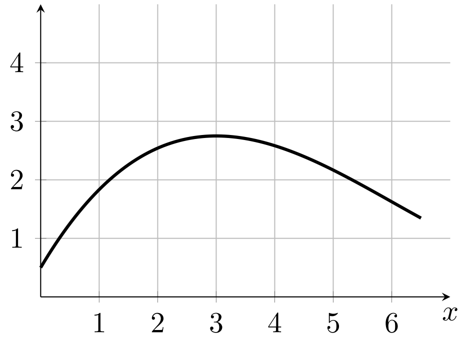
Biomatematika feladatok

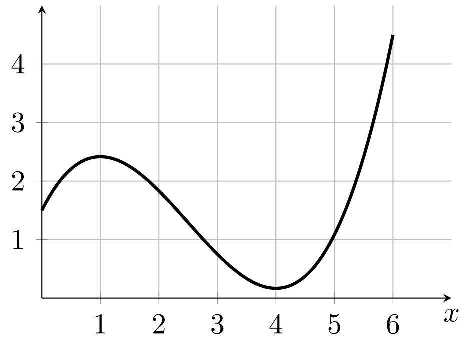
1. Függvények deriválása és integrálása

1.1. Rajzoljuk be az érintőegyeneseket az alábbi f függvénygörbékhez az $x = 1, 3, 5$ pontokban, majd olvassuk le az f függvény és az f' derivált értékét ezeken az x helyeken. Írjuk fel az érintőegyenes egyenletét is az $x = 5$ pontban!

a.



b.



1.2. Deriváljuk le az alábbi f függvényeket!

a. $f(x) = 1 + x + x^2/2 + x^3/6$

b. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}$

c. $f(x) = 2\sqrt{x} - 3^x + \ln(x) + e^2$

d. $f(x) = e^3 + \lg(x) - 1/(2x^2) + x^5/5$

e. $f(x) = 2^x - 4\log_3 x - 1/(\pi\sqrt{x}) + \sqrt{2}$

1.3. Az alábbiakban egy f függvény f' deriváltja van megadva. Számoljuk ki a derivált értékeit az $x = 0, 1, \ldots, 5$ pontokban, majd ábrázoljuk az iránymezőt! Ennek segítségével vázlatosan rajzoljuk fel az f függvény grafikonját! A derivált egyértelműen meghatározza az f függvényt?

a. $f'(x) = (x - 1)^2(x - 4)/4$

b. $f'(x) = (x - 3)^2/4$

c. $f'(x) = (x - 1)(x - 4)/4$

1.4. Az **1.2.** feladatban a deriválás során az alábbi f' függvényeket kellett kapni. Most dolgozzunk visszafelé: integrálással határozzuk meg az f' függvények primitív függvényeit! Egyértelműen visszakapjuk az **1.2.** feladatban megadott f függvényeket?

a. $f'(x) = 1 + x + x^2/2$

b. $f'(x) = 1/(2\sqrt{x}) + 1/(3\sqrt[3]{x^2}) + 1/(4\sqrt[4]{x^3})$

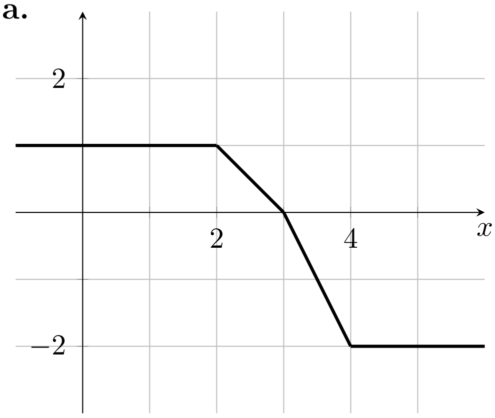
c. $f'(x) = 1/\sqrt{x} - 3^x \ln 3 + 1/x$

d. $f'(x) = 1/(x \ln 10) + 1/x^3 + x^4$

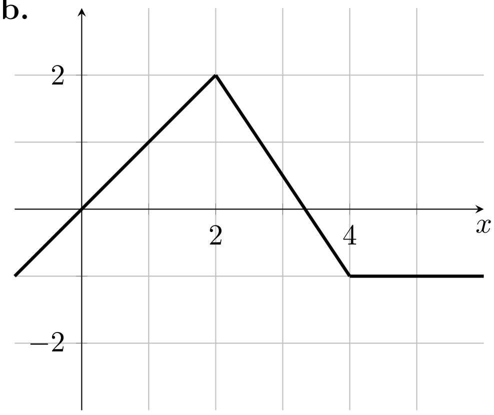
e. $f'(x) = 2^x \ln 2 - 4/(x \ln 3) - 1/(2\pi\sqrt{x^3})$

1.5. Az alábbi grafikonon egy f függvény van ábrázolva. Adjuk meg a függvény határozott integrálját, tehát a görbe alatti területet az 1 és 5 pontok között!

a.



b.



1.6. Jelölje $m(x)$ valamely anyag grammban kifejezett mennyiségét a szervezetben az $x \geq 0$ időpontban! A változási sebességet az alábbi függvény írja le:

$$v(x) = m'(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{1 + x^2}.$$

a. Adjuk meg a v függvény primitív függvényeit!

b. Mennyivel változik az anyag mennyisége az $x = 1$ és az $x = 3$ időpillanatok között? Mennyi az átlagos változási sebesség ezen az időintervallumon?

c. Adjuk meg az $m(x)$ függvényt az $m(0) = 1$ kezdeti feltétel mellett!

1.7. Jelölje $m(x)$ a baktériumon mennyiségét egy tenyészetben az $x \geq 0$ időpontban! A baktériumok mennyiségének a változási sebességét az alábbi függvény írja le:

$$v(x) = m'(x) = xe^{-x^2}.$$

a. Határozzuk meg a v függvény primitív függvényeit!

b. Mennyivel nő vagy csökken a baktériumok mennyisége az $x = 0$ és az $x = 2$ időpontok között? Mennyi az átlagos változási sebesség ezen az intervallumon?

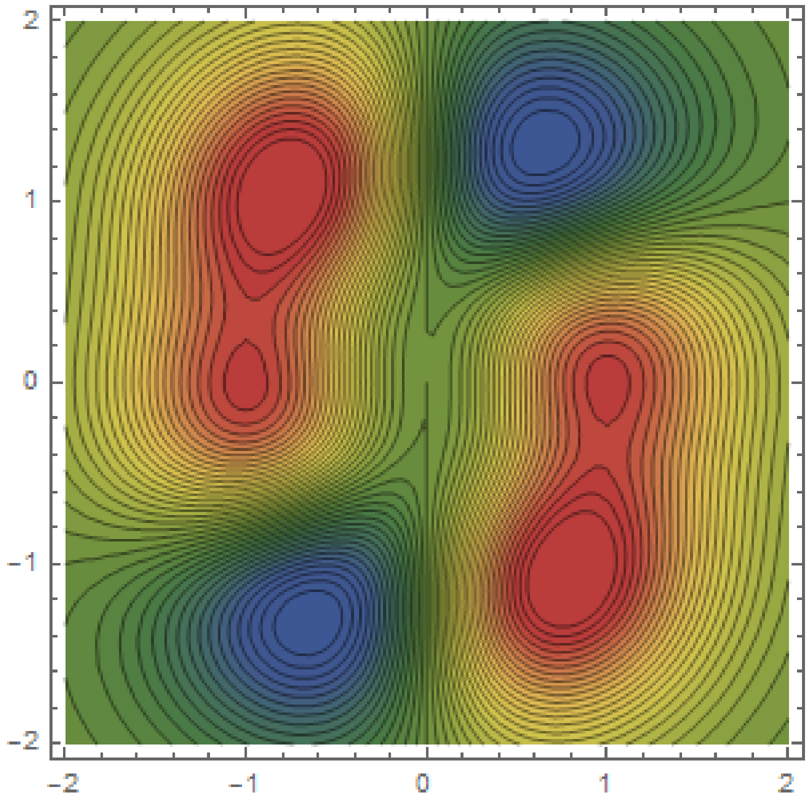
c. A tenyészetben az $x = 0$ időpontban $m(0) = 10$ milligramm baktérium található. Adjuk meg az $m(x)$ függvényt ezzel a kezdeti feltétellel!

2. Kétváltozós függvények

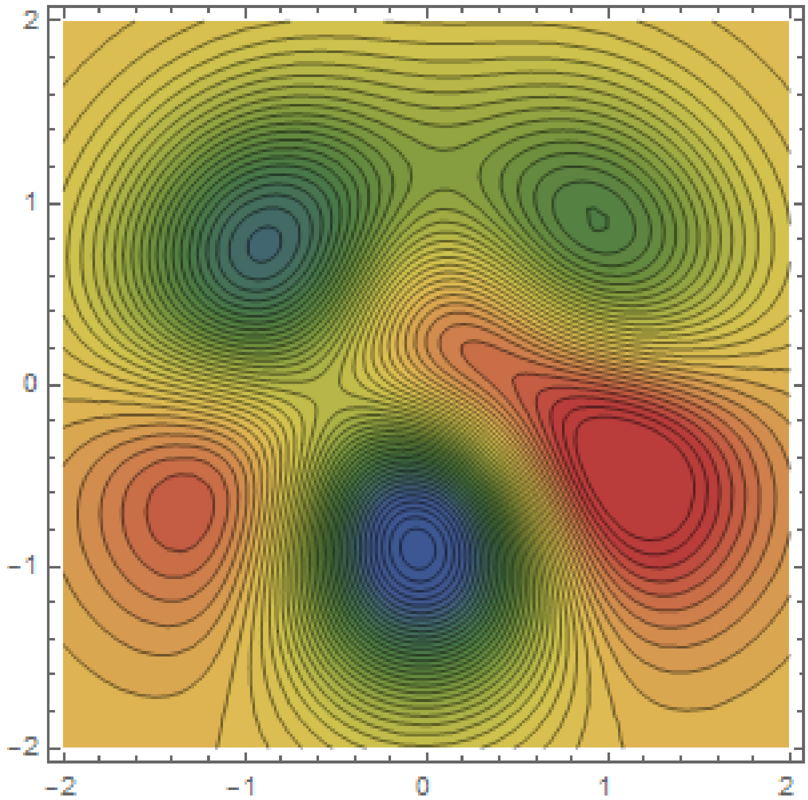
2.1. Az alábbi ábrákon egy-egy kétváltozós $f(x, y)$ függvény szintvonalas ábrája látható. Határozzuk meg a minimum- és maximumhelyeket, valamint a nyeregpontokat! Vázlatosan rajzoljuk be a gradiensvektort az egész koordinátájú pontokban és a megadott (x_0, y_0) pontban! Adjuk meg a parciális deriváltak előjelét is az (x_0, y_0)

pontban! Merre kell elindulnunk ebből pontból, ha el akarjuk érni a legközelebbi lokális maximumot? Mi történik, ha elengedünk egy golyót ebből a pontból?

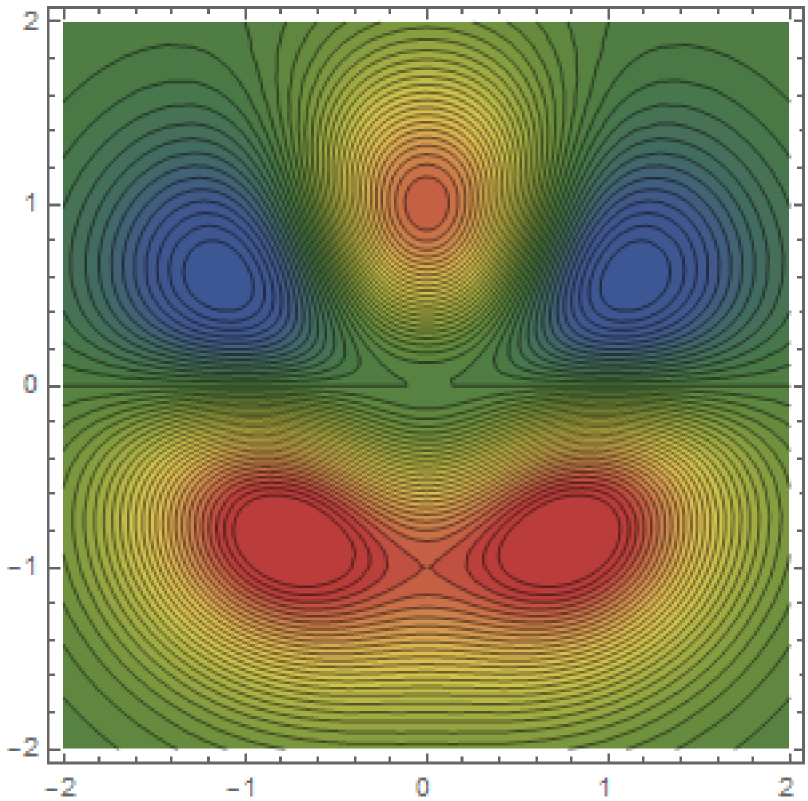
a. $(x_0, y_0) = (0.5, 0.2)$



b. $(x_0, y_0) = (0, 0.6)$



c. $(x_0, y_0) = (-0.4, -0.4)$



2.2. Írjuk fel az alábbi függvények parciális deriváltjait és a gradiensvektort! Adjuk meg a nevezetes pontokat, továbbá határozzuk meg a nevezetes pontok típusát (minimum, maximum vagy nyeregpont)!

a. $f(x, y) = x^2 - 4x + 2y^2 - 4y - 5$

b. $f(x, y) = -x^2 - 2x - y^2 - 4y + xy$

c. $f(x, y) = x^2 - y^2 - xy + 2x - 2y + 10$

3. A Malthus-modell

3.1. Legyen $p(t)$ egy populáció mérete a $t \geq 0$ időpontban. A populációban a szaporodási ráta 2, ezért az egyedszámot a $p'(t) = 2p(t)$ differenciálegyenlet írja le.

a. Ábrázoljuk az egyenlet által definiált iránymezőt azon (t, p) rácspontokban, ahol $t = 0, 1, \ldots, 4$ és $p = -2, -1, 0, 1, 2$. Vázlatosan ábrázoljuk az egyenlet megoldását a $p(0) = -1$, a $p(0) = 0$ illetve a $p(0) = +1$ kezdeti feltétel mellett. Határozzuk meg az egyensúlyi helyzetet, és döntsük el, hogy ez stabil vagy instabil.

b. Oldjuk meg a differenciálegyenletet tetszőleges $p(0)$ kezdeti feltétel mellett. Mennyi idő alatt duplázódik meg a populáció egyedszáma? Függ ez az idő a kezdeti feltételtől?

3.2. Egy sejttenyészetben jelölje $p(t)$ a sejtek számát a $t \geq 0$ időpontban. A sejtek 0.5-ös rátával pusztulnak el, a sejtek számát a $p'(t) = -0.5p(t)$ differenciálegyenlet írja le.

a. Ábrázoljuk az egyenlet által definiált iránymezőt azon (t, p) rácspontokban, ahol $t = 0, 1, \ldots, 4$ és $p = -2, -1, 0, 1, 2$. Vázlatosan ábrázoljuk az egyenlet megoldását a $p(0) = -2$, a $p(0) = 0$ illetve a $p(0) = +2$ kezdeti feltétel mellett. Adjuk meg az egyensúlyi helyzetet, és döntsük el, hogy ez stabil vagy instabil.

b. Oldjuk meg a differenciálegyenletet tetszőleges $p(0)$ kezdeti feltétel mellett. Mennyi idő alatt feleződik meg a sejtek száma? Függ ez az idő a kezdeti feltételtől?

3.3. Egy halgazdaságban jelölje $m(t)$ a halállomány tonnában kifejezett tömegét $t \geq 0$ hónap elteltével. A halak szaporodási rátája 1, és havonta 4 tonna halat halásznak le az állományból. Emiatt a halállomány tömegét az $m'(t) = m(t) - 4$ differenciálegyenlettel írhatjuk le.

a. Ábrázoljuk az egyenlet által definiált iránymezőt azon (t, m) rácspontokban, ahol $t = 0, 1, \ldots, 4$ és $m = 0, 2, 4, 6, 8$. Határozzuk meg az egyensúlyi helyzetet, és döntsük el, hogy ez stabil vagy instabil. Vázlatosan ábrázoljuk az egyenlet megoldását az $m(0) = 3$, az $m(0) = 4$ illetve az $m(0) = 5$ kezdeti feltétel mellett.

b. Oldjuk meg a differenciálegyenletet tetszőleges $m(0)$ kezdeti feltétel mellett. Ha kezdetben 3 tonna volt az állomány mérete, akkor mennyi idő alatt hal ki az állomány?

3.4. Legyen $m(t)$ egy gyógyszer milligrammban kifejezett mennyisége egy páciens szervezetében a kezelés kezdete után $t \geq 0$ órával. A gyógyszer óránkénti kiürülési rátája 0.2. A gyógyszert infúzióban adagoljuk a beteg számára 1 mg/óra sebességgel. Ezek alapján a gyógyszer mennyisége az $m'(t) = -0.2m(t) + 1$ differenciálegyenlettel írható le.

a. Ábrázoljuk az egyenlet által definiált iránymezőt azon (t, m) rácspontokban, ahol $t = 0, 1, \ldots, 4$ és $m = 0, 2.5, 5, 7.5, 10$. Határozzuk meg az egyensúlyi helyzetet, és döntsük el, hogy ez stabil vagy instabil. Vázlatosan ábrázoljuk az egyenlet megoldását az $m(0) = 0$, az $m(0) = 5$ illetve az $m(0) = 10$ kezdeti feltétel mellett.

b. Oldjuk meg a differenciálegyenletet tetszőleges $m(0)$ kezdeti feltétel mellett. Ha a kezelés kezdetekor 1 mg gyógyszer volt a beteg szervezetében, akkor a gyógyszer mennyisége mennyi idő alatt éri el a 4 mg szintet?

4. A Verhulst-modell

4.1. Egy populáció területfoglalását vizsgáljuk. Jelölje $p(t)$ az elfoglalt terület teljes területhez viszonyított arányát a $t \geq 0$ időpontban. Legyen a kolonizációs ráta 5, az eltartóképesség 1, a kihalási ráta pedig 3. Ekkor a populáció méretének a változását a $p'(t) = 5p(t)(1 - p(t)) - 3p(t)$ differenciálegyenlet írja le.

a. Ábrázoljuk az egyenlet által meghatározott érintőmezőt azon (t, p) pontokban, ahol $t, p = 0, 0.2, \ldots, 1$. Ezek alapján vázlatosan ábrázoljuk az egyenlet megoldását a $p(0) = 0, 0.2, \ldots, 1$ kezdeti feltételek mellett. Határozzuk meg az egyensúlyi helyzeteket, és döntsük el, hogy ezek stabilak vagy instabilak.

b. Adjuk meg a differenciálegyenlet formális megoldását tetszőleges $p(0)$ kezdeti feltétel mellett.

c. Jelölje k a kolonizációs rátát, és tekintsük a $p'(t) = kp(t)(1-p(t))-3p(t)$ egyenletet. Mik azok a $k \geq 0$ értékek, amikor a populáció a $p(0)$ kezdeti feltételtől függetlenül mindenképpen kihal?

4.2. Valamilyen vadállomány méretének a változását vizsgáljuk, jelölje $p(t)$ a populáció nagyságát a $t \geq 0$ időpontban. A kolonizációs ráta 2, az eltartóképesség 5, és az állományból a vadászok állapotfüggő módon $4p(t)$ sebességgel lőnek ki egyedeket. A folyamatot a $p'(t) = 2p(t)(5 - p(t)) - 4p(t)$ differenciálegyenlet írja le.

a. Ábrázoljuk az egyenlet által meghatározott érintőmezőt azon (t, p) pontokban, ahol $t = 0, 1, \ldots, 4$ és $p = 0, 1, \ldots, 5$. Ezek alapján vázlatosan ábrázoljuk az egyenlet megoldását a $p(0) = 0, 1, \ldots, 5$ kezdeti feltételek mellett. Adjuk meg az egyensúlyi helyzeteket, és döntsük el, hogy ezek stabilak vagy instabilak.

b. Adjuk meg a differenciálegyenlet formális megoldását tetszőleges $p(0)$ kezdeti feltétel mellett.

c. Tegyük fel, hogy a vadászok $ap(t)$ sebességgel lövik ki az egyedeket, ahol $a \geq 0$ rögzített konstans. Tekintsük a $p'(t) = 2p(t)(5 - p(t)) - ap(t)$ egyenletet. Mik azok az a értékek, amikor a populáció a $p(0)$ kezdeti feltételtől függetlenül mindenképpen kihal?

4.3. Egy sejtpopuláció növekedését vizsgáljuk, jelölje $m(t)$ az össztömeget milligrammban kifejezve $t \geq 0$ óra elteltével. Legyen a növekedési ráta 4, az eltartóképesség 1, és a populációból időegységenként 1 milligramm sejtet távolítunk el. Ekkor a folyamatot a $p'(t) = 4p(t)(1 - p(t)) - 1$ differenciálegyenlet írja le.

a. Ábrázoljuk az egyenlet által meghatározott érintőmezőt azon (t, p) pontokban, ahol $t, p = 0, 0.25, \ldots, 1$. Ezek alapján vázlatosan ábrázoljuk az egyenlet megoldását a $p(0) = 0, 0.25, \ldots, 1$ kezdeti feltételek mellett. Adjuk meg az egyensúlyi helyzeteket, és döntsük el, hogy ezek stabilak vagy instabilak.

b. Tegyük fel, hogy időegységenként $a \geq 0$ milligramm sejtet távolítunk el, és tekintsük a $p'(t) = 4(t)(1 - p(t)) - a$ egyenletet. Mik azok az $a \geq 0$ értékek, amikor a populáció a $p(0)$ kezdeti feltételtől függetlenül mindenképpen kihal?

4.4. Jelölje $m(t)$ egy ország államadósságát milliárd petákban t év elteltével. Az adósság alakulását a következő egyenlettel modellezhetjük: $m'(t) = 0.1m(t)(m(t) - 10) + 1.6$. Ábrázoljuk az egyenlet által meghatározott érintőmezőt azon (t, m) pontokban, ahol $t, m = 0, 2, \ldots, 10$. Ezek alapján vázlatosan ábrázoljuk az egyenlet megoldását az $m(0) = 0, 2, \ldots, 10$ kezdeti feltételek mellett. Adjuk meg az egyensúlyi helyzeteket, és döntsük el, hogy ezek stabilak vagy instabilak.

5. Kétfajos modellek

Az alábbi feladatokban jelölje $x(t)$ illetve $y(t)$ két faj egyedszámát a t időpontban. A populációk méretét minden esetben egy egyenletrendszerrel írhatjuk fel. Minden feladatban válaszoljunk a következő kérdésekre:

a. Az egyes fajok számára előnyös, közömbös vagy hátrányos az interakció? Hogyan nevezzük ezt a kölcsönhatást? Mondjunk példát ilyen típusú interakcióra.

b. Írjuk fel formulával és ábrázoljuk a nullklínákat, majd adjuk meg az egyensúlyi helyzeteket. Határozzuk meg a nullklínák közötti tartományokon a deriváltak előjelét. Vázlatosan ábrázoljuk az irányvektorokat a nullklínákon és a nullklínák közötti tartományokon. Ezek segítségével következtessünk az egyensúlyi helyzetek stabilitási tulajdonságaira. Hosszú távon mi lesz a populációk sorsa?

5.1. $x' = 2x(2 - x), \quad y' = y(3 - y).$

5.2. $x' = 2x(1 - x), \quad y' = xy - y/2.$

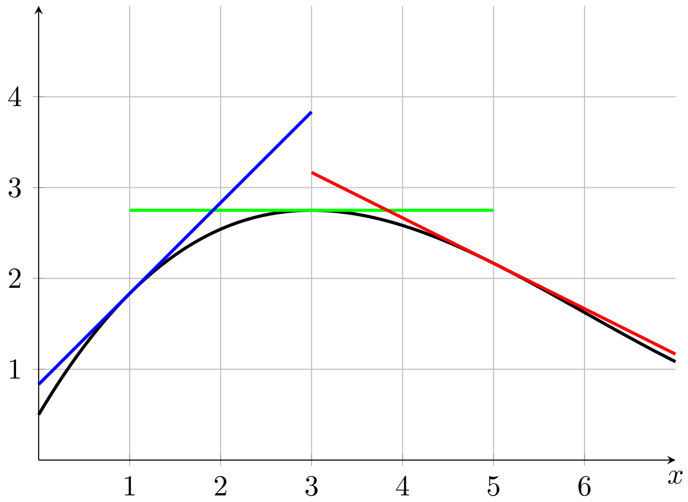
5.3. $x' = 5x(1 - x/2) - xy, \quad y' = y(1 - y/2) - xy/4.$

5.4. $x' = x(1 - x + y/4), \quad y' = y(1 - y + x/2)$

5.5. $x' = 5x(1 - x/4) - xy, \quad y' = y(2 - x - y).$

Megoldások

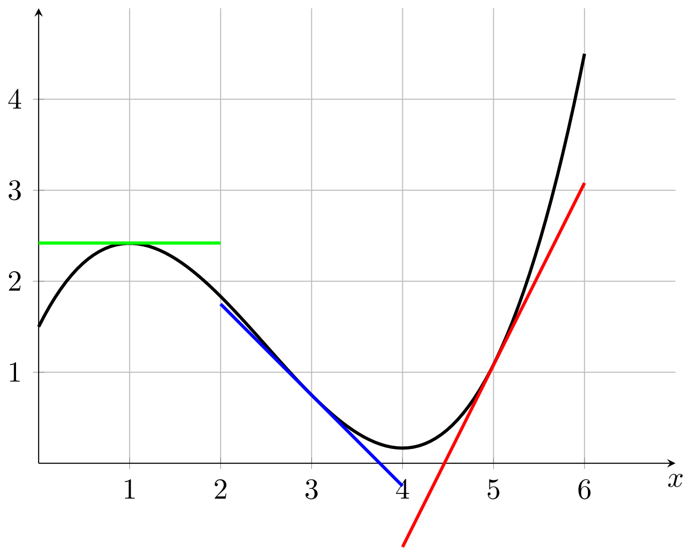
1.1. a.



x	1	3	5
f	1.8	2.75	2.2
f'	1	0	-0.5

Érintőegyenes egyenlete:
$y = 2.2 - 0.5(x - 5)$

b.



x	1	3	5
f	2.4	0.75	1.1
f'	0	-1	2

Érintőegyenes egyenlete:
$y = 1.1 + 2(x - 5)$

1.2. **a.** $f'(x) = 1 + x + x^2/2$

b. $f'(x) = 1/(2\sqrt{x}) + 1/(3\sqrt[3]{x^2}) + 1/(4\sqrt[4]{x^3})$

c. $f'(x) = 1/\sqrt{x} - 3^x \ln 3 + 1/x$

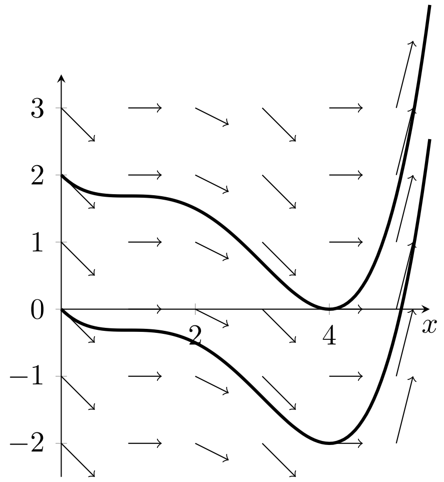
d. $f'(x) = 1/(x \ln 10) + 1/x^3 + x^4$

e. $f'(x) = 2^x \ln 2 - 4/(x \ln 3) - 1/(2\pi\sqrt{x^3})$

1.3. A derivált nem határozza meg egyértelműen az $f(x)$ függvényt. Végtelen sok primitív függvény létezik, melyek mind párhuzamosak egymással.

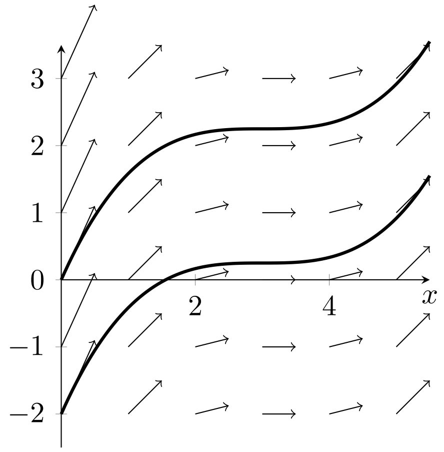
a. Az $f(0) = 0$ illetve az $f(0) = 2$ kezdeti értékek tartozó megoldás:

x	$f'(x)$
0	-1
1	0
2	-0.5
3	-1
4	0
5	4



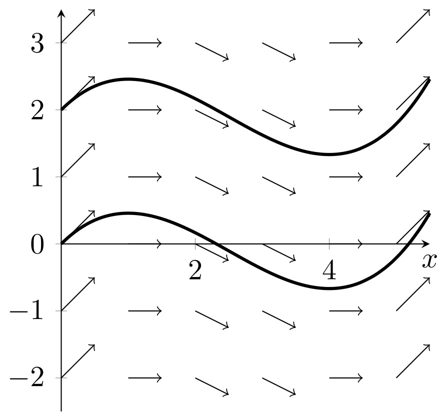
b. Az $f(0) = 0$ illetve az $f(0) = -2$ kezdeti értékek tartozó megoldás:

x	$f'(x)$
0	2.25
1	1
2	0.25
3	0
4	0.25
5	1



c. Az $f(0) = 0$ illetve az $f(0) = 2$ kezdeti értékek tartozó megoldás:

x	$f'(x)$
0	1
1	0
2	-0.5
3	-0.5
4	0
5	1



1.4. Az f' deriváltaknak végtelen sok primitív függvényük van, ezért nem kapjuk vissza egyértelműen az **1.2.** feladatban megadott függvényeket. Viszont a primitív függvények csak egy C konstansban térnek el egymástól, és a primitív függvények között speciális esetként megtalálhatóak az **1.2.** feladatban megadott f függvények.

a. $\int f'(x)dx = x + x^2/2 + x^3/6 + C, \ \ C \in \mathbb{R}$

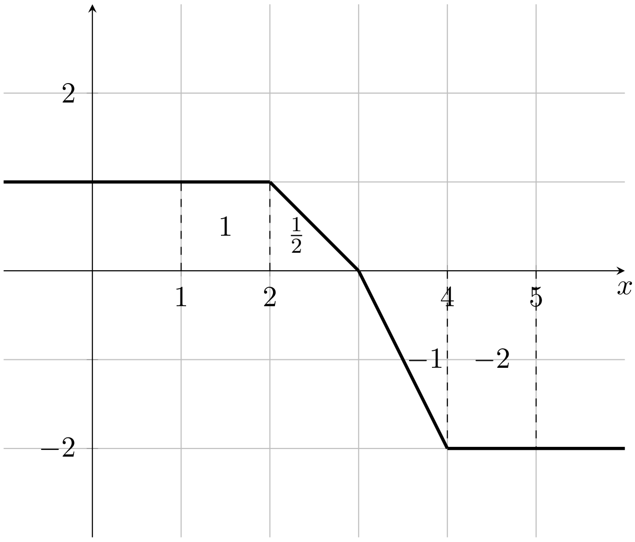
b. $\int f'(x)dx = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x} + C, \;\; C \in \mathbb{R}$

c. $\int f'(x)dx = 2\sqrt{x} - 3^x + \ln(x) + C, \;\; C \in \mathbb{R}$

d. $\int f'(x)dx = \lg(x) - 1/(2x^2) + x^5/5 + C, \;\; C \in \mathbb{R}$

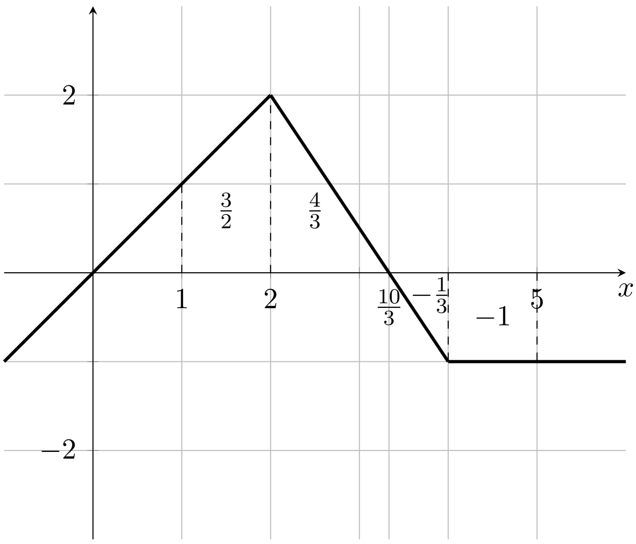
e. $\int f'(x)dx = 2^x - 4\log_3 x - 1/(\pi\sqrt{x}) + C, \;\; C \in \mathbb{R}$

1.5. a.



$$\int_1^5 f(x)dx = 1 + \frac{1}{2} - 1 - 2 = -\frac{3}{2}$$

b.



$$\int_1^5 f(x)dx = \frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{1}{3} - 1 = \frac{3}{2}$$

1.6. a. $v(x) = 1 - 2x/(1 + x^2)$

Helyettesítéses integrálással: $\int v(x)dx = x - \ln(1 + x^2) + C, \;\; C \in \mathbb{R}$

b. Megváltozás: $m(3) - m(1) = \int_1^3 v(x)dx = 2 - \ln(10) + \ln(2) \approx 0{,}39$

Átlagos változási sebesség: $[m(3) - m(1)]/[3 - 1] \approx 0{,}195$

c. $m(x) = 1 + x - \ln(1 + x^2)$

1.7. **a.** Helyettesítéses integrálással: $\int v(x)dx = -e^{-x^2}/2$

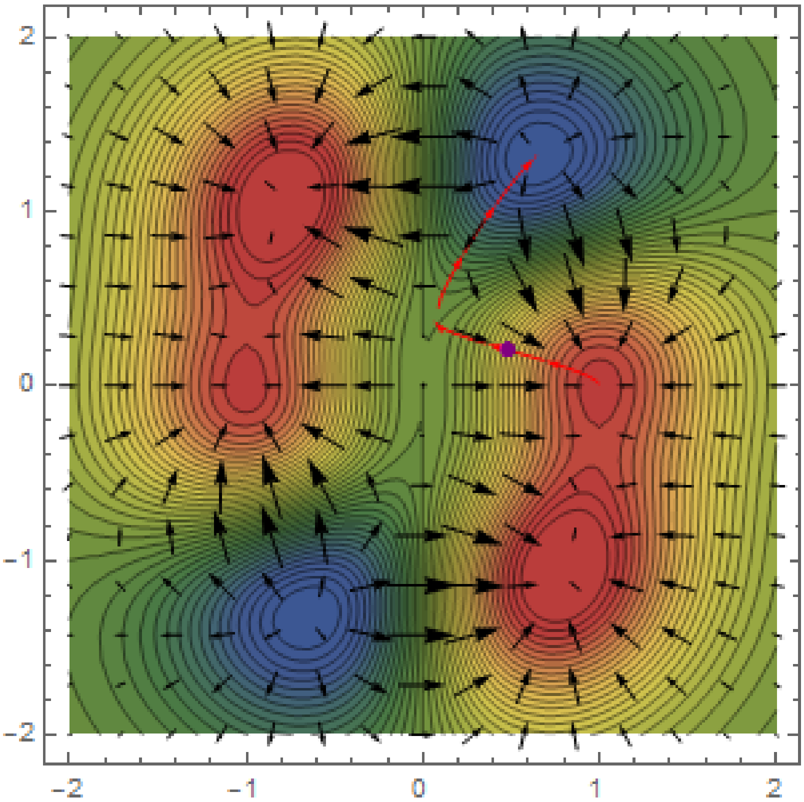
b. Megváltozás: $m(2) - m(0) = \int_0^2 v(x)dx = e^0 - e^{-2} \approx 0{,}86$

Átlagos változási sebesség: $[m(2) - m(0)]/[2 - 0] \approx 0{,}43$

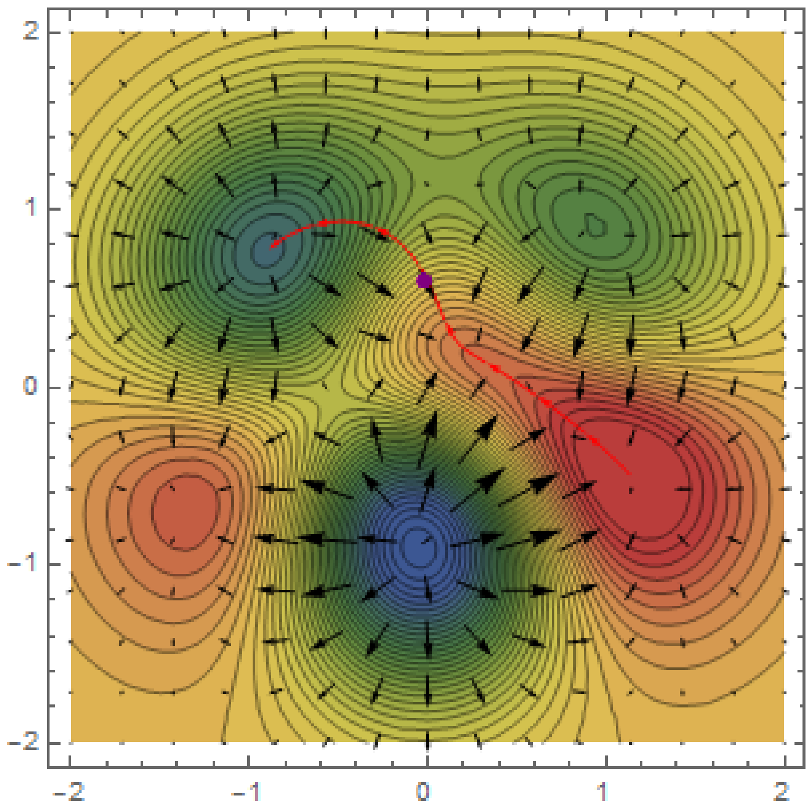
c. $m(x) = 10{,}5 - e^{-x^2}/2$

2.1. A gradiensvektor merőleges a szintvonalakra, és a felfelé mutató irányt határozza meg. Ha el akarunk jutni egy lokális maximumba, akkor a gradiensvektor szerinti irányba kell mennünk. Ha elengedünk egy golyót, akkor az a gradiensvektorral ellentétesen indul el.

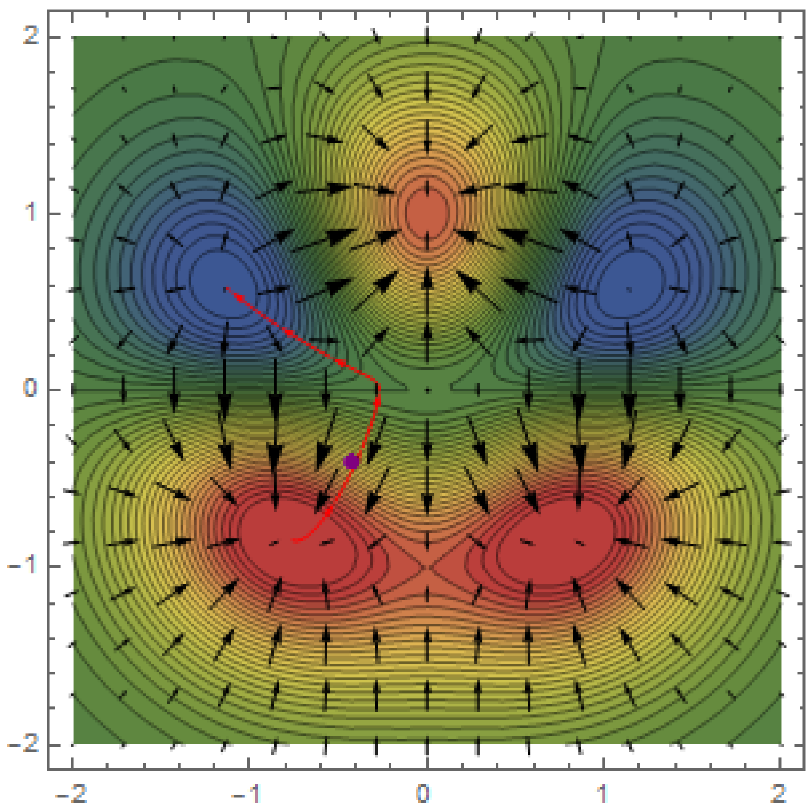
a. $f_x(0.5, 0.2) > 0,\ f_y(0.5, 0.2) < 0$



b. $f_x(0, 0.6) > 0,\ f_y(0, 0.6) < 0$



c. $f_x(-0.4,-0.4)<0,\ f_y(-0.4,-0.4)<0$



2.2. **a.** $f_x(x,y) = 2x-4,\ \ f_y(x,y) = 4y-4,\ \ \partial f(x,y) = (2x-4, 4y-4)$

Nevezetes pont: $(x_0, y_0) = (2, 1)$

$f_{xx}(x,y) = 2,\ \ f_{yy}(x,y) = 4,\ \ f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 0$

$f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0) - f_{xy}(x_0,y_0)f_{yx}(x_0,y_0) > 0$ és $f_{xx}(x_0,y_0) > 0$

A nevezetes pont lokális minimumhely.

b. $f_x(x,y) = -2x-2+y,\ \ f_y(x,y) = -2y-4+x,\ \ \partial f(x,y) = (-2x-2+y, -2y-4+x)$

Nevezetes pont: $(x_0, y_0) = (-8/3, -10/3)$

$f_{xx}(x,y) = -2,\ \ f_{yy}(x,y) = -2,\ \ f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 1$

$f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0) - f_{xy}(x_0,y_0)f_{yx}(x_0,y_0) > 0$ és $f_{xx}(x_0,y_0) < 0$

A nevezetes pont lokális maximumhely.

c. $f_x(x,y) = 2x+2-y,\ \ f_y(x,y) = -2y-2-x,\ \ \nabla f(x,y) = (2x+2-y, -2y-2-x)$

Nevezetes pont: $(x_0, y_0) = (-6/5, -2/5)$

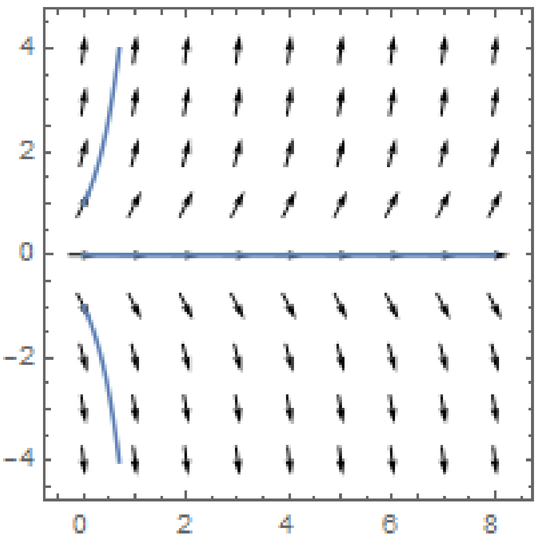
$f_{xx}(x,y) = 2,\ \ f_{yy}(x,y) = -2,\ \ f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -1$

$f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0) - f_{xy}(x_0,y_0)f_{yx}(x_0,y_0) < 0$

A nevezetes pont nyeregpont.

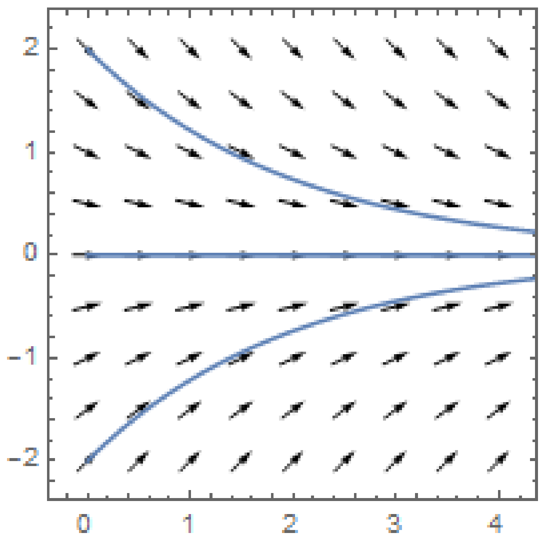
3.1. Egyensúlyi helyzet: $p = 0$, instabil. Formális megoldás: $p(t) = p(0)e^{2t}$, $t \geq 0$.

Duplázási idő: $p(0)e^{2T} = 2p(0)$, amiből $T = (\ln 2)/2 \approx 0.35$.

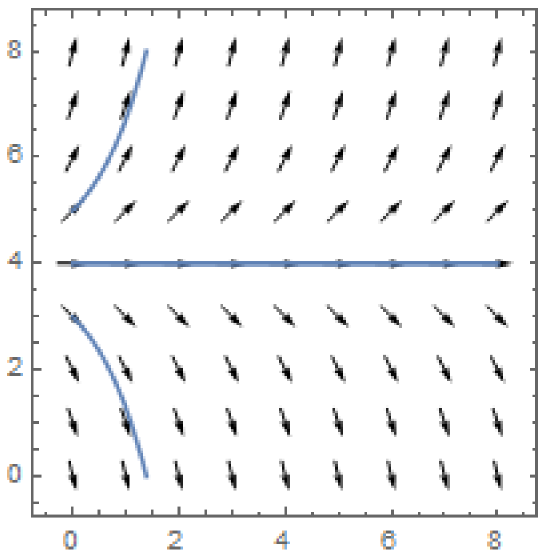


3.2. Egyensúlyi helyzet: $p = 0$, stabil. Formális megoldás: $p(t) = p(0)e^{-0.5t}$, $t \geq 0$.

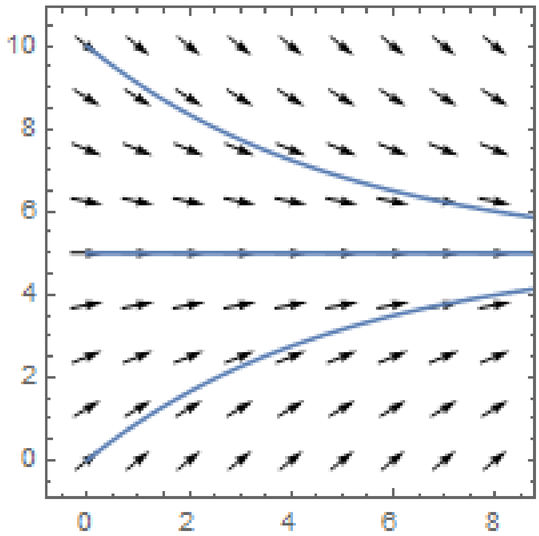
Felezési idő: $p(0)e^{-0.5T} = p(0)/2$, amiből $T = -(\ln 0.5)/0.5 \approx 1.39$.



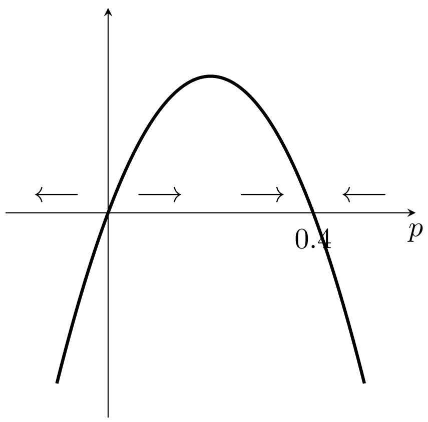
3.3. Egyensúlyi helyzet: $m = 4$, instabil. Formális megoldás: $m(t) = [m(0) - 4]e^t + 4$.
A megoldás a $p(0) = 3$ kezdeti feltétel mellett: $m(t) = -e^t + 4$.
Kihalási idő: $-e^T + 4 = 0$, amiből $T = \ln 4 \approx 1.39$.

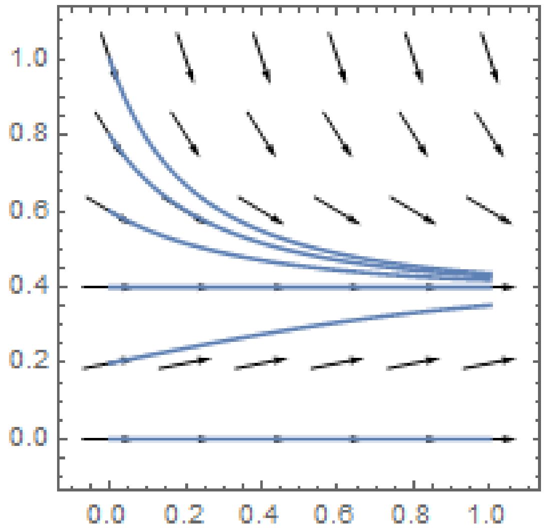


3.4. Egyensúlyi helyzet: $m = 5$, stabil. Formális megoldás: $m(t) = [m(0) - 5]e^{-0.2t} + 5$.
Megoldás az $m(0) = 1$ kezdeti feltétel mellett: $m(t) = -4e^{-0.2t} + 5$.
A 4 mg elérésének időpontja: $-4e^{-0.2T} + 5 = 4$, amiből $T = -\ln 0.25/0.2 \approx 6.93$.



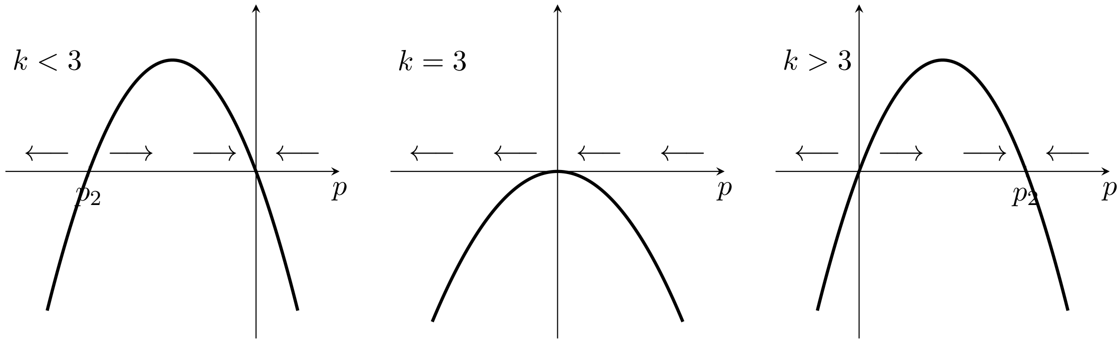
4.1. **a.** Egyensúlyi helyzetek: $p = 0$, instabil; $p = 0.4$, stabil.





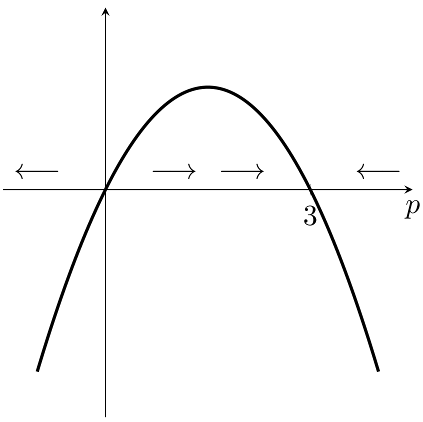
b. $p(t) = \frac{2p(0)e^{2t}}{2-5p(0)+5p(0)e^{2t}}$, $t \geq 0$.

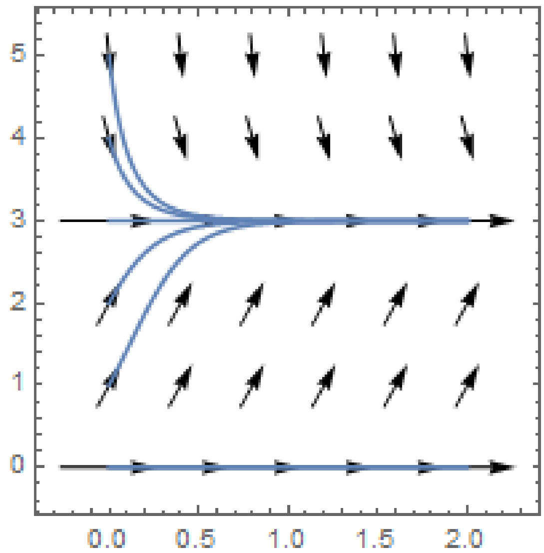
c. A $kp(1-p) - 3p = 0$ egyenlet megoldásait keressük, ahol p az ismeretlenben. Az egyenlet bal oldalát átírva: $kp(1 - 3/k - p) = 0$. Tehát a két egyensúlyi helyzet: $p_1 = 0$ és $p_2 = 1 - 3/k$. Az alábbi ábrán vázlatosan ábrázoljuk, hogy mi történik a $k < 3$, a $k = 3$ és a $k > 3$ esetben.



- $k < 3$ esetén $p_2 < 0 = p_1$. Ekkor a p_2 instabil, a 0 stabil egyensúlyi helyzet. Tehát a populáció tetszőleges $p(0) > 0$ esetén kihal.
- $k = 3$ esetén $p_2 = 0 = p_1$. Egy egyensúlyi helyzet van, a 0, ami a pozitív irányból vonzó, a negatív irányból taszító. Tehát a populáció kihal tetszőleges $p(0) > 0$ esetén.
- $k > 3$ esetén $p_2 > 0 = p_1$. Ekkor a p_2 stabil, a 0 instabil egyensúlyi helyzet. Tehát ha $p(0) > 0$, akkor a populáció nem hal ki.

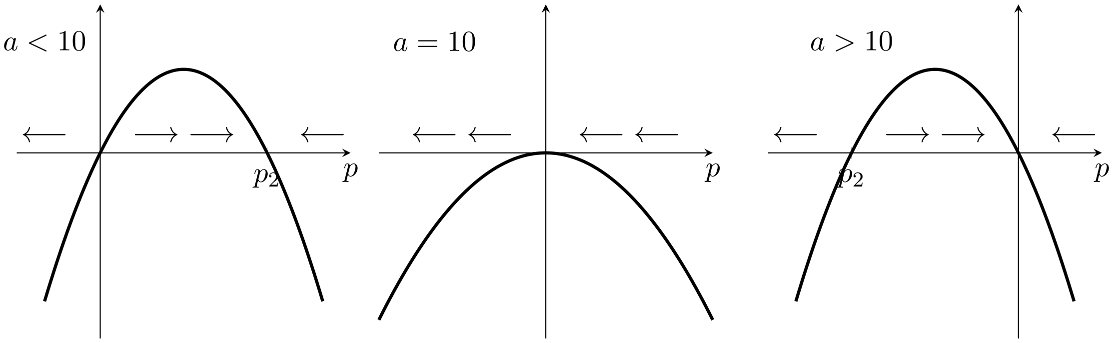
4.2. a. Egyensúlyi helyzetek: $p = 0$, instabil; $p = 3$, stabil.





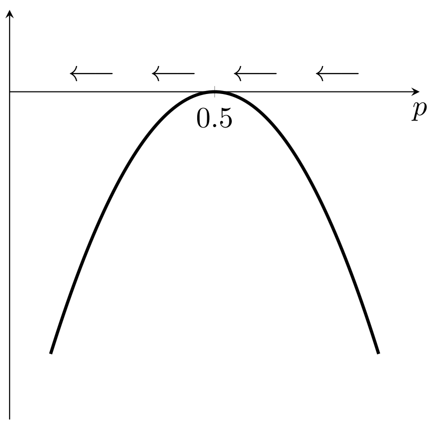
b. $p(t) = \frac{3p(0)e^{6t}}{3-p(0)+p(0)e^{6t}}$, $t \geq 0$.

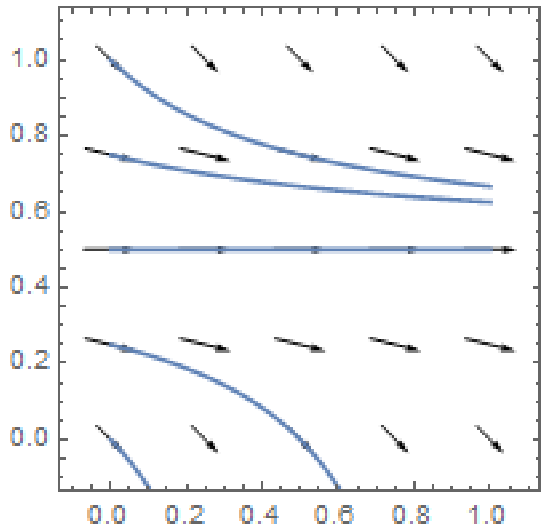
c. A $2p(5-p) - ap = 0$ egyenlet megoldásait keressük, ahol p az ismeretlenben. Az egyenlet bal oldalát átírva: $2p(5 - a/2 - p) = 0$. Tehát a két egyensúlyi helyzet: $p_1 = 0$ és $p_2 = 5 - a/2$. Az alábbi ábrán vázlatosan ábrázoljuk, hogy mi történik az $a < 10$, az $a = 10$ és az $a > 10$ esetben.



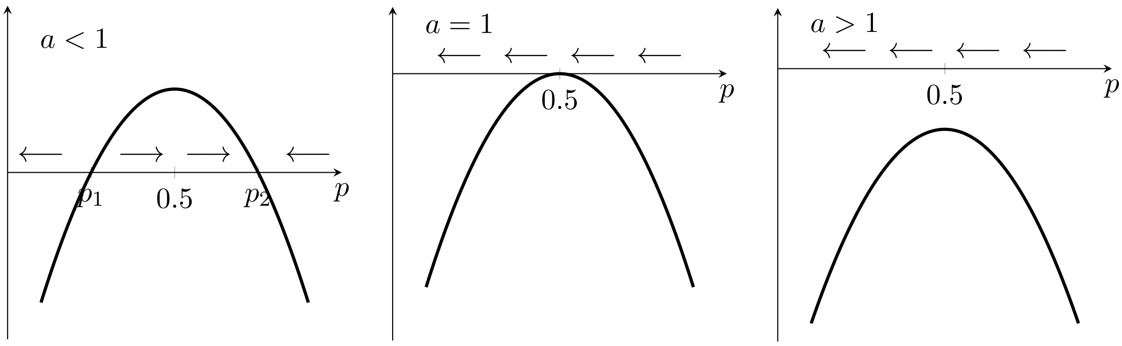
- $a < 10$ esetén $p_2 > 0 = p_1$. Ekkor a p_2 stabil, a 0 instabil egyensúlyi helyzet. Tehát ha $p(0) > 0$, akkor a populáció nem hal ki.
- $a = 10$ esetén $p_2 = 0 = p_1$. Egy egyensúlyi helyzet van, a 0, ami a pozitív irányból vonzó, a negatív irányból taszító. Tehát a populáció kihal tetszőleges $p(0) > 0$ esetén.
- $a < 10$ esetén $p_2 < 0 = p_1$. Ekkor a p_2 instabil, a 0 stabil egyensúlyi helyzet. Tehát a populáció tetszőleges $p(0) > 0$ esetén kihal.

4.3. **a.** Egyensúlyi helyzetek: $p = 0.5$, pozitív irányból vonzó, negatív irányból taszító.



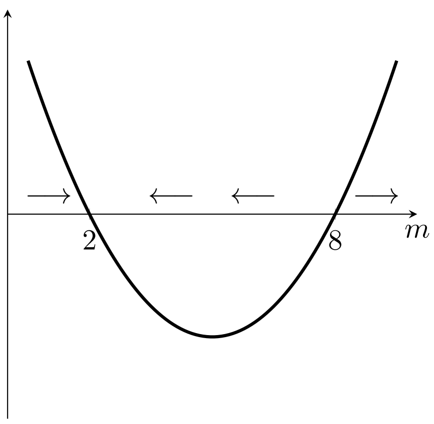


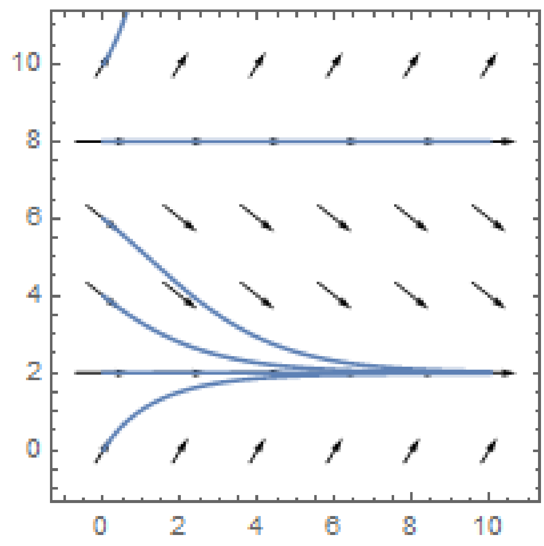
b. A $4p(1-p) - a = 0$ egyenlet megoldásait keressük, ahol p az ismeretlenben. Az egyenlet bal oldalán a zárójelet felbontva: $-4p^2 - 4p - a = 0$. A megoldóképlet segítségével a következő eseteket kapjuk:



- $a<1$ esetén két különböző egyensúlyi helyzetet kapunk: $p_1=(1-\sqrt{1-a})/2$ és $p_1=(1+\sqrt{1-a})/2$. Most a p_1 instabil, a p_2 stabil egyensúlyi helyzet. A populáció $p(0)>p_1$ esetén nem pusztul ki.
- Az $a=1$ esetet már tisztáztuk az a. pontban. A populáció $p(0)\geq 1/2$ esetén nem hal ki.
- Az $a>1$ esetben nincsen egyensúlyi helyzet, a populáció tetszőleges $p(0)$ mellett kihal.

4.4. Egyensúlyi helyzetek: $m=2$, stabil; $m=8$, instabil.

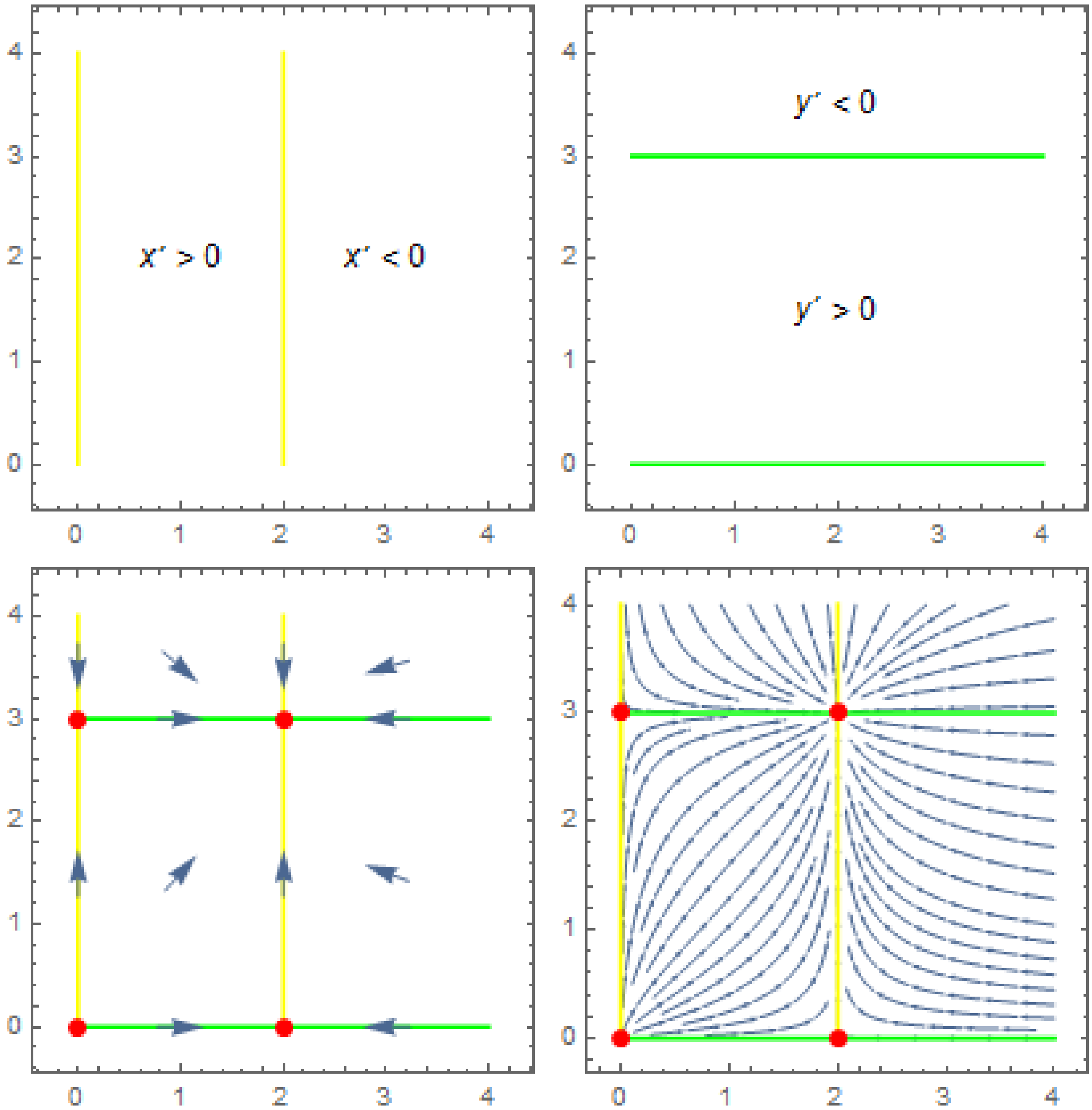




5.1. **a.** Az interakció mindkét faj számára közömbös.

b. Nullklínák: $x' = 0$, amiből $x = 0$ vagy $x = 2$ (sárga); $y' = 0$, amiből $y = 0$ vagy $y = 3$ (zöld). Egyensúlyi helyzetek: $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,3)$, $(2,3)$, az első három instabil, az utolsó stabil.

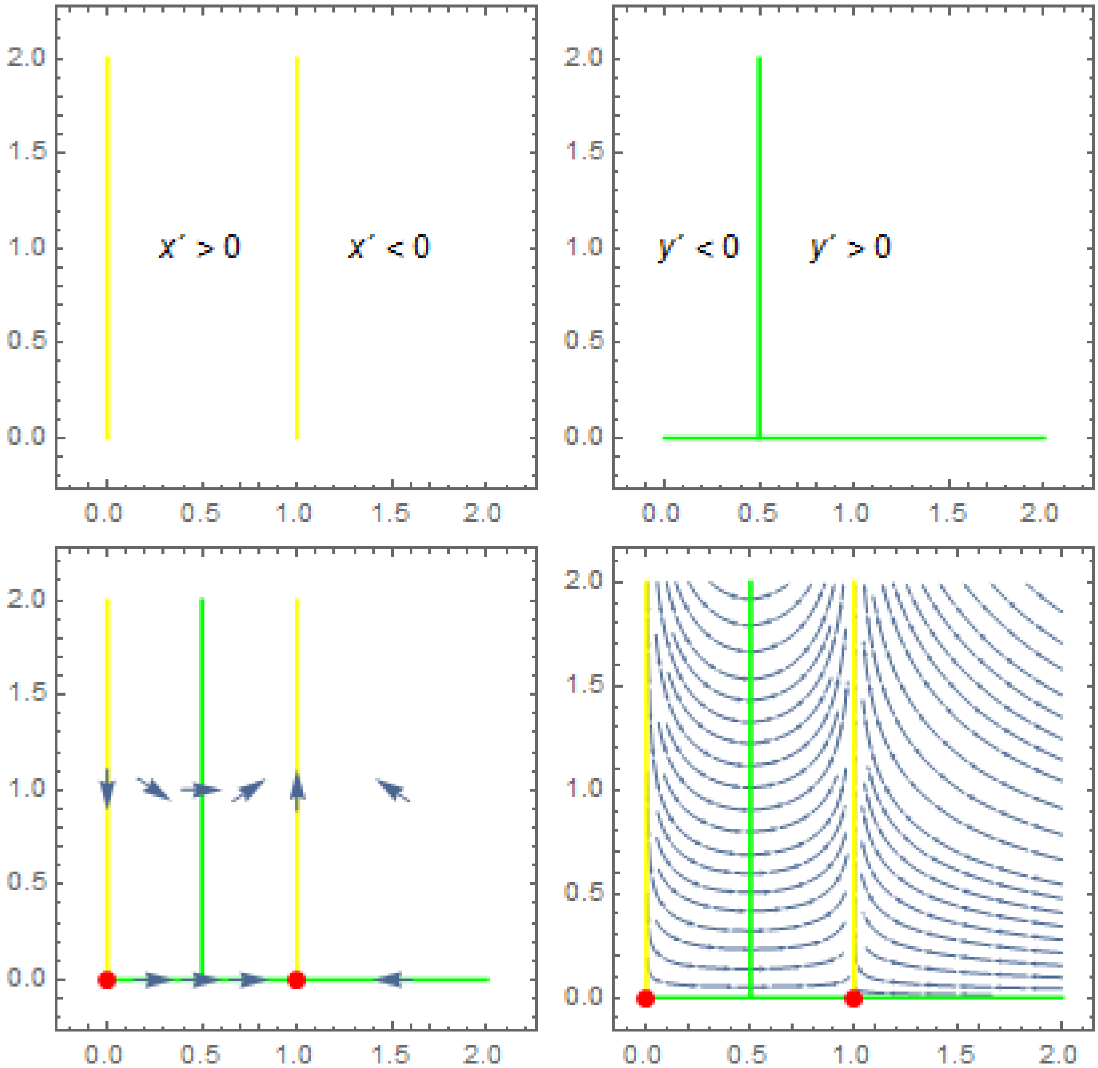
Ha a rendszer valamelyik egyensúlyi helyzetből indul, akkor örökké ott marad. Ha kezdetben $x = 0$, akkor a rendszer a $(0,3)$ ponthoz, ha kezdetben $y = 0$, akkor pedig a $(2,0)$ ponthoz konvergál. Minden más esetben a rendszer konvergál a stabil egyensúlyi helyzethez.



5.2. **a.** Az interakció az x faj számára közömbös, az y faj számára előnyös. Ezt a jelenséget kommenzalizmusnak, asztalközösségnek nevezzük. Példa: verebek a gólyák fészkében.

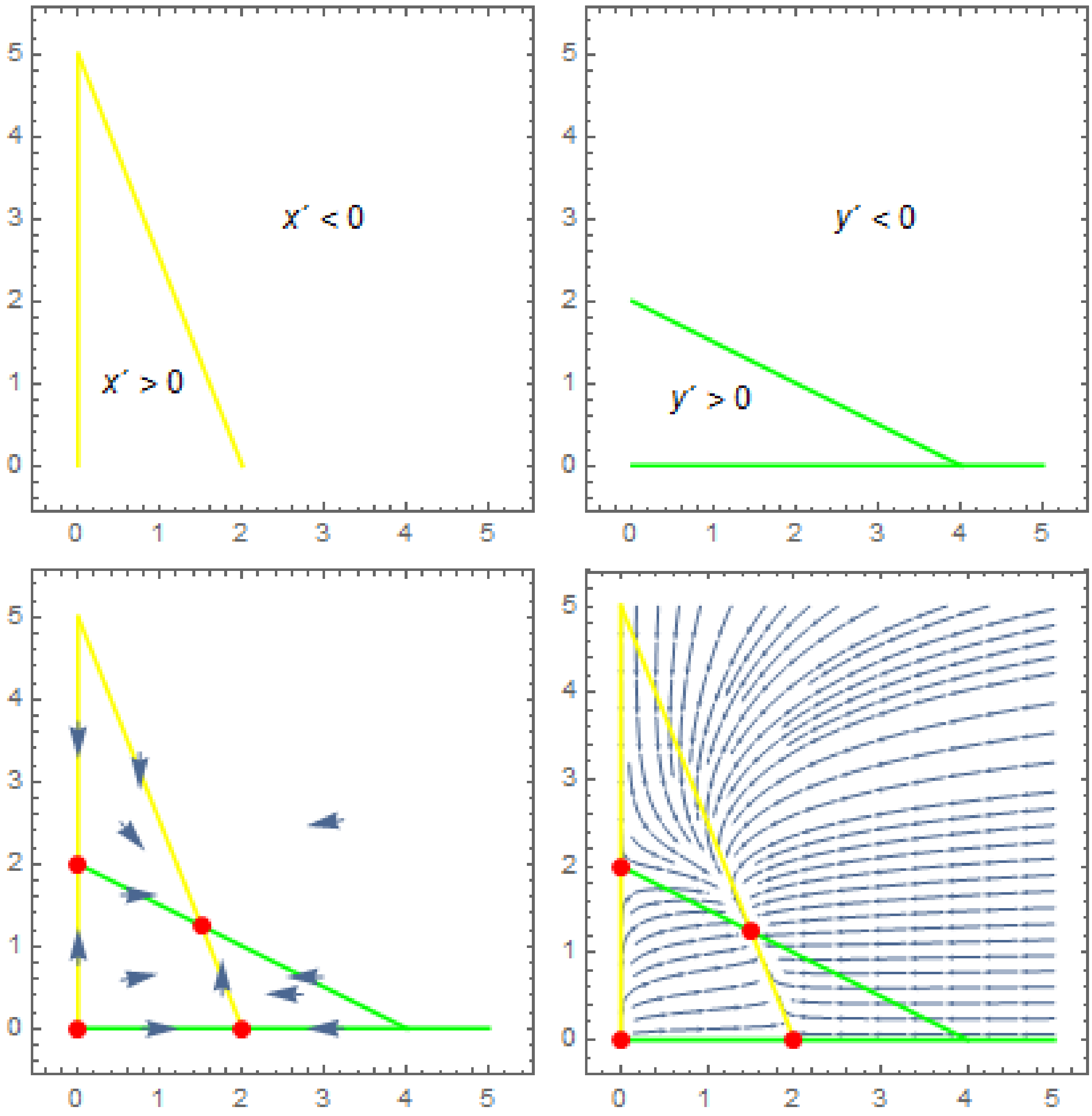
b. Nullklínák: $x' = 0$, amiből $x = 0$ vagy $x = 1$ (sárga); $y' = 0$, amiből $x = 1/2$ vagy $y = 0$ (zöld). Egyensúlyi helyzetek: $(0, 0)$ és $(1, 0)$, mindkettő instabil.

Ha a rendszer valamelyik egyensúlyi helyzetből indul, akkor örökké ott marad. Ha kezdetben $x = 0$, akkor a rendszer konvergál a $(0, 0)$ ponthoz, ha kezdetben $y = 0$, akkor pedig az $(1, 0)$ ponthoz. Minden más esetben az x populáció mérete konvergál 1-hez, az y populáció mérete pedig elmegy a végtelenbe.



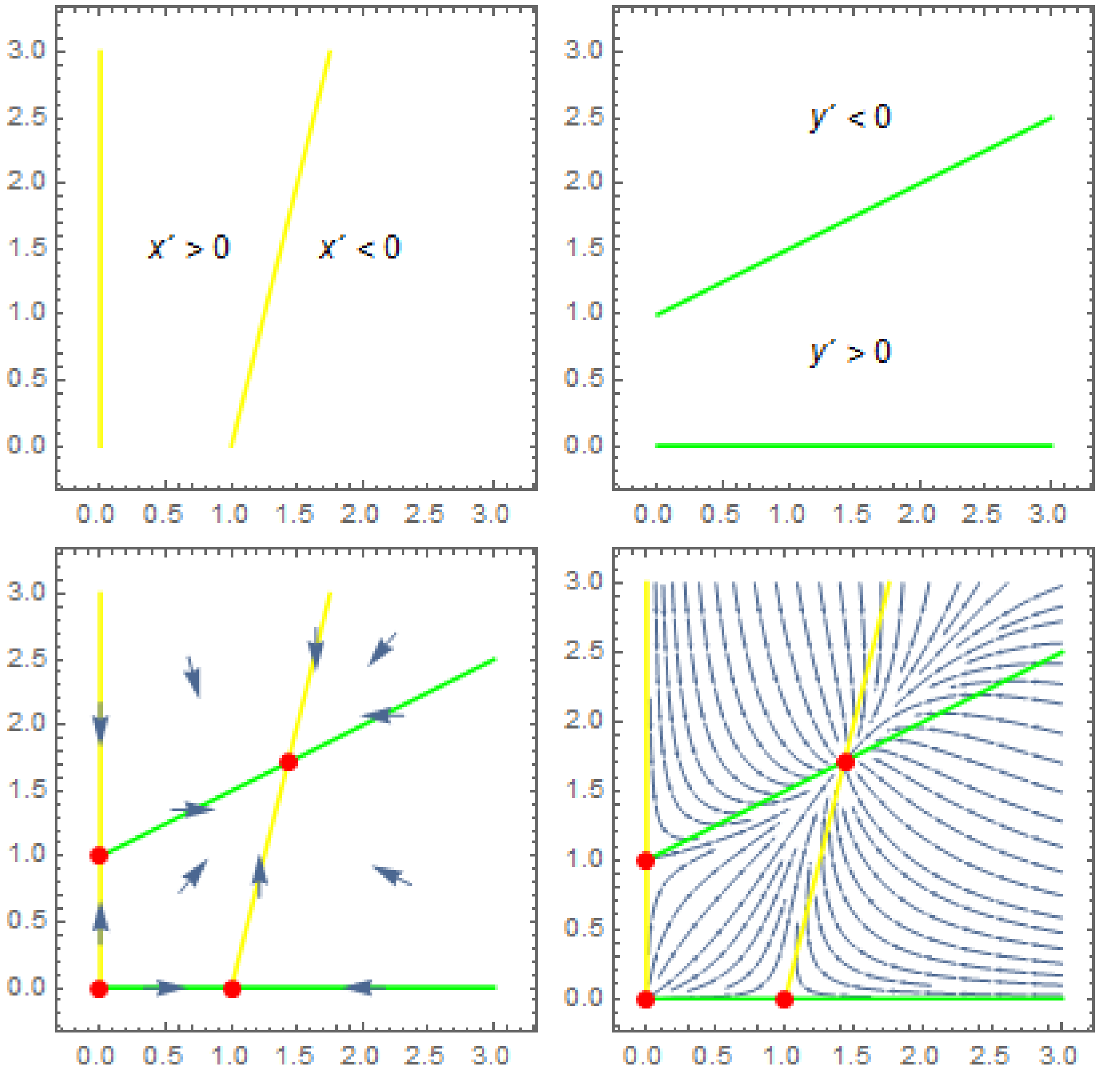
5.3. **a.** Az interakció mindkét faj számára hátrányos, ezt a jelenséget versengésnek nevezzük. Példa: azonos táplálékforrásért harcoló fajok.

b. Nullklínák: $x' = 0$, amiből $x = 0$ vagy $y = 5 - 2.5x$ (sárga); $y' = 0$, amiből $y = 0$ vagy $y = 2 - x/2$ (zöld). Egyensúlyi helyzetek: $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,2)$ és $(1.5, 1.25)$, az első három instabil, az utolsó stabil.



5.4. **a.** Az interakció mindkét faj számára kedvező. Ezt a jelenséget mutualizmusnak, speciális esetekben szimbiózisnak nevezzük. Példa: lucerna és nitrogénkötő baktériumok.

b. Nullklínák: $x' = 0$, amiből $x = 0$ vagy $y = 4x - 4$ (sárga); $y' = 0$, amiből $y = 0$ vagy $y = x/2 + 1$ (zöld). Egyensúlyi helyzetek: $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(10/7, 12/7)$, az első három instabil, az utolsó stabil.



5.5. **a.** Az interakció mindkét faj számára hátrányos, ezt a jelenséget versengésnek nevezzük. Példa: azonos táplálékforrásért harcoló fajok.

b. Nullklínák: $x' = 0$, amiből $x = 0$ vagy $y = 5 - 1.25x$ (sárga); $y' = 0$, amiből $y = 0$ vagy $y = 2 - x$ (zöld). Egyensúlyi helyzetek: $(0,0)$, $(0,2)$, és $(4,1)$, az első kettő instabil, az utolsó stabil.