Gyakorló feladatok a Pénzügyi matematika kurzushoz

1. Kamatszámítási módszerek és diszkontálás

1.1. Mik voltak a modern pénz kialakulásának a fontosabb lépései? Milyen különbségek voltak az egyes állomások között?

1.2. Mik a központi bank jellemző feladatai? Mondjon példát központi bankra!

1.3. Milyen típusai vannak a bankrendszereknek? Hazánkban melyik típus működik?

1.4. Milyen típusai vannak az üzleti bankoknak? Mik a jellemző banki tevékenységek az egyes típusok esetén?

1.5. Mi a különbség a valuta és a deviza között?

1.6. Definiálja a jelenérték és a lejáratig számított hozam fogalmát. Mi az a hozamgörbe?

1.7. Beteszünk a bankba 1 millió forint. Írjuk fel formulával, hogy mennyi pénzünk lesz a $t \geq 0$ időpontban a következő kamatszámítási módszerek szerint: egyszerű kamatozás; kamatos kamatozás félévenkénti újratőkésítéssel; folytonos kamatozás! Az éves kamatláb mindhárom esetben $i = 4\%$. Ábrázoljuk a bankbetét értékét az egyes kamatszámítási módszerek esetén az idő függvényében közös koordináta-rendszerben!

1.8. Beteszünk a bankba B_0 összeget. Ha az a célunk, hogy a pénzünk 5 év alatt 50%-kal növekedjen, akkor milyen éves kamatlábakra van szükség a következő kamatszámítási módszerek esetén: egyszerű kamatozás; kamatos kamatozás félévenkénti újratőkésítéssel; folytonos kamatozás?

1.9. Beteszünk a bankba B_0 összeget 5 évre kamatos kamatozással. Az éves kamatláb $i = 6\%$, negyedévente van újratőkésítés. Mennyi az ekvivalens egyszerű illetve az ekvivalens folytonos kamatráta?

1.10. Mi egy vállalat vagyunk, és egy új üzemet tervezünk építeni. Ehhez a mai napon be kellene fektetnünk 10 millió dollárt, és két év múlva az üzem már hozna 2 millió dollár hasznot. Ezek után további egy év múlva újabb 5 millió dollárt kellene befektetnünk. A mai naptól számítva négy illetve öt év elteltével az üzem 10–10 millió dollár hasznot hozna. Határozzuk meg a fenti cash flow netto jelenértékét. Ezek alapján megéri belevágni ebbe a beruházásba? (A kockázatmentes befektetések éves szinten 5% kamatot ígérnek, számoljunk évenkénti újratőkésítéssel.)

1.11. 20 év múlva szeretnék nyugdíjba vonulni, ezért kéthavonta félreteszek egy rögzített összeget a fizetésemből. A pénzt egy olyan bankszámlára rakom, mely hosszú távon is stabil 6% éves kamatot fizet kéthavi újratőkésítéssel. Nyugdíjasként kéthavonta 150 ezer forintot szeretnék felvenni, és úgy tervezem, hogy örökké élek. Mekkora összeget kell kéthavonta befizetnem?

1.12. Tegyük fel, hogy a FED államkötvényt bocsájt ki 1000 dollár névértékkel és többfajta lejárati idővel. A lejárati idők 1, 2, 3 illetve 5 év. A kamatot egy összegben, a lejáratkor fizetik ki. A kötvényekre kiírt kamatláb eltérő az egyes lejárati idők esetén, ez megtalálható az alábbi táblázatban. A kötvényeket nem a névértéken lehet megvásárolni, a kibocsájtási ár szintén szerepel a táblázatban.

a. Határozzuk meg a lejáratig számított hozamot mindegyik lejárati idő esetén! Ezek alapján vázlatosan ábrázoljuk a hozamgörbét!

b. A táblázat utolsó oszlopa egy pénzáramot tartalmaz. (Például egy év múlva ki kell fizetnünk 10 ezer dollárt, de két év múlva lesz 15 ezer dollár bevételünk.) Határozzuk meg ennek a cash flownak a jelenértékét! A diszkontálás során használjuk az a. feladatrészben kapott hozamgörbét!

Év	Éves kamatláb	Kibocsájtási ár ($)	Cash flow ($)
1	2%	1000	-10.000
2	2,5%	950	15.000
3	3,5%	1100	-5.000
5	4,5%	1050	20.000

2. Mean-variance portfólióanalízis

2.1. Milyen fontosabb típusai vannak a tőzsdéknek? Kik kereskedhetnek a tőzsdén?

2.2. Mi a különbség a tőzsdei és az OTC (Over-the-Counter) ügyletek között?

2.3. Mi a fedezetlen eladás (short sellling)?

2.4. Mi a különbség a részvény és a kötvény között? Melyik kockázatosabb és miért?

2.5. Egy tőzsdén egy adott részvény esetében az alábbi ajánlatok szerepelnek a jegyzési könyvben (ár/mennyiség):

Vételi ajánlatok: 45/50, 44/100, 43/30; eladási ajánlatok: 47/80, 48/20, 49/50.

Mi történik, ha egymás után a következő ajánlatok érkeznek: eladási 44/70, vételi 45/30, eladási 46/20?

2.6. Adott egy kötvény és egy részvény, mindkettőnek 2000 forint a jelenlegi ára. A kötvényre egy év alatt 160 forint kamatot kapunk. A részvény egy év múlva 1900, 2300 vagy 2700 forintot érhet rendre 0,3, 0,5 és 0,2 valószínűségekkel.

a. Írjuk fel a kötvény kamatrátájának illetve a részvény hozamrátájának az eloszlását! Ennek segítségével adjuk meg mindkét ráta várható értékét és szórását!

b. Tegyük fel, hogy a kezdőtőként α hányadát fektetjük részvénybe! Írjuk fel és ábrázoljuk a portfólió hozamrátájának várható értékét és szórását az α paraméter függvényében!

c. Tegyük fel, hogy 1 millió forintot fektetünk be! Hogyan állítsuk össze a portfóliónkat, ha az a célunk, hogy várható értékben 400 ezer forint hozamot realizáljunk? Hogyan fektessük be a pénzünket, ha a hozam szórása legfeljebb 200 ezer forint lehet?

d. Ábrázoljuk az elérhető portfóliókat a várható érték és a szórás által meghatározott koordináta-rendszerben! Mi a jelentése a kapott egyenes meredekségének?

2.7. Tegyük fel, hogy a piacon több részvénnyel is lehet kereskedni, de nincsen kockázatmentes eszköz. Röviden ismertesse, hogy mi a portfólió határ és a hatékony portfólió határ!

2.8. Röviden ismertesse, hogy mi a tőkepiaci egyenes és a piaci portfólió!

2.9. Egy tőzsdén három eszközzel lehet kereskedni, egy kötvénnyel és két részvénnyel. A kötvény 10%-os éves kamatot fizet. A részvényeket a mai napon 1000 illetve 2000 forintos áron lehet megvásárolni. A két részvény jövőbeli árának várható értéke 1300 illetve 3000 forint, az árak szórása 200 illetve 600 forint. Feltehető, hogy a részvények ára független egymástól.

a. Írjuk fel mindhárom eszköz hozamrátájának várható értékét és szórását!

b. Tegyük fel, hogy a portfólióba csak részvényeket teszünk! Írjuk fel és ábrázoljuk a portfólió hozamrátájának várható értékét és szórását annak függvényében, hogy az egyes eszközökből milyen arányban vásárolunk!

c. Hogyan állítsuk össze a portfóliónkat, ha minimalizálni akarjuk a kockázatot? Mennyi a hozamráta várható értéke és szórása ezen portfólió esetében?

d. Ábrázoljuk az elérhető portfóliókat a várható érték és a szórás által meghatározott koordináta-rendszerben! Az elérhető portfóliók közül melyek ajánlottak befektetésre?

e. Az előző ábrán vázlatosan rajzoljuk be a piaci portfóliót és a tőkepiaci egyenest! Definiáljuk és értelmezzük a Market-Price-of-Risk fogalmát!

f. Adjuk meg a piaci portfóliót és írjuk fel a tőkepiaci egyenest a jelen feladatban!

3. Határidős ügyletek és opciók

3.1. Definiálja a határidős ügylet fogalmát! Miben különbözik a forward és a future?

3.2. Milyen célokból szoktak határidős ügyletekkel kereskedni? Jellemzően kik zárják le a pozíciót a lejárati nap előtt, és kik várják meg a lejárati napot?

3.3. Mi a fő különbség egy határidős ügylet és egy európai vételi opció között? Mi a különbség az európai típusú és az amerikai típusú opciók között?

3.4. Az adásvétel szempontjából melyik fél van long pozícióban egy határidős ügylet, egy call opció illetve egy put opció esetén? A long pozíció a fenti három közül mely ügyleteknél jelent kötelezettséget, és melyeknél jogot? Mely ügyleteknél van vételi jog vagy kötelezettség, és mely ügyleteknél van eladási jog vagy kötelezettség? Mi a helyzet short pozíció esetén?

3.5. A vállalatunk rézvezetéket gyárt, a termeléshez szükséges rezet egy beszállítótól vásároljuk. Január 15-én kötünk egy megállapodást: a másik fél május 15-én fog majd szállítani, mi pedig spot áron fizetünk neki. Félő, hogy a spot ár a következő három hónapban megemelkedik. A tőzsdén 3,2 dollár/font áron lehet future szerződést kötni rézre május 15. lejárati nappal, és ez az ár nekünk nagyon szimpatikus. Mit tegyünk, ha csökkenteni akarjuk a kockázatot? Írjuk fel a vállalati mérleget abban az esetben, ha a spot ár május 15-én 3,5 dollár/font. Mi a helyzet akkor, ha a spot ár 3 dollár/font? (A feladatban a „font” kifejezés a mértékegységre utal.)

3.6. Egy almatermelő gazdaság vagyunk, és szerződésben állunk egy gyümölcsfeldolgozó üzemmel. A szerződés értelmében 4 hónap múlva szállítanunk kell, melyért ők spot áron fizetnek. A tőzsdén 100 az almára vonatkozó 4 hónapos future ára, ami nekünk megfelelne. Mit tegyünk? Tegyük fel, hogy 4 hónap múlva a spot ár 95! Írjuk fel a vállalat mérlegét erre az esetre!

3.7. Definiálja az arbitrázs fogalmát! Mit jelent az arbitrázsmentesség?

3.8. Tekintsünk egy egylépéses piacot, tehát csak a 0 és 1 időpontokban tudunk vásárolni vagy eladni. A kötvény kamatrátája egy determinisztikus $r > 0$ érték. A piacon egy részvénnyel lehet kereskedni, ennek ára a kereskedési időpontokban egy determinisztikus S_0 érték illetve egy nemdegenerált S_1 véletlen változó. (Tehát tetszőleges s valós szám esetén $P(S_1 = s) < 1$.)

- **a.** Mutassuk meg, hogy ha $P(S_0(1+r) \leq S_1) = 1$ vagy $P(S_0(1+r) \geq S_1) = 1$, akkor arbitrázs van a piacon!
- **b.** Bizonyítsuk be, hogy ha $P(S_0(1+r) \leq S_1) < 1$ és $P(S_0(1+r) \geq S_1) < 1$, akkor a piac arbitrázsmentes!

3.9. Adott egy piac, melyen két eszközzel lehet kereskedni, egy kötvénnyel és egy részvénnyel Kereskedni csak az évek első napján tudunk, és a 0. évben mindkét eszköznek 100 a spot ára. A kötvény minden évben 10 százalék kamatot fizet, és kivételesen számoljunk kamatos kamatozással. A részvény ára évente vagy 20 százalékkal nő, vagy pedig nem változik.

- **a.** Van a piacon arbitrázslehetőség?
- **b.** Tekintsünk egy európai put opciót 1 év lejárati idővel és $K = 110$ kötési árral! Adjuk meg az opció igazságos árát és a fedezeti portfóliót! Határozzuk meg a kockázatsemleges valószínűséget, és számoljuk ki a kifizetési függvény diszkontáltjának ezen valószínűség szerinti várható értékét! Milyen kapcsolatban áll ez a várható érték az opció igazságos árával?

c. Tekintsünk egy európai call opciót 2 év lejárati idővel és $K = 110$ kötési árral! Adjuk meg az opció igazságos árát és a fedezeti stratégiát!

3.10. Tekintsünk egy egylépéses bináris piacot! Jelölje S_0 és r a részvény értékét a 0 időpontban illetve a kötvény kamatrátáját! Egy határidős szerződés keretei között vállaljuk, hogy a $T = 1$ lejárati időpontban eladunk egy darab részvényt egy előre rögzített K kötési áron!

a. Határozzuk meg a fedezeti stratégiát és a fedezéshez szükséges kezdőtőkét erre a future szerződésre!

b. A határidős szerződések „igazságos" kötési ára az a K paraméterérték, amikor a fedezéshez szükséges kezdőtőke pontosan 0, tehát a szerződés aláírásakor nincs pénzmozgás a felek között. Mutassuk meg, hogy egylépéses bináris piacon az igazságos kötési ár $K = S_0(1+r)$.

4. Kombinált opciók, binomiális piac, Black–Scholes-modell

4.1. Ábrázoljuk az alábbi kombinált opciók kifizetési függvényét! Milyen várakozásaik vannak a részvény lejáratkori árára nézve azon befektetőknek, akik ilyen kombinált opciókat tartanak? (Minden opció azonos részvényre és T lejárati időre vonatkozik.)

a. Bull spread: egy darab európai call opció vétele K_1 kötési áron és egy darab európai vételi opció eladása K_2 kötési áron, ahol $K_1 < K_2$.

b. Bear spread: ugyanaz, mint a bull spread, de $K_1 > K_2$.

c. Straddle: egy darab európai call opció és egy darab európai put opció vétele azonos K kötési árral.

4.2. Digitális opcióknak nevezzük azokat az opciókat, melyeknél a kifizetési függvény csak a 0 és az 1 értéket veszi fel. Tekintsünk most két olyan digitális opciót, melyek azonos részvényre és azonos $T > 0$ lejárati időre szólnak! Az egyik akkor fizet, ha a részvény ára a T időpontban elér egy adott K kötési árat, míg a másik akkor fizet, ha a részvény ára ezen K ár alatt marad!

a. Írjuk fel a két opció kifizetési függvényét!

b. Tekintsük azt a kombinált opciót, melyben a fenti két digitális opció található! Írjuk fel ennek a kombinált opciónak a kifizetési függvényét!

c. Milyen kapcsolat van a két digitális opció arbitrázsmentes ára között?

4.3. Tíz éven keresztül havi egy alkalommal kereskedünk a tőzsdén. A részvény és a kötvény árát a következő binomiális piaccal modellezzük: $B_0 = 1$, $S_0 = 100$, $N = 120$, $r = 0{,}01$, $a = 0{,}005$, $b = 0{,}02$, $p = 1/2$.

a. Írjuk fel a kötvény illetve a részvény árának az eloszlását a lejárati időpontban!

b. Közelítőleg mennyi annak a valószínűsége, hogy a lejáratkor a részvény ára 400 és 500 közé esik?

c. Tekintsünk egy európai call opciót 5 éves lejárati idővel és $K=200$ kötési árral. Adjuk meg az opció arbitrázsmentes árát!

d. Árazzuk be a kapcsolatos európai put opciót is!

4.4. Egy piacon a részvény ára a következő dinamika szerint alakul:

$$S_0 = 10, \qquad S_k = S_{k-1}e^{\rho_k}, \qquad k = 1,2,\dots,100.$$

A $\rho_1, \dots, \rho_{100}$ véletlen változók függetlenek, továbbá

$$P(\rho_k = 0{,}05) = 0{,}6, \qquad P(\rho_k = -0{,}01) = 0{,}4, \qquad k = 1,2,\dots,100.$$

a. Bizonyítsuk be, hogy az S_{100} lejáratkori részvényár közelítőleg lognormális eloszlást követ, továbbá adjuk meg ennek az eloszlásnak a paramétereit!

b. Közelítőleg mennyi annak az esélye, hogy a lejáratkori részvényár 500 és 600 közé esik?

4.5. Tekintsük a Black–Scholes-piacot $B_0 = 1$, $S_0 = 100$, $r = 0{,}1$, $\mu = 0{,}2$ és $\sigma = 0{,}5$ paraméterekkel, továbbá tekintsünk egy európai vételi és egy európai eladási opciót a részvényre $T = 2$ lejárati idővel és $K = 120$ kötési árral. Most 1 év az időegység. Árazzuk be a két opciót!

5. Csereügyletek

5.1. Két vállalat, A illetve B, hitelt kíván felvenni azonos értékben, az A vállalat fix, a B vállalat változó kamatozással. Az alábbi táblázat azt tartalmazza, hogy a vállalatok milyen éves kamatláb mellett tudnak hitelhez jutni.

Vállalat	Fix	Változó
A	4,5%	LIBOR − 0,4%
B	5,5%	LIBOR + 1%

a. Hány százalák a hitel kamatköltsége a két vállalatnál összesen, ha a hiteleket a tervezett módon veszik fel? Hány százalék lenne akkor, ha az A vállalat venne fel változó, a B pedig fix kamatozású hitelt?

b. A két vállalat swap szerződést köt, melynek értelmében az A vállalat változó, a B fix kamatozás mellett veszi fel a hitelt, és a továbbiakban a kamatokat elcserélik egymással. Hány százalék kamatot spórol ezzel a két cég összesen? A szerződést úgy kötik meg, hogy a megspórolt összeget felesben osztják el egymás között. Vázolja egy diagrammon, hogy milyen irányú és nagyságú pénzáramokat jelent a swap szerződés és a kamatok törlesztése a két vállalat között illetve a hitelt nyújtó bankok felé.

5.2. Az AmCorp egy amerikai vállalat, mely az európai beruházásához 10 millió euro értékben szeretne hitelt felvenni. Az EuCorm egy európai cég, mely amerikában terjeszkedne, és ehhez 11 millió amerikai dollár hitelt kíván felvenni. A mai USD/EUR árfolyam 1.1, tehát a két hitel azonos értékű. Az alábbi táblázat azt tartalmazza, hogy az egyes cégek milyen kamatozással tudnak hitelhez jutni a két pénznemben.

Vállalat	USD kamat	EUR kamat
AmCorp	5,0%	7,6%
EuCorp	7,0%	8,0%

a. Hány százalék kamatot kell összesen fizetnie a két vállalatnak, ha az AmCorp euroban, az EuCorp pedig dollárban veszi fel a hirelt? Hány százalék kamatot kellene fizetniük összesen, ha mindkét fél a saját országának a pénznemében venné fel a hitelt? Hány százalékot tudnának ilyen módon spórolni összesen?

b. Vázoljon fel egy olyan kamatcsere megállapodást, mikor a megspórolt kamatot egyenlően osztják szét egymás között, és az árfolyamváltozás kockázatát teljes mértékben az AmCorp viseli! Magyarázza el, hogy az AmCorp cégnek miért van, az EuCorp vállalatnak pedig miért nincs kockázata!

c. A két cég közvetítőként egy befektetési bankot is bevon a megállapodásba. Vázoljon egy olyan kamatcsere megállapodást a három fél között, mikor a kamatváltozás kockázatát teljes mértékben a bank viseli!

5.3. Egy CDS szerződés keretei között biztosítást vásárolunk egy B kockázati besorolású részvényre. A névérték 100 ezer dollár, a lejárati idő 4 év, a prémiumot évente fizetjük, a kockázatmentes éves folytonos kamatráta $r = 5\%$. Csőd esetén a kártérítést a következő prémiumfizetési időpontban kapjuk meg. Írja fel a termékhez tartozó csőd ágat és prémium ágat, majd ezek segítségével határozza meg az igazságos prémiumot! Az alábbi táblázat a különböző kockázati besorolású vállalatok csődjének valószínűségét tartalmazza százalékban kifejezve.

Lejárat (év)	1	2	3	4	5	7	10	15	20
Aaa	0.000	0.013	0.013	0.037	0.106	0.247	0.503	0.935	1.104
Aa	0.022	0.069	0.139	0.256	0.383	0.621	0.922	1.756	3.135
A	0.063	0.203	0.414	0.625	0.870	1.441	2.480	4.255	6.841
Baa	0.177	0.495	0.894	1.369	1.877	2.927	4.740	8.628	12.483
Ba	1.112	3.083	5.424	7.934	10.189	14.117	19.708	29.172	36.321
B	4.051	9.608	15.216	20.134	24.613	32.747	41.947	52.217	58.084
Caa–C	16.448	27.867	36.908	44.128	50.366	58.302	69.483	79.178	81.248

5.4. Egy befektetési bank összeállít egy kosarat 50 vállalati kötvényből, mindegyiknek 1 millió euro a névértéke. A kötvények hozamaiból egy CDO szerződés keretei között részesedést lehet vásárolni. A lejárati idő 3 év, és a bank a prémiumot évente fizeti. Az alábbi táblázat tartalmazza a tranche-okat.

Tranche	Belépési pont	Kilépési pont	Névérték	Éves prémium
Equity	0%	10%	5 millió $	25%
Mezzanine	10%	50%	20 millió $	10%
Senior	50%	100%	25 millió $	5%

a. Tegyük fel, hogy az első évben 2, a második évben 10, a harmadik évben pedig 18 kötvény megy csődbe! Írja fel, hogy az egyes tranche-ok mennyi prémiumot kapnak az egyes évek végén!

b. Tegyük fel, hogy a befektetési bank nem CDO, hanem szintetikus CDO szerződés keretei között adja el a kötvények hozamait! Az előző pont forgatókönyvét alapul véve írja fel, hogy mikor, milyen nagyságú és milyen irányú kifizetések fognak majd történni a befektetési bank és az egyes tranche-ok között!

6. Kockázati mértékek

6.1. Egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn legyen V a véges várható értékű véletlen változók halmaza! Bizonyítsuk be, hogy a $\rho : V \to \mathbb{R}$, $\rho(X) = -E(X)$, formulával definiált kockázati mérték koherens.

6.2. Tekintsünk egy $\rho : V \to \mathbb{R}$ koherens kockázati mértéket! Mutassuk meg, hogy ekkor teljesülnek az alábbi tulajdonságok! Zárójelben egy kis segítség, hogy a bizonyítás során melyik tulajdonságot kell alkalmazni.

a. $\rho(0) = 0$. (pozitív homogenitás)

b. $\rho(a) = -a$. (eltolás invariancia)

c. Pozitivitás: ha $P(X \geq 0) = 1$, akkor $\rho(X) \leq 0$. (monotonitás)

d. Konvexitás: ha $a \in [0,1]$, akkor $\rho(aX + (1-a)Y) \leq a\rho(X) + (1-a)\rho(Y)$. (szubadditivitás + pozitív homogenitás)

6.3. Az $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_4\}$ eseménytéren definiálunk egy X véletlen változót. A kimenetelek valószínűségét és az X hozzárendelési szabályát az alábbi táblázat tartalmazza.

i	1	2	3	4
$P(\omega_i)$	0,03	0,05	0,05	0,87
$X(\omega_i)$	-50	-20	-10	50

a. Határozzuk meg az X változó 10 százalékos kvantilisét. Adjuk meg a $\mathrm{VaR}_{90\%}$ Value-at-Risk és az $\mathrm{ES}_{10\%}$ Expected Shortfall értékét.

b. Ábrázoljuk az X változó eloszlásfüggvényét! Írjuk fel formulával és ábrázoljuk a $q_\alpha = q(\alpha)$ kvantilisfüggvényt az $\alpha \in (0,1)$ paraméter függvényében!

c. Tekintsünk egy U véletlen változót, ami egyenletes eloszlású a $[0,1]$ intervallumon, és legyen $Y = q(U)$! Adjuk meg az Y változó értékkészletét és eloszlását!

6.4. Tegyük fel, hogy az X változó az alábbi eloszlást követi! Vázlatosan ábrázoljuk az eloszlásfüggvényét! Határozzuk meg a változó 1 százalékos kvantilis, a 99 százalékos Value-at-Risk és az 1 százalékos Expected Shortfallt értékét!

a. X egyenletes eloszlású a $[-10{,}90]$ intervallumon.

b. X standard normális eloszlást követ.

7. A 2008-as pénzügyi válság okai

7.1. Jellemzően milyen forrásból finanszírozzák a pénzintézetek a lakossági jelzáloghiteleket Európában illetve az Egyesült Államokban?

7.2. Nevezze meg a három legnagyobb hitelminősítő céget.

7.3. Végső soron mi volt a 2008-as pénzügyi válság kiindulási oka? Ez milyen módon vezetett likviditási problémákhoz a nagy bankoknál? A pénzügyi válság miért okozott reálgazdasági válságot is?

7.4. Mit jelent az a kifejezés, hogy „too big to fail”?