Lineáris konstans együtthatós differenciaegyenletek

Legyen $r \geq 1$ egész, $a_{r-1}, \ldots, a_0, b \in \mathbb{C}$ rögzített konstans, továbbá $x(n)$, $n = 1,2,\ldots$ komplex értékű sorozat. Ekkor az

$$x(n+r) + a_{r-1}x(n+r-1) + \cdots + a_0 x(n) = b\,, \qquad n = 1,2,\ldots$$

egyenletrendszert r-edrendű lineáris konstans együtthatós differenciaegyenletnek nevezzük. Az differenciaegyenlet lineáris, mert a bal oldalon az $x(n+r), \ldots, x(n)$ értékek lineáris kombinációja szerepel, és konstans együtthatós, ugyanis a lineáris kombináció együtthatói nem függnek n értékétől. Az egyenlet homogén, ha $b=0$, és inhomogén, ha $b\neq 0$. A cél az egyenlet általános megoldásának meghatározása, tehát azon $x(n)$ sorozatok felírása, melyekre a fenti egyenlőség teljesül minden n pozitív egész esetén.

A homogén eset

A homogén differenciaegyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^r + a_{r-1}\lambda^{r-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0\,,$$

melynek a multiplicitást is figyelembe véve pontosan r darab komplex gyöke van. Tegyük fel, hogy a különböző karakterisztikus gyökök $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{C}$, melyek multiplicitása rendre $m_1, \ldots, m_s$. (Nyilván $m_1 + \cdots + m_s = r$.) Az

$$\begin{array}{rrcr}
x_1(n) = \lambda_1^n\,, & x_2(n) = n\lambda_1^n\,, & \ldots\,, & x_{m_1}(n) = n^{m_1-1}\lambda_1^n\,, \\
x_{m_1+1}(n) = \lambda_2^n\,, & x_{m_1+2}(n) = n\lambda_2^n\,, & \ldots\,, & x_{m_1+m_2}(n) = n^{m_2-1}\lambda_2^n\,, \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
x_{m_1+\cdots+m_{s-1}+1}(n) = \lambda_s^n\,, & x_{m_1+\cdots+m_{s-1}+2}(n) = n\lambda_s^n\,, & \ldots\,, & x_{m_1+\cdots+m_s}(n) = n^{m_s-1}\lambda_s^n\,,
\end{array}$$

sorozatokat a differenciaegyenlet alaprendszerének nevezzük. Ekkor az $x(n)$, $n = 1,2,\ldots$, sorozat pontosan akkor megoldása az egyenletnek, ha előáll az alaprendszer elemeiből képzett lineáris kombinációban, tehát valamely $c_1, \ldots, c_r \in \mathbb{C}$ együtthatókkal

$$x(n) = c_1 x_1(n) + \cdots + c_r x_r(n)\,, \qquad n = 1,2,\ldots$$

Az inhomogén eset

Az inhomogén esetben az általános megoldás úgy kapható meg, hogy a homogén eset általános megoldásához hozzáadjuk az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását. Ha m_0 jelöli az 1 értéknek, mint a karakterisztikus egyenlet megoldásának multiplicitását, (ami 0, ha az 1 nem gyöke a karakterisztikus egyenletnek,) akkor az inhomogén egyenletnek létezik $x_0(n) = c_0 n^{m_0}$ alakú megoldása. A $c_0 \in \mathbb{C}$ érték könnyen meghatározható, ha az $x_0(n)$ sorozatot behelyettesítjük az egyenletbe. Ebből az inhogén általános megoldás

$$x(n) = x_0(n) + c_1 x_1(n) + \cdots + c_r x_r(n)\,, \qquad n = 1,2,\ldots$$

Kezdeti érték problémák

Sok esetben előírjuk, hogy a differenciaegyenlet megoldása milyen értéket vegyen fel bizonyos időpontokban, tehát megköveteljük, hogy

$$x(n_1)=y_1\,,\qquad \dots,\qquad x(n_k)=y_k\,,$$

teljesüljön valamely $k\geq 1$, $1\leq n_1<\cdots<n_k$ egészekre, és $y_1,\dots,y_k\in\mathbb{C}$ konstansokra. Ezeket kezdeti feltételeknek vagy peremfeltételeknek nevezzük. A lineáris konstans együtthatós esetben a kezdeti érték problémának létezik egyértelmű megoldása, ha $k=r$, több megoldása van, ha $k<r$, és nincs megoldása, ha $k>r$. A kezdeti érték probléma megoldását vagy megoldásait úgy határozzuk meg, hogy a kezdeti feltételekbe behelyettesitjük a differenciaegyenlet általános megoldását, és kiszámoljuk a $c_1,\dots,c_r$ konstansokat.

Példa: Fibonacci számok

A Fibonacci számokat az

$$x(1)=x(2)=1\,,\qquad x(n)=x(n-1)+x(n-2)\,,\quad n\geq 3\,,$$

rekurzió definiálja. Ez egy kezdeti érték probléma, ugyanis az

$$x(n+2)-x(n+1)-x(n)=0\,,\qquad n=1,2,\dots$$

másodrendű differenciaegyenlet van kiegészítve az $x(1)=1$ és $x(2)=1$ kezdeti feltétellel. Mivel a feltételek száma szintén kettő, a problémának létezik egyértelmű megoldása. Az egyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet a $\lambda^2-\lambda-1=0$, melynek megoldásai

$$\lambda_1=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\,,\qquad \text{és}\qquad \lambda_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,.$$

Ekkor az egyenlet alaprendszere $x_1(n)=\lambda_1^n$, $x_2(n)=\lambda_2^n$, amiből a differenciaegyenlet általános megoldása

$$x(n)=c_1x_1(n)+c_2x_2(n)=c_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n+c_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n,\qquad n=1,2,\dots\,,$$

ahol c_1 és c_2 tetszőleges valós konstansok. A kezdeti feltételekbe helyettesítve kapjuk,

$$x(1)=c_1\lambda_1+c_2\lambda_2=1\,,\qquad x(2)=c_1\lambda_1^2+c_2\lambda_2^2=1\,,$$

amiből jön, hogy

$$c_1=\frac{\lambda_2-1}{\lambda_1(\lambda_2-\lambda_1)}=-\frac{1}{\sqrt{5}}\,,\qquad \text{és}\qquad c_2=\frac{\lambda_1-1}{\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)}=\frac{1}{\sqrt{5}}\,.$$

Tehát a Fibonacci számok a következő zárt formulával adhatóak meg:

$$x(n)=\frac{\big(1+\sqrt{5}\big)^n-\big(1-\sqrt{5}\big)^n}{\sqrt{5}2^n}\,.$$

Ajánlott irodalom

Hatvani, Krisztin, Makay: Dinamikus modellek a közgazdaságtanban, Polygon, 2001.