum_{k=2}^{n} \mathbf{E}[X_k - X_{k-1}|\mathcal{F}_{k-1}]$. A szubmartingál definíciója szerint Z_n m.b. monoton nemcsökkenő, hiszen

$$Z_n - Z_{n-1} = \mathbf{E}[X_n - X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] \geq 0 \text{ m.b.}$$

Az előrejelezhetőség is világos. (Ezzel leválasztottuk a driftet.) Legyen $M_n = X_n - Z_n$. Könnyen ellenőrizhető, hogy ez valóban martingál. Ezzel a létezést beláttuk.

Az egyértelműség bizonyítása a következőképp megy. Legyen $\{M_n^*, Z_n^*\}$ egy, a feltételeknek eleget tevő sorozat. Ekkor a feltétel szerint $Z_1^* = 0 = Z_1$ m.b. Teljes indukcióval bizonyítunk. Tegyük fel, hogy $n-1$ esetén igaz az állítás, azaz $Z_{n-1}^* = Z_{n-1}$ m.b., és $M_{n-1}^* = M_{n-1}$ m.b. Ekkor

$$\begin{aligned}
Z_n^* &= \mathbf{E}[Z_n^*|\mathcal{F}_{n-1}] \quad \text{előrejelezhetőség} \\
&= \mathbf{E}[X_n - M_n^*|\mathcal{F}_{n-1}] \quad \text{definíció} \\
&= \mathbf{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] - M_{n-1}^* \quad \text{martingálság} \\
&= \mathbf{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] - M_{n-1} \quad \text{indukciós feltétel} \\
&= \mathbf{E}[X_n - M_n|\mathcal{F}_{n-1}] \quad \text{martingálság} \\
&= \mathbf{E}[Z_n|\mathcal{F}_{n-1}] \quad \text{definíció} \\
&= Z_n \quad \text{előrejelezhetőség.}
\end{aligned}$$

□

A (Z_n) folyamat az $(X_n, \mathcal{F}_n)$ martingál *növekvő folyamata.*

1.1.2. Megállási idő

A $\tau : \Omega \to \mathbb{N}$ nemnegatív egész értékű (kiterjesztett) véletlen változó *megállási idő* az $(\mathcal{F}_n)$ filtrációra nézve, ha minden n esetén $\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$.

Vegyük észre, hogy a definícióban megengedjük, hogy τ pozitív valószínűséggel vegye fel a ∞ értéket.

1. Lemma. *Az alábbiak ekvivalensek:*

(i) τ *megállási idő;*

(ii) $\{\tau > n\} \in \mathcal{F}_n$ *minden* n *esetén;*

(ii) $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$ *minden* n *esetén.*

Bizonyítás. A bizonyítás a σ-algebra elemi tulajdonságain múlik. □

Feladat. Bizonyítsuk be a lemmát!

Legyen τ megállási idő az $\{\mathcal{F}_n\}$ filtrációra. A τ *előtti események* σ-*algebrája / pre-*τ σ*-algebra* az

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{A} : \, A \cap \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n, \forall n\}$$

formulával definiált σ-algebra.

Feladat. Mutassuk meg, hogy $\mathcal{F}_\tau$ valóban σ-algebra!

Az $\mathcal{F}_\tau$ σ-algebra azt információt tartalmazza, amit éppen a τ megállási időig gyűjtünk össze.

Legyen $\{X_n\}$ véletlen változók egy sorozata, τ megállási idő. Ekkor X_τ az a véletlen változó, melyre $X_\tau(\omega) = X_{\tau(\omega)}(\omega)$, $\omega \in \Omega$.

2. Állítás.

(i) Ha τ *megállási idő, akkor* τ *mérhető* $\mathcal{F}_\tau$ *szerint.*

(ii) Ha $\tau \equiv k$*, akkor* $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_k$ *(azaz a jelölés konzisztens).*

(iii) Ha σ, τ *megállási idők, akkor* $\min\{\sigma, \tau\} = \sigma \wedge \tau$ *és* $\max\{\sigma, \tau\} = \sigma \vee \tau$ *is megállási idők.*

(iv) Ha $\sigma \leq \tau$ *m.b., akkor* $\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_\tau$*.*

(v) Ha $\{X_n\}$ *adaptált és* τ *megállási idő, akkor* X_τ *mérhető* $\mathcal{F}_\tau$ *szerint.*

Bizonyítás. A σ-algebra tulajdonságain múlik. □

Feladat. Bizonyítsuk be az állítást!

1.1.3. Tételek

Opcionális megállási tétel (Doob). *Legyen* $(X_n, \mathcal{F}_n)$ *szubmartingál,* σ, τ *megállási idők,* $\sigma \leq \tau$ *m.b. Tegyük fel, hogy* $\mathbf{E}|X_\sigma| < \infty$, $\mathbf{E}|X_\tau| < \infty$ *és* $\liminf_{n\to\infty} \int_{\{\tau>n\}} |X_n| \mathrm{d}\mathbf{P} = 0$. *Ekkor* $\mathbf{E}[X_\tau|\mathcal{F}_\sigma] \geq X_\sigma$ *m.b.*

A tétel feltételei mellett, ha $\{X_n, \mathcal{F}_n\}$ martingál, akkor $\mathbf{E}[X_\tau|\mathcal{F}_\sigma] = X_\sigma$ m.b.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy τ korlátos, $\tau \leq m$. A szubmartingál és a feltételes várható érték definíciója szerint azt kell megmutatnunk, hogy minden $A \in \mathcal{F}_\sigma$ eseményre

$$\int_A (X_\tau - X_\sigma) \, \mathrm{d}\mathbf{P} \geq 0.$$

Írjuk át az integrandust

$$X_\tau - X_\sigma = \sum_{k=\sigma+1}^{\tau} (X_k - X_{k-1}) = \sum_{k=2}^{m} I(\sigma < k \leq \tau)(X_k - X_{k-1})$$

alakba. Vegyük észre, hogy $A \cap \{\sigma < k \leq \tau\} = (A \cap \{\sigma \leq k-1\}) \cap \{\tau \leq k-1\}^c$. Itt a metszet első tagja $\mathcal{F}_\sigma$ definíciója szerint $\mathcal{F}_{k-1}$-mérhető, a második tagja pedig a megállási idő definíciója szerint, így a metszet maga is elem az $\mathcal{F}_{k-1}$ σ-algebrának. Ezt, feltételes várható érték és a szubmartingál definícióját használva

$$\begin{aligned}
\int_A (X_\tau - X_\sigma) \mathrm{d}\mathbf{P} &= \int_A \sum_{k=2}^{m} I(\sigma < k \leq \tau)(X_k - X_{k-1}) \mathrm{d}\mathbf{P} \\
&= \sum_{k=2}^{m} \int_{A \cap \{\sigma < k \leq \tau\}} (X_k - X_{k-1}) \mathrm{d}\mathbf{P} \\
&= \sum_{k=2}^{m} \int_{A \cap \{\sigma < k \leq \tau\}} (\mathbf{E}[X_k|\mathcal{F}_{k-1}] - X_{k-1}) \, \mathrm{d}\mathbf{P} \geq 0,
\end{aligned}$$

ami éppen a bizonyítandó.

Az általános esetben a τ, σ megállási időkről át kell térni a $\tau \wedge n$, $\sigma \wedge n$ korlátos megállási időkre, és belátni, hogy a kimaradó tagok 0-hoz tartanak egy részsorozat mentén. Ezt nem bizonyítjuk, a részletekért lásd [2]. □

1. Következmény. *Ha* $\mathbf{E}|X_\tau| < \infty$ *és* $\liminf_{n\to\infty} \int_{\{\tau>n\}} |X_n| \mathrm{d}\mathbf{P} = 0$, *akkor ha* *(i)* $\{X_n, \mathcal{F}_n\}$ *szubmartingál, akkor* $\mathbf{E}[X_\tau|\mathcal{F}_1] \geq X_1$ *m.b., és persze* $\mathbf{E}X_\tau \geq \mathbf{E}X_1$*;*

(ii) $\{X_n, \mathcal{F}_n\}$ *martingál, akkor* $\mathbf{E}[X_\tau|\mathcal{F}_1] = X_1$ *m.b., és persze* $\mathbf{E}X_\tau = \mathbf{E}X_1$*.*

Fontos megjegyezni, hogy a tételben szereplő feltételek nem csupán technikai feltételek. Legyen S_n egy egyszerű szimmetrikus bolyongás az egyenesen. Ő martingál a az általa generált természetes filtrációra nézve. Tudjuk, hogy az egydimenziós bolyongás rekurrens, ezért majdnem biztosan eléri az 1-et. Legyen az elérés időpontja τ. Ekkor τ megállási idő, és persze $S_\tau \equiv 1 \neq S_0 = 0$. Csak a $\liminf_{n\to\infty} \int_{\{\tau>n\}} |X_n| \mathrm{d}\mathbf{P} = 0$ feltétellel lehet baj, és valóban, ez nem teljesül.

Doob maximál egyenlőtlensége. *Legyen* $(X_k, \mathcal{F}_k)$ *szubmartingál és legyen* $M_n = \max_{1\leq k\leq n} X_k$*. Ekkor tetszőleges* $k > 0$ *esetén*

$$x\mathbf{P}\{M_n \geq x\} \leq \int_{\{M_n \geq x\}} X_n \mathrm{d}\mathbf{P} \leq \mathbf{E}X_n^+,$$

ahol $a^+ = \max\{a, 0\}$ *az* $a \in \mathbb{R}$ *szám pozitív részét jelöli.*

Bizonyítás. A második egyenlőtlenség nyilvánvaló, hiszen a bal oldalon X_n változót integráljuk egy halmazon, a jobb oldalon pedig ugyanezt a változót integrálom ott, ahol az pozitív.

Legyen $\sigma_n = \min\{k : X_k \geq x, k = 1, 2, \ldots, n\} \vee n$. Ekkor σ_n megállási idő (HF), és persze $\sigma_n \leq n$. Vegyük észre, hogy $\{M_n \geq x\} \in \mathcal{F}_{\tau_n}$. Az opcionális megállási tételt használjuk a $\sigma = \sigma_n$, $\tau = n$ szereposztással. Így

$$x\mathbf{P}\{M_n \geq x\} \leq \int_{\{M_n \geq x\}} X_{\sigma_n} \mathrm{d}\mathbf{P} \leq \int_{\{M_n \geq x\}} X_n \mathrm{d}\mathbf{P},$$

ahol az első egyenlőtlenség a σ_n definíciója miatt, a második pedig az opcionális megállási tétel miatt teljesül. Ezzel a tételt beláttuk. □

2. Következmény. *Ha* $(X_k, \mathcal{F}_k)$ *szubmartingál és* $x > 0$*, akkor*

$$\mathbf{P}\{\sup_n X_n \geq x\} \leq \frac{1}{x} \sup_n \mathbf{E}X_n^+.$$

Bizonyítás. Használjuk az előző tételt a monoton konvergenciatétellel kombinálva. □

Feladat. Bizonyítsuk be az állítást!

A maximál egyenlőtlenség következményeként belátjuk, hogy ha a szubmartingálra teljesül bizonyos integrálfeltétel, akkor a szuprémumra is. Ehhez szükségünk lesz az alábbi lemmára. Vegyük észre, hogy az lemmában szereplő egyenlőtlenség pontosan olyan típusú, mint amit a maximál egyenlőtlenség állít.

2. Lemma. *Legyenek X, Y nemnegatív véletlen változók, melyekre*

$$\mathbf{P}\{X \geq x\} \leq \frac{1}{x} \int_{\{X \geq x\}} Y \mathrm{d}\mathbf{P}, \quad x > 0.$$

Ekkor tetszőleges $p > 1$ esetén

$$\mathbf{E}X^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbf{E}Y^p.$$

Bizonyítás. Felhasználjuk, hogy nemnegatív X változó esetén

$$\mathbf{E}X^p = \int_0^\infty px^{p-1}[1 - F(x)]\mathrm{d}x.$$

Ez a Fubini-tétel egyszerű alkalmazásával igazolható, hiszen

$$\begin{aligned}\mathbf{E}X^p &= \int_\Omega X^p \mathrm{d}\mathbf{P} = \int_\Omega \int_0^\infty I_{\{x<X(\omega)\}}(x) px^{p-1} \mathrm{d}x \mathrm{d}\mathbf{P}(\omega) \\ &= \int_0^\infty px^{p-1}[1 - F(x)]\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Az állítás bizonyítása is hasonló, csak még a Hölder-egyenlőtlenséget is felhasználjuk:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}X^p &= \int_0^\infty px^{p-1}\mathrm{d}x \\
&\le \int_0^\infty px^{p-1}\frac{1}{x}\int_{\{X\ge x\}} Y(\omega)\mathrm{d}\mathbf{P}(\omega)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty \int_\Omega px^{p-2} I(X(\omega)\ge x)Y(\omega)\mathrm{d}\mathbf{P}(\omega)\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega Y(\omega)\left(\int_0^{X(\omega)} px^{p-2}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\mathbf{P}(\omega) \\
&= \int_\Omega YX^{p-1}\frac{p}{p-1}\mathrm{d}\mathbf{P} \\
&\le \frac{p}{p-1}\left(\mathbf{E}Y^p\right)^{1/p}\left(\mathbf{E}X^{(p-1)q}\right)^{1/q} \\
&= \frac{p}{p-1}\left(\mathbf{E}Y^p\right)^{1/p}\left(\mathbf{E}X^p\right)^{1/q},
\end{aligned}$$

ahol p és q konjugált kitevők, azaz $1/p + 1/q = 1$. Az egyenlőtlenséget átrendezve kapjuk az állítást. $\square$

3. Következmény.

(i) Legyen $(X_k, \mathcal{F}_k)_{k=1}^n$ nemnegatív szubmartingál. Ekkor minden $p > 1$ esetén

$$\mathbf{E}M_n^p \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbf{E}X_n^p.$$

(ii) Legyen $\{X_k, \mathcal{F}_k\}$ nemnegatív szubmartingál. Ekkor minden $p > 1$ esetén

$$\mathbf{E}\sup_n X_n^p \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup_n \mathbf{E}X_n^p.$$

Mindkét állítást a $p = 2$ speciális esetben alkalmazzuk. A (ii) pont szerint ha valamely $p > 1$ esetén $\sup_n \mathbf{E}X_n^p < \infty$ akkor $\mathbf{E}\sup_n X_n^p < \infty$. Fontos látni, hogy ez nem igaz a $p = 1$ esetben, azaz $\sup_n \mathbf{E}X_n < \infty$ feltételből *nem következik*, hogy $\mathbf{E}\sup_n X_n < \infty$. (Vegyük észre, hogy $p/(p-1) \to \infty$ amint $p \to 1$.)

Martingál konvergenciatétel (Doob). *Legyen $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n=1}^\infty$ szub- vagy szupermartingál, melyre $K = \sup_n \mathbf{E}|X_n| < \infty$. Ekkor van olyan X véletlen változó, hogy $X_n \to X$ m.b., és $\mathbf{E}|X| \le K$.*

A tételt nem bizonyítjuk, a bizonyítás megtalálható [2] jegyzetben.

1.2. Folytonos időben

A folytonos idejű martingálok elméletét Karatzas és Shreve [4] jegyzete alapján dolgozzuk fel úgy, hogy ahol lehet a mértékelméleti bonyodalmakat elhallgatjuk, vagy éppen csak megemlítjük.

1.2.1. Definíciók és egyszerű tulajdonságok

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mező, és $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ egy filtráció, vagyis σ-algebrák monoton növő sorozata. Ezen a ponton az időhorizont lehet véges vagy végtelen, azaz $t \in [0, T]$ vagy $t \in [0, \infty)$.

A továbbiakban *mindig* feltesszük, hogy az $(\mathcal{F}_t)_t$ filtráció teljesíti a *szokásos feltételeket*, azaz

(i) $\mathcal{F}_0$ tartalmazza a $\mathbf{P}$-null halmazokat;

(ii) $(\mathcal{F}_t)_t$ jobbról folytonos, azaz $\cap_{s>t}\mathcal{F}_s =: \mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t$.

A következő definíciók a diszkrét időben látottak folytonos idejű megfelelői.

Az $(X_t)_t$ folyamat $(\mathcal{F}_t)_t$-adaptált, ha X_t mérhető $\mathcal{F}_t$ szerint minden $t \geq 0$ esetén. Az $(X_t, \mathcal{F}_t)_t$ folyamat *martingál*, ha

(i) az $(X_t)_t$ folyamat $(\mathcal{F}_t)_t$ adaptált;

(ii) $\mathbf{E}|X_t| \leq \infty$ minden $t \geq 0$ esetén;

(iii) $\mathbf{E}[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s$ m.b. minden $t > s$ esetén.

Az $(X_t, \mathcal{F}_t)_t$ *szubmartingál (szupermartingál)*, ha (i) és (ii) teljesül, valamint (iii) teljesül az $=$ helyett $\geq$-t ($\leq$-t) írva.

A $\tau : \Omega \to [0, \infty)$ véletlen változó *megállási idő* az $\{\mathcal{F}_t\}_t$ filtrációra nézve, ha minden $t \geq 0$ esetén $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. A τ előtti események *pre-τ σ-algebrájában* azok az $A \in \mathcal{A}$ események vannak, melyekre $A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ teljesül, minden $t \geq 0$ esetén.

Feladat. A pre-τ σ-algebra tényleg σ-algebra.

Ha $(X_t)_t$ sztochasztikus folyamat és τ egy megállási idő, akkor $X_\tau(\omega) = X_{\tau(\omega)}(\omega)$. (Ez a definíció nem csak megállási időre működik.)

A következő állítás nyilvánvaló, a definíció azonnali következménye. Viszont nagyon fontos, a későbbiekben többször használjuk.

3. Állítás. *Legyen $(X_t, \mathcal{F}_t)_t$ (szub-, szuper-) martingál. Ekkor tetszőleges $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_N < \infty$ beosztás esetén $(X_{t_n}, \mathcal{F}_{t_n})_{n=0}^N$ diszkrét idejű (szub-, szuper-) martingál.*

A következő állítás az előbb bevezetett fogalmakra vonatkozó egyszerű tulajdonságokat gyűjti össze, mint diszkrét időben.

4. Állítás.

(i) *Ha τ megállási idő, akkor τ mérhető $\mathcal{F}_\tau$ szerint.*

(ii) *Ha $\tau \equiv t$, akkor $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_t$.*

(iii) *Ha τ, σ megállási idők, akkor $\tau \vee \sigma$ és $\tau \wedge \sigma$ is azok.*

(iv) *Ha $\sigma \leq \tau$ m.b., akkor $\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_\tau$.*

(v) *Ha az $\{X_t\}_t$ folyamat $\{\mathcal{F}_t\}_t$-adaptált és jobbról folytonos, akkor X_τ $\mathcal{F}_\tau$-mérhető.*

Feladat. Bizonyítsuk be a fenti állításokat!

Megjegyzés. Folytonos időben minden bonyolultabb, mint diszkrét időben, a mérhetőséggel is vigyázni kell.

Az $(X_t)_t$ folyamat $(\mathcal{F}_t)_t$-*adaptált*, ha X_t mérhető $\mathcal{F}_t$-re nézve, $t \geq 0$. Az $(X_t)_t$ (d-dimenziós) folyamat *progresszív mérhető* $(\mathcal{F}_t)_t$-re, ha minden $t \geq 0$ és $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ esetén

$$\{(s, \omega) : \ s \leq t, \ X_s(\omega) \in A\} \in \mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t,$$

ahol $\mathcal{B}$ a Borel-halmazokat jelöli a megfelelő alaphalmazon, $\otimes$ pedig a szorzat-σ-algebra. A későbbiekben a folyamat adaptáltsága nem lesz elég, a progresszív mérhetőség kell. Ez persze mindenütt el van kenve.

Állítás. *Ha $(X_t)_t$ adaptált és jobbról folytonos, akkor $(X_t)_t$ progresszív mérhető.*

Valójában az előző állítás (v) pontja helyett a következő, erősebb állítás is igaz (és ez az amit használunk).

(v') Ha $(X_t)_t$ $(\mathcal{F}_t)_t$-adaptált és jobbról folytonos, τ megállási idő, akkor az $(X_{\tau \wedge t})_t$ megállított folyamat progresszív mérhető.

1.2.2. Egyenlőtlenségek

A következő tétel a diszkrét idejű Doob-féle maximál egyenlőtlenség folytonos megfelelője.

1. Tétel. *Legyen $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ jobbról folytonos szubmartingál.*

(i) Tetszőleges $0 < S < T < \infty$, $x > 0$ *esetén*

$$x\mathbf{P}\{\sup_{S \le t \le T} X_t \ge x\} \le \mathbf{E}X_T^+.$$

(ii) Ha $X_t \ge 0$ *m.b. és* $p > 1$, *akkor*

$$\mathbf{E}\left(\sup_{S \le t \le T} X_t\right)^p \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbf{E}X_T^p.$$

Bizonyítás. (i): Legyen $F_n = \{S, T\} \cup \{r_1, \ldots, r_n\}$, ahol $\{r_1, r_2, \ldots\} = \mathbb{Q} \cap (S, T)$ az (S, T) racionális számainak egy felsorolása. Legyen $y < x$ rögzített. Mivel $\{X_t, \mathcal{F}_t\}_{t \in F_n}$ diszkrét idejű szubmartingál, ezért Doob maximál egyenlőtlensége szerint

$$y\mathbf{P}\{\sup_{t \in F_n} X_t > y\} \le \mathbf{E}X_T^+.$$

A jobbról folytonosság miatt

$$\{\sup_{S \le t \le T} X_t > y\} = \cup_{n=1}^{\infty}\{\sup_{t \in F_n} X_t > y\},$$

és az unió monoton unió. Határátmenettel kapjuk, hogy

$$y\mathbf{P}\{\sup_{S \le t \le T} X_t > y\} \le \mathbf{E}X_T^+.$$

Végül $y \uparrow x$ adja az állítást.

A (ii) rész hasonlóan bizonyítható, vagy használhatjuk a diszkrét esetnél felhasznált lemmát. □

Feladat. Bizonyítsuk be (ii) állítást!

Megjegyzés. Legyen $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t \in [0,\infty)}$ jobbról folytonos szubmartingál. A szubmartingálnak *utolsó eleme az* X_∞ *véletlen változó*, ha X_∞ mérhető az $\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\cup_{t \ge 0} \mathcal{F}_t\right)$ σ-algebrára, $\mathbf{E}|X_\infty| < \infty$ és minden $t \ge 0$ esetén $\mathbf{E}[X_\infty|\mathcal{F}_t] \ge X_t$ m.b.

Az, hogy egy szubmartingálnak van utolsó eleme, az egy egyenletes integrálhatósági feltétel. Mi mindig valamilyen véges $[0, T]$, $T < \infty$, intervallumon dolgozunk. Itt értelmezett (X_t) szubmartingálnak definíció szerint van utolsó eleme, nevezetesen X_T, ezért ez a feltétel a későbbiekben nem okoz gondot.

Opcionális megállási tétel. *Legyen* $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *jobbról folytonos szubmartingál, melynek van* X_∞ *utolsó eleme. Legyenek* σ, τ *megállási idők, hogy* $\sigma \leq \tau$ *m.b. Ekkor*

$$\mathbf{E}[X_\tau|\mathcal{F}_\sigma] \geq X_\sigma \quad m.b.$$

Bizonyítás. Vázlat. Tegyük fel, hogy τ korlátos, $\tau \leq K$. Legyen $\sigma_n(\omega) = k/2^n$, ha $\sigma(\omega) \in [(k-1)/2^n, k/2^n)$, és definiáljuk τ_n-et hasonlóan. Ekkor σ_n és τ_n megállási idők minden n-re. Alkalmazzuk a diszkrét idejű opcionális megállási tételt az $\{X_{k/2^n}, \mathcal{F}_{k/2^n}\}$ szubmartingálra és a σ_n, τ_n megállási időkre. Eszerint tetszőleges $A \in \mathcal{F}_{\sigma_n}$ eseményre

$$\mathbf{E}[X_{\tau_n}|\mathcal{F}_{\sigma_n}] \geq X_{\sigma_n} \quad \text{m.b.},$$

vagyis $\int_A X_{\tau_n} \mathrm{d}\mathbf{P} \geq \int_A X_{\sigma_n} \mathrm{d}\mathbf{P}$. Mivel $\sigma_n \geq \sigma$ minden n esetén, így $\mathcal{F}_{\sigma_n} \supset \mathcal{F}_\sigma$. Ezért minden $A \in \mathcal{F}_\sigma$ eseményre $\int_A X_{\tau_n} \mathrm{d}\mathbf{P} \geq \int_A X_{\sigma_n} \mathrm{d}\mathbf{P}$. A jobbról folytonosság miatt $X_{\tau_n} \to X_\tau$ és $X_{\sigma_n} \to X_\sigma$ m.b. Az egyenletes integrálhatóságot használva innen (némi munkával) kapjuk, hogy

$$\int_A X_\tau \mathrm{d}\mathbf{P} \geq \int_A X_\sigma \mathrm{d}\mathbf{P},$$

és ezt kellett igazolni. □

Feladat. Mutassuk meg, hogy a tétel bizonyításában definiált σ_n, τ_n véletlen változók tényleg megállási idők!

A szubmartingál konvergenciatételt a diszkrét időben sem bizonyítottuk, és most sem.

Szubmartingál konvergenciatétel. *Legyen* $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *jobbról folytonos szubmartingál, melyre* $\sup_{t\geq 0} \mathbf{E}X_t^+ < \infty$*. Ekkor* $\lim_{t\to\infty} X_t = X_\infty$ *m.b. határérték létezik, és* $\mathbf{E}|X_\infty| < \infty$*.*

A következőkben a Doob-felbontás folytonos analógját ismertetjük, bizonyítás nélkül.

Megjegyzés. A folytonos idejű felbontás nem teljesül tetszőleges szubmartingálra, bizonyos egyenletes integrálhatósági feltételt kell feltenni.

Véletlen változók egy $\mathcal{D}$ halmaza *egyenletesen integrálható*, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz megadható egy $K > 0$ érték, hogy minden $X \in \mathcal{D}$ esetén

$$\int_{|X|>K} |X| \mathrm{d}\mathbf{P} < \varepsilon.$$

Jelölje $\mathcal{S}_a$ azon τ megállási idők halmazát, melyek 1 valószínűséggel kisebbek, mint a . Ha minden $a > 0$ esetén az $\{X_\tau\}_{\tau\in\mathcal{S}_a}$ véletlen változók halmaza egyenletesen integrálható, akkor $(X_t) \in \mathrm{DL}$.

Doob–Meyer felbontás. *Legyen $(X_t, \mathcal{F}_t)_t$ jobbról folytonos szubmartingál, melyre $(X_t) \in DL$. Ekkor léteznek $\{M_t\}$ és $\{A_t\}$ folyamatok, hogy (M_t) martingál, (A_t) m.b. monoton nemcsökkenő adaptált folyamat, $X_t = M_t + A_t$, $t \geq 0$. Továbbá, az előállítás egyértelmű.*

A tételt nem bizonyítjuk. A bizonyítás alapötlete ugyanaz, mint az eddigieknél: vesszük egy egyre finomodó beosztását az időnek, alkalmazzuk a Doob-felbontást diszkrét időben, és belátjuk, hogy a határátmenet jól működik. Lásd [4] 1. fejezetét.

Ha Y_t martingál, akkor Y_t^2 szubmartingál, és így tartozik hozzá egy monoton növő A_t folyamat. Ezt az A_t folyamatot az Y_t martingál *monoton növő folyamatának* nevezzük. Jele $\langle Y\rangle_t$.

2. Sztochasztikus integrál

A sztochasztikus integrálelméletet alapvetően a [4] jegyzet alapján dolgozzuk fel. Azonban itt minden nagyon általánosan és precízen van kidolgozva. A mérhetőségi problémákat teljesen kihagyjuk, a lokális martingálokat nem definiáljuk, és csak a Wiener-folyamat szerinti sztochasztikus integrált vezetjük be, nem pedig általános folytonos martingál szerintit. Ennek megfelelően a tételek bizonyítása általában nem a [4] jegyzetben szereplő, hanem az általunk tárgyalt speciális esethez igazított bizonyítás. Sok állítás és bizonyítás Elliott és Kopp [3] jegyzetéből való.

2.1. Wiener-folyamat

Ebben a részben összefoglaljuk a Wiener-folyamat legfontosabb tulajdonságait.

A $(W_t)_{t\geq 0}$ sztochasztikus folyamat *Wiener-folyamat / Standard Brown Mozgás (SBM)*, ha

(w1) $W_0 = 0$ m.b.;

(w2) független növekményű (azaz tetszőleges $0 \geq t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ esetén $W_{t_0}, W_{t_1} - W_{t_0}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ függetlenek);

(w3) $W_t - W_s \sim \mathrm{N}(0, t - s)$;

(w4) mintafolytonos (azaz $\mathbf{P}(\{\omega : W_t(\omega)$ folytonos függvénye t-nek$\}) = 1$).

A későbbiekben $\{\mathcal{F}_t\}$ a Wiener-folyamathoz tartozó természetes filtráció, azaz $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s : s \le t)$.

A következő állításban a Wiener-folyamat néhány egyszerű tulajdonságát soroljuk fel.

5. Állítás.

(i) $\mathrm{Cov}(W_t, W_s) = s \vee t$;

(ii) $Y_1(t) = W_{t+c} - W_c$, $Y_2(t) = \sqrt{c}W_{t/c}$, $Y_3(t) = tW_{1/t}$ *is SBM.*

(iii) W_t, $W_t^2 - t$, $\mathrm{e}^{\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t}$ *folyamatok martingálok az* $\{\mathcal{F}_t\}$ *filtrációra.*

Bizonyítás. (i) egyszerű számolás. (ii)-ben Y_1 és Y_2 folyamatokra egyszerűen ellenőrizhető, hogy (w1)–(w4) teljesül. Az Y_3 folyamatnál másképp érvelünk: ez nyilván Gauss-folyamat, és a várható érték és kovariancia függvénye megegyezik a Wiener-folyamat megfelelő függvényeivel. Mivel a várható érték és kovariancia függvény egyértelműen meghatározza a Gauss-folyamatot, így Y_3 is SBM.

(iii) Megmutatjuk, hogy $X_t = \exp\{\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t\}$ martingál, a másik kettő bizonyítása hasonló, csak ennél egyszerűbb. Legyen $0 < s < t$. Ekkor

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[\exp\{\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t\}|\mathcal{F}_s\right] &= \mathbf{E}\left[\exp\{\sigma W_s\}\cdot\exp\{\sigma(W_t - W_s) - \frac{\sigma^2}{2}t\}|\mathcal{F}_s\right] \\ &= \mathrm{e}^{\sigma W_s - \frac{\sigma^2}{2}t}\,\mathbf{E}\mathrm{e}^{\sigma(W_t - W_s)},\end{aligned}$$

hiszen W_s mérhető $\mathcal{F}_s$-re, ezért kihozható a feltételes várható értékből, és $W_t - W_s$ pedig független $\mathcal{F}_s$-től, így a feltételes várható értéke éppen a várható értéke. Egy Z standard normális momentumgeneráló függvénye $\mathbf{E}\mathrm{e}^{tZ} = \mathrm{e}^{t^2/2}$, és (w3) alapján $W_t - W_s = \sqrt{t-s}Z$ eloszlásban, így a fenti kiemelt egyenlőség

$$= \mathrm{e}^{\sigma W_s - \frac{\sigma^2}{2}t}\,\mathrm{e}^{\frac{\sigma^2}{2}(t-s)} = \mathrm{e}^{\sigma W_s - \frac{\sigma^2}{2}s},$$

és éppen ezt kellett igazolni. □

Feladat. Lássuk be részletesen a fenti állítás minden pontját!

Mivel $\{W_t\}$ martingál, ezért $\{W_t^2\}$ szubmartingál. A Doob–Meyer-felbontás szerint így $W_t^2 = M_t + A_t$ alakban előáll, ahol M_t martingál, A_t pedig monoton nemcsökkenő. A fenti állítás (iii) pontja szerint $W_t^2 - t$ martingál, ezek szerint, (a Doob–Meyer-felbontás egyértelműsége alapján) $M_t = W_t^2 - t$ és $A_t = t$. Ebben az esetben a monoton növő rész determinisztikus.

A következő tételben a Wiener-folyamat négyzetes változását határozzuk meg.

2. Tétel. *Legyen* $\Pi_n = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$, $n = 1, 2, \ldots$, *az* $[a, b]$ *intervallum beosztásainak egy sorozata, hogy* $||\Pi_n|| \to 0$. *Ekkor*

$$\sum_{i=1}^{n} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 \xrightarrow{L^2} b - a.$$

Bizonyítás. Nyilván feltehetjük, hogy $[a, b] = [0, 1]$. Azt kell megmutatnunk, hogy

$$\mathbf{E} \left(\sum_{i=1}^{n} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 - 1 \right)^2 \longrightarrow 0.$$

Vegyük észre, hogy $1 = \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1})$. Ezt beírva, a négyzetre emelést elvégezve, és a várható érték linearitását felhasználva

$$\begin{aligned} &\mathbf{E} \left(\sum_{i=1}^{n} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 - 1 \right)^2 = \\ &\sum_{i,j=1}^{n} \mathbf{E} \left(\left[(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 - (t_i - t_{i-1}) \right] \left[(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})^2 - (t_j - t_{j-1}) \right] \right). \end{aligned} \tag{1}$$

Ha $i \neq j$, akkor $W_{t_i} - W_{t_{i-1}}$ és $W_{t_j} - W_{t_{j-1}}$ függetlenek (w2) alapján. Tehát ekkor a szorzat várható értéke a várható értékek szorzata, viszont

$$\mathbf{E} \left[(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 - (t_i - t_{i-1}) \right] = 0.$$

Ezért (1) jobb oldalán szereplő vegyesszorzatok értéke 0, és így felhasználva, hogy $W_t - W_s \sim \mathrm{N}(0, t - s)$ kapjuk

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left(\sum_{i=1}^{n} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 - 1 \right)^2 &= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E} \left[(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 - (t_i - t_{i-1}) \right]^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1})^2 \mathbf{E} \left[\left(\frac{W_{t_i} - W_{t_{i-1}}}{\sqrt{t_i - t_{i-1}}} \right)^2 - 1 \right]^2 \\ &= \mathbf{E}(Z^2 - 1)^2 \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1})^2, \end{aligned}$$

ahol Z standard normális. Mivel
$$\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1})^2 \leq ||\Pi_n|| \sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}) = ||\Pi_n|| \to 0,$$
az állítást beláttuk. □

Némi extra feltétel teljesülése mellett az L^2 konvergencia helyett majdnem biztos konvergenciát is állíthatunk.

Tudjuk, hogy L^2-beli konvergenciából általában nem következik a majdnem biztos konvergencia. Az viszont igaz, hogy L^2 értelemben konvergens sorozatnak van majdnem biztosan konvergens részsorozata. Ha Π_n egymásba skatulyázott beosztások sorozata, akkor $\sum_{i=1}^{n}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2$ monoton n-ben, így a részsorozaton vett m.b. konvergenciából következik, hogy a teljes sorozaton is m.b. konvergencia teljesül.

Egy másik elegendő feltétel a m.b. konvergenciára a $\sum_{n=1}^{\infty} ||\Pi_n||$ sor konvergenciája. Ez az első Borel–Cantelli-lemma bizonyításából következik.

4. Következmény. *Legyen Π_n az $[a, b]$ intervallum olyan beosztássorozata, melyre $\sum_{n=1}^{\infty} ||\Pi_n|| < \infty$, vagy Π_n egymásba skatulyázott. Ekkor $\sum_{i=1}^{n} |W_{t_i} - W_{t_{i-1}}| \to \infty$ m.b.*

Bizonyítás. Világos, hogy
$$\sum_{i=1}^{n}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 \leq \sup_{1\leq i\leq n} |W_{t_i} - W_{t_{i-1}}| \sum_{i=1}^{n} |W_{t_i} - W_{t_{i-1}}|.$$
Ez előbbiek szerint a bal oldal 1 valószínűséggel konvergál $(b-a)$-hoz, a jobb oldalon az első tényező pedig 1 valószínűséggel konvergál 0-hoz, hiszen a Wiener-folyamat 1 valószínűséggel folytonos, folytonos függvény pedig kompakt intervallumon egyenletesen folytonos. Ezek szerint az egyenlőtlenség csak úgy állhat fenn, ha a jobb oldalon levő második tényező végtelenben tart. Éppen ezt kellett belátni. □

Azaz a Wiener-folyamat egy valószínűséggel nem korlátos változású akármilyen kicsi intervallumon. Ennél sokkal erősebb állítás is igaz:

3. Tétel. *A Wiener-folyamat m.b. sehol sem differenciálható.*

A tételt Paley, Wiener és Zygmund igazolták 1933-ban, később Erdős és Kakutani adtak rá egyszerűbb bizonyítást. A bizonyítás megtalálható a [2] jegyzetben.

A trajektóriák irregularitása miatt az $\int X_t \mathrm{d}W_t$ típusú integrált nem tudjuk trajektóriánként értelmezni, mint a Lebesgue–Stieltjes-integrálok esetében.

2.2. A sztochasztikus integrál definíciója

Ebben a fejezetben bevezetjük a Wiener-folyamat szerinti integrálást. Mint a Riemann-, és a Lebesgue-féle integrálelméletben, itt is először az egyszerű folyamatok integrálját definiáljuk, majd határátmenettel általános esetben.

2.2.1. Egyszerű folyamatok integrálása

A következőkben a $[0, T]$, $T < \infty$, zárt intervallumon dolgozunk. Legyen W_t SBM az $\{\mathcal{F}_t\}$ filtrációra.

Az $\{X_t\}$ *egyszerű folyamat*, ha

$$X_t(\omega) = \xi_0(\omega) I_{\{0\}}(t) + \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i(\omega) I_{(t_i, t_{i+1}]}(t),$$

ahol $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ a $[0, T]$ intervallum egy partíciója, és ξ_i $\mathcal{F}_{t_i}$-mérhető véletlen változó.

Tehát az X_t egy olyan folyamat, amely minden egyes $\omega \in \Omega$ esetén egy $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ beosztáshoz tartozó lépcsős függvény, de a lépcsőfokok véletlenek. Vegyük észre, hogy a definícióban szereplő ξ_i változó az intervallum bal végpontjához tartozó σ-algebrára nézve mérhető. Ez fontos, emiatt lesz adaptált a folyamat. (Sőt, később a 1. Példában megmutatjuk, hogy nem mindegy, hogy hol nézzük a folyamat értékét.)

Feladat. Mutassuk meg, hogy egy egyszerű folyamat adaptált!

Egy egyszerű folyamat integrálját természetes definiálhatjuk. Legyen k olyan index, hogy $t \in (t_k, t_{k+1}]$, ekkor

$$I_t(X) = \int_0^t X_s \mathrm{d}W_s = \sum_{i=0}^{k-1} \xi(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) + \xi_k(W_t - W_{t_k}).$$

4. Tétel. *Legyenek X, Y egyszerű folyamatok.*

(i) $I_t(X)$ folytonos martingál, $I_0(X) = 0$ m.b.

(ii) Tetszőleges $t > s$ esetén

$$\mathbf{E}\left[\left(\int_s^t X_u \mathrm{d}W_u\right)^2 |\mathcal{F}_s\right] = \mathbf{E}\left[\int_s^t X_u^2 \mathrm{d}u|\mathcal{F}_s\right];$$

az $s = 0$ esetén $\mathbf{E}I_t(X)^2 = \mathbf{E}\int_0^t X_u^2 \mathrm{d}u$.

(iii) Az integrál lineáris, azaz

$$I(\alpha X + \beta Y) = \alpha I(X) + \beta I(Y), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

(iv) $\mathbf{E} \sup_{0 \le t \le T} \left(\int_0^t X_u \mathrm{d}W_u \right)^2 \le 4\mathbf{E} \int_0^T X_u^2 \mathrm{d}u.$

Bizonyítás. A (iii) állítás azonnal következik a definícióból (na jó, venni kell a két folyamathoz tartozó beosztások egy közös finomítását). A (iv)-es pont következik a Doob maximál egyenlőtlenségből, (ii)-ből és abból, hogy $I_t(X)$ martingál. Tehát maradt (i) és (ii).

(i) A folytonosság világos, és az is, hogy $I_0(X) = 0$ m.b. Belátjuk, hogy I_t martingál. Legyen $s < t$, és $s \in (t_k, t_{k+1}], t \in (t_m, t_{m+1}]$. Ekkor

$$\begin{aligned}\int_0^t X_u \mathrm{d}W_u = &\sum_{i=0}^{k-1} \xi_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) + \xi_k (W_s - W_{t_k}) \\ &+ \xi_k (W_{t_{k+1}} - W_s) + \sum_{i=k+1}^{m-1} \xi_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) + \xi_m (W_t - W_{t_m}).\end{aligned}$$

A jobb oldal első sorában szereplő változók mind $\mathcal{F}_s$ mérhetőek, és az összeg éppen $\int_0^s X_u \mathrm{d}W_u$. A második sorban szereplő tagokra pedig, $i \ge k+1$, a toronyszabály szerint

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[\xi_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) | \mathcal{F}_s] &= \mathbf{E}\left[\mathbf{E}[\xi_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) | \mathcal{F}_{t_i}] | \mathcal{F}_s \right] \\ &= \mathbf{E}\left[\xi_i \mathbf{E}[W_{t_{i+1}} - W_{t_i} | \mathcal{F}_{t_i}] | \mathcal{F}_s \right] \\ &= \mathbf{E}[\xi_i \cdot 0 | \mathcal{F}_s] = 0.\end{aligned}$$

Az első és az utolsó taggal ugyanígy kell elbánni. Ezzel beláttuk a martingálságot.

(ii) Legyen s, t mint az előbb. Láttuk, hogy

$$\int_s^t X_u \mathrm{d}W_u = \xi_k (W_{t_{k+1}} - W_s) + \sum_{i=k+1}^{m-1} \xi_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) + \xi_m (W_t - W_{t_m}).$$

Ezt négyzetre emelve, és feltételes várható értéket véve

$$\mathbf{E}[\xi_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \xi_j (W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) | \mathcal{F}_s]$$

alakú tagok összegét kapjuk (t, s esetén értelemszerűen módosítva). Megmutatjuk, hogy $i \neq j$ esetén ez $= 0$. Valóban, ha $i < j$, akkor ismét a toronyszabály alapján

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}[\xi_i(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})\xi_j(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})|\mathcal{F}_s] \\ &= \mathbf{E}\left[\mathbf{E}[\xi_i(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})\xi_j(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})|\mathcal{F}_{t_j}]|\mathcal{F}_s\right] = 0.\end{aligned}$$

Tehát a vegyesszorzatok várható értéke mind 0, és így

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\left[\left(\int_s^t X_u \mathrm{d}W_u\right)^2 |\mathcal{F}_s\right] \\ &= \mathbf{E}\left[\xi_k^2(W_{t_{k+1}} - W_s)^2 + \sum_{i=k+1}^{m-1} \xi_i^2(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 + \xi_m^2(W_t - W_{t_m})^2|\mathcal{F}_s\right].\end{aligned}$$

Egy tag várható értéke megint a toronyszabály szerint

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[\xi_i^2(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2|\mathcal{F}_s] &= \mathbf{E}\left[\mathbf{E}[\xi_i^2(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2|\mathcal{F}_{t_i}]\mathcal{F}_s\right] \\ &= \mathbf{E}[\xi_i^2(t_{i+1} - t_i)|\mathcal{F}_s] \\ &= \mathbf{E}\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} X_u^2 \mathrm{d}u|\mathcal{F}_s\right],\end{aligned}$$

ahol az utolsó egyenlőségnél X definícióját is használtuk. Összeget véve éppen a bizonyítandó egyenlőséget kapjuk. □

2.2.2. A definíció kiterjesztése

Egyszerű folyamatra definiáltuk az integrált. Ezután megmutatjuk, hogy általánosabb folyamatok közelíthetőek egyszerű folyamatokkal, és a sztochasztikus integrált folytonossági megfontolásokkal definiálhatjuk. Ha visszagondolunk, a Riemann-, és a Lebesgue-integrál definíciója is hasonlóan ment. A kiterjesztés kulcsa a (ii) tulajdonság, ami azt mutatja, hogy a sztochasztikus integrál, mint leképezés az adaptált folyamatok halmazából a folytonos martingálok halmazába, izometria.

Legyen

$$\mathcal{H} = \{(X_t) \ : \mathcal{F}_t - \text{adaptált, és } \mathbf{E} \int_0^T X_u^2 \mathrm{d}u < \infty\}.$$

Ezen $\mathcal{H}$-beli folyamatok osztályára terjesztjük ki a definíciót. Az alábbi lemma szerint ezek a folyamatok közelíthetőek egyszerű folyamatokkal.

3. Lemma. *Tetszőleges (X_t) $\mathcal{H}$-beli folyamathoz létezik $\{(X_t^n)\}_n$ egyszerű folyamatok sorozata, hogy*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E} \int_0^T (X_s - X_s^n)^2 \, \mathrm{d}s = 0.$$

Bizonyítás. Az állítást csak abban a speciális esetben bizonyítjuk, ha X folytonos és korlátos. Ekkor legyen

$$X_t^n(\omega) = X_0(\omega) I_{\{0\}}(t) + \sum_{k=0}^{2^n-1} X_{\frac{kT}{2^n}}(\omega) I_{(\frac{kT}{2^n}, \frac{(k+1)T}{2^n}]}(t).$$

Világos, hogy ezek egyszerű folyamatok, hiszen X adaptáltsága miatt $X_{kT/2^n}$ mérhető $\mathcal{F}_{kT/2^n}$ szerint. Mivel folytonos függvény kompakt halmazon egyenletesen is folytonos, így m.b.

$$\int_0^T |X_u^n - X_u|^2 \, \mathrm{d}t \to 0.$$

Mivel X korlátos, ezért Lebesgue majoráns konvergenciatétele szerint adódik az állítás. □

Legyen $X \in \mathcal{H}$, és $\{X^n\}_n$ a lemma szerinti sorozat. 4. Tétel (iv) szerint

$$\mathbf{E} \sup_{t\in[0,T]} \left(\int_0^t (X_u^n - X_u^m) \mathrm{d}W_u \right)^2 \le 4\mathbf{E} \int_0^T (X_u^n - X_u^m)^2 \mathrm{d}u.$$

A bal oldal $\to 0$, így létezik olyan $\{n_k\}$ részsorozat, hogy

$$\mathbf{E} \sup_{t\in[0,T]} \left(\int_0^t (X_u^{n_{k+1}} - X_u^{n_k}) \mathrm{d}W_u \right)^2 \le 2^{-k}. \tag{2}$$

Innen az első Borel–Cantelli-lemma alkalmazásával kapjuk, hogy

$$I(X^{n_k}) \to I(X), \text{ egyenletesen } [0,T]\text{-n m.b.}$$

Mivel $I(X^{n_k})$ folytonos, az egyenletes konvergenciából kapjuk, hogy $I(X)$ is folytonos. Azt kell még megmutatnunk, hogy $I(X)$ nem függ a részsorozattól. A (2) egyenlőtlenségben $m \to \infty$ határátmenettel adódik, hogy

$$\mathbf{E} \sup_{t\in[0,T]} (I_t(X) - I_t(X^n))^2 \le 4\mathbf{E} \int_0^T (X_u - X_u^n)^2 \mathrm{d}u,$$

ahonnan látjuk, hogy $I(X)$ valóban nem függ a részsorozattól.

Most megmutatjuk, hogy $I(X)$ martingál. Legyen $s < t$. Azt kell belátni, hogy $\mathbf{E}[I_t(X)|\mathcal{F}_s] = I_s(X)$ m.b. Tetszőleges n esetén

$$\|\mathbf{E}[I_t(X)|\mathcal{F}_s] - I_s(X)\|_{L^2} \leq \|\mathbf{E}[I_t(X) - I_t(X^n)|\mathcal{F}_s]\|_{L^2}$$
$$+ \|\mathbf{E}[I_t(X^n) - I_s(X^n)|\mathcal{F}_s]\|_{L^2} + \|I_s(X^n) - I_s(X)\|_{L^2},$$

ahol $\|X\|_{L^2} = \sqrt{\mathbf{E}X^2}$. A jobb oldalon álló összeg második tagja $= 0$, hiszen $I(X^n)$ martingál, az első és a harmadik tag pedig tetszőlegesen kicsivé tehető, ha n elég nagy. Tehát $I(X)$ valóban martingál.

Ezzel beláttuk, hogy $X \in \mathcal{H}$ esetén

$$I_t(X) = \int_0^t X_u \mathrm{d}W_u$$

sztochasztikus integrál definiálható, és teljesíti a 4. Tételben állított tulajdonságokat.

Megjegyezzük, hogy az integrál definíciója a $\mathcal{H}$ halmazról a bővebb

$$\mathcal{H}' = \{(X_t) \,:\, \mathcal{F}_t - \text{adaptált és } \int_0^T X_u^2 \mathrm{d}u < \infty \text{ m.b.}\}$$

halmazra is kiterjeszthető, és a 4. Tétel érvényben marad.

1. Példa. Az $\int_0^t W_s \mathrm{d}W_s$ közelítő összege. Rögzített $\varepsilon \in [0,1]$ esetén tekintsük az

$$S_\varepsilon(\Pi) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\varepsilon W_{t_{i+1}} + (1-\varepsilon) W_{t_i}\right) \left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right)$$

integrál közelítő összeget. Ha folytonos függvényt integrálunk, akkor tudjuk, hogy a Riemann-féle integrál közelítő összeg a Riemann-integrálhoz konvergál akárhogy is választjuk az osztópontot. A sztochasztikus integrálelméletben nem mindegy az osztópont választása. Megmutatjuk, hogy

$$\lim_{\|\Pi\| \to 0} S_\varepsilon(\Pi) \stackrel{L^2}{=} \frac{1}{2} W_t^2 + \left(\varepsilon - \frac{1}{2}\right) t. \tag{3}$$

Korábban már láttuk, hogy a $W_t^2 - t$ folyamat martingál, azaz a fenti limesz pontosan az $\varepsilon = 0$ esetben lesz martingál, ami éppen a bevezetett klasszikus Itô-féle integrálhoz tartozó közelítő összeg. A sztochasztikus integrálelméletben az $\varepsilon = 1/2$ a *Fisk–Stratonovich-féle integrált*, a $\varepsilon = 1$ pedig a *backward Itô integrált* adja. Tehát (3) alapján azt kapjuk, hogy

$$\int_0^t W_s \mathrm{d}W_s = \frac{W_t^2 - t}{2}.$$

Most rátérünk (3) bizonyítására. Mivel

$$\varepsilon W_{t_{i+1}} + (1-\varepsilon)W_{t_i} = \frac{W_{t_{i+1}} + W_{t_i}}{2} + \left(\varepsilon - \frac{1}{2}\right)\left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right),$$

ezért a

$$\sum_{i=0}^{n-1}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2, \quad \text{és} \quad \sum_{i=0}^{n-1}(W_{t_{i+1}}^2 - W_{t_i}^2)$$

összegek határértékét kell meghatároznunk. Az első ezek közül a Wiener-folyamat négyzetes változása (2. Tétel) szerint L^2-ben konvergál t-hez, míg a második összeg egy teleszkopikus összeg, értéke W_t^2. Ezzel beláttuk (1) formulát.

2. Példa. Legyen X egyszerű folyamat, W SBM. Legyen

$$\zeta_t^s(X) = \int_s^t X_u \mathrm{d}W_u - \frac{1}{2}\int_s^t X_u^2 \mathrm{d}u, \quad \zeta_t = \zeta_t^0.$$

Megmutatjuk, hogy $Y_t = \mathrm{e}^{\zeta_t}$ martingál.

Mivel X egyszerű folyamat, ezért

$$X_t = \xi_0 I_{\{0\}}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i I_{(t_i, t_{i+1}]}(t),$$

ahol ξ_i $\mathcal{F}_{t_i}$-mérhető. Így, ha $s \in (t_k, t_{k+1}]$, $t \in (t_m, t_{m+1}]$, akkor

$$\begin{aligned}\zeta_t^s =& \xi_k(W_{t_{k+1}} - W_s) - \frac{\xi_k^2}{2}(t_{k+1} - s) + \sum_{i=k+1}^{m-1}\left[\xi_i(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) - \frac{\xi_i^2}{2}(t_{i+1} - t_i)\right] \\ &+ \xi_m(W_t - W_{t_m}) - \frac{\xi_m^2}{2}(t - t_m).\end{aligned} \tag{4}$$

A ζ_s mérhető $\mathcal{F}_s$-szerint, így

$$\mathbf{E}[\mathrm{e}^{\zeta_t} | \mathcal{F}_s] = \mathrm{e}^{\zeta_s}\mathbf{E}[\mathrm{e}^{\zeta_t^s} | \mathcal{F}_s],$$

tehát a martingálsághoz azt kell igazolni, hogy

$$\mathbf{E}[\mathrm{e}^{\zeta_t^s} | \mathcal{F}_s] = 1.$$

Ezt a toronyszabály ismételt alkalmazásával látjuk be. A (4) összegben az utolsó tag kivételével mindenki $\mathcal{F}_{t_m}$-mérhető, és

$$\mathbf{E}\left[\exp\left\{\xi_m(W_t - W_{t_m}) - \frac{\xi_m^2}{2}(t-t_m)\right\}|\mathcal{F}_{t_m}\right]$$
$$= \mathrm{e}^{-\frac{\xi_m^2}{2}(t-t_m)}\mathbf{E}\left[\exp\{\xi_m(W_t - W_{t_m})\}|\mathcal{F}_{t_m}\right].$$

A jobb oldalon a második tényező kitevőjében ξ_m mérhető $\mathcal{F}_{t_m}$ szerint, a $W_t - W_{t_m}$ pedig független ettől a σ-algebrától, ezért (a precíz állításhoz ld. következő feladatot) a várható érték úgy számolható, mintha ξ_m érték konstans lenne. A standard normális karakterisztikus függvényének alakjából tudjuk, hogy

$$\mathbf{E}\mathrm{e}^{\lambda Z} = \mathrm{e}^{\frac{\lambda^2}{2}},$$

és mivel $W_t - W_{t_m} \sim \mathrm{N}(0, t-t_m)$, így

$$\mathbf{E}\left[\exp\{\xi_m(W_t - W_{t_m})\}|\mathcal{F}_{t_m}\right] = \mathrm{e}^{\frac{\xi_m^2}{2}(t-t_m)}.$$

Összegezve azt kaptuk, hogy

$$\mathbf{E}\left[\exp\{\xi_m(W_t - W_{t_m}) - \frac{\xi_m^2}{2}(t-t_m)\}|\mathcal{F}_{t_m}\right] = 1.$$

Ezután a toronyszabály ismételt alkalmazásával, előbb az $\mathcal{F}_{t_{m-1}}$, majd $\mathcal{F}_{t_{m-2}}$, ..., σ-algebrára véve a feltételes várható értéket egyesével lefejthetők a tényezők, és minden tényező értéke 1. Ezzel az állítást beláttuk.

Majd az Itô-formula segítségével általánosabb X folyamatok esetén is megmutatjuk, hogy Y egy martingál, és kielégít bizonyos sztochasztikus differenciálegyenletet.

Feladat. Az előző feladatban az maradt függőben, hogy ha X, Y olyan véletlen változók, hogy X mérhető a $\mathcal{G}$ σ-algebrára, Y pedig független tőle, akkor

$$\mathbf{E}[h(X,Y)|\mathcal{G}] = \int h(X,y)\mathrm{d}F(y),$$

ahol F az Y eloszlásfüggvénye.

2.3. Itô-formula

2.3.1. Itô-folyamatok

Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ valószínűségi mező, $(\mathcal{F}_t)$ filtráció, W_t SBM erre a filtrációra. Az (X_t) folyamat *Itô-folyamat*, ha

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s\mathrm{d}s + \int_0^t H_s\mathrm{d}W_s, \tag{5}$$

ahol

- X_0 $\mathcal{F}_0$-mérhető;
- K, H $\mathcal{F}_t$-adaptált folyamatok;
- $\int_0^T |K_u| \mathrm{d}u < \infty$, $\int_0^T H_s^2 \mathrm{d}s < \infty$ m.b.

Az $\int_0^t K_s \mathrm{d}s$ rész a folyamat korlátos változású része, az $\int_0^t H_s \mathrm{d}W_s$ pedig a folyamat martingál része. A következő lemma mutatja az elnevezés jogosságát.

4. Lemma. *Ha $M_t = \int_0^t K_s \mathrm{d}s$ folytonos martingál, ahol $\int_0^T |K_s| \mathrm{d}s < \infty$ m.b., akkor $M_t \equiv 0$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\int_0^T |K_s| \mathrm{d}s \leq C$ m.b., valamilyen C-re. Csak ebben az esetben bizonyítunk. Ekkor a $[0, T]$ intervallum egy tetszőleges $\Pi_n = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T\}$ beosztássorozatára

$$\begin{aligned}\mathbf{E} \sum_{i=0}^{n-1} (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 &\leq \mathbf{E} \sup_{0 \leq i \leq n-1} |M_{t_{i+1}} - M_{t_i}| \int_0^T |K_s| \mathrm{d}s \\ &\leq C\mathbf{E} \sup_{0 \leq i \leq n-1} |M_{t_{i+1}} - M_{t_i}| \to 0,\end{aligned}$$

amint $\|\Pi_n\| \to 0$ hiszen folytonos függvény kompakt halmazon egyenletesen is folytonos, ezért $\sup_{0 \leq i \leq n-1} |M_{t_{i+1}} - M_{t_i}| \to 0$ m.b., és a korlátosság miatt a Lebesgue majoráns konvergencia tétel adja az állítást.

Másrészt

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(M_t - M_s)^2 &= \mathbf{E}M_t^2 + \mathbf{E}M_s^2 - 2\mathbf{E}\left(\mathbf{E}[M_t M_s | \mathcal{F}_s]\right) \\ &= \mathbf{E}M_t^2 - \mathbf{E}M_s^2,\end{aligned}$$

$s < t$, ezért

$$\mathbf{E} \sum_{i=0}^{n-1} (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 = \mathbf{E}(M_t^2 - M_0^2) = \mathbf{E}M_t^2.$$

Az előzőek szerint tehát $\mathbf{E}M_t^2 = 0$ minden t-re, amiből következik az állítás. □

5. Következmény. *Az Itô-folyamatok (5) előállítása egyértelmű.*

Bizonyítás. Hát persze, ha

$$\int_0^t K_s \mathrm{d}s + \int_0^t H_s \mathrm{d}W_s = \int_0^t L_s \mathrm{d}s + \int_0^t G_s \mathrm{d}W_s,$$

akkor

$$\int_0^t (K_s - L_s)\mathrm{d}s = \int_0^t (G_s - H_s)\mathrm{d}W_s.$$

A jobb oldalon a sztochasztikus integrál tulajdonságai alapján egy folytonos martingál áll, ezért a bal oldal is az. Na de az előző lemma szerint ez csak a konstans 0 martingál lehet, amiből adódik az egyértelműség. □

A továbbiakban használni fogjuk a

$$\mathrm{d}X_t = K_t \mathrm{d}t + H_t \mathrm{d}W_t$$

jelölést. Hangsúlyozzuk, hogy ez csak egy jelölés, ami megkönnyíti a formalizmust, nem pedig definíció vagy állítás. Mi csak a Wiener-folyamat szerinti integrált vezettük be.

2.3.2. Az Itô-formula

Ezek után belátjuk az Itô-formulát.

Itô-formula (1944). *Legyen $X_t = X_0 + \int_0^t K_s \mathrm{d}s + \int_0^t H_s \mathrm{d}W_s$ Itô-folyamat, és $f \in C^2$ kétszer folytonosan differenciálható függvény. Ekkor*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)\mathrm{d}X_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)H_s^2 \mathrm{d}s.$$

A tétel szerint $f(X_t)$ is egy Itô-folyamat, melynek (5) előállítása

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t \left(f'(X_s)K_s + \frac{1}{2} f''(X_s)H_s^2 \right) \mathrm{d}s + \int_0^t f'(X_s)H_s \mathrm{d}W_s.$$

Bizonyítás. Csak abban az esetben bizonyítunk, amikor f kompakt tartójú, $\sup_{s,\omega} |K_s(\omega)| < K$, $\sup_{s,\omega} |H_s(\omega)| < K$ valamely K-ra. Vegyünk egy $\Pi =$

$\{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = T\}$ partíciót. A Taylor-formula szerint

$$\begin{aligned}
f(X_t) - f(X_0) &= \sum_{k=1}^{m} \left[f(X_{t_k}) - f(X_{t_{k-1}}) \right] \\
&= \sum_{k=1}^{m} f'(X_{t_{k-1}})(X_{t_k} - X_{t_{k-1}}) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} f''(\eta_k)(X_{t_k} - X_{t_{k-1}})^2 \\
&= \sum_{k=1}^{m} f'(X_{t_{k-1}}) \int_{t_{k-1}}^{t_k} K_s \mathrm{d}s + \sum_{k=1}^{m} f'(X_{t_{k-1}}) \int_{t_{k-1}}^{t_k} H_s \mathrm{d}W_s \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} f''(\eta_k)(X_{t_k} - X_{t_{k-1}})^2 \\
&= I_1 + I_2 + I_3,
\end{aligned}$$

ahol $\eta_k(\omega)$ az $X_{t_{k-1}}(\omega)$ és $X_{t_k}(\omega)$ közt van.

Az I_1 taggal könnyű dolgunk van, hisz az integrál trajektóriánként definiált és f' és X_t folytonos, így

$$I_1 = \sum_{k=1}^{m} f'(X_{t_{k-1}}) \int_{t_{k-1}}^{t_k} K_s \mathrm{d}s \longrightarrow \int_0^t f'(X_s) K_s \mathrm{d}s, \text{ m.b.}, \tag{6}$$

amint $\|\Pi\| \to 0$.

Az I_2 már egy sztochasztikus integrál. Írjuk az integrált

$$I_2 = \sum_{k=1}^{m} f'(X_{t_{k-1}}) \int_{t_{k-1}}^{t_k} H_s \mathrm{d}W_s = \int_0^t \sum_{k=1}^{m} f'(X_{t_{k-1}}) I_{(t_{k-1}, t_k]}(s) H_s \mathrm{d}W_s$$

alakba. Innen látjuk, hogy

$$\mathbf{E} \int_0^t \left(f'(X_s) H_s - \sum_{k=1}^{m} f'(X_{t_{k-1}}) I_{(t_{k-1}, t_k]}(s) H_s \right)^2 \mathrm{d}s \to 0,$$

amint $\|\Pi\| \to 0$, hiszen rögzített ω esetén az integrandus pontonként 0-hoz tart az X és f' folytonossága miatt, a korlátossági feltételeink szerint pedig Lebesgue majoráns konvergencia tétele használható. Ekkor a 4. Tétel (ii) pontja szerint

$$I_2 = \int_0^t \sum_{k=1}^{m} f'(X_{t_{k-1}}) I_{(t_{k-1}, t_k]}(s) H_s \mathrm{d}W_s \xrightarrow{L^2} \int_0^t f'(X_s) H_s \mathrm{d}W_s, \tag{7}$$

amint $\|\Pi\| \to 0$.

Azt kell még belátni, hogy

$$I_3 \to \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)H_s^2 \mathrm{d}s.$$

Ezt több lépésben tesszük. Először is, I_3-ban szereplő

$$\begin{aligned}
(X_{t_k} - X_{t_{k-1}})^2 &= \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} K_s \mathrm{d}s + \int_{t_{k-1}}^{t_k} H_s \mathrm{d}W_s\right)^2 \\
&= \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} K_s \mathrm{d}s\right)^2 + 2\int_{t_{k-1}}^{t_k} K_s \mathrm{d}s \cdot \int_{t_{k-1}}^{t_k} H_s \mathrm{d}W_s \\
&\quad + \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} H_s \mathrm{d}W_s\right)^2.
\end{aligned}$$

Megmutatjuk, hogy az első két tag hozzájárulása az összeghez 0. Valóban, egyrészt a $K_s(\omega)$ korlátossága miatt

$$\left|\sum_{k=1}^m f''(\eta_k)\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} K_s \mathrm{d}s\right)^2\right| \le \|f''\|_\infty \cdot K^2 \sum_{k=1}^m (t_k - t_{k-1})^2 \to 0, \text{ m.b.}, \tag{8}$$

(a továbbiakban a konvergenciát $\|\Pi\| \to 0$ esetén értjük) másrészt

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{k=1}^m f''(\eta_k)\int_{t_{k-1}}^{t_k} K_s \mathrm{d}s \cdot \int_{t_{k-1}}^{t_k} H_s \mathrm{d}W_s\right| \\
&\le \|f''\|_\infty \cdot K \sup_{1\le k\le m} |M_{t_k} - M_{t_{k-1}}| \cdot \sum_{k=1}^m (t_k - t_{k-1}) \\
&= \|f''\|_\infty \cdot K\, t \sup_{1\le k\le m} |M_{t_k} - M_{t_{k-1}}| \to 0, \quad \text{m.b.},
\end{aligned} \tag{9}$$

hiszen $M_t = \int_0^t H_s \mathrm{d}W_s$ egy folytonos martingál, így trajektóriánként egyenletesen is folytonos. Az I_3-ból maradt a

$$\sum_{k=1}^m f''(\eta_k)\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} H_s \mathrm{d}W_s\right)^2$$

összeg. Először belátjuk, hogy η_k-t kicserélhetjük $X_{t_{k-1}}$-re. Véve a különbséget

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^m [f''(\eta_k) - f''(X_{t_{k-1}})](M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^2 \\
&\le \sup_{1\le k\le m} |f''(\eta_k) - f''(X_{t_{k-1}})| \cdot \sum_{k=1}^m (M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^2.
\end{aligned}$$

Az első tényező tart 0-hoz m.b., hiszen X_t folytonos. Ez, és a Cauchy–Schwartz-egyenlőtlenség alapján

$$\begin{aligned}
&\left| \mathbf{E} \sum_{k=1}^{m} [f''(\eta_k) - f''(X_{t_{k-1}})](M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^2 \right| \\
&\le \sqrt{\mathbf{E} \sup_{1\le k\le m} (f''(\eta_k) - f''(X_{t_{k-1}}))^2} \sqrt{\mathbf{E} \left(\sum_{k=1}^{m} (M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^2 \right)^2}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Az első tényező tart 0-hoz a korlátosság és a m.b. konvergencia miatt, a második tényező pedig $\le \sqrt{6}K^2$ az alábbi lemma szerint.

5. Lemma. *Legyen (M_s) folytonos, korlátos martingál a $[0, t]$ intervallumon, $\sup_{s,\omega} |M_s(\omega)| \le K$, és $\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = t\}$ egy beosztás. Ekkor*

$$\mathbf{E} \left(\sum_{i=1}^{m} (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2 \right)^2 \le 6K^4.$$

Bizonyítás. Ez egy nagy számolás. A négyzetet kifejtve

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E} \left(\sum_{i=1}^{m} (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2 \right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{m} \mathbf{E}(M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^4 + \sum_{i\ne j} \mathbf{E}(M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2 (M_{t_j} - M_{t_{j-1}})^2.
\end{aligned}$$

Az

$$\mathbf{E}[(M_t - M_s)^2 | \mathcal{F}_s] = \mathbf{E}[M_t^2 - M_s^2 | \mathcal{F}_s], \quad s < t,$$

azonosság többszöri alkalmazásával

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i\neq j} \mathbf{E}(M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2 (M_{t_j} - M_{t_{j-1}})^2 \\
&= 2\sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^{m} \mathbf{E}(M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2 (M_{t_j} - M_{t_{j-1}})^2 \\
&= 2\sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^{m} \mathbf{E}\left[\mathbf{E}[(M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2 (M_{t_j} - M_{t_{j-1}})^2 | \mathcal{F}_{t_{j-1}}]\right] \\
&= 2\sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^{m} \mathbf{E}(M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2 (M_{t_j}^2 - M_{t_{j-1}}^2) \\
&= 2\sum_{i=1}^{m-1} \mathbf{E}(M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2 (M_t^2 - M_{t_i}^2) \\
&\leq 2K^2 \sum_{i=1}^{m-1} \mathbf{E}(M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2 \\
&= 2K^2 \sum_{i=1}^{m-1} \mathbf{E}(M_{t_i}^2 - M_{t_{i-1}}^2) \leq 2K^4.
\end{aligned}
$$

A másik tag pedig

$$
\sum_{i=1}^{m} \mathbf{E}(M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^4 \leq 4K^2 \mathbf{E} \sum_{i=1}^{m} \mathbf{E}(M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2 = 4K^2 \mathbf{E}(M_t^2 - M_0^2) \leq 4K^4.
$$

Ezzel a lemmát beláttuk. □

Összegezve, az I_3-ból a

$$
\sum_{k=1}^{m} f''(X_{t_{k-1}})(M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^2
$$

összeg maradt. Megmutatjuk, hogy

$$
\sum_{k=1}^{m} f''(X_{t_{k-1}})(M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^2 \xrightarrow{L^1} \int_0^t f''(X_s) H_s^2 \mathrm{d}s. \tag{11}
$$

Mivel X és f'' folytonos, így

$$
\sum_{k=1}^{m} f''(X_{t_{k-1}}) \int_{t_{k-1}}^{t_k} H_s^2 \mathrm{d}s \to \int_0^t f''(X_s) H_s^2 \mathrm{d}s \quad \text{m.b.}
$$

ezért elég megmutatni, hogy

$$\sum_{k=1}^{m} f''(X_{t_{k-1}}) \left((M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^2 - \int_{t_{k-1}}^{t_k} H_s^2 \mathrm{d}s \right) \xrightarrow{L^2} 0.$$

A 4. Tétel (ii) pontja szerint

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[(M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^2 | \mathcal{F}_{t_{k-1}}\right] &= \mathbf{E}\left[\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} H_s^2 \,\mathrm{d}s\right)^2 | \mathcal{F}_{t_{k-1}}\right] \\ &= \mathbf{E}\left[\int_{t_{k-1}}^{t_k} H_s^2 \,\mathrm{d}s | \mathcal{F}_{t_{k-1}}\right],\end{aligned}$$

és emiatt a

$$\mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^{m} f''(X_{t_{k-1}}) \left((M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^2 - \int_{t_{k-1}}^{t_k} H_s^2 \mathrm{d}s \right)\right)^2$$

kifejtésében a vegyesszorzatok várható értéke 0. Így ez

$$\begin{aligned}&= \mathbf{E}\sum_{k=1}^{m} f''(X_{t_{k-1}})^2 \left((M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^2 - \int_{t_{k-1}}^{t_k} H_s^2 \mathrm{d}s \right)^2 \\ &\leq \|f\|_\infty^2 \Bigg[\mathbf{E}\sum_{k=1}^{m} (M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^4 + 2\mathbf{E}\sum_{k=1}^{m} (M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^2 \int_{t_{k-1}}^{t_k} H_s^2 \mathrm{d}s \\ &\qquad + \mathbf{E}\sum_{k=1}^{m} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} H_s^2 \mathrm{d}s\right)^2\Bigg] \\ &\leq \|f\|_\infty^2 \left[\mathbf{E}\sum_{k=1}^{m} (M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^4 + 2K^2 t \mathbf{E} \sup_{1 \leq k \leq m} (M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^2 + K^4 t \|\Pi\|\right].\end{aligned}$$

Itt a harmadik tag $\to 0$, a második tagban

$$\sup_{1 \leq k \leq m} |M_{t_k} - M_{t_{k-1}}| \to 0 \quad \text{m.b.},$$

hiszen M_t majdnem biztosan folytonos, ezért a korlátosság miatt a négyzet várható értéke is $\to 0$. Az első tagra pedig a Cauchy–Schwartz-egyenlőtlenség és a lemma szerint

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\sum_{k=1}^{m}(M_{t_k}-M_{t_{k-1}})^4 &\le \mathbf{E}\left[\sum_{k=1}^{m}(M_{t_k}-M_{t_{k-1}})^2\cdot\sup_{1\le k\le m}|M_{t_k}-M_{t_{k-1}}|^2\right]\\
&\le \sqrt{\mathbf{E}\left[\sum_{k=1}^{m}(M_{t_k}-M_{t_{k-1}})^2\right]^2}\sqrt{\mathbf{E}\sup_{1\le k\le m}|M_{t_k}-M_{t_{k-1}}|^4}\\
&\le \sqrt{6}K^2\sqrt{\mathbf{E}\sup_{1\le k\le m}|M_{t_k}-M_{t_{k-1}}|^4}\to 0,
\end{aligned}$$

ahol az utolsó konvergenciánál ismét a folytonosságot használtuk.

Összegezve a (6–11) konvergenciák között van L^1, L^2 és majdnem biztos. Mivel minden korlátos, ezért mindhárom konvergenciából következik az L^1 konvergencia. Tehát azt kaptuk, hogy

$$\begin{aligned}
f(X_t)-f(X_0) &= \sum_{k=1}^{m}[f(X_{t_k})-f(X_{t_{k-1}})]\\
&\xrightarrow{L^1} \int_0^t f'(X_s)\mathrm{d}X_s+\frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)H_s^2\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Az L^1 konvergenciából következik, hogy van olyan részsorozat, amin m.b. konvergencia teljesül. Mivel a bal oldal és a jobb oldal is folytonos, ebből az következik, hogy a két folyamat nem megkülönböztethető. Ezzel az állítást beláttuk. □

Hasonlóan igazolható az Itô-formula alábbi, kicsit általánosabb alakja, melyben az f függvény nemcsak a tér-, hanem az időparamétertől is függhet.

Általánosabb Itô-formula. *Legyen X_t Itô-folyamat és $f\in C^{1,2}$. Ekkor*

$$\begin{aligned}
f(t,X_t) &= f(0,X_0)+\int_0^t\frac{\partial}{\partial s}f(s,X_s)\mathrm{d}s+\int_0^t\frac{\partial}{\partial x}f(s,X_s)\mathrm{d}X_s\\
&\quad+\frac{1}{2}\int_0^t\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(s,X_s)H_s^2\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

2.3.3. Többdimenziós Itô-folyamatok

A következőkben bevezetjük a többdimenziós Itô-folyamatokat.

A $W = (W^1, W^2, \ldots, W^r)$ egy *r-dimenziós Brown-mozgás*, ha a komponensei függetlenek, és minden komponens egy SBM. Az (X_t) egy *d-dimenziós Itô-folyamat*, ha az i-edik komponense

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t K_s^i \mathrm{d}s + \sum_{j=1}^r \int_0^t H_s^{i,j} \mathrm{d}W_s^j, \tag{12}$$

ahol $\int_0^T |K_s^i| \mathrm{d}s < \infty$, $\int_0^T (H_s^{i,j})^2 \mathrm{d}s < \infty$ m.b., és $K^i, H^{i,j}$ $\mathcal{F}_t$-adaptált folyamatok, $i = 1, 2, \ldots, d$, $j = 1, 2, \ldots, r$.

Többdimenziós Itô-formula. *Legyen (X_t) egy többdimenziós Itô-folyamat, (12) formula szerint, és $f : \mathbb{R}^{1+d} \to \mathbb{R}$, $f \in C^{1,2}$. Ekkor*

$$\begin{aligned} f(t, X_t^1, \ldots, X_t^d) = f(0, X_0^1, \ldots, X_0^d) &+ \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} f(s, X_s^1, \ldots, X_s^d) \,\mathrm{d}s \\ &+ \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial}{\partial x_i} f(s, X_s^1, \ldots, X_s^d) \,\mathrm{d}X_s^i \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(s, X_s^1, \ldots, X_s^d) \sum_{k=1}^r H_s^{i,k} H_s^{j,k} \,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

2.3.4. Alkalmazások

Az Itô-formulára nézünk néhány alkalmazást.

3. Példa. Parciális integrálás I. Legyen (X, Y) kétdimenziós Itô-folyamat

$$\begin{aligned} X_t &= X_0 + \int_0^t K_s \,\mathrm{d}s + \int_0^t H_s \,\mathrm{d}W_s \\ Y_t &= Y_0 + \int_0^t L_s \,\mathrm{d}s + \int_0^t G_s \,\mathrm{d}W_s, \end{aligned}$$

ahol K, L, H, G olyanok amilyennek lenniük kell. Ekkor

$$\int_0^t X_s \mathrm{d}Y_s = X_t Y_t - X_0 Y_0 - \int_0^t Y_s \mathrm{d}X_s - \int_0^t H_s G_s \mathrm{d}s.$$

Vegyük észre, hogy a hagyományos parciális integrálási formulában (amikor tehát X, Y *determinisztikus, korlátos változású* függvények) nem szerepel az utolsó tag.

A bizonyításhoz alkalmazzuk az Itô-formulát az (X, Y) folyamatra, és az $f(x,y) = xy$ függvényre. Ekkor a (12) formula szerinti szereposztás:

$$r = 1,\ d = 2,\ K_s^1 = K_s,\ K_s^2 = L_s,\ H_s^{1,1} = H_s,\ H_s^{2,1} = G_s.$$

Mivel $\frac{\partial f}{\partial x} = y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = 0$, és $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1$, így

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t Y_s \mathrm{d}X_s + \int_0^t X_s \mathrm{d}Y_s + \frac{1}{2} 2 \int_0^t H_s G_s \mathrm{d}s,$$

ami rendezés után éppen az állítás.

4. Példa. Parciális integrálás II. Egy kicsit módosítjuk az előző példát. Legyen $\widetilde{W}$ egy W-től független SBM, és (X, Y) kétdimenziós Itô-folyamat

$$\begin{aligned} X_t &= X_0 + \int_0^t K_s \, \mathrm{d}s + \int_0^t H_s \, \mathrm{d}W_s \\ Y_t &= Y_0 + \int_0^t L_s \, \mathrm{d}s + \int_0^t G_s \, \mathrm{d}\widetilde{W}_s, \end{aligned}$$

ahol K, L, H, G olyanok amilyennek lenniük kell. Ekkor

$$\int_0^t X_s \mathrm{d}Y_s = X_t Y_t - X_0 Y_0 - \int_0^t Y_s \mathrm{d}X_s.$$

Ennek bizonyítása ugyanúgy megy, mint az előbb. Vegyük észre, hogy itt $d = r = 2$, és a két folyamatot különböző Wiener-folyamat hajtja meg, ezért nem jelenik meg az extra tag.

5. Példa. Korábban már meghatároztuk az $\int W_s \mathrm{d}W_s$ sztochasztikus integrál értékét (1. Példa). Most meghatározzuk az Itô-formula segítségével.

A Wiener-folyamat Itô-folyamatként való reprezentációja $K_s \equiv 0$, $H_s \equiv 1$. Legyen $f(x) = x^2$. Az Itô-formula szerint

$$W_t^2 = W_0^2 + \int_0^t 2 W_s \mathrm{d}W_s + \frac{1}{2} \int_0^t 2 \mathrm{d}s.$$

Ezt átrendezve kapjuk a már ismert

$$\int_0^t W_s \mathrm{d}W_s = \frac{W_t^2 - t}{2}$$

formulát. Innen azt is rögtön látjuk, hogy $W_t^2 - t$ martingál, hiszen minden sztochasztikus integrál martingál (na nem mintha a direkt bizonyítás bonyolult lett volna).

6. Példa. A 2. Példa folytatása. Legyen

$$\zeta_t^s = \int_s^t X_u \mathrm{d}W_u - \frac{1}{2}\int_s^t X_u^2 \mathrm{d}u, \quad \zeta_t = \zeta_t^0,$$

ahol X_t adaptált folyamat. Ekkor $Z_t = \mathrm{e}^{\zeta_t}$ kielégíti a

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_s X_s \mathrm{d}W_s$$

sztochasztikus differenciálegyenletet. (Ezt a formulát használni fogjuk a Girsanov-tétel bizonyításánál.)

A fenti sztochasztikus differenciálegyenletet differenciálegyenletes jelöléssel

$$\mathrm{d}Z_t = Z_t X_t \mathrm{d}W_t, \quad Z_0 = 1,$$

alakba írható.

A ζ folyamatot Itô-folyamatként felírva

$$\zeta_t = \int_0^t -\frac{1}{2}X_u^2 \mathrm{d}u + \int_0^t X_u \mathrm{d}W_u.$$

Legyen $f(x) = \mathrm{e}^x$, ekkor az Itô-formula szerint

$$\begin{aligned}
Z_t = \mathrm{e}^{\zeta_t} &= 1 + \int_0^t \mathrm{e}^{\zeta_s} \mathrm{d}\zeta_s + \frac{1}{2}\int_0^t \mathrm{e}^{\zeta_s} X_s^2 \mathrm{d}s \\
&= 1 + \int_0^t \mathrm{e}^{\zeta_s}\left(-\frac{1}{2}X_s \mathrm{d}s + X_s \mathrm{d}W_s\right) + \frac{1}{2}\int_0^t \mathrm{e}^{\zeta_s} X_s^2 \mathrm{d}s \\
&= 1 + \int_0^t \mathrm{e}^{\zeta_s} X_s \mathrm{d}W_s \\
&= 1 + \int_0^t Z_s X_s \mathrm{d}W_s,
\end{aligned}$$

amint állítottuk. Azt is rögtön látjuk, hogy Z_t martingál.

Feladat. Legyen ζ_t mint fent. Mutassuk meg, hogy a $Y_t = \mathrm{e}^{-\zeta_t}$ folyamat kielégíti a

$$\mathrm{d}Y_t = Y_t X_t^2 \mathrm{d}t - X_t Y_t \mathrm{d}W_t, \quad Y_0 = 1,$$

sztochasztikus differenciálegyenletet!

7. Példa. **Exponenciális Brown-mozgás.** Legyen $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. Oldjuk meg a

$$\mathrm{d}X_t = \mu X_t \mathrm{d}t + \sigma X_t \mathrm{d}W_t$$

sztochasztikus differenciálegyenletet!

Az X_t Itô-folyamatként való felírása

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu X_s \mathrm{d}s + \int_0^t \sigma X_s \mathrm{d}W_s.$$

Az $f(x) = \log x$ függvénnyel felírva az Itô-formulát

$$\begin{aligned}\log X_t &= \log X_0 + \int_0^t \frac{1}{X_s} (\mu X_s \mathrm{d}s + \sigma X_s \mathrm{d}W_s) + \frac{1}{2} \int_0^t -\frac{1}{X_s^2} \sigma^2 X_s^2 \mathrm{d}s \\ &= \log X_0 + \sigma W_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t.\end{aligned}$$

Innen kapjuk, hogy

$$X_t = X_0 \cdot \mathrm{e}^{\sigma W_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t},$$

innen az elnevezés. A differenciálegyenletes alakból azt is látjuk, hogy ez pontosan akkor martingál, ha a korlátos változású rész $\equiv 0$, azaz $\mu = 0$.

(A feladat egy konstruktívabb megoldása az, hogy felírjuk az Itô-formulát egy általános f függvénnyel, majd megválasztjuk úgy az f-et, hogy minél egyszerűbb egyenletet kapjunk. Az $f(x) = \log x$ választás esetén a martingál részben az integrandus a konstans függvény lesz.)

2.4. Négyzetes változás és a Doob–Meyer-felbontás

Ebben a fejezetben vázlatosan megvizsgáljuk a négyzetes változás és a Doob–Meyer-felbontás kapcsolatát. A kapott eredmények segítségével az Itô-formulát kimondjuk általános szemimartingálokra. Persze ezeket az eredményeket nem bizonyítjuk.

A sztochasztikus integrál tulajdonságainál láttuk, hogy

$$\mathbf{E}\left[\left(\int_s^t X_u \mathrm{d}W_u\right)^2 |\mathcal{F}_s\right] = \mathbf{E}\left[\int_s^t X_u^2 \mathrm{d}x |\mathcal{F}_s\right],$$

ami éppen azt jelenti, hogy az

$$\left(\int_0^t X_u \mathrm{d}W_u\right)^2 - \int_0^t X_u^2 \mathrm{d}u \tag{13}$$

folyamat martingál. Mivel $\int_0^t X_u \mathrm{d}W_u$ martingál, így így a négyzete szubmartingál, amire alkalmazhatjuk a Doob–Meyer-felbontást, mely szerint tetszőleges szubmartingálból leválaszthatunk egy monoton növő részt, hogy martingált kapjunk. A (13) formula szerint a

$$\left(\int_0^t X_u \mathrm{d}W_u\right)^2 = \int_0^t X_u^2 \mathrm{d}u + \left(\int_0^t X_u \mathrm{d}W_u\right)^2 - \int_0^t X_u^2 \mathrm{d}u$$

felbontás pont egy monoton növő folyamat és egy martingál összegére bontja a szubmartingált. Ezek szerint az $I_t(X) = \int_0^t X_u \mathrm{d}W_u$ martingál *monoton növő folyamata*

$$\left\langle \int_0^{\cdot} X_u \mathrm{d}W_u \right\rangle_t = \langle I(X) \rangle_t = \int_0^t X_u^2 \mathrm{d}u.$$

Másrészt az Itô-formula bizonyításánál láttuk (a (11) formula éppen azt állítja), hogy

$$\sum_{i=1}^n \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} X_u \mathrm{d}W_u\right)^2 \xrightarrow{L^1} \int_0^t X_u^2 \mathrm{d}u, \quad \text{amint } \|\Pi\| \to 0.$$

Ez éppen az $I_t(X)$ martingál négyzetes változása. (A fogalmat csak a Wiener-folyamatra definiáltuk, de értelemszerűen tetszőleges folyamatra kiterjeszthető.)

Ezzel beláttuk a következőt:

5. Tétel. *Tetszőleges X_t Itô-folyamat monoton növő folyamata és négyzetes változása megegyezik, azaz*

$$\langle I(X) \rangle_t = \lim_{\|\Pi\| \to 0} \left(I_{t_i}(X) - I_{t_{i-1}}(X)\right)^2,$$

ahol a jobb oldalon a határérték L^1-értelemben definiált.

A sztochasztikus integrál általánosabb folyamatok esetén is definiálható, nem csak Itô-folyamatokra. Egy X_t folyamat *szemimartingál*, ha előállítható

$$X_t = M_t + A_t,$$

alakban, ahol M_t martingál, A_t pedig egy korlátos változású folyamat. A 4. Lemma megfelelőjéből következik, hogy a szemimartingálok definícióbeli előállítása is egyértelmű. Az is világos, hogy minden Itô-folyamat szemimartingál.

A fenti tétel segítségével az Itô-formula alábbi változata igazolható.

Itô-formula szemimartingálokra. *Legyen $X_t = M_t + A_t$ folytonos szemimartingál, ahol A_t korlátos változású folyamat, M_t pedig martingál, és legyen $f \in C^2$. Ekkor*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)\mathrm{d}X_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\mathrm{d}\langle M\rangle_s.$$

2.5. Mértékváltás

A diszkrét idejű piacok elméletében láttuk mennyire fontos az ekvivalens martingálmérték, ugyanis ez alapján tudtunk árazni. Jelen fejezet célja, hogy megértsük hogy változik egyes folyamatok dinamikája ha megváltoztatjuk a mértéket, vagy másképpen, hogyan vezessünk be olyan mértéket, ami szerint a folyamatunk martingál lesz.

2.5.1. A Wiener-folyamat karakterizációja

Lévy tétele a Wiener-folyamat karakterizációjáról. *Legyen M_t folytonos martingál. Ha $M_t^2 - t$ martingál, akkor M_t Wiener-folyamat.*

Bizonyítás. Meghatározzuk az M_t feltételes karakterisztikus függvényét $\mathcal{F}_s$-re, $t > s$. Ehhez írjuk föl az Itô-formulát az $f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}ux}$ függvényre, ahol $u \in \mathbb{R}$ tetszőleges, rögzített. Mivel $f'(x) = \mathrm{i}u\mathrm{e}^{\mathrm{i}ux}$, $f''(x) = -u^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}ux}$, és a feltétel szerint $\langle M\rangle_t = t$, így

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}uM_t} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}uM_s} = \int_s^t \mathrm{i}u\mathrm{e}^{\mathrm{i}uM_v}\mathrm{d}M_v + \frac{1}{2}\int_s^t (-u^2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}uM_v}\mathrm{d}v.$$

Legyen $A \in \mathcal{F}_s$ tetszőleges. A fenti formulában átszorozva $\mathrm{e}^{\mathrm{i}uM_s}$-el, és integrálva az A eseményen kapjuk, hogy

$$\mathbf{E}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}u(M_t-M_s)}I_A\right] = \mathbf{P}\{A\} - \frac{u^2}{2}\int_s^t \mathbf{E}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}u(M_v-M_s)}I_A\right]\mathrm{d}v.$$

Rögzített A és s esetén vezessük be a

$$g_{A,s}(t) = g(t) = \mathbf{E}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}u(M_t-M_s)}I_A\right]$$

jelölést. Így

$$g(t) = \mathbf{P}\{A\} - \frac{u^2}{2}\int_s^t g(v)\mathrm{d}v,$$

amit deriválva

$$g'(t) = -\frac{u^2}{2} g(t), \quad g(s) = \mathbf{P}\{A\}.$$

Ennek a differenciálegyenletnek a megoldása

$$g(t) = \mathbf{P}\{A\} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}(t-s)}.$$

Mivel ez minden $A \in \mathcal{F}_s$ eseményre teljesül, azt kaptuk, hogy

$$\mathbf{E}\left[\mathrm{e}^{iiu(M_t - M_s)} | \mathcal{F}_s\right] = \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}(t-s)}$$

minden $u \in \mathbb{R}$ esetén. Vagyis az $M_t - M_s$ növekmény független az $\mathcal{F}_s$ σ-algebrától, és éppen egy $(t-s)$ szórásnégyzetű normális eloszlás. Mivel folytonos is, így M_t SBM. □

Megjegyezzük, hogy a folytonossági feltétel nélkül nem igaz az állítás. Hiszen ha N_t 1 intenzitású Poisson-folyamat, akkor $N_t - t$ és $(N_t - t)^2 - t$ is martingál.

2.5.2. Girsanov-tétel

Az új mérték bevezetése diszkrét modell esetén nem jelentett nehézséget. Folytonos modelleknél a dolog nem ilyen egyszerű.

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ egy valószínűségi mező, $(\mathcal{F}_t)$ egy filtráció, és $\mathbf{Q}$ egy másik valószínűségi mérték $(\Omega, \mathcal{A})$-n, ami abszolút folytonos $\mathbf{P}$-re, jelben $\mathbf{Q} << \mathbf{P}$. Legyen M_∞ a $\mathbf{Q}$ Radon–Nikodym-deriváltja,

$$M_\infty = \frac{\mathrm{d}\mathbf{Q}}{\mathrm{d}\mathbf{P}},$$

ami azt jelenti, hogy

$$\mathbf{Q}(A) = \int_A M_\infty \mathrm{d}\mathbf{P}.$$

Mivel a továbbiakban általában több mértékkel dolgozunk, ezért a várható érték alsó indexében jelöljük, hogy melyik szerint vesszük a várható értéket; azaz $\mathbf{E_P} X = \int_\Omega X \mathrm{d}\mathbf{P}$ és $\mathbf{E_Q} X = \int_\Omega X \mathrm{d}\mathbf{Q}$. Továbbá a $\mathbf{P}$ mérték szerinti martingálokat röviden $\mathbf{P}$-martingálnak, a $\mathbf{Q}$ mérték szerintieket $\mathbf{Q}$-martingálnak nevezzük.

Definiáljuk az

$$M_t = \mathbf{E_P}[M_\infty | \mathcal{F}_t]$$

$\mathbf{P}$-martingált. A következő lemma megadja a $\mathbf{P}$- és $\mathbf{Q}$-martingálok közti kapcsolatot a Radon–Nikodym-derivált segítségével.

6. Lemma. *Az (X_t) folyamat pontosan akkor $\mathbf{Q}$-martingál, ha az $(M_t X_t)$ folyamat $\mathbf{P}$-martingál.*

Bizonyítás. Mivel
$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}[M_\infty X_t|\mathcal{F}_t] = X_t M_t,$$
így minden $A \in \mathcal{F}_t$ eseményre
$$\int_A X_t M_\infty \mathrm{d}\mathbf{P} = \int_A X_t M_t \mathrm{d}\mathbf{P}.$$
Ezért, ha $A \in \mathcal{F}_s \supset \mathcal{F}_t$, akkor
$$\begin{aligned}\int_A X_t \mathrm{d}\mathbf{Q} &= \int_A X_t M_\infty \mathrm{d}\mathbf{P} = \int_A X_t M_t \mathrm{d}\mathbf{P}\\ \int_A X_s \mathrm{d}\mathbf{Q} &= \int_A X_s M_\infty \mathrm{d}\mathbf{P} = \int_A X_s M_s \mathrm{d}\mathbf{P}.\end{aligned}$$
Az (X_t) folyamat pontosan akkor $\mathbf{Q}$-martingál, ha a bal oldalak egyenlőek minden $A \in \mathcal{F}_s$ halmazra, és $s < t$ esetén, ami persze pontosan akkor teljesül, ha a jobb oldalak egyenlőek, ami azt jelenti, hogy $(M_t X_t)$ $\mathbf{P}$-martingál. □

Girsanov-tétel. *Legyen (θ_t) adaptált folyamat, melyre $\int_0^T \theta_s^2 \mathrm{d}s < \infty$ m.b., és tegyük föl, hogy*
$$\Lambda_t = \exp\left\{-\int_0^t \theta_s \mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 \mathrm{d}s\right\} \tag{14}$$
$\mathbf{P}$-martingál, ahol (W_t) SBM a $\mathbf{P}$ mérték szerint. Definiáljuk a $\mathbf{Q}_\theta = \mathbf{Q}$ mértéket a
$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{Q}_\theta}{\mathrm{d}\mathbf{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \Lambda_T$$
formulával. Ekkor a $\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t \theta_s \mathrm{d}s$ SBM a $\mathbf{Q}$-mérték szerint.

Megjegyzés. A 6. Példában láttuk, hogy a Λ_t folyamat martingál. Akkor meg miért tesszük föl a Girsanov-tételben, hogy martingál? A helyzet az, hogy a martingálsághoz kell integrálhatóság, ami nem feltétlenül igaz, ha a θ_t folyamat nagy lehet. Ha bizonyos momentumfeltétel teljesül, akkor már Λ_t tényleg martingál. Lényegében a 'tegyük föl, hogy' helyett gondolhatunk 'legyen'-t is.

Bizonyítás. Először azt kell megmutatni, hogy $\mathbf{Q}$ tényleg valószínűségi mérték. A 6. Példában láttuk, hogy
$$\Lambda_t = 1 - \int_0^t \Lambda_s \theta_s \mathrm{d}W_s,$$

ami martingál, így

$$\mathbf{E_P}\Lambda_T = \mathbf{E_P}\Lambda_0 = 1,$$

és mivel $\Lambda_T > 0$ ezért $\mathbf{Q}$ tényleg valószínűségi mérték.

Most megmutatjuk, hogy a $\tilde{W}$ folyamat teljesíti a Lévy-féle karakterizációs tétel feltételeit a $\mathbf{Q}$ mérték szerint.

A folytonosság nyilvánvaló, hiszen W folytonos, és $\mathbf{Q} << \mathbf{P}$.

A 6. Lemma szerint $(\tilde{W}_t)$ $\mathbf{Q}$-martingál akkor és csak akkor, ha $(\tilde{W}_t\Lambda_t)$ $\mathbf{P}$-martingál. Írjuk fel az Itô-formulát az $f(x,y) = xy$ függvényre a

$$\begin{aligned} \tilde{W}_t &= \int_0^t \theta_s \mathrm{d}s + \int_0^t 1 \mathrm{d}W_s \\ \Lambda_t &= 1 - \int_0^t \Lambda_s\theta_s \mathrm{d}W_s, \end{aligned}$$

kétdimenziós Itô-folyamattal. Eszerint

$$\begin{aligned} \Lambda_t\tilde{W}_t &= \int_0^t \tilde{W}_s \mathrm{d}\Lambda_s + \int_0^t \Lambda_s \mathrm{d}\tilde{W}_s + \int_0^t -\Lambda_s\theta_s \mathrm{d}s \\ &= -\int_0^t \tilde{W}_s\Lambda_s\theta_s \mathrm{d}W_s + \int_0^t \Lambda_s \left(\theta_s \mathrm{d}s + \mathrm{d}W_s\right) - \int_0^t \Lambda_s\theta_s \mathrm{d}s \\ &= \int_0^t \Lambda_s(1 - \theta_s\tilde{W}_s)\mathrm{d}W_s, \end{aligned}$$

ami $\mathbf{P}$-martingál. Tehát $(\tilde{W}_t)$ valóban $\mathbf{Q}$-martingál.

Ahhoz, hogy a $(\tilde{W}_t^2 - t)$ folyamat $\mathbf{Q}$-martingál, megint azt mutatjuk meg, hogy $(\tilde{W}_t^2 - t)\Lambda_t$ $\mathbf{P}$-martingál. Először felírjuk $(\tilde{W}_t^2 - t)$ Itô-folyamatos reprezentációját. Az Itô-formulát az x^2 függvényre felírva

$$\tilde{W}_t^2 = 2\int_0^t \tilde{W}_s \mathrm{d}\tilde{W}_s + \frac{1}{2}\int_0^t 2\mathrm{d}t,$$

amit rendezve, és beírva $\tilde{W}_t$ előállítását

$$\tilde{W}_t^2 - t = 2\int_0^t \tilde{W}_s \left(\theta_s \mathrm{d}s + \mathrm{d}W_s\right).$$

A kétváltozós Itô-formulát felírva, mint az előbb

$$\begin{aligned} \Lambda_t(\tilde{W}_t^2 - t) &= \int_0^t \Lambda_s 2\tilde{W}_s \left(\theta_s \mathrm{d}s + \mathrm{d}W_s\right) + \int_0^t (\tilde{W}_s^2 - s)\mathrm{d}\Lambda_s - \int_0^t \Lambda_s\theta_s 2\tilde{W}_s \mathrm{d}s \\ &= \int_0^t \left[2\Lambda_s\tilde{W}_s - (\tilde{W}_s^2 - s)\Lambda_s\theta_s\right] \mathrm{d}W_s \end{aligned}$$

adódik, ami $\mathbf{P}$-martingál. Tehát $(\tilde{W}_t^2 - t)$ $\mathbf{Q}$-martingál, és ezzel az állítást beláttuk. □

Végül, bizonyítás (és precíz állítás) nélkül megemlítjük, hogy minden folytonos martingál előállítható, mint egy megfelelő adaptált folyamat Wiener-folyamat szerinti sztochasztikus integrálja. Vagyis minden szemimartingál Itô-folyamat.

Martingál reprezentációs tétel. *Legyen* (W_t) *SBM az* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ *valószínűségi mezőn, és legyen* $(\mathcal{F}_t)$ *a hozzá tartozó filtráció, azaz a* (W_t) *által generált filtráció, amihez hozzávesszük a* $\mathbf{P}$*-null halmazokat. Ha* (M_t) *folytonos, négyzetintegrálható martingál,* $M_0 = 0$ *m.b., akkor létezik olyan* (Y_t) *adaptált folyamat, melyre*

$$M_t = \int_0^t Y_s \mathrm{d}W_s.$$

3. Folytonos idejű piacok

A sztochasztikus integrálelmélettel felvértezve rátérünk a folytonos idejű piaci modellek tárgyalására.

3.1. Piacok általában

Az alapfogalmak a diszkrét időben már megismert fogalmak természetes folytonos idejű megfelelői.

A továbbiakban a $[0, T]$ *véges* időhorizonton dolgozunk, $T < \infty$. Adott egy $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mező, azon egy $(\mathcal{F}_t)$ filtráció. A piacon két termék adott, egy kockázatmentes és egy kockázatos. A kötvény a kockázatmentes, az árfolyamata (B_t) egy determinisztikus folyamat, a részvény a kockázatos, árfolyamata (S_t) egy véletlen sztochasztikus folyamat, ami adaptált az $(\mathcal{F}_t)$ filtrációhoz.

A *stratégia / portfólió* egy $(\pi_t = (\beta_t, \gamma_t))$ folyamat, ami adaptált (hát persze, hiszen nem látunk a jövőbe), és

$$\int_0^T |\beta_t| \mathrm{d}t < \infty, \quad \int_0^T \gamma_t^2 \mathrm{d}t < \infty, \text{ m.b.}$$

A (β_t) folyamat jelenti a t-ben birtokunkban levő kötvény, (γ_t) pedig a részvény mennyiségét. Természetesen mindkét folyamat lehet negatív is.

A (π) portfólió értéke t-ben

$$X_t^\pi = \beta_t B_t + \gamma_t S_t, \tag{15}$$

ez a portfólió *értékfolyamata.*

Az önfinanszírozó stratégiát szeretnénk definiálni a diszkrét idő analogonjaként. Az, hogy nem fektetek be plusz pénzt a portfóliómba, és nem is veszek ki belőle, azt jelenti, hogy amikor az n-edik napon este átrendezem a portfóliómat, akkor az összérték meg kell egyezzen az n-edik napon a portfólióm értékével, azaz

$$\beta_{n+1}B_n + \gamma_{n+1}S_n = \beta_n B_n + \gamma_n S_n.$$

Felírva, hogy $X_{n+1} = \beta_{n+1}B_{n+1} + \gamma_{n+1}S_{n+1}$, azt kapom, hogy a portfólióm értékének megváltozása

$$X_{n+1} - X_n = \beta_{n+1}(B_{n+1} - B_n) + \gamma_{n+1}(S_{n+1} - S_n).$$

Ez azt jelenti, hogy az értékfolyamat megváltozása a kötvényár és a részvényár megváltozásából tevődik össze, külső forrást nem veszünk igénybe. Ennek az egyenletnek a folytonos megfelelője a

$$\mathrm{d}X_t^\pi = \beta_t \mathrm{d}B_t + \gamma_t \mathrm{d}S_t$$

sztochasztikus differenciálegyenlet. Ez lesz az önfinanszírozóság definíciója.

Azt mondjuk, hogy a $(\pi_t = (\beta_t, \gamma_t))$ stratégia *önfinanszírozó*, ha teljesül a

$$\mathrm{d}X_t^\pi = \beta_t \mathrm{d}B_t + \gamma_t \mathrm{d}S_t \tag{16}$$

sztochasztikus differenciálegyenlet.

Feladat. Mutassuk meg, hogy a (16) egyenlet ekvivalens a

$$B_t \mathrm{d}\beta_t + S_t \mathrm{d}\gamma_t = 0,$$

feltétellel. Használjuk a (15) formulát és a parciális differenciálás szabályát!

Az $(\overline{S}_t = S_t B_0 / B_t)$ folyamat a *diszkontált részvényárfolyamat*, az $(\overline{X}_t^\pi = X_t^\pi B_0 / B_t)$ folyamat pedig a *diszkontált értékfolyamat.*

Mostantól feltesszük, hogy a folytonos kamatráta $r > 0$, azaz

$$B_t = \mathrm{e}^{rt}, \ t \geq 0.$$

Ekkor

$$\overline{S}_t = \mathrm{e}^{-rt} S_t, \text{ és } \overline{X}_t^\pi = \mathrm{e}^{-rt} X_t^\pi.$$

6. Állítás. *A $(\pi_t = (\beta_t, \gamma_t))$ stratégia pontosan akkor önfinanszírozó, ha*

$$\overline{X}_t^\pi = X_0^\pi + \int_0^t \gamma_s \mathrm{d}\overline{S}_s, \quad t \in [0, T].$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy π önfinanszírozó. Az Itô-formula alapján

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\overline{X}_t^\pi &= \mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{-rt}X_t^\pi\right) = -r\mathrm{e}^{-rt}X_t^\pi\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-rt}\mathrm{d}X_t \\
&= -r\mathrm{e}^{-rt}(\beta_t\mathrm{e}^{rt} + \gamma_t S_t)\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-rt}\left(\beta_t\mathrm{d}\mathrm{e}^{rt} + \gamma_t\mathrm{d}S_t\right) \\
&= -r\mathrm{e}^{-rt}\gamma_t S_t\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-rt}\gamma_t\mathrm{d}S_t \\
&= \gamma_t\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{-rt}S_t\right),
\end{aligned}$$

amint állítottuk.

Megfordítva, tegyük fel, hogy

$$\mathrm{d}\overline{X}_t^\pi = \gamma_t\mathrm{d}\overline{S}_t.$$

Mivel $X_t^\pi = \beta_t\mathrm{e}^{rt} + \gamma_t S_t$, így a bal oldal

$$\mathrm{d}\overline{X}_t^\pi = -r\mathrm{e}^{-rt}X_t^\pi\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-rt}\mathrm{d}X_t^\pi = -\mathrm{e}^{-rt}\beta_t\mathrm{d}B_t - r\mathrm{e}^{-rt}\gamma_t S_t\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-rt}\mathrm{d}X_t^\pi.$$

A jobb oldal

$$\gamma_t\mathrm{d}\overline{S}_t = -r\mathrm{e}^{-rt}\gamma_t S_t\mathrm{d}t + \gamma_t\mathrm{e}^{-rt}\mathrm{d}S_t.$$

A két oldal egyenlőségéből adódik, hogy

$$\mathrm{d}X_t^\pi = \beta_t\mathrm{d}B_t + \gamma_t\mathrm{d}S_t,$$

ami éppen az önfinanszírozóság definíciója. $\square$

Bevezetjük az arbitrázs fogalmát. A π önfinanszírozó stratégia *arbitrázsstratégia*, ha $X_0^\pi = 0$ m.b., $X_T \geq 0$ m.b., és $\mathbf{P}\{X_T^\pi > 0\} > 0$. A piac *arbitrázsmentes*, ha nincs arbitrázsstratégia.

Ez a fogalom fejezi ki azt, hogy 0 kezdőtőkével indulva, biztosan nyerünk, azaz *ingyen ebédhez* jutunk. Természetes feltenni, hogy a valóságban arbitrázs nem létezik a piacon, hiszen ha létezne, akkor mindenki ezt a stratégiát játszaná meg, ezzel módosítva az árakat, és így nagyon gyorsan megszűnne az arbitrázslehetőség. Diszkrét idejű piacon láttuk, hogy (bizonyos feltételek mellett) az arbitrázsmentesség ekvivalens azzal, hogy létezik piacon olyan, az eredeti $\mathbf{P}$ mértékkel ekvivalens mérték, melyre nézve a diszkontált részvényárfolyamat martingál. Ez bizonyos feltételek mellett a folytonos esetben is igaz, ráadásul az egyik irányú implikáció most is nagyon egyszerű.

Tegyük fel, hogy van a piacon egy olyan $\mathbf{Q}$ valószínűségi mérték, melyre $\mathbf{P} \sim \mathbf{Q}$ (azaz a két mérték ekvivalens, azaz $\mathbf{P} << \mathbf{Q}$ és $\mathbf{Q} << \mathbf{P}$), és az $(\overline{S}_t)$ folyamat martingál. Az ilyen mértéket *ekvivalens martingálmértéknek* (EMM) nevezzük. Legyen π egy tetszőleges önfinanszírozó stratégia. A 6. Állítás szerint ekkor az értékfolyamat

$$\overline{X}_t^\pi = X_0^\pi + \int_0^t \gamma_s\mathrm{d}\overline{S}_s.$$

Mivel $(\overline{S}_t)$ $\mathbf{Q}$-martingál, és $\overline{X}_t^\pi$ e szerinti sztochasztikus integrál, ezért az $(\overline{X}_t^\pi)$ folyamat is $\mathbf{Q}$-martingál. (Vegyük észre, hogy ugyanezt az állítást beláttuk a diszkrét piacok esetén is.) Eszerint

$$\mathbf{E_Q}\overline{X}_T^\pi = \mathbf{E_Q}X_0^\pi.$$

Mivel $\mathbf{P} \sim \mathbf{Q}$, ezért ha $X_0^\pi = 0$, $X_T^\pi \geq 0$ $\mathbf{P}$-m.b., akkor $\mathbf{Q}$-m.b. is. Na de $\mathbf{E_Q}\overline{X}_T^\pi = \mathbf{E_Q}X_0^\pi = 0$, amiből következik, hogy $X_T^\pi \equiv 0$ $\mathbf{Q}$-m.b., de így $\mathbf{P}$-m.b. is.

Ezzel beláttuk az alábbit.

6. Tétel. *Ha az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}, (S_t), (B_t = \mathrm{e}^{rt}), (\mathcal{F}_t))$ folytonos idejű piacon létezik $\mathbf{Q}$ EMM, akkor a piac arbitrázsmentes.*

Természetesen folytonos idejű piacon is tekinthetünk opciókat, ill. tetszőleges követeléseket. Az egyik célunk az ilyen követelések igazságos árának definiálása, meghatározása, ill. fedezeti portfólió összeállítása. Igazságos árat és fedezeti stratégiát csak speciális esetben adunk meg a következő fejezetben, azonban a definíciót kimondjuk és néhány tulajdonságot bebizonyítunk az általános esetben.

Az f_T egy *véletlen követelés*, ha $\mathcal{F}_T$-mérhető. A π egy *fedezeti stratégia* f_T-re x kezdőtőkével, röviden (f_T, x)-fedezet, ha

$$X_T^\pi \geq f_T \text{ m.b., és } X_0 = x.$$

Az f_T követelés *igazságos ára* a legkisebb olyan x érték, melyre létezik (f_T, x)-fedezet, azaz

$$C_T(f_T) = \inf\{x \geq 0 : \text{ létezik } (f_T, x)\text{-fedezet }\}.$$

Tegyük fel, hogy a piacon létezik EMM, legyen $\mathbf{Q}$ egy ilyen. Ekkor tetszőleges π (f_T, x)-fedezetre

$$x = \mathbf{E_Q}X_0^\pi = \mathbf{E_Q}\overline{X}_t^\pi = \mathbf{E_Q}\mathrm{e}^{-rT}X_T^\pi \geq \mathbf{E_Q}\mathrm{e}^{-rT}f_T.$$

Ezzel beláttuk, hogy

$$C(T, f_T) \geq \mathbf{E_Q}(\mathrm{e}^{-rT}f_T). \tag{17}$$

3.2. Black–Scholes modell

Ebben a részben egy speciális folytonos modellben kiszámítjuk a követelések igazságos árát, és megadunk egy tökéletes replikáló portfóliót. Speciális esetként levezetjük a híres Black–Scholes-formulát, ami az európai call opció igazságos árát adja meg.

Legyen $r > 0, \mu \in \mathbb{R}$ és $\sigma > 0$. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mező, (W_t) SBM a $[0, T]$ intervallumon, $T < \infty$, és $\mathcal{F}_t$ a (W_t)-hez tartozó filtráció. A *Black–Scholes-modellben* a kötvényárfolyamatot és a részvényárfolyamatot a

$$\begin{aligned} \mathrm{d}B_t &= rB_t\,\mathrm{d}t, \quad B_0 = 1, \\ \mathrm{d}S_t &= \mu S_t\,\mathrm{d}t + \sigma S_t\,\mathrm{d}W_t, \quad S_0 = S_0, \end{aligned} \tag{18}$$

differenciálegyenletek határozzák meg.

A kötvényárra $B_t = \mathrm{e}^{rt}$ adódik, amit már a korábbiakban is feltettünk. A részvényárra pedig a 7. Példa szerint

$$S_t = S_0 \cdot \mathrm{e}^{\sigma W_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}.$$

3.2.1. Ekvivalens martingálmérték és az igazságos ár

Olyan mértéket szeretnénk megadni, mely szerint $(\overline{S}_t)$, a diszkontált részvényár martingál. Ezt a Girsanov-tétel segítségével adjuk meg. A (18) egyenlet alapján rövid számolás után kapjuk, hogy

$$\mathrm{d}\overline{S}_t = \overline{S}_t\left((\mu - r)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t\right) = \overline{S}_t \sigma \mathrm{d}\widetilde{W}_t^{\mu}, \tag{19}$$

ahol

$$\widetilde{W}_t^{\mu} = W_t + \frac{\mu - r}{\sigma} t. \tag{20}$$

Ha találunk egy olyan $\mathbf{P}_\mu$ mértéket mely szerint a $\widetilde{W}_t^{\mu}$ folyamat SBM, akkor a (19) differenciálegyenlet szerint az $(\overline{S}_t)$ folyamat $\mathbf{P}_\mu$-martingál. A Girsanov-tétel éppen ilyesmit állít. Legyen $\theta_t \equiv \theta = \frac{\mu - r}{\sigma}$, és

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}_\mu}{\mathrm{d}\mathbf{P}}\right|_{\mathcal{F}_T} = \Lambda_T = \exp\left\{-\int_0^t \theta \mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta^2 \mathrm{d}s\right\} = \mathrm{e}^{-\theta W_t - \frac{\theta^2 t}{2}}.$$

A Girsanov-tétel szerint $(\widetilde{W}_t^{\mu})$ éppen $\mathbf{P}_\mu$-SBM, és így $(\overline{S}_t)$ $\mathbf{P}_\mu$-martingál. Mivel $\Lambda_T > 0$ m.b., így $\mathbf{P} \sim \mathbf{P}_\mu$, tehát $\mathbf{P}_\mu$ EMM. Sőt, meg is határozhatjuk az $(\overline{S}_t)$ dinamikáját $\mathbf{P}_\mu$ szerint. Az (19) egyenletet megoldva

$$\overline{S}_t = S_0 \cdot \mathrm{e}^{\sigma \widetilde{W}_t^{\mu} - \frac{\sigma^2}{2}t}. \tag{21}$$

Megmutatjuk, hogy a Black–Scholes-modellben az igazságos ár a (17) formulában szereplő alsó becslés. Legyen f_T egy tetszőleges követelés, és tekintsük az

$$N_t = \mathbf{E}_{\mathbf{P}_\mu}\left[\mathrm{e}^{-rT} f_T | \mathcal{F}_t\right],\ 0 \le t \le T,$$

$\mathbf{P}_\mu$-martingált. A martingál reprezentációs tétel szerint létezik olyan Y_t adaptált folyamat, hogy

$$N_t = N_0 + \int_0^t Y_s \mathrm{d}\widetilde{W}_s^\mu, \tag{22}$$

ahol persze $N_0 = \mathbf{E}_{\mathbf{P}_\mu} \mathrm{e}^{-rT} f_T$. Definiáljuk a $\pi_t = (\beta_t, \gamma_t)$ stratégiát a

$$\beta_t = N_t - \frac{Y_t}{\sigma}, \quad \gamma_t = \frac{Y_t \mathrm{e}^{rt}}{\sigma S_t}$$

formulával.

7. Lemma. *A ($\pi_t = (\beta_t, \gamma_t)$) stratégia önfinanszírozó, és $\overline{X}_t^\pi = N_t$.*

Bizonyítás. A definíció alapján

$$X_t^\pi = \beta_t B_t + \gamma_t S_t = \left(N_t - \frac{Y_t}{\sigma}\right) \mathrm{e}^{rt} + \frac{Y_t}{\sigma} \mathrm{e}^{rt} = \mathrm{e}^{rt} N_t,$$

azaz $\overline{X}_t^\pi = N_t$.

Ahhoz, hogy megmutassuk, hogy π önfinanszírozó, a 6. Állítás szerint azt kell belátni, hogy $\mathrm{d}\overline{X}_t^\pi = \gamma_t \mathrm{d}\overline{S}_t$. Mivel $\overline{X}_t^\pi = N_t$, így (22) alapján

$$\mathrm{d}\overline{X}_t^\pi = \mathrm{d}N_t = Y_t \mathrm{d}\widetilde{W}_t^\mu.$$

Ugyanakkor (21) szerint

$$\gamma_t \mathrm{d}\overline{S}_t = \gamma_t \overline{S}_t \sigma \mathrm{d}\widetilde{W}_t^\mu = Y_t \mathrm{d}\widetilde{W}_t^\mu,$$

ahol az utolsó egyenlőségnél használtuk π definícióját. Ezzel az állítást beláttuk. □

Mivel

$$X_T^\pi = \mathrm{e}^{rT} N_T = \mathrm{e}^{rT} \mathbf{E}_{\mathbf{P}_\mu} \left[\mathrm{e}^{-rT} f_T | \mathcal{F}_T\right] = f_T,$$

így a lemma szerint π egy tökéletes f_T-fedezet $X_0^\pi = N_0 = \mathbf{E}_{\mathbf{P}_\mu} \mathrm{e}^{-rT} f_T$ kezdeti tőkével. Ezzel beláttuk az alábbit.

7. Tétel. *A Black–Scholes-modellben egy f_T követelés igazságos ára*

$$C_T(f_T) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}_\mu} \mathrm{e}^{-rT} f_T.$$

Továbbá a $\pi_t = (\beta_t, \gamma_t)$,

$$\beta_t = N_t - \frac{Y_t}{\sigma}, \quad \gamma_t = \frac{Y_t \mathrm{e}^{rt}}{\sigma S_t},$$

egy tökéletes fedezeti stratégia, ahol $N_t = \mathbf{E}_{\mathbf{P}_\mu}[\mathrm{e}^{-rT} f_T | \mathcal{F}_t]$, és $N_t = N_0 + \int_0^t Y_s \mathrm{d}\widetilde{W}_s^\mu$.

3.2.2. A Black–Scholes-formula

A Black–Scholes-formula az európai call opció árára vonatkozik. Egy K kötési árú európai call opció kifizetési függvénye $f_T = (S_T - K)_+$. A 7. Tétel szerint az igazságos ár

$$C_T(K) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}_\mu}\left(\mathrm{e}^{-rT}(S_T - K)_+\right).$$

A (21) formula alapján

$$S_T = S_0 \mathrm{e}^{rT} \mathrm{e}^{\sigma \widetilde{W}_T^\mu - \frac{\sigma^2}{2}T},$$

ahol $\widetilde{W}_T^\mu \sim \mathrm{N}(0,T)$ a $\mathbf{P}_\mu$ mérték szerint. Tehát, ha Z standard normális, akkor

$$\begin{aligned}
C_T(K) &= \mathbf{E}_{\mathbf{P}_\mu}\left(\mathrm{e}^{-rT}(S_T - K)_+\right) \\
&= \mathbf{E}_{\mathbf{P}_\mu}\left(S_0 \mathrm{e}^{\sigma \widetilde{W}_T^\mu - \frac{\sigma^2}{2}T} - \mathrm{e}^{-rT}K\right)_+ \\
&= \mathbf{E}_{\mathbf{P}_\mu}\left(S_0 \mathrm{e}^{\sigma\sqrt{T}Z - \frac{\sigma^2}{2}T} - \mathrm{e}^{-rT}K\right)_+ \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_\gamma^\infty \left(S_0 \mathrm{e}^{\sigma\sqrt{T}x - \frac{\sigma^2}{2}T} - \mathrm{e}^{-rT}K\right) \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x \\
&= S_0 \frac{1}{2\pi}\int_\gamma^\infty \mathrm{e}^{-\frac{(x-\sigma\sqrt{T})^2}{2}}\,\mathrm{d}x - \mathrm{e}^{-rT}K(1-\Phi(\gamma)) \\
&= S_0\left(1 - \Phi(\gamma - \sigma\sqrt{T})\right) - \mathrm{e}^{-rT}K(1-\Phi(\gamma)),
\end{aligned}$$

ahol

$$\gamma = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[\log\frac{K}{S_0} + \left(\frac{\sigma^2}{2} - r\right)T\right].$$

A

$$C_T(K) = S_0\left(1 - \Phi(\gamma - \sigma\sqrt{T})\right) - \mathrm{e}^{-rT}K(1-\Phi(\gamma))$$

árazási formula a híres *Black–Scholes-formula*, melyet 1973-ban publikált Fischer Black és Myron Scholes. A mögöttes elméletet később Merton általánosította. Munkájukért 1997-ben Scholes és Merton közgazdasági Nobel-díjat kapott, Black azért maradt ki, mert 1995-ben meghalt.

3.2.3. A CRR-formulától a Black–Scholes-formuláig

Ebben a részben megmutatjuk, hogy a Black–Scholes árazási formulát megkaphatjuk úgy, mint a homogén binomiális piacon a Cox–Ross–Rubinstein árazási formula határértékét. Ez a rész a [3] jegyzet 2.6 fejezetén alapul.

A folytonos modellt a $[0, T]$ intervallumon tekintjük. A folytonosan számított kamatláb $r > 0$, és $\sigma > 0$ rögzített paraméter, a volatilitás. A diszkrét modellben legyen

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_N = T, \quad \tau_i = \frac{i}{N} T.$$

Ezek a lehetséges kereskedési időpontok az N-lépéses binomiális modellben. Vezessük be a $T/N = h$ jelölést. Majd az $N \to \infty$ határátmenetet vizsgáljuk. Jelölje $B^N_{\tau_n}, S^N_{\tau_n}$ a kötvény, ill. a részvény árát a τ_n időpontban az N-edik piacon. Az N-lépéses diszkrét idejű homogén binomiális piac paraméterei legyenek r_N, a_N, és b_N.

Most megválasztjuk az r_N, a_N, b_N paramétereket. Legyen $B_0 = 1$. Folytonos időben a kötvényár t-ben $B_t = \mathrm{e}^{rt}$. Diszkrét időben a t-hez tartozó osztópont $\tau_{\lfloor tN/T \rfloor}$, ahol $\lfloor x \rfloor$ az x egészrészét jelöli, ezt a későbbiekben elhagyjuk. Tehát

$$\mathrm{e}^{rt} = B_t \approx B^N_{\tau_{\frac{tN}{T}}} = (1 + r_N)^{\lfloor \frac{tN}{T} \rfloor}.$$

Ha $r_N = rT/N = rh$, akkor a jobb oldal $N \to \infty$ esetén konvergál a bal oldalhoz. Legyen

$$r_N = r\frac{T}{N} = rh. \tag{23}$$

(A későbbiekben említés nélkül többször felhasználjuk, hogy $h = T/N$.) Hasonló okoskodással megmutatható, hogy ahhoz, hogy $\mathrm{Var} S^N_{\tau_N}$ határértéke $N \to \infty$ esetén létezzen, nagyjából az kell, hogy

$$\log \frac{1 + b_N}{1 + r_N} = \sigma\sqrt{h}, \quad \log \frac{1 + a_N}{1 + r_N} = -\sigma\sqrt{h} \tag{24}$$

teljesüljön. Az N-edik modellben így választjuk a paramétereket. Belátjuk, hogy ilyen választás mellett a K kötési árú európai call opció binomiális modell alapján számolt igazságos ára $N \to \infty$ esetén a Black–Scholes-árhoz konvergál.

A binomiális modellben meghatároztuk az egyértelmű ekvivalens martingálmértéket. Ez az volt, mely szerint a részvényár

$$p^*_N = \frac{r_N - a_N}{b_N - a_N}$$

valószínűséggel $(1+b_N)$-szeresére nő, $1-p^*_N$ valószínűséggel $(1+a_N)$-szeresére, és az N-lépés során ezek egymástól függetlenül történnek. Vagyis a részvényár eloszlása a $\mathbf{P}^*_N$ EMM szerint

$$S^N_{\tau_N} = S_0(1 + b_N)^{Y_N}(1 + a_N)^{N - Y_N} = S_0 \left(\frac{1 + b_N}{1 + a_N}\right)^{Y_N} (1 + a_N)^N,$$

ahol $Y_N \sim \mathrm{Binom}(N, p_N^*)$. A CRR árazási formula szerint a K kötési árú európai call igazságos ára

$$C_N(K) = \mathbf{E}_N^* \frac{(S_{\tau_N}^N - K)_+}{B_{\tau_N}^N}. \tag{25}$$

Most meghatározzuk ennek a határértékét. A centrális határeloszlás-tétel szerint

$$\frac{Y_N - Np_N^*}{\sqrt{Np_N^*(1-p_N^*)}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathrm{N}(0,1), \;\; N \to \infty, \tag{26}$$

ha $0 < \liminf_{N\to\infty} p_N^* \leq \limsup_{N\to\infty} p_N^* < 1$, de majd megmutatjuk, hogy ez teljesül, sőt $\lim_{N\to\infty} p_N^* = 1/2$. A fenti formula bal oldalát kialakítva az $S_{\tau_N}^N$-ben,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1+b_N}{1+a_N}\right)^{Y_N} (1+a_N)^N &= \exp\left\{ Y_N \log \frac{1+b_N}{1+a_N} + N \log(1+a_N) \right\} \\
&= \exp\left\{ \frac{Y_N - Np_N^*}{\sqrt{Np_N^*(1-p_N^*)}} \sqrt{Np_N^*(1-p_N^*)} \log \frac{1+b_N}{1+a_N} \right. \\
&\qquad \left. + N \left(p_N^* \log \frac{1+b_N}{1+a_N} + \log(1+a_N) \right) \right\}.
\end{aligned}$$

Látjuk, hogy (26) alapján a

$$\lim_{N\to\infty} \sqrt{Np_N^*(1-p_N^*)} \log \frac{1+b_N}{1+a_N}, \text{ és } \lim_{N\to\infty} N \left(p_N^* \log \frac{1+b_N}{1+a_N} + \log(1+a_N) \right)$$

határértékeket kell meghatároznunk. A (24) formula és a Taylor-sorfejtés szerint

$$\begin{aligned}
1 + b_N = \mathrm{e}^{\sigma\sqrt{h}}(1+r_N) &= \left(1 + \sigma\sqrt{h} + \frac{\sigma^2}{2}h + O(h^{3/2})\right)(1+rh) \\
&= 1 + \sigma\sqrt{h} + \left(\frac{\sigma^2}{2} + r\right) h + O(h^{3/2}),
\end{aligned}$$

így

$$b_N = \sigma\sqrt{h} + \left(\frac{\sigma^2}{2} + r\right) h + O(h^{3/2}),$$

és ugyanígy

$$a_N = -\sigma\sqrt{h} + \left(\frac{\sigma^2}{2} + r\right) h + O(h^{3/2}).$$

Innen kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
p_N^* = \frac{r_N - a_N}{b_N - a_N} &= \frac{\sigma\sqrt{h} - \frac{\sigma^2}{2}h + O(h^{3/2})}{2\sigma\sqrt{h} + O(h^{3/2}} \\
&= \frac{1}{2+O(h)} - \frac{\sigma\sqrt{h} + O(h)}{4+O(h)} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{\sigma}{4}\sqrt{h} + O(h).
\end{aligned}$$

Rögtön látjuk, hogy $p_N^* \to 1/2$, tehát (26) valóban teljesül. A kapott aszimptotikákat visszaírva a kérdéses limeszekbe ($h = T/N$), kapjuk hogy

$$\lim_{N\to\infty} \sqrt{Np_N^*(1-p_N^*)}\log\frac{1+b_N}{1+a_N} = \lim_{N\to\infty}\sqrt{p_N^*(1-p_N^*)}2\sigma\sqrt{T} = \sigma\sqrt{T},$$

és

$$\begin{aligned}
&\lim_{N\to\infty} N\left(p_N^*\log\frac{1+b_N}{1+a_N} + \log(1+a_N)\right) \\
&= \lim_{N\to\infty} N\left(\left[\frac{1}{2} - \frac{\sigma}{4}\sqrt{\frac{T}{N}} + O(N^{-1})\right]2\sigma\sqrt{\frac{T}{N}} - \sigma\sqrt{\frac{T}{N}} + r\frac{T}{N} + O(N^{-3/2})\right) \\
&= \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T.
\end{aligned}$$

Mindezt visszaírva (25)-be

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} C_N(K) &= \mathrm{e}^{-rT}\mathbf{E}^*\left(S_0\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{T}Z + T\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)} - K\right)_+ \\
&= \mathbf{E}^*\left(S_0\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{T}Z - \frac{\sigma^2}{2}T} - \mathrm{e}^{-rT}K\right)_+,
\end{aligned}$$

ami éppen a Black–Scholes-formulában kapott ár. Ezzel beláttuk, amit akartunk.

Megjegyzés. Itt persze a határátmenet jogosságáról hallgattunk. Valójában van egy eloszlásbeli konvergenciánk, mert (26)-ból következik a részvényár eloszlásbeli konvergenciája. Innen a momentumkonvergencia tétel alapján akkor következik a várható értékek konvergenciája, ha megmutatjuk az egyenletes integrálhatóságot. Mint már sokszor, ezt nem bizonyítjuk.

Azt is fontos megemlíteni, hogy nemcsak a részvényár lejáratkori eloszlása konvergál a Black–Scholes-modellben szereplő lejáratkori eloszláshoz, hanem az egész folyamat is (tehát mint a $[0, T]$ intervallumon értelmezett folytonos függvény) eloszlásban konvergál az exponenciális Brown-mozgáshoz. Ennek igazolása azonban már kifinomultabb technikát igényel.

4. Diffúziós folyamatok

Ebben a fejezetben a diffúziós folyamatok elméletének alapjait mutatjuk be. Az elméletnek több lényegesen különböző tárgyalásmódja van.

Először az analitikus tárgyalást követjük, melyben a folyamatot az infinitezimális generátorán keresztül írjuk le, majd a Kolmogorov előre és hátra egyenlet segítségével egy parciális differenciálegyenletet (PDE) írunk fel a folyamat átmenetvalószínűségeire. Bizonyos feltételek mellett a kapott PDE-nek van megoldása, így a Kolmogorov-féle konzisztencia tétel szerint a diffúziós folyamat létezik. A trajektóriák folytonosságát a Kolmogorov-Centsov tétellel lehet igazolni. Ez a klasszikus hozzáállás, mely Kolmogorov és Feller munkáin alapul.

A fejezet második részében a valószínűséges hozzállást tárgyaljuk. Ekkor a folyamatot egy sztochasztikus differenciálegyenlet (SDE) megoldásaként definiáljuk. Megvizsgáljuk, hogy milyen feltételek mellett van az SDE-nek megoldása, és a megoldások tulajdonságait elemezzük. A diffúziós folyamatok ezen tárgyalásmódját Lévy és Itô dolgozták ki.

4.1. Markov folyamatok általános elmélete

A Markov folyamatok elméletét Breiman [1] jegyzete alapján tekintjük át.

4.1.1. Definíciók

Az (X_t) folyamat (valós) *Markov-folyamat*, ha minden $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ Borel-halmazra, t, τ számokra

$$\mathbf{P}\{X_{t+\tau} \in B | X_s, s \leq t\} = \mathbf{P}\{X_{t+\tau} \in B | X_t\}.$$

Ez persze pontosan azt jelenti, mint amit korábban is jelentett a Markov-tulajdonság, nevezetesen, hogy a folyamat csak a jelenén keresztül függ a múltjától. Másképp az egyetlen fontos dolog az egész múlt ismeretében a jelen.

Megmutatható, hogy (X_t) Markov-folyamat esetén a

$$p_{t_2,t_1}(B|x) = \mathbf{P}\{X_{t_2} \in B | X_{t_1} = x\}, \quad t_2 > t_1, B \in \mathcal{B},$$

valószínűségek választhatók úgy, hogy

- ha x rögzített, akkor $p_{t_2,t_1}(\cdot|x)$ valószínűségi mérték;
- ha $B \in \mathcal{B}$ rögzített, akkor $p_{t_2,t_1}(B|\cdot)$ mérhető függvény.

Ezeket a valószínűségeket nevezzük az (X_t) folyamat *átmenetvalószínűségeinek.*

Legyen $\tau < s < t$, $B \in \mathcal{B}$. Ekkor a toronyszabály és a Markov-tulajdonság alkalmazásával

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{X_t \in B|X_\tau\} &= \mathbf{E}\left[\mathbf{P}\{X_t \in B|X_\tau, X_s\}|X_\tau\right] \\ &= \mathbf{E}\left[\mathbf{P}\{X_t \in B|X_s\}|X_\tau\right] \\ &= \int \mathbf{P}\{X_t \in B|X_s = y\}\mathbf{P}\left\{X_s \in \mathrm{d}y|X_\tau\right\} \\ &= \int_{\mathbb{R}} p_{t,s}(B|y)p_{s,\tau}(\mathrm{d}y|X_\tau).\end{aligned}$$

A $\mathbf{P}\left\{X_s \in \mathrm{d}y|X_\tau\right\}$ formula azt jelenti, hogy az X_s véletlen változó X_τ-ra vonatkozó feltételes eloszlásfüggvénye szerint integrálunk. Ez pedig éppen azt jelenti, hogy

$$p_{t,\tau}(B|x) = \int p_{t,s}(B|y)p_{s,\tau}(\mathrm{d}y|x).$$

Ezzel beláttuk a Chapman–Kolmogorov-egyenleteket:

Chapman–Kolmogorov-egyenletek. *Egy Markov-folyamat átmenetvalószínűségei teljesítik a*

$$p_{t,\tau}(B|x) = \int p_{t,s}(B|y)p_{s,\tau}(\mathrm{d}y|x), \quad \tau < s < t, B \in \mathcal{B},$$

egyenleteket.

Ez heurisztikusan a következőt jelenti. A $p_{t,\tau}(B|x)$ az a valószínűség, hogy ha τ-ban x-ben vagyunk, akkor t-ben a B halmazba jutunk. Vegyünk egy tetszőleges köztes s időpontot. Mivel τ-ban $X_\tau = x$, így s-ben az X_s eloszlását $X_\tau = x$-re feltételesen kell venni, ami $p_{s,\tau}(\cdot|x)$. Vagyis annak a valószínűsége, hogy s-ben pontosan $X_s = y$ az $p_{s,\tau}(\mathrm{d}y|x)$. (Ez persze csak formális, hiszen folytonos eloszlás esetén annak a valószínűsége, hogy pont y az érték, az 0.) Most, ha s-ben éppen y az érték, akkor annak a valószínűsége, hogy t-ben B-be jutunk, éppen $p_{t,s}(B|y)$. És pont ezt mondja a Chapman–Kolmogorov-egyenlet.

A továbbiakban stacionárius folyamatokkal foglalkozunk. Az (X_t) folyamat *stacionárius*, ha az átmenetvalószínűségek nem függnek az időtől, csak a megváltozástól, azaz $p_{t,\tau}(B|x) = p_{t-\tau}(B|x)$. Ekkor $p_t(B|x) = p_{t,0}(B|x)$, és a Chapman–Kolmogorov-egyenletek a

$$p_{t+s}(B|x) = \int p_t(B|y)p_s(\mathrm{d}y|x)$$

formulára egyszerűsödnek.

A továbbiakban feltesszük, hogy (X_t) sztochasztikusan folytonos a 0-ban, azaz

$$X_t \xrightarrow{\mathbf{P}} X_0, \quad t \to 0,$$

vagy másképpen

$$p_t(\cdot|x) \xrightarrow{\text{gy}} \delta_x(\cdot), \quad t \to 0,$$

ahol a konvergencia a mértékek gyenge konvergenciáját jelenti, δ_x pedig a Dirac-δ x-ben, azaz az a mérték, ami egységnyi tömeget tesz az x pontba, máshova pedig nem tesz tömeget.

Ha az (X_t) folyamatot egy valószínűséggel az x pontból indítjuk, akkor a folyamat eloszlását $\mathbf{P}_x$ jelöli, ill. $\mathbf{E}_x$ az e szerint vett várható érték. Azaz

$$\mathbf{P}_x\{X_t \in B\} = \mathbf{P}\{X_t \in B|X_0 = x\}, \quad \mathbf{E}_x f(X_t) = \mathbf{E}\left[f(X_t)|X_0 = x\right].$$

Az (X_t) Markov-folyamat *infinitezimális generátora* az

$$f \mapsto Sf : Sf(x) = \lim_{t\to 0+} \frac{1}{t}\mathbf{E}_x\left[f(X_t) - f(x)\right], \tag{27}$$

formulával definiált operátor, amennyiben a határérték létezik. Tehát az S operátor egy mérhető korlátos valós függvényhez rendel egy másik függvényt, amennyiben a definiáló határérték létezik. Az S operátor értelmezési tartománya $\mathcal{D}(S)$.

A következőkben meghatározzuk az infinitezimális operátort a Poisson-folyamat és a Wiener-folyamat esetén.

8. Példa. Poisson-folyamat. Sztochasztikus folyamatok kurzusról tudjuk, hogy a Poisson-folyamat Markov-folyamat. Legyen (N_t) egy 1 intenzitású Poisson-folyamat és f egy korlátos mérhető függvény. Ha a Poisson-folyamat a $t = 0$ időpontban x értéket vesz fel, akkor $t > 0$-ban $x, x + 1, x + 2, \ldots$ értékeket vehet fel, és mivel egy t hosszú intervallumon az ugrások száma Poisson(t) eloszlású, így

$$\mathbf{E}_x f(N_t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\mathrm{e}^{-t} f(k + x).$$

Ezt Taylor-sorba fejtve

$$\mathbf{E}_x f(N_t) = f(x)\mathrm{e}^{-t} + f(x + 1)t\mathrm{e}^{-t} + O(t^2).$$

Innen kapjuk

$$
\begin{aligned}
Sf(x) &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\mathbf{E}_x\left[f(N_t)-f(x)\right] \\
&= \lim_{t\to 0}\left(f(x)\frac{\mathrm{e}^{-t}-1}{t}+f(x+1)\mathrm{e}^{-t}\right) \\
&= f(x+1)-f(x).
\end{aligned}
$$

Látjuk, hogy ez minden korlátos mérhető függvény esetén létezik, így a Poisson-folyamat infinitezimális generátorának értelmezési tartománya a korlátos mérhető függvények halmaza.

9. Példa. Wiener-folyamat Legyen most (W_t) egy Wiener-folyamat, és $f \in C^2$ kétszer folytonosan differenciálható függvény. Ekkor a Taylor-sorfejtés szerint

$$
f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + o(h^2),
$$

és így felhasználva, hogy $\mathbf{E}_0 W_t = 0$, $\mathbf{E}_0 W_t^2 = t$, kapjuk

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}_x f(W_t) &= \mathbf{E}_0 f(x+W_t) \\
&= \mathbf{E}_0\left[f(x)+W_t f'(x)+\frac{W_t^2}{2}f''(x)+o(W_t^2)\right] \\
&= f(x)+\frac{t}{2}f''(x)+o(t).
\end{aligned}
$$

Ezért

$$
Sf(x) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\mathbf{E}_x\left[f(W_t)-f(x)\right] = \frac{f''(x)}{2}.
$$

Látjuk, hogy $C^2 \subset \mathcal{D}(S)$, és persze $\mathcal{D}(S)$ nem a korlátos mérhető függvények halmaza.

4.1.2. Kolmogorov egyenletek

A hátra egyenlet. Legyen $t > 0$ rögzített, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, és $\tau > 0$ kicsi. Ekkor a toronyszabály és a markovitás szerint

$$
\mathbf{P}\{X_{t+\tau} \in B | X_0 = x\} = \mathbf{E}\left[\mathbf{P}\{X_{t+\tau} \in B | X_\tau\} | X_0 = x\right].
$$

A $\varphi_t(x) = p_t(B|x)$ jelöléssel ez

$$
\varphi_{t+\tau}(x) = \mathbf{E}_x \varphi_t(X_\tau),
$$

melyet kicsit átalakítva

$$\frac{1}{\tau}\left[\varphi_{t+\tau}(x)-\varphi_t(x)\right]=\frac{1}{\tau}\mathbf{E}_x\left[\varphi_t(X_\tau)-\varphi_t(x)\right].$$

Tartassuk τ-t 0-hoz, így

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t(x)=\left(S\varphi_t\right)(x).$$

Visszaírva a φ definícióját a *Kolmogorov-féle hátra egyenletet* kapjuk:

$$\frac{\partial}{\partial t}p_t(B|x)=\left(Sp_t(B|\cdot)\right)(x). \tag{28}$$

Az előre egyenlet. Legyen $t>0$ rögzített, $f\in\mathcal{D}(S)$. Ismét a toronyszabály és a markovitás szerint

$$\mathbf{E}_x f(X_{t+\tau})=\mathbf{E}_x\left[\mathbf{E}_x[f(X_{t+\tau})|X_t]\right],$$

amit

$$\int f(y)p_{t+\tau}(\mathrm{d}y|x)=\int\int f(z)p_\tau(\mathrm{d}z|y)p_t(\mathrm{d}y|x)$$

alakba is írhatunk. Mindkét oldalból kivonva a

$$\mathbf{E}_x f(X_t)=\int f(y)p_t(\mathrm{d}y|x)$$

mennyiséget, majd τ-val osztva

$$\int f(y)\frac{p_{t+\tau}(\mathrm{d}y|x)-p_t(\mathrm{d}y|x)}{\tau}=\int\frac{1}{\tau}\left[\mathbf{E}_y f(X_\tau)-f(y)\right]p_t(\mathrm{d}y|x).$$

Ebben az egyenletben τ-t 0-hoz tartatva

$$\int f(y)\frac{\partial}{\partial t}p_t(\mathrm{d}y|x)=\int(Sf)(y)p_t(\mathrm{d}y|x) \tag{29}$$

adódik.

Most egy kis kitérő. Definiáljuk az S operátor adjungáltját. Egy μ mérték esetén jelölje $S^*\mu$ azt a mértéket, amire teljesül, hogy

$$\int(Sf)(y)\mu(\mathrm{d}y)=\int f(y)(S^*\mu)(\mathrm{d}y).$$

Ha ez elég sok f függvényre és μ mértékre teljesül, akkor ez egyértelmű.

Az adjungáltat beírva (29)-be

$$\int f(y)\frac{\partial}{\partial t}p_t(\mathrm{d}y|x) = \int f(y)\left(S^* p_t(\cdot|x)\right)(\mathrm{d}y),$$

ahonnan kapjuk a *Kolmogorov-féle előre egyenletet*:

$$\frac{\partial}{\partial t}p_t(B|x) = \left(S^* p_t(\cdot|x)\right)(B). \tag{30}$$

Megjegyzés. Ez a levezetés több ponton is erősen hiányos volt. A leginkább kérdéses pont a $\tau \to 0$ határátmenet a (29) egyenlet előtt. A mértékek egy folytonos t paramétertől függő családját deriváltuk le t szerint. Abszolút folytonos esetben ez hihető, hiszen ekkor

$$p_t(\mathrm{d}y|x) = \rho_t(y|x)\mathrm{d}y,$$

és így a kérdéses derivált

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{\rho_{t+\tau}(y|x) - \rho_t(y|x)}{\tau} = \frac{\partial}{\partial t}\rho_t(y|x).$$

Általános esetben mind az előre, mind a hátra egyenlet teljesüléséhez mindenféle feltételeket kell tenni a folyamatra. Ezeket persze mellőzzük. Azt viszont fontos megjegyezni, hogy, amint a „bizonyításból” is kitűnt, az előre egyenlet sokkal erősebb feltételek mellett igaz, nem olyan általános mint a hátra egyenlet.

10. Példa. Poisson-folyamat. Legyen (N_t) egy 1 intenzitású Poisson-folyamat. Korábban láttuk, hogy

$$(Sf)(x) = f(x+1) - f(x).$$

Ezek szerint a hátra egyenlet

$$\frac{\partial}{\partial t}p_t(B|x) = p_t(B|x+1) - p_t(B|x).$$

Az előre egyenlethez meg kell határoznunk az S operátor adjungáltját. Az adjungáltat definiáló formula szerint

$$\int [f(x+1) - f(x)]\mu(\mathrm{d}x) = \int f(x)(S^*\mu)(\mathrm{d}x).$$

Látjuk, hogy a jobb oldalon megjelenik az f integrálja μ szerint -1-szeres szorzóval, valamint megjelenik az f eltoltjának az integrálja. Ez alapján nagyjából kitalálható mi lesz az adjungált. Legyen $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ esetén

$$S^*\mu(A) = \mu(A-1) - \mu(A),$$

ahol persze $A - 1 = \{a - 1 : a \in A\}$. Egy integráltranszformációval látjuk, hogy ez valóban kielégíti az adjungált definiáló egyenletét. Tehát az előre egyenlet

$$\frac{\partial}{\partial t} p_t(B|x) = p_t(B - 1|x) - p_t(B|x).$$

A kezdeti feltétel mindkét egyenlet esetén

$$p_0(B|x) = \delta_x(B) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in B, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

11. Példa. Wiener-folyamat. Legyen (W_t) SBM. Láttuk, hogy $(Sf)(x) = f''(x)/2$, ahonnan a hátra egyenlet

$$\frac{\partial}{\partial t} p_t(B|x) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} p_t(B|x).$$

A sűrűségre $p_t(\mathrm{d}y|x) = \rho_t(y|x)\mathrm{d}y$ a

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_t(y|x) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho_t(y|x)$$

adódik.

Az előre egyenlet felírásához megint az S adjungáltját kell megadni. Legyen a μ mérték abszolút folytonos a Lebesgue-mértékre, $\mu(\mathrm{d}x) = g(x)\mathrm{d}x$, és legyen f kompakt tartójú függvény. Ekkor kétszer parciálisan integrálva

$$\int f''(x)g(x)\mathrm{d}x = \int f(x)g''(x)\mathrm{d}x$$

adódik. Innen látjuk, hogy $(S^*\mu)(\mathrm{d}x) = g''(y)\mathrm{d}y$. Tehát az előre egyenlet

$$\frac{\partial}{\partial t} p_t(y|x)\mathrm{d}y = \frac{\partial^2}{\partial y^2} p_t(y|x)\mathrm{d}y$$

alakú, az átmenetsűrűségekre pedig

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_t(y|x) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \rho_t(y|x)$$

adódik. Ez éppen a hővezetés egyenlete.

4.1.3. Diffúziós folyamatok

A következőkben olyan folyamatokat vizsgálunk, amelyek lokálisan úgy viselkednek, mint a Wiener-folyamat.

Tekintsük a következő sztochasztikus differenciálegyenlet:

$$\mathrm{d}Y_t = \mu(Y_t)\mathrm{d}t + \sigma(Y_t)\mathrm{d}W_t.$$

Ekkor $h > 0$ esetén

$$\Delta Y_t = Y_{t+h} - Y_t = \int_t^{t+h} \mu(Y_s)\mathrm{d}s + \int_t^{t+h} \sigma(Y_s)\mathrm{d}W_s,$$

és ezért

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[\Delta Y_t | Y_t = y\right] &= \mu(y)h + o(h),\\ \mathbf{E}\left[(\Delta Y_t)^2 | Y_t = y\right] &= \sigma^2(y)h + o(h).\end{aligned}$$

Ez motiválja a következő definíciót. A *diffúziós folyamat* olyan (Y_t) folytonos trajektóriájú Markov-folyamat, melyre

(i) $\mathbf{P}\{|\Delta Y_t| > \varepsilon | Y_t = y\} = o(h)$;

(ii) $\mathbf{E}\left(\Delta_\varepsilon Y_t | Y_t = y\right) = \mu(y)h + o(h)$;

(iii) $\mathbf{E}\left((\Delta_\varepsilon Y_t)^2 | Y_t = y\right) = \sigma^2(y)h + o(h)$,

ahol $\Delta Y_t = Y_{t+h} - Y_t$,

$$\Delta_\varepsilon Y_t = \begin{cases} \Delta Y_t, & \text{ha } |\Delta Y_t| \le \varepsilon,\\ 0, & \text{különben,}\end{cases}$$

és a $o(\cdot)$ relációk $h \to 0$ esetén értendők.

A definíció alapján meghatározzuk a folyamat infinitezimális generátorát. Legyen $f \in C^2$. Ekkor

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_x f(Y_t) &= \mathbf{E}_x\left[f(x) + (Y_t - x)f'(x) + (Y_t - x)^2\frac{f''(x)}{2} + o((Y_t - x)^2)\right]\\ &= f(x) + t\mu(x)f'(x) + t\sigma^2(x)\frac{f''(x)}{2} + o(t).\end{aligned}$$

Ebből könnyen adódik az infinitezimális generátor, nevezetesen

$$(Sf)(x) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\mathbf{E}_x\left[f(Y_t) - f(x)\right] = \mu(x)f'(x) + \sigma^2(x)\frac{f''(x)}{2}.$$

Jelölje $\rho_t(y|x)$ a folyamat sűrűségét, azaz $p_t(\mathrm{d}y|x) = \rho_t(y|x)\mathrm{d}y$.
A Kolmogorov-féle hátra egyenletet felírva:

$$\frac{\partial}{\partial t} p_t(y|x) = \mu(x)\frac{\partial}{\partial x} p_t(y|x) + \frac{\sigma^2(x)}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} p_t(y|x).$$

A Kolmogorov-féle előre egyenlethez először a infinitezimális operátor adjungáltját kell meghatározni. Ez úgy megy, mint a Wiener-folyamat esetén. Legyen a μ mérték abszolút folytonos a Lebesgue-mértékre, $\mu(\mathrm{d}y) = g(y)\mathrm{d}y$. Ha f kompakt tartójú, akkor a parciális integrálás formulájában a megváltozása mindig eltűnik, így

$$\begin{aligned}\int (Sf)(y)g(y)\mathrm{d}y &= \int \left[\mu(y)f'(y) + \frac{\sigma^2(y)}{2}f''(y)\right] g(y)\mathrm{d}y \\ &= \int f(y)\left[-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\mu(y)g(y)\right) + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}\left(\sigma^2(y)g(y)\right)\right]\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Tehát

$$\left(S^* p_t(\cdot|x)\right)(\mathrm{d}y) = \left[-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\mu(y)\rho_t(y|x)\right) + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}\left(\sigma^2(y)\rho_t(y|x)\right)\right]\mathrm{d}y,$$

ahonnan kapjuk az előre egyenletet:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_t(y|x) = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(y)\rho_t(y|x)\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\sigma^2(y)\rho_t(y|x)\right).$$

12. Példa. Ornstein–Uhlenbeck-folyamat. Tekintsük az ún. *Langevin-egyenletet*

$$\mathrm{d}Y_t = -\mu Y_t\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}W_t, \quad Y_0 \text{ független az } \sigma(W_s : s \geq 0)\ \sigma\text{-algebrától},$$

ahol $\mu > 0$, $\sigma > 0$. A homogén egyenlet megoldása $\mathrm{e}^{-\mu t}$, és így differenciálegyenletek elméletéből ismert módszer szerint $\mathrm{e}^{\mu t}Y_t$ differenciálját tekintjük. Ez

$$\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{\mu t}Y_t\right) = \mathrm{e}^{\mu t}\,\mathrm{d}Y_t + \mu\,\mathrm{e}^{\mu t}Y_t\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{\mu t}\,\sigma\,\mathrm{d}W_t,$$

amit integrálva kapjuk a Langevin-egyenlet megoldását

$$Y_t = \mathrm{e}^{-\mu t}\left(Y_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{\mu s}\,\sigma\,\mathrm{d}W_s\right).$$

Mivel determinisztikus függvény Wiener-folyamat szerinti sztochasztikus integrálja normális eloszlású, így

$$Y_t - \mathrm{e}^{-\mu t} Y_0$$

normális eloszlású, várható értéke és szórásnégyzete

$$\begin{aligned} \mathbf{E} Y_t &= \mathrm{e}^{-\mu t}\, \mathbf{E} Y_0, \\ \mathbf{E} Y_t^2 &= \mathrm{e}^{-2\mu t}\, \mathbf{E} Y_0^2 + \mathrm{e}^{-2\mu t} \int_0^t \sigma^2\, \mathrm{e}^{2\mu s}\, \mathrm{d}s = \mathrm{e}^{-2\mu t}\, \mathbf{E} Y_0^2 + \frac{\sigma^2}{2\mu}\,(1 - \mathrm{e}^{-2\mu t}). \end{aligned}$$

Innen látjuk, hogy ha $t \to \infty$, akkor Y_t eloszlásban konvergál egy $\mathrm{N}(0, \sigma^2/(2\mu))$ eloszláshoz. Ez adja az ötletet, hogy válasszuk az Y_0 kezdeti értéket ilyen eloszlásúnak. Ezzel a kezdeti eloszlással

$$Y_t \sim \mathrm{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{2\mu}\right),$$

tehát (Y_t) egy Gauss-folyamat. Meghatározzuk a kovarianciafüggvényét, ahonnan látjuk, hogy (Y_t) egy stacionárius Gauss-folyamat.

Vegyük észre, hogy az

$$Y_t = \mathrm{e}^{-\mu t} \left(Y_0 + \int_0^t \sigma\, \mathrm{e}^{\mu u}\, \mathrm{d}W_u \right)$$

előállítás alapján

$$Y_t - \mathrm{e}^{-\mu(t-s)} Y_s = \mathrm{e}^{-\mu t} \int_s^t \sigma\, \mathrm{e}^{\mu u}\, \mathrm{d}W_u, \;\; t > s, \tag{31}$$

ami független a $\sigma(W_u : u \leq s)$ σ-algebrától. Ezért

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(Y_t, Y_s) &= \mathbf{E} Y_t Y_s = \mathbf{E} \left(Y_t - \mathrm{e}^{-\mu(t-s)} Y_s + \mathrm{e}^{-\mu(t-s)} Y_s \right) Y_s \\ &= \mathrm{e}^{-\mu(t-s)}\, \mathbf{E} Y_s^2 = \frac{\sigma^2}{2\mu} \mathrm{e}^{-\mu(t-s)}, \end{aligned}$$

azaz az (Y_t) folyamat valóban stacionárius.

A (31) formulából következik, hogy az (Y_t) folyamat Markov-folyamat, és meghatározzuk az átmenetsűrűségeket is. Valóban, ha $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, akkor

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\{Y_t \in A | Y_u : u \leq s, Y_s = x\} \\ &= \mathbf{P}\{Y_t - \mathrm{e}^{-\mu(t-s)} Y_s \in A - \mathrm{e}^{-\mu(t-s)} x | Y_u : u \leq s, Y_s = x\} \\ &= \mathbf{P}\{Y_t - \mathrm{e}^{-\mu(t-s)} Y_s \in A - \mathrm{e}^{-\mu(t-s)} x\}. \end{aligned}$$

Az $Y_t - \mathrm{e}^{-\mu(t-s)} Y_s$ változó 0 várható értékű normális eloszlású, melynek szórásnégyzete (31) alapján

$$\mathbf{E}\left(Y_t - \mathrm{e}^{-\mu(t-s)} Y_s\right)^2 = \mathrm{e}^{-2\mu(t-s)} \int_s^t \sigma^2 \mathrm{e}^{2\mu u} \mathrm{d}u = \frac{\sigma^2}{2\mu}\left(1 - \mathrm{e}^{-2\mu(t-s)}\right).$$

Ebből következik, hogy a

$$p_t(\cdot|x) \sim \mathrm{N}\left(\mathrm{e}^{-\mu t} x, \frac{\sigma^2}{2\mu}\left(1 - \mathrm{e}^{-2\mu(t-s)}\right)\right),$$

vagyis az átmenetsűrűségek

$$\rho_t(y|x) = \sqrt{\frac{\mu}{\pi\sigma^2(1 - \mathrm{e}^{-2\mu t})}} \exp\left\{-\frac{\mu(y - \mathrm{e}^{-\mu t} x)^2}{\sigma^2(1 - \mathrm{e}^{-2\mu t})}\right\}.$$

Az (Y_t) folytonos trajektóriájú stacionárius Markov-folyamatot Ornstein–Uhlenbeck-folyamatnak (OU) nevezzük. Megmutatható, hogy az OU-folyamat az egyetlen ilyen tulajdonságú folyamat.

Speciális kezdeti feltétel mellett ($Y_0 \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2/(2\mu))$) tehát expliciten ki tudtuk számolni az átmenetsűrűségeket. Általános esetben ez persze nem megy, de az átmenetsűrűségekre mindig felírhatjuk a Kolmogorov-egyenleteket. A Kolmogorov-hátra egyenlet

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_t(y|x) = -\mu x \frac{\partial}{\partial x}\rho_t(y|x) + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\rho_t(y|x),$$

alakú. Ezt az egyenletet *Fokker–Planck-egyenletnek* nevezik. Az előre egyenlet pedig

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_t(y|x) = -\frac{\partial}{\partial y}\left(-\mu y \rho_t(y|x)\right) + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\rho_t(y|x).$$

4.2. Sztochasztikus differenciálegyenletek

Az alábbiakban definiáljuk az SDE erős megoldását, és elegendő feltételt adunk az erős megoldás létezésére és egyértelműségére.

Adottak

- egy $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mező;
- ezen egy $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ filtráció;
- egy $W_t = (W_t^1, \ldots, W_t^r)$ r-dimenziós standard Wiener-folyamat az $(\mathcal{F}_t)$ filtrációhoz;

- $f : \mathbb{R}^d \times [0,T] \to \mathbb{R}^d$, $\sigma : \mathbb{R}^d \times [0,T] \to \mathbb{R}^{d\times r}$ mérhető függvények; és
- $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^d$ $\mathcal{F}_0$-mérhető véletlen változó.

Az (X_t) (d-dimenziós) folyamat *erős megoldása* a

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X_t &= f(X_t,t)\,\mathrm{d}t + \sigma(X_t,t)\,\mathrm{d}W_t, \\ X_0 &= 0, \end{aligned} \tag{32}$$

SDE-nek, ha $\int_0^t f(X_s,s)\mathrm{d}s$ és $\int_0^t \sigma(X_s,s)\mathrm{d}W_s$ jól definiált minden $t \in [0,T]$ esetén, és (32) integrált változata teljesül, azaz

$$X_t = \xi + \int_0^t f(X_s,s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(X_s,s)\,\mathrm{d}W_s, \quad \text{minden } t \in [0,T] \text{ esetén m.b.}$$

Ezt koordinátánként kiírva

$$X_t^i = \xi^i + \int_0^t f^i(X_s,s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \sum_{j=1}^r \sigma_{i,j}(X_s,s)\,\mathrm{d}W_s^j, \quad i = 1,2,\ldots,d.$$

Fontos látni, hogy amikor erős megoldásról beszélünk, akkor nemcsak a (32) adott, hanem a benne szereplő r-dimenziós Wiener-folyamat, a hozzá tartozó filtráció, és a kezdeti feltétel (nem csak a kezdeti eloszlás) is.

A d-dimenziós vektorok esetén $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_d^2}$, a szokásos euklideszi norma, a $\sigma \in \mathbb{R}^{d\times r}$ $d \times r$-es mátrixok esetén pedig $|\sigma| = \sqrt{\sum_{i,j} \sigma_{ij}^2}$,

A közönséges differenciálegyenletek elméletében a Picard–Lindelöf-tétel állítja a megoldás létezését és egyértelműségét abban az esetben, amikor az együtthatók Lipschitz-folytonosak. Itt is ez a helyzet.

8. Tétel. *Tegyük fel, hogy az (32) SDE-ben szereplő függvényekre*

$$\begin{aligned} &|f(x,t) - f(y,t)| + |\sigma(x,t) - \sigma(y,t)| \le K|x-y|, \\ &|f(x,t)|^2 + |\sigma(x,t)|^2 \le K_0(1+|x|^2), \\ &\mathbf{E}|\xi|^2 < \infty. \end{aligned}$$

Ekkor az (32) egyenletnek létezik egy egyértelmű erős megoldása, melyre

$$\mathbf{E} \sup_{0\le t\le T} |X_t|^2 \le C(1 + \mathbf{E}|\xi|^2).$$

Bizonyítás. Csak a $d = r = 1$ esetet igazoljuk, az általános eset ugyanígy megy, csak a jelölés elbonyolódik.

A bizonyításhoz szükségünk van a közönséges differenciálegyenletek elméletéből ismert Gronwall-lemmára.

8. Lemma. *Legyenek α, β integrálható függvények, melyekre*

$$\alpha(t) \leq \beta(t) + H \int_a^t \alpha(s)\,\mathrm{d}s, \quad t \in [a, b].$$

Ekkor

$$\alpha(t) \leq \beta(t) + H \int_a^t e^{H(t-s)} \beta(s)\,\mathrm{d}s.$$

Unicitás. Legyen X_t, Y_t két megoldás. Ekkor

$$X_t - Y_t = \int_0^t (f(X_s, s) - f(Y_s, s))\,\mathrm{d}s + \int_0^t (\sigma(X_s, s) - \sigma(Y_s, s))\,\mathrm{d}W_s.$$

Mivel $(a+b)^2 \leq 2a^2+2b^2$, így a 4. Tétel (ii), a Cauchy–Schwartz-egyenlőtlenség és a feltétel szerint

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X_t - Y_t)^2 &\leq 2\,\mathbf{E}\left(\int_0^t (f(X_s, s) - f(Y_s, s))^2 \mathrm{d}s\right)^2 \\
&\quad + 2\,\mathbf{E}\int_0^t (\sigma(X_s, s) - \sigma(Y_s, s))^2 \mathrm{d}s \\
&\leq 2(T+1)K^2 \int_0^t \mathbf{E}(X_s - Y_s)^2\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

A $\varphi(t) = \mathbf{E}(X_t - Y_t)^2$ jelölést bevezetve kaptuk, hogy

$$\varphi(t) \leq 2(T+1)K^2 \int_0^t \varphi(s)\,\mathrm{d}s.$$

A Gronwall-lemma szerint $\varphi(t) \equiv 0$, azaz $X_t = Y_t$ m.b. Mivel $X_t - Y_t$ folytonos, így adódik az is, hogy a két folyamat nem megkülönböztethető, azaz

$$\mathbf{P}\{X_t = Y_t,\ \forall t \in [0, T]\} = 1.$$

Ezzel az egyértelműséget igazoltuk.

Létezés. Vázlat. A létezés bizonyítás a Picard–Lindelöf-tétel bizonyításából ismerős iterációval történik. Legyen $X_t^{(0)} \equiv \xi$, és ha $X_t^{(n)}$ adott, akkor

$$X_t^{(n+1)} = \xi + \int_0^t f(X_s^{(n)}, s)\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(X_s^{(n)}, s)\mathrm{d}W_s.$$

Mivel

$$\begin{aligned}X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)} = &\int_0^t \big(f(X_s^{(n)}, s) - f(X_s^{(n-1)}, s)\big)\,\mathrm{d}s \\ &+ \int_0^t \big(\sigma(X_s^{(n)}, s) - \sigma(X_s^{(n-1)}, s)\big)\,\mathrm{d}W_s,\end{aligned}$$

így, mint az egyértelműség igazolásánál kapjuk, hogy

$$\mathbf{E}(X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)})^2 \le L \int_0^t \mathbf{E}(X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)})^2 \,\mathrm{d}s,$$

ahol $L = 2(T+1)K^2$. Ezt iterálva, majd a két integrált felcserélve

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)})^2 &\le L \int_0^t \mathbf{E}(X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)})^2 \,\mathrm{d}s \\ &\le L^2 \int_0^t \int_0^s \mathbf{E}(X_u^{(n-1)} - X_u^{(n-2)})^2 \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}s \\ &\le L^2 \int_0^t (t-s)\mathbf{E}(X_s^{(n-1)} - X_s^{(n-2)})^2 \,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Ezt folytatva, és a ξ-re tett feltevést felhasználva

$$\mathbf{E}(X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)})^2 \le L^n \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} \mathbf{E}(X_s^1 - \xi)^2 \,\mathrm{d}s \le C\frac{(LT)^n}{n!}.$$

Az integrálban a martingál részt és a korlátos változású részt szétválasztva a Doob maximál egyenlőtlenséggel az is megmutatható, hogy

$$\mathbf{E} \sup_{0\le t\le T} (X_t^{(n+1)} - X_t^n)^2 \le C' \frac{(LT)^n}{n!}.$$

Innen a Csebisev-egyenlőtlenség szerint

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\left\{ \sup_{0\le t\le T} |X_t^{(n+1)} - X_t^n| > n^{-2} \right\} \le \sum_{n=1}^{\infty} C' n^4 \frac{(LT)^n}{n!} < \infty.$$

Tehát az első Borel–Cantelli-lemma alapján a

$$\sum_{n=0}^{\infty} (X_t^{(n+1)} - X_t^n)$$

végtelen sor egyenletesen konvergens majdnem biztosan, és az összeg persze megoldása a SDE-nek. Ezzel az állítást beláttuk. $\square$

Hivatkozások

[1] Leo Breiman: *Probability.* Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont. 1968.

[2] Csörgő Sándor: *Fejezetek a valószínűségelméletből*, Polygon, 2010.

[3] Robert J. Elliott, P. Ekkehard Kopp: *Pénzpiacok matematikája*, Typotex, 2000.

[4] Ioannis Karatzas, Steven E. Shreve: *Brownian motion and stochastic calculus*, Springer, 1998.