Szegedi Tudományegyetem
Bolyai Intézet

Szabó Tamás, Szalai Máté, Szűcs Gábor

VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS PÉLDATÁR

Tartalomjegyzék

Előszó

Ez a jegyzet elsősorban a Szegedi Tudományegyetem közgazdász szakos hallgatóinak tartott *Valószínűségszámítás* kurzus gyakorlatához készült.

A hallgatók a feladatok megoldásának Youtube gyűjteményét ide kattintva tudják elérni.

A példatár a gyakorlati órák anyagát követve 12 fejezetet tartalmaz, ahol a feladatok tematikusan, fokozatosan nehezedő módon vannak felépítve.

1. óra
Kombinatorikus valószínűség

Ha egy kísérletnek véges sok kimenetele van, és mindegyik kimenetel ugyanakkora eséllyel következik be, akkor egy tetszőleges A esemény valószínűségét a következőképpen számoljuk ki:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset száma}}.$$

Előfordulhat, hogy a ROSSZ eseteket egyszerűbb megszámolni, ekkor

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\text{összes eset száma} - \text{rossz esetek száma}}{\text{összes eset száma}}.$$

Mintafeladat. Tegnap ellátogattunk egy csokigyárba, ahonnan kaptunk ajándékba csokikat, egy epreset, egy narancsosat, egy kávésat, egy rumosat, és egy oreosat. Anyukánk tette el őket, majd mikor hazaértünk, akkor mindenki véletlenszerűen választhatott egyet, elsőként a legidősebb testvérünk, Janka. Határozzuk meg a következő események valószínűségeit.

(a) Janka oreosat választ.

(b) Janka gyümölcsöset választ.

(c) Janka olyat választ, amiben nincs kávé.

(d) Janka karamellásat választ.

Megoldás: Ebben a feladatban a kísérlet az, hogy öt darab csokoládé közül véletlenszerűen kiválaszt Janka egyet.

- Látjuk, hogy a kísérletnek véges sok, 5 lehetséges kimenetele van, hiszen összesen öt csokoládé van.
- Mivel véletlenszerűen választ Janka, ezért mindegyik kimenetelnek azonos a valószínűsége.

Így egy **klasszikus valószínűségi mező**nk van, ahol egy tetszőleges **esemény** valószínűségét úgy számoljuk ki, hogy:

$$\mathbf{P}(\text{Esemény}) = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset száma}}.$$

(a) Mivel egy oreos csoki van, ezért a kedvező esetek száma 1, míg az összes eset 5, így

$$\mathbf{P}(\text{Janka oreosat választ}) = \frac{1}{5}.$$

(b) Az epres, és a narancsos is gyümölcsös, ezért kétféleképpen lehet gyümölcsöset választani,

$$\mathbf{P}(\text{Janka gyümölcsöset választ}) = \frac{2}{5}.$$

(c) Négy olyan eset van, amikor a csokiban nincs kávé (epres, narancsos, rumos, oreos), ekkor

$$\mathbf{P}(\text{Nincs kávé a csokiban}) = \frac{4}{5}.$$

Gondolkozhatunk úgy is, hogy a rossz esetek száma, amikor is a csokiban van kávé az egy, hiszen csak a kávés tartalmaz kávét, ezért

$$\text{a kedvező esetek száma} = \text{összes esetek száma} - \text{rossz esetek száma},$$

tehát

$$\mathbf{P}(\text{Nincs kávé a csokiban}) = \frac{5-1}{5} = \frac{4}{5},$$

így szintén ugyanazt kapjuk.

(d) Láthatjuk, hogy nincs olyan csoki, ami karamellás lenne, ezért ezt nulla féleképpen tudjuk kiválasztani

$$\mathbf{P}(\text{Janka karamellást választ}) = \frac{0}{5} = 0.$$

Egy másik meggondolásunk lehet az, hogy ez **lehetetlen esemény**, aminek a valószínűsége 0, így szintén ugyanazt kapjuk.

---

1. Feladat. A Mikulás zsákjában már csak egy csomag gumicukor, egy csomag ropi, egy mézeskalács, egy tábla csoki, és egy virgács van. A Mikulás a zsákjából véletlenszerűen ad valamit a kis Kincsőkének. Határozzuk meg a következő események valószínűségeit.

(a) Ropit kap.

(b) Édességet kap.

(c) Játékautót kap.

(d) Ajándékot kap.

Végeredmények:

(a) $\frac{1}{5}$; (b) $\frac{3}{5}$; (c) 0; (d) 1

Megoldás: YouTube

2. Feladat. Armandót is meglátogatta a húsvéti nyuszi. A nyúlnál már csak kettő sárga kicsi csokitojás, kettő csoki nyuszifigura, és egy kindertojás van. Véletlenszerűen ad egy édességet Armándónak. Határozzuk meg a következő események valószínűségeit.

(a) Kindertojást kap.

(b) Nyuszifigurát kap.

(c) Csokitojást kap.

(d) Barbie figurát kap.

Végeredmények:

(a) $\frac{1}{5}$; (b) $\frac{2}{5}$; (c) $\frac{3}{5}$; (d) 0

Megoldás: YouTube

3. Feladat. A Bolyais Karácsonyi partin egy ajándékot sorsolnak ki, amihez 200 sorsjegyet adtak el. Norbert 17 sorsjegyet vásárolt. Mennyi az esélye annak, hogy Norbert nem nyerte meg az ajándékot?

Végeredmény:

$$\frac{183}{200}$$

Megoldás: YouTube

4. Feladat. Egy úszóverseny döntőjébe 8 versenyző jutott, köztük volt P. Nikolett is. Tegyük fel, hogy minden befutási sorrend azonos esélyű. Mekkora a valószínűsége, hogy

(a) Nikolett érmet nyer?

(b) Nikolett győz?

(c) Nikolett nem végez az utolsó helyen?

Végeredmények:

(a) $\frac{3}{8}$; (b) $\frac{1}{8}$; (c) $\frac{7}{8}$

Megoldás: YouTube

5. Feladat. Dionízia újévi fogadalmat tett. Elhatározta, hogy az új évben nagyon szigorúan, minden negyedik napon (akár hétköznap, akár hétvége) elmegy az uszodába, és reggel hattól úszik egy órát. Dionízia nagy rajongója, Aníziusz csak annyit tud, hogy Dionízia lejár úszni, így az egyik januári reggelen ő is lenéz. Mekkora annak a valószínűsége, hogy találkoznak?

Végeredmény:

$$\frac{7}{31}$$

Megoldás: YouTube

6. Feladat. Anna, Bori és Cili véletlenszerűen leülnek egy padra.

(a) Hány lehetséges kimenetel van?

(b) Mennyi a valószínűsége, hogy Anna és Bori a pad két szélére ül?

(c) Mennyi a valószínűsége, hogy Anna és Cili egymás mellé ülnek?

Végeredmények:

(a) $3! = 6$; (b) $\frac{1}{3}$; (c) $\frac{2}{3}$

Megoldás: YouTube

7. Feladat. Anna, Bori, Cili, Dóri és Emma véletlenszerűen leülnek egy padra.

(a) Hány lehetséges kimenetel van?

(b) Mennyi a valószínűsége, hogy Anna és Bori a pad két szélén ül?

(c) Mennyi a valószínűsége, hogy Anna és Dóri között pontosan ketten vannak?

(d) Mennyi a valószínűsége, hogy Anna, Cili és Emma egymás mellett ül?

Végeredmények:

(a) $5! = 120$; (b) $\frac{3! \cdot 2!}{5!}$; (c) $\frac{2 \cdot 2! \cdot 3!}{5!}$; (d) $\frac{3 \cdot 3! \cdot 2!}{5!}$

Megoldás: YouTube

8. Feladat. Véletlenszerűen választunk egy valódi ötjegyű számot (azaz az első számjegy nem lehet nulla).

(a) Mennyi a valószínűsége, hogy a számjegyek különböző páratlan számok?

(b) Mennyi a valószínűsége, hogy a számjegyek között vannak azonosak?

Végeredmények:

(a) $\frac{5!}{9 \cdot 10^4}$; (b) $\frac{9 \cdot 10^4 - 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{9 \cdot 10^4}$

Megoldás: YouTube

9. Feladat. A háromszori pénzfeldobás kísérletében határozzuk meg a következő események valószínűségét:

(a) $A =$ Három fejet dobunk.

(b) $B =$ Dobunk fejet és írást is.

(c) $C =$ Pontosan két fejet dobunk.

(d) $D =$ Legfeljebb két fejet dobunk.

(e) $E =$ Legalább két fejet dobunk.

Végeredmények:

(a) $\frac{1}{8}$; (b) $\frac{6}{8}$; (c) $\frac{3}{8}$; (d) $\frac{7}{8}$; (e) $\frac{4}{8}$

Megoldás: YouTube

10. Feladat. Egy vendéglő egyik asztalánál 9 vendég ül, és mindenki rendel egy italt, összesen 3 sört, 4 vörös és 2 fehér bort. A pincér véletlenszerűen osztja ki az italokat. Mennyi a valószínűsége, hogy mindenki olyan italt kap, amilyet kért? Mennyi az esélye annak, hogy a pincér a söröket jól osztja ki, de legalább egy bort rossz vendégnek ad?

Végeredmények: Legyen A az az esemény, hogy „Mindenki olyan italt kap, amilyet kért", valamint B az, hogy „A pincér a söröket jól osztja ki, de legalább egy bort rossz vendégnek ad".

$$\mathbf{P}(A) = \frac{3! \cdot 4! \cdot 2!}{9!}$$
$$\mathbf{P}(B) = \frac{3! \cdot 4 \cdot 2 \cdot 4! + 3! \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4! + 3! \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4!}{9!}$$

Megoldás: YouTube

11. Feladat. Többször egymás után feldobunk egy szabályos dobókockát.

(a) Mennyi az esélye, hogy az első hatos pontosan a negyedik dobásra jön? Mi annak a valószínűsége, hogy az első hatost pontosan az n-edik dobásra kapjuk?

(b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az első négy dobás során kapunk legalább egy hatost? Mekkora eséllyel kapunk legalább egy hatost az első n dobás során?

(c) Hányszor dobjuk fel a kockát, ha az a célunk, hogy legalább 90% valószínűséggel legyen hatos a dobások között?

Végeredmények:

(a) $\frac{5^3 \cdot 1}{6^4}$, $\frac{5^{n-1} \cdot 1}{6^n}$; (b) $\frac{6^4 - 5^4}{6^4}$, $\frac{6^n - 5^n}{6^n}$; (c) 13

Megoldás: YouTube

2. óra
Mintavételezési feladatok

Visszatevés nélküli mintavételezés:

$$\text{sorrend nem számít,}\quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Visszatevéses mintavételezés:

$$\text{sorrend számít,}\quad n^k$$

Mintafeladat. Az autónkon szeretné apukánk a nyári gumit télire cserélni. A garázsban összesen 16 db. autógumi van. A 16 közül 8 db. téli, a maradék nyári gumi. Apukánk minket küld be, hogy hozzuk ki a gumikat, azonban mi nem tudjuk megkülönböztetni őket, így véletlenszerűen választunk közülük négyet.

(a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a négy közül pontosan kettő lesz téli?

(b) Nem szeretnénk apukánknak csalódást okozni, így amíg ő dolgozik elpróbáljuk, hogy folyamatosan viszek ki gumikat, azonban, amit kivittem, azt mindig vissza is viszem, anélkül, hogy megjegyezném, hogy melyik volt az. Összesen négy autógumit választok így ki. Mekkora annak a valószínűsége, hogy pontosan 3 lesz téli gumi?

Megoldás: A feladat szövege alapján a garázsban összesen 16 db. gumi van. A gumik közül 8 db. téli, a maradék, tehát szintén 8 db. nyári gumi. Ezek közül választunk véletlenszerűen négyet. Azonban látjuk, hogy az (a), és a (b) feladatrész között különbség van. Az (a)-nál azokat a gumikat, amiket kivittünk, nem visszük vissza. Míg a (b)-nél folyamatosan visszaviszem a gumikat.

(a) Ebben a feladatrészben a 16 db. gumi közül kiválasztunk négyet. Ekkor a kiválasztás sorrendje nyilván nem számít, így az összes eset: $\binom{16}{4}$. Látjuk, hogy a nyolc téli gumi közül kell kettő, valamint a nyári közül is kettő kell, hiszen összesen négy gumit választunk ki. Ezeket $\binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2}$ féleképpen tehetjük meg. Így a keresett esemény valószínűsége:

$$\mathbf{P}(\text{Pontosan kettő gumi lesz téli}) = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{16}{4}}$$

(b) Mivel folyamatosan visszavisszük a gumikat, így mindig 16 db. gumi közül tudunk választani. Így ez egy ismétléses mintavételezés. Ekkor az összes eset: $16 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 16 = 16^4$. Egy lehetséges jó kimenetel például, hogy az első három gumi, ami választok az téli, az utolsó pedig nyári, ez $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 8^4$ féleképpen következik be. Négyféle módon lehet az, hogy nyári viszünk ki, mert lehet, hogy az első gumi lesz az, vagy a második, vagy a harmadik, vagy a negyedik. Emiatt:

$$\mathbf{P}(\text{Pontosan három lesz téli}) = \frac{4 \cdot 8^4}{16^4}.$$

1. Feladat. A rendelkezésünkre álló 10.000 csavar közül 500 selejtes, ezek közül véletlenszerűen húzunk 10–et. Számítsuk ki az

$$A = \text{Pontosan 3 selejtet húzunk}$$

esemény valószínűségét amennyiben a modell visszatevés nélküli és nem számít a sorrend, illetve, ha a modell visszatevéses és számít a sorrend.

Végeredmények:

Visszatevés nélkül, nem számít a sorrend:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\binom{500}{3} \cdot \binom{1500}{7}}{\binom{10000}{10}}$$

Visszatevéssel, számít a sorrend:

$$\mathbf{P}(A) = \binom{10}{3} \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95^7$$

Megoldás: YouTube

2. Feladat. A rendelkezésünkre álló 20 csavar közül 16 jó és 4 selejtes, ezek közül visszatevés nélkül, véletlenszerűen húzunk 2–t. Határozzuk meg az elemi események számát, majd számítsuk ki a következő események valószínűségét:

A_2 = Két selejteset húzunk.

A_0 = Nem húzunk selejtet.

A_1 = Pontosan egy selejteset húzunk.

Végeredmények:

Ha számít a sorrend:

$$\mathbf{P}(A_2) = \frac{4 \cdot 3}{20 \cdot 19}; \quad \mathbf{P}(A_1) = \frac{2 \cdot 4 \cdot 16}{20 \cdot 19}; \quad \mathbf{P}(A_0) = \frac{16 \cdot 15}{20 \cdot 19}$$

Ha nem számít a sorrend:

$$\mathbf{P}(A_2) = \frac{4 \cdot 3}{20 \cdot 19}; \quad \mathbf{P}(A_1) = \frac{2 \cdot 4 \cdot 16}{20 \cdot 19}; \quad \mathbf{P}(A_0) = \frac{16 \cdot 15}{20 \cdot 19}$$

Megoldás: YouTube

3. Feladat. A rendelkezésünkre álló 20 csavar közül 16 jó és 4 selejtes, ezek közül véletlenszerűen húzunk 5–öt. Határozzuk meg, hogy hány elemi esemény alkotja az alaphalmazt és számítsuk ki a következő események valószínűségét abban az esetben, ha a modell visszatevés nélküli és nem számít a sorrend, illetve, ha a modell visszatevéses és számít a sorrend:

$$A = 5 \text{ selejtet választottunk.}$$
$$B = 2 \text{ selejtet és 3 jót választottunk.}$$

Végeredmények:

Visszatevés nélkül, nem számít a sorrend:

$$\mathbf{P}(A) = 0; \quad \mathbf{P}(B) = \frac{15 \cdot 14 \cdot 6}{19 \cdot 18 \cdot 17}$$

Visszatevéssel, számít a sorrend:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{4^5}{20^5}; \quad \mathbf{P}(B) = \frac{10 \cdot 4^3}{5^5}$$

Megoldás: YouTube

4. Feladat. Egy brüsszeli házibulin rendőrök razziáztak. Találtak 15 különös, fehér tartalmú kis zacskót, melyek tömegét is megmérték. Azt találták, hogy a 15 között, 10-nek kevesebb a tömege, a maradéknak pedig több a tömege, mint 10 gramm. A zacskókat az ereszcsatornán küldik le, mely során 4 zacskó kiszakad. Mekkora a következő események valószínűsége?

(a) Pontosan egy kiszakadt zacskó könnyebb, mint 10 gramm.

(b) Legalább egy kiszakadt zacskó nehezebb, mint 10 gramm.

Végeredmények:

(a) $\frac{\binom{10}{1} \cdot \binom{5}{3}}{\binom{15}{4}}$; (b) $\frac{\binom{15}{4} - \binom{10}{4}}{\binom{15}{4}}$

Megoldás: YouTube

5. Feladat. Pálinka főzéséhez vettünk 10 kg cukrot egykilós kiszerelésben. Mikor lemértük azokat, azt tapasztaltuk, hogy 2 közülük könnyebb, 8 pedig nehezebb volt, mint 1 kg. Visszatevés nélkül találomra kiválasztva 3 cukrot, mennyi a valószínűsége a következő eseményeknek?

(a) Mind könnyebb, mint 1 kg.

(b) Legalább egy könnyebb, mint 1 kg.

(c) Legfeljebb kettő nehezebb, mint 1 kg.

Végeredmények:

(a) 0; (b) $\dfrac{\binom{8}{2}\cdot\binom{2}{1}+\binom{8}{1}\cdot\binom{2}{2}}{\binom{10}{3}}$; (c) $\dfrac{\binom{10}{3}-\binom{8}{3}\cdot\binom{2}{0}}{\binom{10}{3}}$

Megoldás: YouTube

6. Feladat. Egy disznóvágás során a böllérnek kitöltenek 5 pohár gint és 10 pohár vizet, azonban a poharak összekeverednek. A böllér tízpercenként egy órán keresztül legurít egyet, üdvözölve így minden új vendéget. Miután egy italt megiszik mindig ugyanolyannal pótolják azt, és a poharak ekkor újra összekeverednek. Mennyi a valószínűsége a következő eseményeknek?

A = Elsőre vizet iszik.

B = Elsőre, és másodjára vizet, a többi esetben pedig gint iszik.

C = Pontosan kétszer iszik vizet.

Végeredmények:

$$\mathbf{P}(A)=\frac{10}{15};\quad \mathbf{P}(B)=\left(\frac{10}{15}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{15}\right)^4;\quad \mathbf{P}(C)=\binom{6}{2}\cdot\left(\frac{10}{15}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{15}\right)^4$$

Megoldás: YouTube

7. Feladat. Gizi nagymamája meggylevest csinál, amibe pontosan 4 darab szegfűszeget tesz. A levest öt egyforma adagra osztják, melyet a család jóízűen elfogyaszt. Határozzuk meg a következő események valószínűségeit.

(a) Gizi levesében nincs szegfűszeg.

(b) Gizi apukájának a levesében pontosan kettő szegfűszeg van.

(c) Gizi levesében, és az anyukája levesében sincs szegfűszeg.

Végeredmények:

(a) $\left(\frac{4}{5}\right)^4$; (b) $\binom{4}{2}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2$; (c) $\left(\frac{3}{5}\right)^4$

Megoldás: YouTube

8. Feladat. Egy óvodás csoportba 9 gyerek jár, köztük egy testvérpár. Hányféleképpen lehet a gyerekeket egy négy-, egy három- és egy kétfős csoportba besorolni? Ha véletlenszerű a besorolás, akkor milyen valószínűséggel fog a két testvér ugyanabba a csoportba kerülni?

Végeredmények:

$\binom{9}{4}\cdot\binom{5}{3}\cdot\binom{2}{2}=1260$; $\dfrac{\binom{7}{2}\cdot\binom{5}{3}\cdot\binom{2}{2}+\binom{7}{4}\cdot\binom{3}{1}\cdot\binom{2}{2}+\binom{7}{4}\cdot\binom{3}{3}}{1260}$

Megoldás: YouTube

9. Feladat. A 32 lapos magyar kártyából visszatevés nélkül húzunk 6 lapot. Mennyi a valószínűsége, hogy

(a) pontosan 2 ászt húztunk?

(b) pontosan 3 pirosat, 2 zöldet és 1 makkot húztunk?

(c) legalább 1 ászt húztunk?

(d) legalább 1 pirost vagy legalább 1 ászt húztunk?

Végeredmények:

(a) $\dfrac{\binom{28}{4}\cdot\binom{4}{2}}{\binom{32}{6}}$; (b) $\dfrac{\binom{8}{3}\binom{8}{2}\binom{8}{1}}{\binom{32}{6}}$; (c) $\dfrac{\binom{32}{6}-\binom{28}{6}}{\binom{32}{6}}$; (d) $\dfrac{\binom{32}{6}-\binom{21}{6}}{\binom{32}{6}}$

Megoldás: YouTube

10. Feladat. A 32 lapos magyar kártyából visszatevéssel húzunk 6 lapot. Mennyi a valószínűsége, hogy

(a) pontosan 2 ászt húztunk?

(b) pontosan 3 pirost, 2 zöldet és 1 makkot húztunk?

(c) legalább 1 ászt húztunk?

(d) legalább 1 pirost vagy legalább 1 ászt húztunk?

Végeredmények:

(a) $\dfrac{\binom{6}{2}\cdot 4^2\cdot 28^4}{32^6}$; (b) $\dfrac{\binom{6}{3}\cdot\binom{3}{2}\cdot 8^6}{32^6}$; (c) $\dfrac{32^6-28^6}{32^6}$; (d) $\dfrac{32^6-21^6}{32^6}$

Megoldás: YouTube

11. Feladat. Egy vizsgán egy hallgató a 100 lehetséges kérdésből n-re tudja a választ. A hallgató két kérdést kap véletlenszerűen. Mekkora eséllyel fogja teljesíteni a vizsgát, ha

(a) megbukik, ha valamelyik kérdésre nem tud válaszolni?

(b) a kérdések közül elég az egyikre válaszolni?

Az egyes vizsgáztatási módok esetén a vizsgázó hány kérdésre tanulja meg a választ, ha az a célja, hogy legalább 80% valószínűséggel teljesítse a vizsgát?

Végeredmények:

(a) $\dfrac{\binom{n}{2}}{\binom{100}{2}}$, 90; (b) $\dfrac{\binom{100}{2}-\binom{100-n}{2}}{\binom{100}{2}}$, 55

Megoldás: YouTube YouTube

3. óra
A valószínűség általános tulajdonságai

$$\mathbf{P}(A \setminus B) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A \cap B), \quad \mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A),$$
$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$$
$$\mathbf{P}(A \cup B \cup B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C) - \mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(B \cap C) + \mathbf{P}(A \cap B \cap C)$$

Mintafeladat. Peti a következő héten kalkulusból, és valószínűségszámításból is vizsgázik. Tudjuk, hogy annak az esélye, hogy kalkulusból megy át 0,7, a valószínűségszámításnál ez az érték 0,5. Míg annak az esélye, hogy mindkettő tárgyat sikerül abszolválnia 0,25.

(a) Írjuk fel formálisan azt az esemény, hogy kalkulusból vagy valószínűségszámításból megy át; valamint azt, hogy egyik tárgyból sem megy át.

(b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy kalkulusból, vagy valószínűségszámításból megy át.

(c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy pontosan az egyik tárgyból megy át?

(d) Mennyi annak a valószínűsége, hogy egyik tárgyból sem megy át?

Megoldás: Legyenek A az az esemény, hogy kalkulusból megy át, illetve B, hogy valószínűségszámításból megy át. A feladat szövege alapján $\mathbf{P}(A) = 0{,}7$, $\mathbf{P}(B) = 0{,}5$, illetve $\mathbf{P}(A \cap B) = 0{,}25$.

(a) Kalkulusból átmegy VAGY Valószínűségszámításból átmegy $=$ A VAGY $B = A \cup B$;
Nem kalkulus ÉS nem Valószínűségszámítás $=$ Nem A És nem $B = \overline{A} \cap \overline{B}$

(b) $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B) = 0{,}95$

(c) $\mathbf{P}(A \cup B) - \mathbf{P}(A \cap B) = 0{,}95 - 0{,}25 = 0{,}7$

(d) $\mathbf{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A \cup B}) = 0{,}05$

---

1. Feladat. Liborius mind a három fiának Samsung Note 7-es telefont vett. Jelölje A_1, A_2, illetve A_3 azt az eseményt, hogy a legidősebb, a középső, illetve a legfiatalabb fiának felrobban a telefonja. Mit jelentenek az alábbi események?

(a) $A_1 \cap \overline{A_2}$ (b) $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ (c) $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ (d) $\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}$

Végeredmények:

(a) A legidősebb fiúnak felrobban a telefonja, de a középsőnek nem.

(b) Legalább az egyiknek felrobban a telefonja; vagy másképp valamelyik fiúnak felrobban a telefonja.

(c) A legidősebb és a középső és a legfiatalabb fiúnak felrobban a telefonja, azaz mindhármuk telefonja felrobban.

(d) Egyikőjüknek sem robban fel a telefonja.

Megoldás: YouTube

2. Feladat. Kiválasztunk egy végzős hallgatót, és megnézzük, hogy hány kurzusfelvétellel tudta teljesíteni a tárgyait. Jelölje A_n azt, hogy a Kalkulust az n-edik kurzusfelvételkor teljesítette, tehát például A_3 az az esemény, hogy a tárgyat a harmadik alkalommal sikerült abszolválnia. Hasonló módon jelölje B_n azt, hogy a Lineáris algebrához pontosan n felvétel volt szükséges, C_n pedig az az esemény, hogy a Valószínűségszámítás az n-edik alkalommal sikerült. Formalizáljuk a következő eseményeket:

(a) a Kalkulust az első, a Lineáris algebrát a második felvételkor sikerült teljesíteni.

(b) a Kalkulus sikerült elsőre, de a Valószínűségszámítás nem.

(c) a három közül legalább egy kurzust sikerült az első alkalommal teljesíteni.

(d) a három közül legalább egy kurzust nem sikerült az első alkalommal teljesíteni.

(e) a Kalkulushoz és a Valószínűségszámításhoz összesen négy felvétel kellett.

Végeredmények:

(a) $A_1 \cap B_2$; (b) $A_1 \setminus C_1$; (c) $A_1 \cup B_1 \cup C_1$; (d) $\overline{A_1} \cup \overline{B_1} \cup \overline{C_1}$; (e) $(A_1 \cap C_3) \cup (A_2 \cap C_2) \cup (A_3 \cap C_1)$

Megoldás: YouTube

3. Feladat. A péntek reggeli valószínűségszámítás gyakorlat 25 hallgatójáról a következőket tudtuk meg: 14-en WoW–oznak, 10-en LoL–oznak és a hallgatók 12%–a mindkét játékkal játszik. Halmazelméleti műveletekkel adjunk választ a következő kérdésekre.

(a) Hányan vannak azok, akik WoW–oznak, de nem LoL–oznak?

(b) Hányan játszanak pontosan egy játékkal?

(c) Hány fő játszik legalább egy játékkal?

(d) A hallgatók hány százaléka nem játszik egyik játékkal sem?

(e) Hány százalékuk játszik legfeljebb az egyikkel?

Végeredmények:

(a) 11; (b) 18; (c) 21; (d) 16%; (e) 22

Megoldás: YouTube

4. Feladat. A szegedi lakosokról megtudtuk, hogy 70%-uk járt már Pick Szeged meccsen (kézilabda), míg 32%-uk a Grosics Akadémia meccsén (focilabda). Kézin is, és focin is a lakosok 13%-a volt már. A település utcáján sétálgatva leszólítunk egy helyi lakost.

(a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a szegedi csapat kézilabdameccsén már volt, de a focin még nem.

(b) Mennyi eséllyel volt már valamelyik meccsen?

(c) Mekkora valószínűséggel volt pontosan az egyik meccsen?

(d) Mekkora eséllyel nem volt még egyik meccsen sem?

Végeredmények:

(a) 0,57; (b) 0,89; (c) 0,76; (d) 0,11

Megoldás: YouTube

5. Feladat. A Krypton bolygón a szuperhősöket két tulajdonság alapján tudjuk kategorizálni. Vagy természetfeletti elmével rendelkeznek, ami segítségével tárgyakat tudnak mozgatni, vagy emberfeletti erővel, így legyőzhetetlenek. Egyik nap a bolygó városházáján járva összeszámoltuk, hogy az ott élők hányad része rendelkezik az adott tulajdonságokkal (van olyan, akinek semmilyen szuper képessége sincs). Számításaink alapján az ott lakók 25%-a rendelkezik természetfeletti elmével, 50%-uk emberfeletti erővel, míg 10%-uk mindkettő tulajdonságot magukénak tudhatják. Véletlenszerűen kiválasztunk egy, a Krypton bolygón élő teremtményt. Mekkora annak a valószínűsége, hogy:

(a) természetfeletti elméje van, de nincs emberfeletti ereje?

(b) van valamilyen ereje?

(c) pontosan egy szuper erője van?

(d) nincs neki szuper erője?

Végeredmények:

(a) 0,15; (b) 0,65; (c) 0,55; (d) 0,35

Megoldás: YouTube

6. Feladat. Egy tiszántúli falu főterén három templom van, egy katolikus, egy evangélikus és egy református. A falubeliek 55%-a járt már a katolikus, 60%-uk az evangélikus, míg 45%-uk a református templomban. A lakók negyede járt már a katolikus és a református templomban, míg egyaránt 30%-uk járt az evangélikus és református, illetve a katolikus és az evangélikus templomokban is.

Mindhárom templomban a lakók ötöde tette már le tiszteletét. A falu boltjában véletlenszerűen kérdezünk meg egy helyi lakost. Mekkora annak a valószínűsége, hogy:

(a) járt márt a katolikus vagy a református templomban;

(b) pontosan két templomban járt már a három közül;

(c) egyik templomban sem járt még a három közül?

Végeredmények:

(a) 0,75; (b) 0,25; (c) 0,05

Megoldás: YouTube

7. Feladat. Az egyetem a nyárra három városba szervezett kirándulást, Madridba, Londonba és Krakkóba. A tanév kezdetekor közvéleménykutatást tartottunk arról, hogy a diákok mely kiránduláson vettek részt. A válaszadók 60%-a Madridba, 45%-a Londonba, míg 20%-a Krakkóba utazott el. A diákok 23%-a Madridba és Londonba, 18%-a Madridba és Krakkóba, míg 10%-a Londonba és Krakkóba utazott el. Az egyetemisták 22%-a nem vett részt egyik kiránduláson sem. Ha véletlenszerűen kiválasztunk egy diákot, akkor mekkora annak a valószínűsége, hogy:

(a) csak Londonban volt?

(b) Krakkóban volt, de Madridban nem?

(c) mindhárom kiránduláson volt?

Végeredmények:

(a) 0,31; (b) 0,02; (c) 0,04

Megoldás: YouTube

8. Feladat. Egy hedge fund három cégbe fekteti pénzét, melyek rendre 19%, 25% illetve 28% valószínűséggel mennek tönkre az elkövetkező öt évben. 1/20 annak az esélye, hogy az első és a második cég is csődbe megy; 1/10 a valószínűsége, hogy az első és a harmadik is elveszti a vagyonát; és 1/10 az esélye annak is, hogy a második és a harmadik is becsődöl. Annak az esélye, hogy mindhárom vállalat csődbe megy, 2%. Mennyi a valószínűsége, hogy az elkövetkező öt évben

(a) az első vagy a második vállalat csődbe megy?

(b) az első becsődöl, de a harmadik nem?

(c) pontosan két vállalt megy csődbe, és közöttük lesz a harmadik?

(d) legalább két vállalat becsődöl?

(e) egyik vállalat sem csődöl be?

Végeredmények:

(a) 0,39; (b) 0,09; (c) 0,16; (d) 0,21; (e) 0,51

Megoldás:

9. Feladat. Legyenek A és B olyan események, melyek valószínűsége 0,7 illetve 0,8. Ezen információ birtokában meg tudjuk határozni egyértelműen a $\mathbf{P}(A \cup B)$ és a $\mathbf{P}(A \cap B)$ valószínűséget? Ha nem, akkor adjunk alsó és felső korlátot ezekre a valószínűségekre. A megoldást illusztráljuk Venn-diagrammal.

Végeredmények: A kettő közül egyik esemény valószínűsége sem határozható meg egyértelműen, az események valószínűsége az alábbi korlátok között bármilyen értéket felvehet:

$$0{,}5 \le \mathbf{P}(A \cap B) \le 0{,}7; \quad 0{,}8 \le \mathbf{P}(A \cup B) \le 1$$

Megoldás:

4. óra
Geometriai valószínűségi mezők, feltételes valószínűség

Ha az eseménytér egy mérhető geometriai alakzat (véges a hossza/területe), és teljesül az egyenletességi hipotézis, akkor egy tetszőleges A esemény valószínűségét a következőképpen számoljuk ki:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\text{kedvező hossz/terület}}{\text{összes hossz/terület}}.$$

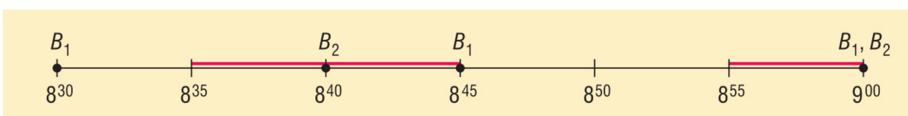
Feltételes valószínűség: Tegyük fel, hogy egy B eseménynek pozitív a valószínűsége, vagyis $\mathbf{P}(B) > 0$. Ekkor az A eseménynek a B eseményre vett **feltételes valószínűsége**

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}.$$

A feltételes valószínűség megmutatja, hogy mennyi az A esemény valószínűsége, ha tudjuk, hogy a B esemény bekövetkezik.

Mintafeladat. Zsuzsi minden reggel 9 és fél 9 között véletlenszerűen érkezik meg a buszmegállóba. Neki két busz is megfelel, az egyik 15, a másik 20 percenként indul 5 órától kezdve. Mennyi a valószínűsége, hogy nem kell 5 percnél többet várnia?

Megoldás: Készítsünk ábrát:



Feleljen meg egy szakasz a fél 9 és 9 közötti időtartamnak, és ezen jelöljük be a buszok érkezési időpontját. Ezen a szakaszon bejelölve azokat a részeket, amikor érkezve nem kell 5 percnél többet várni, látható, hogy ezek összesen 15 percet tesznek ki az összes 30 percből, így a keresett valószínűség:

$$\mathbf{P}(\text{Nem kell 5 percnél többet várni}) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}.$$

---

1. Feladat. Egy 30 km hosszú egyenes útszakasz véletlenszerű helyén lerobban az autónk. A közelben csak egy mobiltelefon átjátszó torony van, ez az út felénél az úttól 6 km távolságra található. A torony egy 10 km sugarú kör alakú területet képes kiszolgálni.

(a) Mennyi annak az esélye, hogy telefonon segítséget tudunk hívni?

(b) Mennyi a valószínűsége, hogy telefonon segítséget tudunk hívni, ha az út első 5 kilométeres szakaszán robbantunk le?

(c) Mennyi a valószínűsége, hogy tudunk segítséget hívni, feltéve, hogy az első 10 kilométeren robbantunk le?

(d) Annak mennyi az esélye, hogy nem tudunk segítséget hívni, ha tudjuk, hogy az első 10 kilométeren robbantunk le?

Végeredmények:

(a) 0,533; (b) 0; (c) 0,3; (d) 0,7

Megoldás: YouTube

2. Feladat. Egy 120 km hosszú egyenes autópályán a 40–edik és a 100–adik kilométernél van mentőállomás, nevezzük ezeket X–nek és Y –nak. Ha baleset történik, akkor azt az állomást riasztják, amelyik közelebb esik a baleset helyszínéhez.

(a) Egy véletlenszerű baleset esetén mennyi az esélye annak, hogy az X állomást riasztják?

Tegyük fel, hogy négy baleset történik egymás után

(b) Mennyi az esélye, hogy pontosan két alkalommal riasztják az X állomást?

(c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy időrendben az első két esethez az X, a második kettőhöz pedig az Y állomást riasztják?

(d) Mi a valószínűsége annak, hogy a négyből legalább egy esethez az X állomást riasztják?

(e) Hány baleset esetén teljesül az, hogy legalább 99% eséllyel valamelyik esethez az X állomást fogják majd riasztani?

Végeredmények:

(a) $\frac{7}{12}$; (b) $\binom{4}{2}\left(\frac{7}{12}\right)^2\left(\frac{5}{12}\right)^2$; (c) $\left(\frac{7}{12}\right)^2\left(\frac{5}{12}\right)^2$; (d) $1-\left(\frac{5}{12}\right)^4$; (e) legalább 6

Megoldás: YouTube

3. Feladat. A dühös Pistike belerúgta a labdáját egy 6×6 méteres négyzet alapú medencébe (a labdát pontszerűnek tekintjük). Határozzuk meg a következő események valószínűségeit.

(a) A labda a legközelebbi oldaltól legfeljebb 1 méter távolságra van.

(b) A labda a legközelebbi oldaltól legalább 4 méter távolságra van.

(c) A labda a legközelebbi oldaltól pontosan 1 méter távolságra van.

Végeredmények:

(a) 0,556; (b) 0; (c) 0

Megoldás: YouTube

4. Feladat. Az ozorai karácsonyi fesztiválon a következő játékot lehet játszani. Egy 5×2 méteres falra kell labdát dobálni. A falon három helyen lyukak vannak, melyek méretei: 20×20 cm, 40×40 cm, valamint 50×50 cm. Akkor nyerünk, ha valamelyik lyukba sikerült beletalálnunk, valamint a főnyereményt akkor vihetjük haza, ha a legkisebb lyukba találtunk bele. Gyuszika egyszer dob, és feltesszük, hogy a dobásai véletlenszerű helyen találják el a falat. Mekkora annak a valószínűsége, hogy nyereménnyel tér haza? Mekkora annak a valószínűsége, hogy a főnyereményt nyerte meg, ha büszkén meséli, hogy nyert valamit?

Végeredmény:

$$\mathbf{P}(\text{Nyereménnyel térhetünk haza}) = 0{,}045$$
$$\mathbf{P}(\text{Főnyeremény} \mid \text{Nyereménnyel tért haza}) = 0{,}089$$

Megoldás: YouTube

5. Feladat. Egy kör alakú, 3 méter sugarú kerti tó felszínén, a szélétől 2 méterre egy molnárka áll lesben. A vízfelszínre eső apró rovarok közül azokat veszi észre, amik tőle legfeljebb 1 méterre vannak. Ha egy rovar véletlenszerűen esik a vízbe, akkor mennyi az esélye, hogy ezt a molnárka észreveszi? A rovar vízbe érkezésének helye a tó felszínén megfelel az egyenletességi hipotézisnek.

Végeredmény:

0,111

Megoldás: YouTube

6. Feladat. Ejtőernyős ugrást hajtanak végre egy 500 négyzetméter területű mezőn. Az ugrás akkor sikeres, ha az ugró a mezőn kijelölt 10 méter oldalhosszúságú négyzetben ér földet. Különdíjat kap az, aki a négyzet közepén megrajzolt 2 méter sugarú körön belül érkezik. Feltehető, hogy az érkezés helye a mezőn megfelel az egyenletességi hipotézisnek.

(a) Mekkora valószínűséggel lesz sikeres az ugrás?

(b) Mennyi az esélye annak, hogy az ugró különdíjat kap feltéve, hogy az ugrás sikeres?

(c) Milyen kapcsolat van az alábbi események között (kizárják egymást, vagy valamelyik maga után vonja a másikat)?

$$A = \text{Sikeres az ugrás} \quad B = \text{Különdíjat kap az ugró}$$

Végeredmények:

(a) $\frac{1}{5}$; (b) $\frac{\pi}{25}$; (c) az, hogy különdíjat kapunk maga után vonja, hogy az ugrás sikeres

Megoldás: YouTube

7. Feladat. Adott egy 10 cm sugarú kör alakú céltábla. Erre felrajzolunk egy vízszintes és egy függőleges egyenest úgy, hogy mindkettő átmenjen a kör középpontján. Ilyen módon a táblát négy tartományra osztjuk fel. Véletlenszerűen rálövünk a céltáblára.

(a) Mennyi az

$$A = \text{A céltáblát a középponttól legalább 5 centiméterre találjuk el.}$$

esemény valószínűsége?

(b) Mennyi a

$$B = \text{A találat a bal alsó tartományba esik.}$$

esemény valószínűsége?

(c) Mennyi az A esemény valószínűsége, ha tudjuk, hogy a B esemény bekövetkezett?

(d) Milyen kapcsolatban áll egymással a két esemény (azaz függetlenek, vagy kizárják egymást, vagy valamelyik maga után vonja a másikat)?

Végeredmények:

(a) $\frac{3}{4}$; (b) $\frac{1}{4}$; (c) $\frac{3}{4}$; (d) függetlenek

Megoldás: YouTube

8. Feladat. Alexnek van egy 20 négyzetméteres minikertje, melyben kialakított egy 1×2 méteres téglalap alakú virágágyást. Egy vakond véletlenszerűen és egymástól függetlenül feltúr néhány helyen a kertben. Három túrás esetén mekkora annak a valószínűsége, hogy legalább egy túrás a virágok közé esik?

Végeredmény:

0,271

Megoldás: YouTube

9. Feladat. A $[0, 1]$ intervallumon véletlenszerűen választunk egy pontot. Ez a pont két szakaszra bontja az intervallumot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a szakaszok hosszának szorzata nagyobb, mint $\frac{5}{36}$?

Végeredmény:

$\frac{2}{3}$

Megoldás: YouTube

10. Feladat. Legyen A és B két esemény, és legyen $\mathbf{P}(B) > 0$. Mennyi a $\mathbf{P}(A|B)$ feltételes valószínűség értéke, ha

(a) A és B kizáró események?

(b) B maga után vonja az A eseményt?

(c) A és B független események?

Végeredmény:

(a) 0; (b) 1; (c) $\mathbf{P}(A)$

Megoldás:

11. Feladat. A következőkben tekintsük a Monty Hall-paradoxont.

(a) Egy tévés vetélkedőben három egyforma ajtó mögött egy főnyeremény és két kis értékű ajándék van véletlenszerűen elhelyezve. A játékos megjelöl egyet az ajtók közül, de azt most még nem nyitják ki neki. Ehelyett a műsorvezető nyit ki egyet véletlenszerűen a megmaradt ajtók közül. Tegyük fel, hogy a kinyitott ajtó mögött nem a főnyeremény található. A játékosnak ezen a ponton lehetősége van módosítani a választásán, és az eredetileg megjelölt ajtó helyett a harmadik, kimaradt ajtót kinyitni. Figyelembe véve, hogy a műsorvezető kis értékű ajándékot talált, a főnyeremény mekkora eséllyel van a játékos által megjelölt ajtó illetve a kimaradt ajtó mögött? Ezek alapján a játékosnak érdemes módosítania az eredeti választásán?

(b) Módosítsuk a feladat (a) részét annyiban, hogy a műsorvezető tudja, melyik ajtó mögött mi található, és mindig egy olyan ajtót nyit ki, mely mögött kis értékű nyeremény van. Ha két ilyen ajtó is rendelkezésre áll, akkor véletlenszerűen választ. Ebben az esetben milyen választ adhatunk az (a) pont kérdéseire?

Végeredmény:

(a) A főnyeremény 1/2-1/2 eséllyel található az eredetileg megjelölt illetve a kimaradt ajtó mögött. Mindegy, hogy a játékos kitart a választása mellett vagy módosít. (b) A főnyeremény 1/3 eséllyel található az eredetileg megjelölt ajtó, és 2/3 eséllyel a kimaradt ajtó mögött. Érdemes módosítani.

Megoldás:

5. óra
Feltételes valószínűség, események függetlensége

Láncszabály/szorzási szabály: Legyen $A_1, \dots, A_n$ olyan események, melyekre $\mathbf{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$. Ekkor

$$\mathbf{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbf{P}(A_1) \cdot \mathbf{P}(A_2|A_1) \cdot \dots \cdot \mathbf{P}(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

Legyen $A_1, A_2, \dots$ eseményeknek egy véges vagy végtelen sorozata. Ezek az események **teljesen függetlenek**, ha közülük tetszőleges $A_{i_1}, \dots, A_{i_n}$ különböző eseményeket kiválasztva

$$\mathbf{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n}) = \mathbf{P}(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot \mathbf{P}(A_{i_n}).$$

Mintafeladat. Egy varázsló kalapjában van 5 nyúl, és 3 hörcsög. Egymás után húz kétszer, és a kivett állatot már nem teszi vissza a kalapba. Legyen A_1 az az esemény, hogy elsőre nyulat húz, A_2 pedig az, hogy másodjára hörcsögöt. Határozzuk meg a $\mathbf{P}(A_1 \cap A_2)$ valószínűséget.

Megoldás: Láthatjuk, hogy az A_1, és az A_2 események nem függetlenek, hiszen az első húzás után változni fog a kalapban lévő állatok összáma. Ekkor a feladatban szereplő események valószínűségei a következők: $\mathbf{P}(A_1) = 5/8$, $\mathbf{P}(A_2|A_1) = 3/7$, hiszen az első húzáskor eggyel csökkent az állatok száma. Ekkora a keresett valószínűséget a láncszabály segítségével a következőképpen határozhatjuk meg: $\mathbf{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbf{P}(A_1) \cdot \mathbf{P}(A_2|A_1) = 15/56$.

---

1. Feladat. A villamosvezető a villamos 6 ajtaja közül bármelyiket egymástól függetlenül 0,3 valószínűséggel nyitja ki. Mi annak a valószínűsége, hogy

(a) az összes ajtót kinyitja?

(b) egyik ajtót sem nyitja ki?

(c) pontosan 3 ajtót nyit ki?

(d) legalább egy ajtót kinyit?

Végeredmények:

(a) $0{,}3^6$; (b) $0{,}7^6$; (c) $\binom{6}{3} \cdot 0{,}3^3 \cdot 0{,}7^3$; (d) $1 - 0{,}7^6$

Megoldás: YouTube

2. Feladat. Tegyük fel, hogy az új internet-előfizetők véletlenszerűen választott 20%-a speciális kedvezményt kap. 10 ismerősünk most fizet elő. Mi annak a valószínűsége, hogy

(a) az összes ismerősöm kedvezményt kap?

(b) egyik ismerősöm sem kap kedvezményt?

(c) pontosan 2 ismerősöm kap kedvezményt?

(d) legalább egy ismerősöm kedvezményt kap?

Végeredmények:

(a) $0{,}2^{10}$; (b) $0{,}8^{10}$; (c) $\binom{10}{2} \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^8$; (d) $1 - 0{,}8^{10}$

Megoldás: YouTube

3. Feladat. Antoine és Desiré egymástól függetlenül járnak az Aranyhíd vendéglőbe. Gyakran találkoznak, hiszen Antoine ott tölti a napok 40%-át, Desiré 70%-át. (A vendéglőben töltött napokat reggeltől estig ott töltik.) Egy szép napon mi is lenéztünk a vendéglőbe.

(a) Mennyi a valószínűsége, hogy ott találjuk Antoinet vagy Desirét?

(b) Már a bejáratnál meglátjuk Desirét. Mennyi a valószínűsége, hogy Antoine is a vendéglőben van?

(c) Mekkora annak a valószínűsége, hogy egyikőjük sincs ott?

Végeredmények:

(a) 0,82; (b) 0,4; (c) 0,18

Megoldás: YouTube

4. Feladat. A fogadóirodák szerint amerikai kosárlabda-bajnokságban (NBA) a Chicago Bulls, a San Antonio Spurs illetve a Los Angeles Lakers rendre 0,5, 0,8 és 0,3 valószínűséggel nyeri meg a következő meccsét. (A csapatok nem egymással játszanak.) Feltehető, hogy a három mérkőzés eredménye független egymástól. Határozzuk meg az alábbi események valószínűségét:

(a) mindhárom csapat megnyeri a következő mérkőzését.

(b) a Bulls nyer, viszont a Lakers veszít.

(c) a három csapat közül pontosan egy nyer.

(d) a három csapat közül legfeljebb egy nyer.

Feltéve, hogy a három csapat közül pontosan egy nyer, mennyi annak az esélye, hogy a Bulls, a Spurs illetve a Lakers éri el a győzelmet?

Végeredmények:

(a) 0,12; (b) 0,35; (c) 0,38; (d) 0,45; utolsó kérdés: $\approx 0{,}184; \approx 0{,}737; \approx 0{,}079$

Megoldás: YouTube YouTube

5. Feladat. A Balaton csokit gyártó cég ismét piacra dobta nyereményes termékét. A játék lényege, hogy 4 csokiból átlagosan 1 darab nyer. Véletlenszerűen megvásárlok 15 darabot.

(a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy egyik sem nyer?

(b) Mekkora eséllyel nyer pontosan egy?

(c) Tegyük fel, hogy megvásárlok n darab csokoládét ($n \in \mathbb{N}^+$). Mekkora legyen n értéke ha az a célom, hogy annak az esélye, hogy ezek közül legalább egy nyer 92% legyen?

Végeredmények:

(a) $\left(\frac{3}{4}\right)^{15}$; (b) $\binom{15}{1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{1} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{14}$; (c) $n \geq 9$

Megoldás: YouTube

6. Feladat. Cristiano Ronaldo a világ egyik legjobb focistája, azonban ma bal lábbal kelt fel. Szabadrúgásokat gyakorol, viszont eléggé gyengén megy neki. Az egyes rúgásoknál egymástól függetlenül 8% eséllyel lő gólt.

(a) Mennyi annak az esélye, hogy az első és a harmadik rúgása nem lesz gól, de a második és a negyedik próbálkozásra betalál a kapuba?

(b) Mi annak a valószínűsége, hogy az első három próbálkozása során pontosan kettő gól születik?

(c) Hányszor kellene próbálkoznia ilyen teljesítmény mellett, hogy 90% legyen annak az esélye, hogy legalább egyszer gólt rúg?

Végeredmények:

(a) 0,0054; (b) $\binom{3}{2} \cdot 0{,}08^2 \cdot 0{,}92$; (c) $n \geq 28$

Megoldás: YouTube

7. Feladat. Roger Federer a világ egyik legjobb teniszezője, azonban ma ballábbal kelt fel. Szervákat gyakorol, viszont eléggé gyengén megy neki. Az egyes adogatásoknál egymástól függetlenül 10% eséllyel üt ászt, tehát fogadhatatlan szervát.

(a) Tegyük fel, hogy Federer n-szer szervál. Mekkora annak a valószínűsége, hogy pontosan kettő ászt üt?

(b) Hányszor kellene Federernek adogatnia ilyen teljesítmény mellett, hogy 95% legyen annak az esélye, hogy legalább egy ászt üt?

Végeredmények:

(a) $\binom{n}{2} \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^{n-2}$; (b) $n \geq 29$

Megoldás: YouTube

8. Feladat. Egy 120 km hosszú autópályán a 40. és a 100. kilométernél van mentőállomás, nevezzük ezeket X-nek és Y-nak. Ha baleset történik, akkor azt az állomást riasztják, amelyik közelebb esik a baleset helyszínéhez.

(a) Egy véletlenszerű baleset esetén mennyi az esélye annak, hogy az X állomást riasztják?

(b) Tegyük fel, hogy négy baleset történik egymástól függetlenül. Mennyi annak a valószínűsége, hogy időrendben az első két esethez az X, a második kettőhöz pedig az Y állomást riasztják? Mennyi az esélye, hogy pontosan két alkalommal riasztják az X állomást? Mi a valószínűsége annak, hogy a négyből legalább egy esethez az X állomást riasztják?

(c) Hány baleset esetén teljesül az, hogy legalább 99% eséllyel valamelyik esethez az X állomást fogják majd riasztani?

Végeredmények:

(a) $\frac{7}{12}$; (b) $\left(\frac{7}{12}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^2$; $6 \cdot \left(\frac{7}{12}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^2$; $1 - \left(\frac{5}{12}\right)^4$; (c) 6

Megoldás: YouTube

6. óra
A láncszabály és a teljes valószínűség tétele

Láncszabály/szorzási szabály: Legyen $A_1, \ldots, A_n$ olyan események, melyekre $\mathbf{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$. Ekkor

$$\mathbf{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbf{P}(A_1) \cdot \mathbf{P}(A_2|A_1) \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}(A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}).$$

Az A és B események függetlenek egymástól, ha $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B)$.
A $B_1, \ldots, B_n$ események **teljes eseményrendszert** alkotnak, hogyha:

- páronként diszjunktak ($B_i \cap B_j = \emptyset$ minden $i \neq j$ esetén);
- együtt lefedik az eseményteret ($\cup_{i=1}^n B_i = \Omega$);
- mindegyik eseménynek pozitív a valószínűsége ($\mathbf{P}(B_i) > 0$ minden i-re).

Teljes valószínűség tétele: Legyen Ω egy eseménytér, és a $B_1, \ldots, B_n$ események alkossanak teljes eseményrendszert. Ekkor tetszőleges A eseményre:

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B_1) \cdot \mathbf{P}(A|B_1) + \ldots + \mathbf{P}(B_n) \cdot \mathbf{P}(A|B_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(B_k) \cdot \mathbf{P}(A|B_k).$$

Bayes-formula: Legyen A és B pozitív valószínűségi esemény. Ekkor:

$$\mathbf{P}(B|A) = \frac{\mathbf{P}(A|B) \cdot \mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(A)}.$$

Mintafeladat. Egy király úgy szeretné izgalmasabbá tenni az elítéltjeinek kivégzését, hogy három ládikába elhelyez 25 arany és 25 ezüst érmét. Ha a kivégzésre szánt célszemély aranyat húz, akkor a várakozással ellentétben mégsem végzik ki, de ha ezüstöt, akkor igen. A király a nagyobb izgalom kedvéért mindig máshogy osztja szét az érméket a ládákban. Egyik alkalommal így:

- **első láda:** 16 arany, és 4 ezüst;
- **második láda:** 8 arany, és 12 ezüst;
- **harmadik láda:** 1 arany, és 9 ezüst.

Mekkora eséllyel menekül meg az elítélt? Ha megmenekült, akkor mekkora eséllyel húzott a második ládából?

Megoldás: Legyenek B_1, B_2, B_3 azok az események, hogy az első, a második, vagy a harmadik ládából húz. Ezeknek a valószínűsége nyilván $1/3$, hiszen a három közül tetszőlegesen választhat egyet. Valamint jelölje A azt az eseményt, hogy aranyat húz. Láthatjuk, hogy az egyes ládákból rendre a következő valószínűségekkel tud aranyat húzni: $16/20; 8/20; 1/20$. Ezeket a fenti események segítségével a következőképpen tudjuk leírni: $\mathbf{P}(A|B_1) = 16/20$, $\mathbf{P}(A|B_2) = 8/20$, valamint $\mathbf{P}(A|B_3) = 1/10$. Az elítél akkor menekül meg, hogyha aranyat húz, ennek a valószínűsége pedig a teljes valószínűség tétele alapján:

$$\mathbf{P}(\text{Aranyat húz}) = \mathbf{P}(B_1) \cdot \mathbf{P}(A|B_1) + \mathbf{P}(B_2) \cdot \mathbf{P}(A|B_2) + \mathbf{P}(B_3) \cdot \mathbf{P}(A|B_3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{16}{20} + \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{20} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{10} = \frac{26}{60}.$$

$$\mathbf{P}(\text{Második ládából húzott}|\text{Megmenekült}) = \mathbf{P}(B_2|A) = \frac{\mathbf{P}(B_2)\cdot\mathbf{P}(A|B_2)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{4}{13}.$$

---

1. Feladat. Az egyetemen végzett felmérés szerint a hallgatók 60%–a nő és 40%–a férfi. Azt is megállapították, hogy a nők 30%–a dohányzik, a férfiaknál ez az arány 60%. Véletlenszerűen választva egy hallgatót, mekkora a valószínűsége, hogy

(a) dohányzik?

(b) dohányzik, ha tudjuk, hogy a választott hallgató hölgy?

(c) hölgy hallgatót választottunk, ha tudjuk, hogy az illető dohányzik?

Végeredmények:

(a) 0,42; (b) 0,3; (c) $\frac{18}{42}$

Megoldás: YouTube

2. Feladat. Vidd a lányod munkanap van, így az orvos Lacika elviszi a kis Adaora lányát a háziorvosi rendelőjébe. Édesapja aznap minden páciensénél munkaalkalmassági vizsgálatot csinált. Közben Adaora megfigyelte, hogy az eljöttek 55%-a nő volt. Azt is megfigyelte, hogy a nők 40%-a azt mondta magáról, hogy rendszeresen iszik alkoholt, míg a férfiaknál ugyanez a szám 20% volt. A munkanap végén a kis ügyetlen Adaora véletlenül lelöki édesapja aznap felvett pácienseinek papírjait. Az asztalon csak egyetlen egy ember papírja marad. Mekkora annak a valószínűsége, hogy az adott illető, akinek a papírja az asztalon maradt

(a) rendszeresen iszik alkoholt?

(b) rendszeresen iszik alkoholt, ha tudjuk, hogy férfi?

(c) férfi, ha tudjuk, hogy az illető rendszeresen iszik alkoholt?

Végeredmények:

(a) 0,31; (b) 0,2; (c) $\frac{9}{31}$

Megoldás: YouTube

3. Feladat. Négy gép termelésével kapcsolatban tudjuk, hogy a napi össztermék rendre 30%–át, 25%–át, 25%–át illetve 20%–át adják, valamint ezek a gépek rendre 4%, 5%, 3% illetve 2% selejttel dolgoznak. A napi össztermékből egyet választottunk ki, és az selejt. Mennyi a valószínűsége, hogy a második gép gyártotta?

Végeredmény:

$\frac{125}{360}$

Megoldás: YouTube

4. Feladat. Az Agymenők című sorozatban Sheldon éppen most tér haza a nászútjáról. Három igenjó barátja, Leonard, Howard, és Rajesh igazságosan kisorsolta, hogy melyikőjük fogja otthon várni. Köztudott Sheldonról, hogy pöffeszkedo stílusával könnyen felidegesíti az embereket, ugyanígy van ez a barátaival is. Leonardot 80% eséllyel bosszantja fel, Howardnál ez a szám 55%, míg Rajesh a legjámborabb, nála csak 10%. Mekkora annak a valószínűsége, hogy Sheldon valakit fel fog bosszantani? Feltéve, hogy valakit felbosszantott, mekkora annak a valószínűsége, hogy Rajesh volt az?

Végeredmények:

$$\mathbf{P}(\text{Valakit felbosszant}) \approx 0{,}48$$
$$\mathbf{P}(\text{Rajesht bosszantotta fel}|\text{Valakit felbosszantott}) \approx 0{,}07$$

Megoldás: YouTube

5. Feladat. Egy üzem heti termelésével kapcsolatban tudjuk, hogy a hétfőn gyártott termékek 8%–a selejt. Továbbá tudjuk, hogy kedden 20%–kal nagyobb a termelés, mint hétfőn, de a keddi termékek csupán 5%–a selejt. A heti össztermékből egyet kiválasztva mennyi a valószínűsége, hogy

(a) az selejt?

(b) hétfőn készült, feltéve, hogy selejt?

Végeredmények:

(a) $\frac{14}{220}$; (b) $\frac{8}{14}$

Megoldás: YouTube

6. Feladat. Tudjuk, hogy egy üzem termelésének 3%–a selejt, viszont 0,01 valószínűséggel a termékvizsgálat egy selejtet jónak ítél, míg egy jó terméket 0,05 valószínűséggel selejtnek nyilvánítanak. Mennyi a valószínűsége, hogy a termékvizsgálaton

(a) egy selejtnek nyilvánított termék selejt?

(b) egy jónak nyilvánított termék jó?

Végeredmény:

(a) $\frac{297}{782}$; (b) $\frac{9.215}{9.218}$

Megoldás: YouTube

7. Feladat. Stephen Curry, a Golden Gate Warriors kosárlabdázója a 2016/17-es szezonban a kétpontos, a hárompontos illetve a büntető dobásokat rendre 54, 41 és 90 százalékos hatékonysággal értékesítette. A próbálkozásainak 44, 36 és 20 százaléka volt kétpontos, hárompontos illetve büntető dobás.

(a) Curry összes próbálkozásának hány százaléka volt sikeres hárompontos dobás? Az összes próbálkozásának mekkora hányadát értékesítette?

(b) A sikertelen próbálkozások milyen arányban voltak kétpontos, hárompontos illetve büntető dobások?

Végeredmény:

(a) 14,76%; 56,52%; (b)46,55%; 48,85%; 4,5%

Megoldás:

8. Feladat. Egy üzem egy napi termelésének néhány adatát az alábbi táblázat foglalja össze.

	Reggel	Délután	Este
elsőosztályú termékek száma	4.000	2.000	1.500
másodosztályú termékek száma	1.000	640	630
selejtek száma	100	60	70

A napi össztermékből egyet választva mennyi a valószínűsége, hogy

(a) az selejt?

(b) délután készült?

(c) selejt, feltéve, hogy este gyártották?

(d) délután gyártották, feltéve, hogy selejt?

Végeredmények:

(a) $\frac{230}{10.000}$; (b) $\frac{2700}{10.000}$; (c) $\frac{70}{2.200}$; $\frac{60}{230}$

Megoldás:

9. Feladat. Adott 20 termék, melyek közül 16 elsőosztályú és 4 másodosztályú. Visszatevés nélkül 2 terméket választva mennyi a valószínűsége annak, hogy

(a) a másodszorra kihúzott termék másodosztályú, ha tudjuk, hogy az először kihúzott termék elsőosztályú?

(b) a másodszorra kihúzott termék másodosztályú, ha tudjuk, hogy az először kihúzott termék másodosztályú?

Végeredmények:

(a) $\frac{4}{19}$; (b) $\frac{3}{19}$

Megoldás: YouTube

10. Feladat. Egy vizsgán egy tesztkérdéshez négy lehetséges válasz van megadva, melyek közül egy helyes. A vizsgázó 2/3 valószínűséggel tudja a helyes választ, és ebben az esetben meg is jelöli azt. Ha nem tudja a helyes választ, akkor a vizsgázó tippel, tehát véletlenszerűen jelöl egyet a négy válasz közül. A javítás során azt látjuk, hogy a vizsgázó helyes választ adott a kérdésre. Mennyi a valószínűsége, hogy csak tippelt?

Végeredmény:

$\frac{1}{9}$

Megoldás: YouTube

11. Feladat. Egy vizsgán a hallgatók 10%-a bukott meg. A sikeres vizsgát tevő hallgatók negyedrésze kapott jelest. Mekkora az esélye, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott hallgató jelest kapott?

Végeredmény:

0,225

Megoldás: YouTube

12. Feladat. A szervezetünkben lévő T-sejtek (T-limfociták) a szerzett immunrendszerünk kulcsfontosságú alkotóelemei. Azonban mielőtt egy T-sejt elő alak érett T-sejtté válik pozitív és negatív szelekción kell átesnie a thymusban (csecsemőmirigy). A pozitív szelekciót a T-sejt elő alakok 45%-a, míg az ezt követő negatív szelekciót a megmaradtak mindössze 10%-a éli túl.

(a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott T-limfocita elő alak a csecsemőmirigybe bekerülve érett T-sejt formájában fog kikerülni?

(b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy mindkettő szelekciót túléli feltéve, hogy az elsőt túlélte?

Végeredmények:

(a) 0,045; (b) 0,1

Megoldás: YouTube

13. Feladat. A szervezetünkben lévő T-sejtek (T-limfociták) a szerzett immunrendszerünk kulcsfontosságú alkotóelemei. Azonban mielőtt egy T-sejt elő alak érett T-sejtté válik pozitív és negatív szelekción kell átesnie a thymusban (csecsemőmirigy). A pozitív szelekciót a T-sejt elő alakok 45%-a, míg az ezt követő negatív szelekciót a megmaradtak mindössze 10%-a éli túl. Kaptunk egy súlyos fertőzést, így a frissen kikerülő, érett T-sejtjeinkre azonnal szüksége van a szervezetünknek. A fertőzés után ezen T-sejtek 30%-a marad csak életben.

(a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy T-sejt előalak mindkettő szelekciót túléli, és a fertőzést is?

(b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy túléli a második szelekciót, és a fertőzést is, ha tudjuk, hogy a pozitív szelekciót túlélte?

Végeredmények:

(a) 0,0135; (b) 0,03

Megoldás: YouTube

14. Feladat. Adott egy urna, benne pedig 4 piros és 2 zöld golyó. Kihúzunk három golyót visszatevés nélkül.

(a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy sorban egy pirosat, egy zöldet, és még egy pirosat kapunk? Mennyi az esélye, hogy a kihúzott golyók között pontosan egy zöld lesz?

(b) Mennyi annak az esélye, hogy a második golyó zöld? Feltéve, hogy a második golyó zöld, mi annak a valószínűsége, hogy az első golyó piros volt? Függ az első golyó színe attól, hogy milyen színű a második?

Miben változik a megoldás menete akkor, ha a golyókat visszatevéssel húzzuk ki.

Végeredmények:

Visszatevés nélkül: (a) $\frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}$; $\frac{3}{5}$; (b) $\frac{2}{6}$; $\frac{4}{5}$; igen, függ

Visszatevéssel: (a) $\frac{4}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{6}$; $\frac{4}{9}$; (b) $\frac{2}{6}$; $\frac{4}{6}$; nem függ

Megoldás: YouTube YouTube

15. Feladat. Egy óvodás csoportba 9 gyerek jár, köztük egy testvérpár, egy fiú és egy lány. Egy foglalkozáson véletlenszerűen kiválasztunk 4 gyereket. Mennyi a valószínűsége annak, hogy

(a) a testvérpár mindkét tagját kiválasztjuk?

(b) a testvérpár mindkét tagját kiválasztjuk, feltéve, hogy a fiút kiválasztjuk?

(c) a testvérpár mindkét tagját kiválasztjuk, feltéve, hogy legalább az egyiküket kiválasztjuk?

Végeredmények:

(a) $\frac{\binom{7}{2}}{\binom{9}{4}}$; (b) $\frac{\binom{7}{2}}{\binom{8}{3}}$; (c) $\frac{\binom{7}{2}}{\binom{9}{4}-\binom{7}{4}}$

Megoldás: YouTube

16. Feladat. Egy barátunk egy adott estén 2/3 valószínűséggel tartózkodik kocsmában. Ha kocsmában van, akkor egyenlő eséllyel található meg az öt környékbeli kocsma mindegyikében. Határozzuk meg a következő események valószínűségeit.

(a) Nincs kocsmában.

(b) Az ötödik kocsmában van, ha tudjuk, hogy kocsmában van.

(c) Az ötödik kocsmában van, ha tudjuk, hogy nincs kocsmában.

(d) Az ötödik kocsmában van.

(e) Az ötödik kocsmában van, ha az első négyet már megnéztük, de ott nem találtuk.

Végeredmény:

(a) $\frac{1}{3}$; (b) $\frac{1}{5}$; (c) 0; (d) $\frac{2}{15}$; (e) $\frac{2}{7}$

Megoldás: YouTube

Eddig tart az 1. zh anyaga.

---

7. óra
Diszkrét véletlen változók

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ egy tetszőleges kísérletet leíró valószínűségi mező. A $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ függvényeket **véletlen változó**nak nevezzük. Az **értékkészlet** az értékeknek a halmaza, melyet R_ξ-vel jelölünk. Egy véletlen változót **diszkrét**-nek nevezünk, hogyha értékkészlete egy megszámlálható halmaz.
Egy diszkrét véletlen változó **(valószínűség)eloszlása** a lehetséges értékek valószínűségei:

$$p_{x_k} = \mathbf{P}(\xi = x_k), \quad x_k \in R_\xi.$$

Egy diszkrét véletlen változó **módusza** az az érték, melyet a legnagyobb valószínűséggel vesz fel. Ha több ilyen érték is létezik, akkor azok mind móduszok.
Diszkrét véletlen változó várható értéke:

$$\mathbf{E}(\xi) = \sum_{x \in R_\xi} x \cdot \mathbf{P}(\xi = x).$$

A várható érték egy átlagos érték, jó közelítéssel megadja a kísérlet többszöri elvégzésekor az értékek átlagát.
Ha ξ olyan véletlen változó, melynek véges a várható értéke, akkor a szórása a következőképpen számolható:

$$\mathbf{D}(\xi) = \sqrt{\mathbf{E}(\xi^2) - (\mathbf{E}(\xi))^2}.$$

A szórás az átlagtól (várható értéktől) vett átlagos eltérés.
Ha ξ egy tetszőleges diszkrét véletlen változó, és $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény. Ekkor a $h(\xi)$ transzformált véletlen változó várható értéke a következőképpen számolható:

$$\mathbf{E}(h(\xi)) = \sum_{x \in R_\xi} h(x) \cdot \mathbf{P}(\xi = x).$$

Egy tetszőleges véletlen változó **eloszlásfüggvénye:**

$$F_\xi : \mathbb{R} \to [0;1], \quad F_\xi(t) = \mathbf{P}(\xi < t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Mintafeladat. Anna az egyes napokon egymástól függetlenül 0,3 valószínűséggel kési le a járatát. Egy nap csak egyszer utazik. Tekintsük a hétfői és a keddi napot. A ξ véletlen változó jelölje, hogy a két nap közül hányszor késte le a járatát. Határozzuk meg ξ értékkészletét, eloszlását, móduszát, várható értékét, és szórását. Adjuk meg, és ábrázoljuk is ξ eloszlásfüggvényét.

Megoldás: Mivel a hétfői és a keddi napokat nézzük, és egy nap csak egyszer utazik, így az fordulhat elő, hogy egyszer sem kési le a járatát, pontosan egyszer kési le a járatát, illetve, hogy mindkét nap lekési a járatát. Tehát $R_\xi = \{0; 1; 2\}$, amiből látjuk, hogy ξ diszkrét véletlen változó. Az eloszlása a következő:

$$\mathbf{P}(\text{Egyik nap sem kési le a járatát}) = \mathbf{P}(\xi = 0) = 0{,}7 \cdot 0{,}7 = 0{,}49$$
$$\mathbf{P}(\text{Pontosan az egyik nap kési le a járatát}) = \mathbf{P}(\xi = 1) = 0{,}3 \cdot 0{,}7 + 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 0{,}42$$
$$\mathbf{P}(\text{Mindkét nap lekési a járatát}) = \mathbf{P}(\xi = 2) = 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}09.$$

Látjuk, hogy a három valószínűségérték összege egy, ami fontos ahhoz, hogy valóban valószínűség-eloszlást kapjunk.
A módusz az az érték, amit a legnagyobb valószínűséggel vesz fel a változó, tehát ebben az esetben a változó módusza a 0.
A következő, amit meghatározunk a várható érték

$$\mathbf{E}(\xi) = 0 \cdot 0{,}49 + 1 \cdot 0{,}42 + 2 \cdot 0{,}09 = 0{,}6.$$

A szórás meghatározásához azt az állítást használjuk, hogy

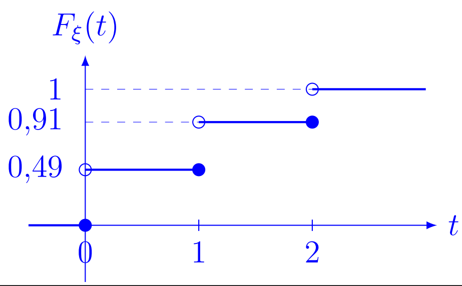
$$\mathbf{D}(\xi) = \sqrt{\mathbf{E}(\xi^2) - (\mathbf{E}(\xi))^2}.$$

Látjuk, hogy $\mathbf{E}(\xi^2)$ (második momentum) ismeretlen, ezt a következőképpen tudjuk meghatározni:

$$\mathbf{E}(\xi^2) = 0^2 \cdot 0{,}49 + 1^2 \cdot 0{,}42 + 2^2 \cdot 0{,}09 = 0{,}78.$$

Mindezekből pedig adódik, hogy

$$\mathbf{D}(\xi) = \sqrt{0{,}78 - 0{,}6^2} \approx 0{,}65.$$



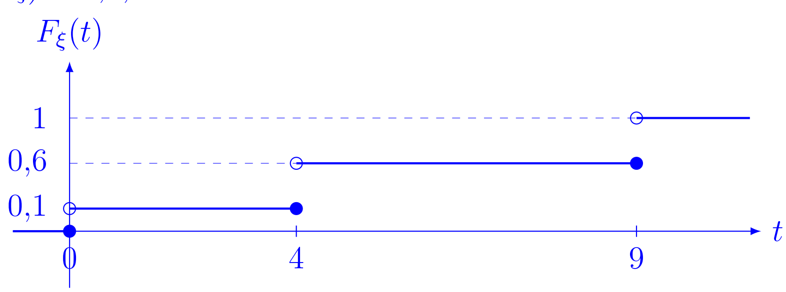
$$F_\xi(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ 0{,}49, & 0 < t \leq 1, \\ 0{,}91, & 1 < t \leq 2, \\ 1, & t > 2 \end{cases}$$

---

1. Feladat. A ξ diszkrét véletlen változóról tudjuk, hogy a lehetséges értékei a $0, 4, 9$, ezeket az értékeket rendre $0{,}1, 0{,}5$, valamint $0{,}4$ valószínűségekkel veszi fel. Határozzuk meg a ξ véletlen változó értékészletét, eloszlását, eloszlásfüggvényét, várható értékét, szórását, valamint móduszát.

Végeredmények:

$R_\xi = \{0, 4, 9\}$; $\mathbf{P}(\xi = 0) = 0{,}1$; $\mathbf{P}(\xi = 4) = 0{,}5$; $\mathbf{P}(\xi = 9) = 0{,}4$; $\mathbf{E}(\xi) = 5{,}6$; $\mathbf{D}(\xi) \approx 3$; $\mathbf{E}(\sqrt{\xi}) = 2{,}2$; módusz $= 4$



$$F_\xi(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ 0{,}1, & 0 < t \leq 4, \\ 0{,}6, & 4 < t \leq 9, \\ 1, & t > 9 \end{cases}$$

Megoldás: YouTube

2. Feladat. A szervízre behozott autók adatairól a következőt tudjuk: 30%–uknál nincs hiba, 40%–uknál egy, 15%–uknál kettő, 10%-uknál három, 5%-uknál négy hibát találtak a szakemberek. Jelölje a ξ véletlen változó a fellépő hibák számát. Számoljuk ki az alábbi valószínűségeket.

(a) $\mathbf{P}(\xi < 2)$

(b) $\mathbf{P}(\xi \leq 2)$

(c) $\mathbf{P}(0{,}5 \leq \xi \leq 2{,}3)$

(d) $\mathbf{P}(|\xi - 1{,}2| < 1)$

Végeredmények:

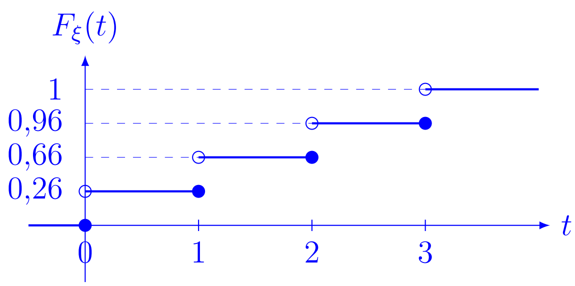
(a) 0,7; (b) 0,85; (c) 0,55; (d) 0,55

Megoldás: YouTube

3. Feladat. Egy iskolában tanuló 500 gyerek közül 130-nak nincs testvére, 200-nak van egy, 150-nek van kettő, és 20-nak pedig három testvére van. Legyen ξ egy véletlenszerűen kiválasztott gyerek testvéreinek a száma. Adjuk meg ξ valószínűségeloszlását, eloszlásfüggvényét, várható értékét, szórását és móduszát.

Végeredmények:

$\mathbf{P}(\xi = 0) = \dfrac{130}{500}$; $\mathbf{P}(\xi = 1) = \dfrac{200}{500}$; $\mathbf{P}(\xi = 2) = \dfrac{150}{500}$; $\mathbf{P}(\xi = 3) = \dfrac{20}{500}$; $\mathbf{E}(\xi) = 1{,}12$; $\mathbf{D}(\xi) \approx 0{,}84$; módusz $= 1$



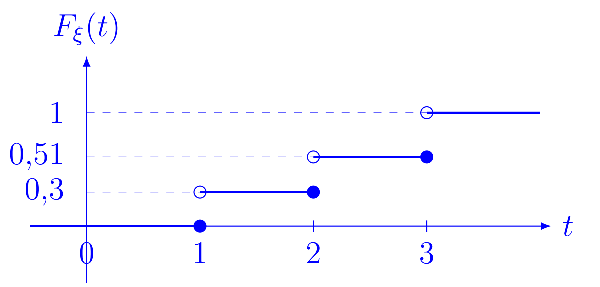
$$F_\xi(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ 0{,}26, & 0 < t \leq 1, \\ 0{,}66, & 4 < t \leq 2, \\ 0{,}96 & 2 < t \leq 3, \\ 1, & t > 3 \end{cases}$$

Megoldás: YouTube

4. Feladat. A Bűbájos boszorkákban a 3 testvér utolsó erejét is felhasználja a Forrás elpusztítására. A bájitalok egymástól függetlenül 0,3 valószínűséggel semmisítik meg az ellenséget, de a nővéreknek összesen csak 3 bájitaluk van. Addig dobálják, míg meg nem semmisítik a Forrást, vagy míg el nem fogy a bájitaluk. Jelölje ξ azt, hogy hányszor kellett próbálkozniuk. Határozzuk meg a ξ véletlen változó értékkészletét, eloszlását, valamint eloszlásfüggvényét.

Végeredmények:

$R_\xi = \{1, 2, 3\}$; $\mathbf{P}(\xi = 1) = 0{,}3$; $\mathbf{P}(\xi = 2) = 0{,}21$; $\mathbf{P}(\xi = 3) = 0{,}49$



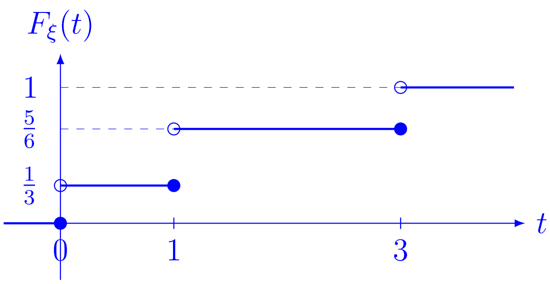
$$F_\xi(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 1, \\ 0{,}3, & 1 < t \leq 2, \\ 0{,}51, & 2 < t \leq 3, \\ 1, & t > 3 \end{cases}$$

Megoldás: YouTube

5. Feladat. Három nagyon jó fiúbarát elmegy egy éjszakai wellnesfürdőzésre. Azzal nem számoltak, hogy a wellnesközpont tulajdonosa a növekvő energiaárak miatt, és a fürdőzők bármiféle informálása nélkül lekapcsolja kilenc óra után a fürdő fényeit, így csak a menekülési irányt jelző zöld fények világítanak. Kifele menet mindhárman felvesznek egy-egy fürdőnadrágot a sajátjaik közül, azonban a sötét miatt nem látják, hogy a sajátjuk-e. A ξ véletlen változó jelölje, hogy hány barátón van a saját nadrágja. Határozzuk meg ξ értékkészletét, eloszlását, valamint eloszlásfüggvényét.

Végeredmények:

$R_\xi = \{0, 1, 3\}$; $\mathbf{P}(\xi = 0) = \dfrac{1}{3}$; $\mathbf{P}(\xi = 1) = \dfrac{1}{2}$; $\mathbf{P}(\xi = 3) = \dfrac{1}{6}$



$$F_\xi(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0, \\ 1/3, & 0 < t \le 1, \\ 5/6, & 1 < t \le 3, \\ 1, & t > 3 \end{cases}$$

Megoldás: YouTube

6. Feladat. Szerelmi bánatunkban kavicsokat dobálunk a Tiszába. Észrevesszük, hogy nem is olyan messze tőlünk van egy kis örvény, és abba próbáljuk meg beledobni a kavicsokat. A dobásaink egymástól függetlenül 0,2 valószínűséggel sikeresek, ezzel az örvényben landolnak. A ξ véletlen változó jelölje, hogy hányszor kell dobnunk ahhoz, hogy az örvénybe beletaláljunk (körülöttünk tetszőlegesen sok kavics van). Határozzuk meg ξ valószínűségeloszlását, valamint ábrázoljuk eloszlásfüggvényét.

Végeredmények:

$\mathbf{P}(\xi = k) = 0{,}8^{k-1} \cdot 0{,}2, k = 1; 2; \ldots$

Megoldás: YouTube

7. Feladat. Egy betegséget 1% valószínűséggel kapunk el. Egy teszt 1000 dollárba kerül, így 10 független mintát összeöntve hatékonyabb 1 tesztet végezni. Ha a teszt negatív, mind a tíz fő egészséges. Jelölje a ξ véletlen változó a szükséges tesztek számát tíz fő esetén. Határozzuk meg

(a) ξ értékkészletét és eloszlását;

(b) ξ eloszlásfüggvényét, majd ábrázoljuk is;

(c) ξ várható értékét;

(d) $\mathbf{D}(\xi)$-t;

(e) az egy főre számított átlagos tesztköltséget

Végeredmények:

(a) $R_\xi = \{1, 11\}$; (c) 2; (d) 3; 200 dollár

Megoldás: YouTube YouTube

8. Feladat. Magyarországon minden autótulajdonosnak kötnie kell kötelező gépjármű felelősségbiztosítást. Ezen biztosítás esetében úgynevezett bonus-malus rendszert alkalmaznak. Ez azt jelenti, hogy a biztosítók az autósokat különböző fokozatokba sorolják attól függően, hogy azok a múltban hányszor okoztak balesetet. A fokozatokat egész számokkal jelölik, tipikusan -4-től $+10$-ig, és a biztosítási díj fokozatonként eltérő. Újdonsült autótulajdonosként biztosítást kötök, és ezzel a 0 fokozatba sorolnak. A szerződés értelmében ha egy adott évben nem okozok balesetet, akkor a következő évben eggyel magasabb fokozatba kerülök; ha egynél több balesetet okozok, akkor eggyel alacsonyabb fokozatba sorolnak; míg ha pontosan egy balesetet okozok, akkor maradok a fokozatban. Tegyük fel, hogy egy adott évben 0,5 eséllyel nem okozok balesetet, 0,4 valószínűséggel okozok pontosan egy balesetet, és 0,1 eséllyel okozok egynél több balesetet. Feltehető, hogy a különböző évek eseményei függetlenek egymástól. Az alábbi táblázat azt tartalmazza, hogy az egyes fokozatokban mennyi az éves biztosítási díj. Jelölje ξ azt, hogy két év múlva mennyi

Fokozat	-2	-1	0	$+1$	$+2$
Éves díj (ezer Ft)	200	130	100	90	85

biztosítási díjat kell fizetnem. Adjuk meg a ξ véletlen változó értékkészletét, eloszlását, várható értékét és szórását.

Végeredmények:

(a) $R_\xi = \{85, 90, 100, 130, 200\}$; $\mathbf{P}(\xi = 200) = 0{,}0{,}1$; $\mathbf{P}(\xi = 130) = 0{,}08$; $\mathbf{P}(\xi = 100) = 0{,}26$; $\mathbf{P}(\xi = 90) = 0{,}4$; $\mathbf{P}(\xi = 85) = 0{,}25$; $\mathbf{E}(\xi) = 95{,}65$; $\mathbf{D}(\xi) = 15{,}79$

Megoldás: YouTube YouTube

9. Feladat. Adott egy vírusos megbetegedés, melyet az emberek 1% eséllyel kapnak el. A betegségre kifejlesztettek egy tesztet, mely a vérben található antitestek alapján mutatja ki a betegség jelenlétét, de az eljárás drága, egy-egy tesztelés ezer dollárba kerül. Egy kórházban a következő módon végzik el a páciensek vizsgálatát. Nem egyesével tesztelik le őket, hanem összevárnak tíz pácienst, és összeöntik a mintáikat. Ha az eredmény negatív, akkor egyik mintában sincs antitest, tehát mindenki egészséges. Ha a teszt eredménye pozitív, akkor ismét elvégzik a tesztet, de ezúttal már mind a tíz emberen külön-külön, hogy kiderüljön, kik betegek közülük. Határozzuk meg, hogy ezzel a módszerrel átlagosan mennyibe kerül egy páciens letesztelése.

Végeredmények:

Jelölje ξ azt, hogy egy 10 fős betegcsoportot hány vizsgálattal lehet letesztelni. $\mathbf{P}(\xi = 1) \approx 0{,}9$; $\mathbf{P}(\xi = 11) \approx 0{,}1$; $\mathbf{E}(\xi) \approx 2$

Megoldás: YouTube YouTube

10. Feladat. Biztosítást szeretnénk kötni egy 9 millió forint értékű lakóházra. Tegyük fel, hogy az elkövetkezendő egy évben 99,9% valószínűséggel nem lesz kárunk, és 0,1% eséllyel teljesen leég a ház. Ha van biztosításunk, akkor a biztosító a keletkezett kárt teljes mértékben megtéríti. Mi az a minimális biztosítási díj, amit a biztosító ki fog majd szabni ránk? Ha a vagyoni helyzetünket az $u(x) = \sqrt{x}$ hasznossági függvényen keresztül értékeljük, akkor racionálisan gondolkodó fogyasztóként mi az a maximális összeg, amit még hajlandóak vagyunk kifizetni ezért a biztosításért?

Végeredmények:

Jelölje ξ a keletkezett kár nagyságát. $\mathbf{P}(\xi = 0) \approx 0{,}999; \mathbf{P}(\xi = 9.000.000) \approx 0{,}001; \mathbf{E}(\xi) = 9000$. Legyen c a számunkra elfogadható maximális biztosítási díj. Ekkor $u(9.000.000) = 0{,}999u(9.000.000 + c) + 0{,}001u(c)$. Az egyenletet megoldva: $c = 17.238$

Megoldás: YouTube YouTube

8. óra
Folytonos véletlen változók

Egy ξ véletlen változó **folytonos eloszlású**, ha létezik egy olyan $f_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, hogy tetszőleges $a \leq b$ esetén

$$\mathbf{P}(a \leq \xi \leq b) = \int_a^b f_\xi(x)\mathrm{d}x.$$

Az f_ξ függvényt **sűrűségfüggvény**nek nevezzük, melynek két tulajdonsága van:

- $f_\xi(x) \geq 0$, minden $x \in \mathbb{R}$;
- $\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)\mathrm{d}x = 1$.

Egy folytonos eloszlású ξ véletlen változó értékkészlete, várható értékét, valamint szórását a következő

$$R_\xi = \{x \in \mathbb{R} : f_\xi(x) > 0\};$$
$$\mathbf{E}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_\xi(x)\mathrm{d}x;$$
$$\mathbf{D}(\xi) = \sqrt{\mathbf{E}(\xi^2) - (\mathbf{E}(\xi))^2},$$

ahol $\mathbf{E}(\xi^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_\xi(x)\mathrm{d}x$.

Mintafeladat. Egy ξ folytonos véletlen változó sűrűségfüggvénye:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}\sqrt{x}, & \text{ha } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Adjuk meg a változó értékkészletét. Mennyi a $\mathbf{P}(\xi > 0{,}5)$ valószínűség értéke? Határozzuk meg a változó várható értékét, és szórását.

Megoldás: Az értékkészlet azon x valós számok halmaza, amikre az teljesül, hogy $f_\xi(x) > 0$. A sűrűségfüggvény megadásából látjuk, hogy a $[0, 1]$ intervallum kivételével mindenhol nulla a függvényérték, és a nullában is nulla a függvényérték, így az értékkészlet: $R_\xi = (0, 1]$.

$$\mathbf{P}(\xi > 0{,}5) = \mathbf{P}(0{,}5 \leq \xi \leq 1) = \int_{0{,}5}^{1} f_\xi(x)\mathrm{d}x = \int_{0{,}5}^{1} \frac{3}{2}x^{1/2}\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_{0{,}5}^{1} = 1 - \sqrt{0{,}5^3} \approx 0{,}65.$$

Várható érték:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_\xi(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0\mathrm{d}x + \int_0^1 x \cdot \frac{3}{2}\sqrt{x}\mathrm{d}x + \int_1^{\infty} x \cdot 0\mathrm{d}x \\ &= 0 + \frac{3}{2}\int_0^1 x^1 \cdot x^{1/2}\mathrm{d}x + 0 = \frac{3}{2}\left[\frac{x^{5/2}}{5/2}\right]_0^1 = \frac{3}{2}\left[\frac{2}{5}\sqrt{x^5}\right]_0^1 \\ &= \frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\sqrt{1^5} - \frac{2}{5}\sqrt{0^5}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{2}{5} - 0\right) = \frac{3}{5} = 0{,}6.\end{aligned}$$

Második momentum:

$$\mathbf{E}(\xi^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_\xi(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2 \cdot \frac{3}{2}\sqrt{x}\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int_0^1 x^2 \cdot x^{1/2}\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int_0^1 x^{5/2}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{3}{2}\left[\frac{x^{7/2}}{7/2}\right]_0^1 = \frac{3}{2}\left[\frac{2}{7}\sqrt{x^7}\right]_0^1 = \frac{3}{2}\left(\frac{2}{7}\sqrt{1^7} - \frac{2}{7}\sqrt{0^7}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{2}{7} - 0\right) = \frac{3}{7}.$$

Variancia (szórásnégyzet): $\mathrm{Var}(\xi) = \mathbf{D}^2(\xi) = \mathbf{E}(\xi^2) - (\mathbf{E}(\xi))^2 = 3/7 - 0{,}6^2 = 0{,}069.$
Szórás: $\mathbf{D}(\xi) = \sqrt{\mathrm{Var}(\xi)} = \sqrt{\mathbf{D}^2(\xi)} = \sqrt{0{,}069} \approx 0{,}26.$

---

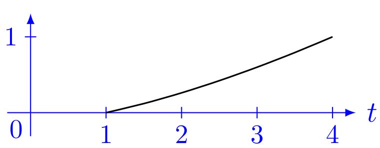
1. Feladat. Véletlenszerűen kiválasztunk egy egyedet egy állatpopulációból. A korábbi kutatások alapján ismert, hogy ekkor a kiválasztott egyed testtömege egy olyan véletlen változó, melynek sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{14}\sqrt{x}, & \text{ha } 1 \le x \le 4, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Határozzuk meg a változó értékkészletét. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott egyed tömege legfeljebb 2? Mennyi annak az esélye, hogy az egyed tömege legalább 3? Mekkora eséllyel kapunk 2 egységnél kisebb tömegű egyedet? Adjuk meg a változó várható értékét, valamint szórását. Ábrázoljuk ξ eloszlásfüggvényét. Határozzuk meg a változó mediánját, illetve alsó és felső kvartilisét.

Végeredmények:

$R_\xi = [1,4]$; $\mathbf{P}(\xi \le 2) \approx 0{,}26$; $\mathbf{P}(\xi \ge 3) \approx 0{,}4$; $\mathbf{E}(\xi) = \frac{93}{35}$; $\mathbf{D}(\xi) \approx 0{,}85$; $q_{25\%} = 1{,}96$; $q_{50\%} = 2{,}73$; $q_{75\%} = 3{,}39$



$$F_\xi(t) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ 1/7 \cdot (t^{3/2} - 1), & 1 \le t \le 4, \\ 1, & t > 4 \end{cases}$$

Megoldás: YouTube YouTube

2. Feladat. Egy ξ véletlen változó sűrűségfüggvénye és várható értéke a következő:

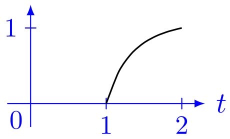
$$f_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{24}{7x^4}, & \text{ha } x \in [1,2] \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus [1,2], \end{cases} \qquad \mathbf{E}(\xi) = \frac{9}{7}.$$

(a) Adjuk meg a ξ változó szórását, valamint eloszlásfüggvényét.

(b) Legyenek ξ_1, ξ_2, ξ_3 független véletlen változók, mindegyiknek a fent megadott f_ξ függvény a sűrűségfüggvénye. Határozzuk meg a $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3$ összeg értékkészletét, várható értékét, és szórását.

Végeredmények:

(a) $\mathbf{D}(\xi) \approx 0{,}25$



$$F_\xi(t) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ \dfrac{8}{7} - \dfrac{8}{7t^3}, & 1 \le t \le 2, \\ 1, & t > 2 \end{cases}$$

(b) $R_{\xi_1+\xi_2+\xi_3} = [3,6]$; $\mathbf{E}(\xi_1+\xi_2+\xi_3) = \dfrac{27}{7}$; $\mathbf{D}(\xi_1+\xi_2+\xi_3) \approx 0{,}43$

Megoldás:

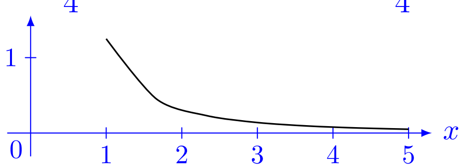
3. Feladat. Egy folytonos eloszlású ξ véletlen változó sűrűségfüggvénye a következő:

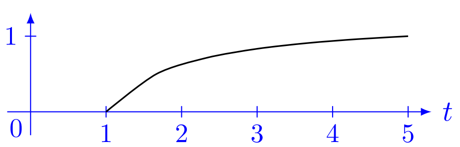
$$f_\xi(x) = \begin{cases} a/x^2, & \text{ha } 1 \le x \le 5, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Határozzuk meg az a valós paraméter értékét úgy, hogy f_ξ valóban sűrűségfüggvény legyen. Ábrázoljuk is a sűrűségfüggvényt. Írjuk fel, és ábrázoljuk is ξ eloszlásfüggvényét. Határozzuk meg a $\mathbf{P}(0 \le \xi \le 2)$ valószínűséget.

Végeredmények:

$a = \dfrac{5}{4}$; $R_\xi = [1,5]$; $\mathbf{E}(\xi) = \dfrac{5\ln 5}{4}$; $\mathbf{D}(\xi) \approx 0{,}98$





$$F_\xi(t) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ \dfrac{5}{4} - \dfrac{5}{4t}, & 1 \le t \le 5, \\ 1, & t > 5 \end{cases}$$

Megoldás:

4. Feladat. Egy folytonos eloszlású ξ véletlen változó sűrűségfüggvénye a következő:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} a + ax, & \text{ha } 1 \le x \le 4 \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

(a) Határozzuk meg az a valós paraméter értékét.

(b) Adjuk meg ξ 10%-os kvantilisét.

(c) Mennyi a $\mathbf{P}(\xi = 2{,}5)$ valószínűség értéke?

Végeredmények:

(a) $\dfrac{2}{21}$; (b) $\approx 1{,}47$; (c) 0

Megoldás: YouTube

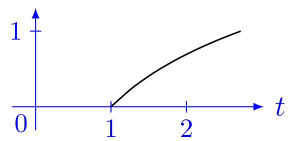
5. Feladat. Egy folytonos ξ véletlen változó sűrűségfüggvénye az alábbi:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{ha } 1 \le x \le \beta \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Határozzuk meg a β valós paraméter értékét, valamint ξ eloszlásfüggvényét, és ξ mediánját. Határozzuk meg a $\mathbf{P}(\xi < \mathbf{E}(\xi))$ valószínűséget.

Végeredmény:

$\beta = \mathrm{e}$; $q_{50\%} = \mathrm{e}^{0{,}5} \approx 1{,}65$; $\mathbf{P}(\xi < \mathbf{E}(\xi)) \approx 0{,}54$.



$$F_\xi(t) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ \ln t, & 1 \le t \le \mathrm{e}, \\ 1, & t > \mathrm{e} \end{cases}$$

Megoldás: YouTube

6. Feladat. Adott a következő függvény:

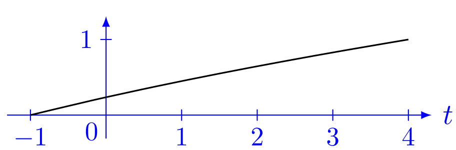
$$f_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x+5}}, & \text{ha } a \le x \le 4 \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

(a) Az a paraméter mely értéke esetén lesz az f_ξ függvény egy folytonos eloszlású ξ véletlen változó sűrűségfüggvénye? Adjuk meg ξ eloszlásfüggvényét.

(b) Határozzuk meg a b értéket úgy, hogy $\mathbf{P}(\xi > b) = 0{,}1$.

Végeredmények:

(a) $a = -1$; $b = 3{,}41$;



$$F_\xi(t) = \begin{cases} 0, & t < -1, \\ \sqrt{t+5} - 2, & -1 \le t \le 4, \\ 1, & t > 4 \end{cases}$$

(b) $\dfrac{11}{8}$

Megoldás: YouTube

9. óra
A nevezetesebb diszkrét és folytonos eloszlások

Egy kísérletet **Bernoulli-kísérlet**nek nevezünk, ha csak kétfajta kimenetele van, egy kedvező, és egy kedvezőtlen.
Egy ξ véletlen változó **binomiális eloszlású** $n \in \{0; 1; \ldots; n\}$ és $p \in (0; 1)$ paraméterekkel, ha

$$\mathbf{P}(\xi = k) = \binom{n}{n} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}, \quad k = 0; 1; \ldots; n.$$

A binomiális eloszlás várható értéke és szórása:

$$\mathbf{E}(\xi) = np, \quad \mathbf{D}(\xi) = \sqrt{np(1-p)}.$$

Egy ξ véletlen változó **geometriai eloszlást** követ $p \in (0; 1)$ paraméterrel, ha

$$\mathbf{P}(\xi = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p, \quad k = 1; 2; \ldots$$

A geometriai eloszlás várható értéke, és szórása:

$$\mathbf{E}(\xi) = \frac{1}{p}, \quad \mathbf{D}(\xi) = \sqrt{\frac{1-p}{p^2}}.$$

Egy ξ véletlen változó **hipergeometrikus eloszlást** követ N, M és n pozitív egész paraméterekkel, ha

$$\mathbf{P}(\xi = k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad k = 0; 1; \ldots; n.$$

A hipergeometrikus eloszlás várható értéke

$$\mathbf{E}(\xi) = n \cdot \frac{M}{N}.$$

Egy ξ véletlen változó **Poisson-eloszlást** követ $\lambda > 0$ paraméterrel, ha

$$\mathbf{P}(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0; 1; 2; \ldots$$

A Poisson-eloszlás várható értéke és szórása:

$$\mathbf{E}(\xi) = \lambda, \quad \mathbf{D}(\xi) = \sqrt{\lambda}.$$

Mintafeladat. Egy zsákban van 10 kindertojás, és 5 záptojás. Ezek a tojások tapintásra teljesen ugyanolyanok.

(a) Visszatevéssel húzok 4 darabot. A ξ véletlen változó jelölje, hogy a négy közül hány darab kindertojás. Adjuk meg ξ értékkészletét, eloszlását, várható értékét, valamint szórását.

(b) Folyamatosan visszateszem azt a tojást, amit kihúztam, és addig húzok, amíg kindertojást nem lesz nálam. Az η véletlen változó jelölje, hogy hányszor kellett húznom. Határozzuk meg η értékkészletét, eloszlását, várható értékét, és szórását.

(c) Visszatevés nélkül kiveszünk négy darabot. A ζ véletlen változó jelölje, hogy hány kindertojást vettünk ki. Adjuk meg ζ értékkészletét, eloszlását, valamint várható értékét.

Megoldás:

(a) ξ értékkészlete $\{0; 1; 2; 3; 4\}$, hiszen összesen négyszer húzok. Ebben a feladatrészben a Bernoulli-kísérlet, hogy egyszer húzok, és a kedvező kimenetel az, hogyha kindertojást húzok, aminek a valószínűsége egy húzás során $p = 10/15$. Látjuk, hogy többször megismételjük a Bernoulli-kísérletet, mivel összesen négyszer húztunk, így $n = 4$. A ξ véletlen változó pedig e négy megismételt kísérlet során „nézi" azt, hogy a kedvező kimenetel hányszor következik be, vagyis ξ binomiális eloszlást követ a fent írt paraméterekkel. Így az eloszlása:

$$\mathbf{P}(\xi = k) = \binom{4}{k} \cdot \left(\frac{10}{15}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{15}\right)^{4-k}, \quad k = 0; 1; 2; 3; 4.$$

Várható értéke, valamint szórása:

$$\mathbf{E}(\xi) = np = \frac{8}{3} \approx 2{,}67, \quad \mathbf{D}(\xi) = \sqrt{np(1-p)} \approx 0{,}94.$$

(b) Mivel nem tudjuk, hogy ehhez hányszor kell húznunk, így $R_\eta = \{1; 2; 3; \ldots\}$. A Bernoulli-kísérlet továbbra is az, hogy egyszer húzunk, ami sikeres, hogyha kindertojást vettünk ki $p = 10/15$ valószínűséggel. Addig ismételjük meg a Bernoulli kísérletet, amíg a kedvező kimenetel be nem következik, ekkor η geometriai eloszlást követ, így

$$\mathbf{P}(\eta = k) = (1 - 10/15)^{k-1} \cdot 10/15, \quad k = 1; 2; 3; \ldots$$

Az eloszlás várható értéke, illetve szórsa:

$$\mathbf{E}(\eta) = \frac{1}{p} = \frac{15}{10} = 1{,}5, \quad \mathbf{D}(\xi) = \sqrt{\frac{1-p}{p^2}} \approx 0{,}87.$$

(c) Mivel az egyes húzásoknál a visszatevés nélküli mintavételezés miatt a körülmények megváltoznak, így ζ hipergeometrikus eloszlású $N = 15, M = 10$, illetve $n = 4$ paraméterekkel, $R_\zeta = \{0; 1; 2; 3; 4\}$. Ekkor az eloszlás:

$$\mathbf{P}(\zeta = k) = \frac{\binom{10}{k} \cdot \binom{5}{4-k}}{\binom{15}{4}}, \quad k = 0; 1; 2; 3; 4.$$

A várható érték pedig:

$$\mathbf{E}(\zeta) = n\frac{M}{N} = 4 \cdot \frac{10}{15} = \frac{8}{3}.$$

---

1. Feladat. (a) Tízszer feldobunk egy szabályos dobókockát. Jelölje ξ azt, hogy hányszor kapunk páratlan számot. Határozzuk meg ξ eloszlását, várható értékét és szórását. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a 10 dobásból pontosan annyi páratlan értéket kapunk, mint párosat?

(b) Ötször feldobunk két dobókockát. Jelölje η azt, hogy hányszor dobtunk két páratlan számot. Határozzuk meg η eloszlását és várható értékét.

Végeredmény:

(a) ξ binomiális eloszlású $n = 10$, és $p = 0{,}5$ paraméterekkel: $R_\xi = \{0, 1, \ldots, 10\}$; $\mathbf{P}(\xi = k) = \binom{10}{k} \cdot 0{,}5^k \cdot 0{,}5^{10-k}, k = 0, 1, \ldots, 10$; $\mathbf{E}(\xi) = 5$; $\mathbf{D}(\xi) \approx 1{,}58$; $\mathbf{P}(\xi = 5) \approx 0{,}246$

(b) Az η binomiális eloszlású $n = 5$, és $p = 0{,}25$ paraméterekkel: $R_\eta = \{0, 1, \ldots, 5\}$; $\mathbf{P}(\xi = k) = \binom{5}{k} \cdot 0{,}25^k \cdot 0{,}75^{5-k}, k = 0, 1, \ldots, 5$; $\mathbf{E}(\xi) = 1{,}25$

Megoldás:

2. Feladat. Egy csatában az egyik harcoló fél ejtőernyőkkel próbál utánpótlást eljuttatni egy körbevett alakulathoz. Az erős szél miatt az ejtőernyők egymástól függetlenül és véletlenszerű helyen érnek földet a 15 km^2 területű csatatéren. Az alakulat egy 1 km^2 területű magaslaton védekezik, és az utánpótlást csak akkor kapják meg, ha az ernyő ezen a magaslaton ér földet. Éppen ezért a vezérkar addig dob le újabb és újabb ejtőernyőket, míg valamelyiket meg nem szerzi az alakulat. Mennyi annak az esélye, hogy pontosan öt ejtőernyőt kell majd ledobni? Mi a valószínűsége annak, hogy ötnél több ledobásra lesz majd szükség? Várhatóan hány ejtőernyőt kell ledobni?

Végeredmény:

Legyen ξ a ledobott ejtőernyők száma, ami geometriai eloszlást követ $p = 1/15$ paraméterrel: $R_\xi = \{1, 2, 3, \ldots\}$; $\mathbf{P}(\xi = 5) = {\frac{14}{15}}^4 \cdot \frac{1}{15}$; $\mathbf{P}(\xi > 5) = {\frac{14}{15}}^5$; $\mathbf{E}(\xi) = 15$

Megoldás:

3. Feladat. A tanárok kilátástalan helyzete miatt a diákok akciót szerveznek. Elhatározták, hogy addig demonstrálnak, minden héten egyszer, amíg el nem érik a céljukat, és a kormány nem ad azonnali, tisztességes fizetésemelést a pedagógusoknak. A demonstrálók minden egyes alkalommal, egymástól függetlenül 0,05 valószínűséggel érik el céljukat. Jelölje ξ azt, hogy hányszor kell demonstrálniuk ahhoz, hogy megkapják követeléseiket. Határozzuk meg ξ értékkészletét, eloszlását, várható értékét, és szórását.

Végeredmények:

$R_\xi = \{1, 2, \ldots\}$; $\mathbf{P}(\xi = k) = 0{,}95^{k-1} \cdot 0{,}05, k = 1, 2, \ldots$; $\mathbf{E}(\xi) = 20$; $\mathbf{D}(\xi) \approx 19{,}49$

Megoldás:

4. Feladat. Izidóra osztálykirándulásra megy. Anyukája gyümölcsöket is pakol neki az útra. Van 10 darab mandarin és 8 darab banán, melyek közül véletlenszerűen választ hatot. Jelölje ξ a mandarinok számát. Határozzuk meg ξ értékkészletét, eloszlását, várható értékét.

Végeredmények:

$$R_\xi = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\};\ \mathbf{P}(\xi = k) = \frac{\binom{10}{k} \cdot \binom{8}{6-k}}{\binom{18}{6}}, k = 1, 2, \ldots, 6;\ \mathbf{E}(\xi) = \frac{10}{3}$$

Megoldás: YouTube

5. Feladat. Az ötöslottón az első kilencven pozitív egész számból húznak ki véletlenszerűen ötöt. Egy szelvénnyel játszunk. Jelölje ξ azt, hogy az öt szám közül hány darabot találunk el, η pedig azt, hogy hány hétig kell játszanunk az első telitalálatig. Határozzuk meg ξ értékkészletét, eloszlását, valamint várható értékét. Mennyi annak a valószínűsége, hogy nyerünk (legalább kettesünk lesz)? Adjuk meg η várható értékét.

Végeredmények:

$R_\xi = \{0,1,2,3,4,5\}$; $\mathbf{P}(\xi = k) = \dfrac{\binom{5}{k}\cdot\binom{85}{5-k}}{\binom{90}{5}}, k = 1,2,\ldots,5$; $\mathbf{E}(\xi) \approx 0{,}28$; $\mathbf{P}(\xi \geq 2) \approx 2\%$; $\mathbf{E}(\eta) = 43.949.269$ hét

Megoldás: YouTube

6. Feladat. Egy szelvénnyel játszunk a Skandináv lottón, ahol 35 számból 7-et kell megjelölni. A szabályok szerint a számok két sorsoláson is részt vesznek, egy gépin és egy kézin, ez az úgynevezett ikersorsolás. Mindkét számsorsolás alkalmával 7 számot húznak ki, és akkor nyerünk pénzt, ha valamelyik sorsoláson elérünk legalább 4 találatot.

(a) Mennyi annak az esélye, hogy a gépi sorsoláson pontosan 4 találatot érünk el? Mekkora valószínűséggel érünk el legalább 4 találatot? Mennyi a gépi sorsoláson a találatok számának a várható értéke?

(b) Mennyi annak az esélye, hogy a két sorsolás közül az egyiken nincs találatunk, a másikon pedig pontosan 1 találatot érünk el? Mekkora annak a valószínűsége, hogy valamelyik soroláson lesz legalább 4 találatunk, tehát nyerünk pénzt?

Végeredmény:

(a) $\mathbf{P}(\xi = 4) \approx 0{,}017$; $\mathbf{P}(\xi \geq 4) \approx 0{,}018$; $\mathbf{E}(\xi) = 1{,}4$
(b) 0,138; 0,034

Megoldás: YouTube

7. Feladat. Tegyük fel, hogy egy repülőn 200 ülés van, de-bízva abban, hogy néhány utas betegség, forgalmi dugó, stb. miatt lemarad a járatól-az extra profit reményében 203 jegyet adnak el. Feltéve, hogy minden utas függetlenül 0,05 valószínűséggel, marad le a járatól, számoljuk ki annak a valószínűségét, hogy a beszálláskor „gubanc” támad, mert 200-nál több utas jelenik meg.

Végeredmény:

$2{,}06 \cdot 10^{-3}$

Megoldás: YouTube

8. Feladat. Orvosi kutatások szerint az egységnyi nagyságú rádioaktív besugárzás véletlen számú mutációt okoz egy kromoszómán. A mutációk száma Poisson-eloszlást követ, és a besugárzások

13,5 százalékában nem történik egy mutáció sem. Az egységnyi nagyságú besugárzás átlagosan hány mutációt okoz? Mennyi annak az esélye, hogy a besugárzás hatására a várható értéknél több mutáció történik?

Végeredmény:

$\lambda \approx 2$; $\mathbf{E}(\xi) = 2$; $\mathbf{P}(\xi > 2) \approx 0{,}68$

Megoldás: YouTube

9. Feladat. Roger Federer a világ legsikeresebb teniszezője. Amikor szervál, a labda sebessége egy olyan véletlen változó, mely egyenletes eloszlást követ 48 és 60 m/s között. (Tehát 173 és 216 km/h között.)

(a) Federer szerváinál mennyi a labda sebességének várható értéke illetve szórása? A szervák mekkora hányada gyorsabb, mint 50 m/s?

(b) A teniszpályák 24 méter hosszúak. Jelölje η azt, hogy Federer adogatásainál a labda mennyi idő alatt teszi meg ezt az utat! Adjuk meg az η valószínűségi változó értékkészletét! Mennyi annak az esélye, hogy az η kisebb, mint 0,48 másodperc? Ezek alapján az η változó egyenletes eloszlást követ?

(c) Határozzuk meg az η változó várható értékét és szórását.

(d) Írjuk fel az η változó eloszlásfüggvényét illetve sűrűségfüggvényét.

Végeredmények:

(a) $\mathbf{E}(\xi) = 54$; $\mathbf{D}(\xi) = \sqrt{12}$; $\mathbf{P}(\xi > 50) = \dfrac{5}{6}$
(b) $\mathbf{P}(\eta < 0{,}48) = 0{,}8$; η nem egyenletes eloszlású
(c) $\mathbf{E}(\eta) = 0{,}466$; $\mathbf{D}(\eta) = 0{,}029$
(d)

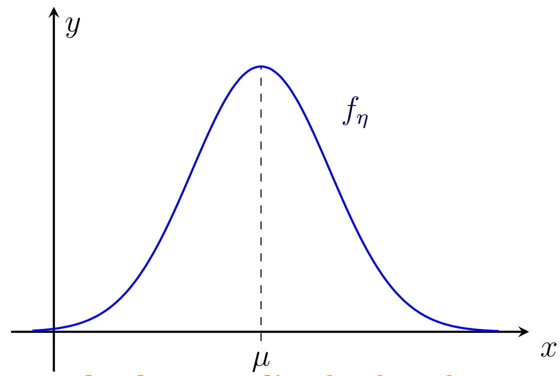
$$F_\eta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0{,}4, \\ 5 - 2/t, & 0{,}4 < t < 0{,}5, \\ 1, & t > 0{,}5. \end{cases} \qquad f_\eta(t) = \begin{cases} 2/t^2, & 0{,}4 < t < 0{,}5, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Megoldás: YouTube YouTube

10. óra
A normális eloszlás és alkalmazásai

Az η véletlen változó **normális (Gauss) eloszlást** követ $\mu \in \mathbb{R}$, és $\sigma > 0$ paraméterekkel, ha a sűrűségfüggvénye:

$$f_\eta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma}}$$



A $\mu = 0$ és $\sigma = 1$ paraméteres normális eloszlást **standard normális** eloszlásnak nevezzük. Jelölése: $\eta_{0,1}$. Sűrűség- és eloszlásfüggvény:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad \Phi(t) = \mathbf{P}(\eta_{0,1} < t) = \int_{-\infty}^{t} \varphi(x) \mathrm{d}x.$$

Legyen η normális eloszlású μ várható értékkel, és σ szórással. Ekkor a

$$\frac{\eta - \mu}{\sigma}$$

véletlen változó η **standardizáltjának** nevezzük. Az új változó standard normális eloszlást követ. Legyen ξ binomiális eloszlású n és p paraméterekkel. Az η pedig legyen normális eloszlású $\mu = np$, és $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$ paraméterekkel. Ekkor tetszőleges $a \leq b$ esetén

$$\mathbf{P}(a \leq \xi \leq b) \approx \mathbf{P}(a \leq \eta \leq b)$$

A közelítés annál pontosabb, minél nagyobb az n paraméter értéke. Tipikusan az $n \geq 50$ már elegendő.

Mintafeladat. A skót bakák mellkasának körmérete jó közelítéssel normális eloszlású 88 cm várható értékkel, és $\sqrt{10}$ cm szórással. Az η véletlen változó jelölje egy véletlenszerűen kiválasztott skót baka mellkasának körméretét. A skót babák mekkora hányada fér bele 84-es zubbonyba?

Megoldás: Az eloszlásról tudjuk, hogy normális, melynek mindkét paramétere, a várható értéke: $\mu = 88$, és a szórása: $\sigma = \sqrt{10}$ is adott. A feladat szövege alapján azt kell meghatározni, hogy véletlenszerűen kiválasztunk egy skót bakát, neki mekkora eséllyel lesz a mellkasának körmérete kisebb, mint 84 cm. Ezt formálisan a következőképpen tudjuk leírni:

$$\mathbf{P}(\eta < 84) = \mathbf{P}\left(\frac{\eta - \mu}{\sigma} < \frac{84 - 88}{\sqrt{10}}\right) = \Phi(-1{,}26).$$

Az standard normális eloszlásfüggvény táblázatában negatív x-ek nincsenek. Azonban tudjuk, hogy

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x), \quad x > 0.$$

Tehát

$$\Phi(-1{,}26) = 1 - \Phi(1{,}26) = 1 - 0{,}8962 = 0{,}1038.$$

Azaz a skót bakák kb. 10%-a fér bele egy 84-es zubbonyba.

---

1. Feladat. Frankenstein professzor vámpír denevéreket tenyészt a laboratóriumában. A denevérek szemfogainak mérete normális eloszlást követ 28 mm átlaggal és 4 mm szórással. A denevérek mekkora hányadára teljesül, hogy a szemfogainak mérete 26 és 33 mm közé esik?

Végeredmény:

$\approx 0{,}58$

Megoldás: YouTube

2. Feladat. Frankenstein professzor vámpír denevéreket tenyészt a laboratóriumában. A denevérek szemfogainak mérete normális eloszlást követ 28 mm átlaggal és ismeretlen szórással. Mekkora a szórás, ha tudjuk, hogy a denevérek 30%-nak van legalább 30 mm hosszú szemfoga?

Végeredmény:

szórás $\approx 3{,}85$

Megoldás: YouTube

3. Feladat. Egy automata cukorkákat csomagol. A zacskóban lévő cukorka tömege normális eloszlásúnak tekinthető, melynek várható értéke 500 gramm, szórása pedig 10 gramm.

(a) A csomagok hány százalékára teljesül az, hogy 510 grammnál több a tömegük?

(b) Adjunk meg egy olyan, a várható értékre szimmetrikus intervallumot, amire az teljesül, hogy a csomagok tömegének a 85%-a ebbe az intervallumba esik.

Végeredmények:

(a) 0,16; (b) $[485{,}7; 514{,}3]$

Megoldás: YouTube

4. Feladat. A legutóbbi felmérések alapján a magyar egyetemisták testtömege normális eloszlást követ 80 kg várható értékkel és 15 kg szórással. Ennek fényében a közbeszerzésen 95 kg teherbírású székeket vettek a felújított egyetemre.

(a) Mi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott egyetemista könnyebb 80 kg–nál?

(b) Mekkora valószínűséggel fog az új szék egy véletlenszerűen választott egyetemista alatt leszakadni?

(c) Mekkora teherbírású széket kellett volna beszerezni, ha azt szeretnénk, hogy az a hallgatók 95%–a alatt ne szakadjon le?

(d) A 10/2015. (VII.30.) HM rendelet alapján 50 kg a megengedett minimális testtömeg a harcoló alakulatoknál. A hallgatók hány százaléka alkalmatlan ezen követelmény miatt?

Végeredmények:

(a) 0,5; (b) 0,16; (c) 104,6 kg; 2%

Megoldás: YouTube

5. Feladat. A Roxfort Boszorkány- és Varázslóképző Szakiskolában a mágusok által használt varázspálcák hossza normális eloszlást követ 20 cm átlaggal és 1,5 cm szórással. Jelölje η egy véletlenszerűen kiválasztott varázspálca hosszát. Mekkora az a méret, aminél a varázspálcák 85%-a hosszabb?

Végeredmények:

18,44

Megoldás: YouTube

6. Feladat. Legyen ξ egy véletlenszerűen kiválasztott felnőtt ember szisztolés vérnyomása higanymilliméterben (mmHg) kifejezve. A statisztikai adatok alapján ξ egy-egy földrajzi területen lognormális eloszlást követ, ami azt jelenti, hogy az $\ln \xi$ véletlen változó normális eloszlású. A paraméterek országonként változóak, például az Egyesült Államokban az $\ln \xi$ változó várható értéke és szórása $\mu = 4{,}78$ illetve $\sigma = 0{,}16$. (Forrás: National Health and Nutrition Examination Survey, 2006.)

(a) Az orvosi szakirodalom a 140 mmHg feletti vérnyomást tekinti kórosan magasnak. Ez az amerikai felnőtt népesség mekkora hányadát érinti?

(b) Az emberek mekkora hányadának esik a vérnyomása az egészségesnek tekintett tartományba, tehát 90 és 130 mmHg közé?

(c) Adjunk meg egy olyan intervallumot, melyre teljesül, hogy a felnőtt népesség 95 százalékának a szisztolés vérnyomása ide esik.

Végeredmények:

(a) 16%; 67%; $[27, 163]$

Megoldás: YouTube YouTube

7. Feladat. A villamoson egy-egy utazás alkalmával 20% eséllyel jön ellenőr. 100-szor utazunk a villamossal.

(a) Várhatóan hány alkalommal találkozok ellenőrrel? Mennyi a találkozások számának a szórása?

(b) Közelítőleg mennyi annak a valószínűsége, hogy legfeljebb 14 alkalommal találkozok ellenőrrel?

Végeredmények:

(a) $\mathbf{E}(\xi) = 20$; $\mathbf{D}(\xi) = 4$ (b) $\mathbf{P}(\xi \leq 14) = 0{,}07$

Megoldás: YouTube

8. Feladat. A foci VB-re napi több mint tízezer szurkolói sálat készít a cég. A szövőgép 500 szállal dolgozik, azonban a mai nap valami meghibásodott benne, ezért a szálak gyakran elszakadnak. A szövőszálak egymástól függetlenül meghatározott időtartam alatt 3% valószínűséggel szakadnak el. A ξ véletlen változó jelölje az elszakadt szálaim számát. Határozzuk meg ξ várható értékét és szórását! A legyártott mennyiség legjobb (legkevesebb hiba) 1%-a elsőosztályú. Az elsőosztályú termékek legfeljebb hány elszakadt szálat tartalmaznak? Mennyi a megengedett elszakadt szál mennyiség, ha a gép 10%-os hibával dolgozik?

Végeredmények:

$\mathbf{E}(\xi) = 125$; $\mathbf{D}(\xi) \approx 3{,}81$; 6 szál, 10%-os hibánál pedig 34 szál

Megoldás: YouTube

9. Feladat. A valószínűségszámítás kurzust ebben a félévben körülbelül 280 hallgató vette fel, és a korábbi tapasztalatok alapján az egyes hallgatók 65% eséllyel teljesítik a kurzust. Várhatóan hányan fognak majd megbukni? Mennyi a bukott hallgatók számának a szórása? Mennyi a valószínűsége, hogy ebben a félévben legalább 90, de legfeljebb 106 bukás lesz? Milyen t értékre teljesül, hogy 0,9 eséllyel legfeljebb t hallgató bukik meg?

Végeredmények:

98; 8; 0,68; 108

Megoldás: YouTube

11. óra
A várható érték és a szórás tulajdonságai

Legyen ξ tetszőleges véletlen változó, és legyen a valós szám.

- Konstans várható értéke: Ha $\mathbf{P}(\xi = a) = 1$, akkor $\mathbf{E}(\xi) = a$.
- Egy ξ véletlen változónak pontosan akkor 0 a szórása, ha a változó konstans, tehát $\mathbf{P}(\xi = a) = 1$ valamilyen a valós számra. Ekkor $a = \mathbf{E}(\xi)$.
- Konstansszoros: $\mathbf{E}(a\xi) = a\mathbf{E}(\xi)$ és $\mathbf{D}(a\xi) = |a|\mathbf{D}(\xi)$.

Legyen $\xi_1, \ldots, \xi_m, \eta$ tetszőleges véletlen változók, és tekintsük az $a_1, \ldots, a_m, b$ valós számokat. Ekkor a következő azonosságok teljesülnek.

- A változók összegének a várható értéke:

$$\mathbf{E}(a_1\xi_1 + \ldots + a_m\xi_m) = a_1\mathbf{E}(\xi_1) + \ldots + a_m\mathbf{E}(\xi_m).$$

- A változók összegének varianciája, ha $\xi_1, \ldots, \xi_m$ függetlenek:

$$\mathbf{D}^2(\xi_1 + \ldots + \xi_m) = \mathbf{D}^2(\xi_1) + \ldots + \mathbf{D}^2(\xi_m).$$

- Két változó összegének varianciája a nem független esetben:

$$\mathbf{D}^2(a\xi + b\eta) = a^2\mathbf{D}^2(\xi) + b^2\mathbf{D}^2(\eta) + 2ab\mathbf{D}(\xi)\mathbf{D}(\eta)\mathrm{corr}(\xi, \eta).$$

Mintafeladat. Piri néni kertjében van néhány almafa, melyeken évente átlagosan 500 kg gyümölcs terem. A szomszédban élő Marika néninek szilvafái vannak, ezeken évente átlagosan 300 kg szilva terem. A megtermelt alma és szilva szórása 100 kg illetve 80 kg. Jelölje ξ és η rendre a gyümölcsök mennyiségét kilogrammban mérve.

(a) Írjuk fel ξ és η segítségével, hogy összesen mennyi gyümölcs terem a két kertben.

(b) Várhatóan mennyi gyümölcs terem összesen a két kertben? Mennyi az összesen megtermelt gyümölcs tömegének a szórásnégyzete?

(c) Ábrázoljuk az előző pontban felírt várható érték és szórásnégyzet grafikonját a korrelációs együttható függvényében!

(d) Mennyi a két kertben összesen termett gyümölcsök mennyiségének a szórása, ha feltesszük, hogy a ξ és az η változók függetlenek egymástól?

(e) Milyen korrelációs együttható esetén fog majd teljesülni, hogy a két kertben összesen termett gyümölcsök mennyiségének a szórása pontosan 90?

Megoldás: A feladat szövege alapján ξ jelöli az alma mennyiségét, η pedig a szilva mennyiségét, melyekről azt tudjuk, hogy $\mathbf{E}(\xi) = 500$, valamint $\mathbf{D}(\xi) = 100$, illetve $\mathbf{E}(\eta) = 300$, $\mathbf{D}(\eta) = 80$.

(a) Mivel ξ, és η jelölte a gyümölcsök mennyiségét külön-külön, így összesen $\xi + \eta$ mennyiségű gyümölcs fog teremni.

(b) $\mathbf{E}(\xi+\eta) = \mathbf{E}(\xi)+\mathbf{E}(\eta) = 500+300 = 800$. A szórásnégyzet kiszámításához pedig az elméleti összefoglalóban található összefüggést fogjuk használni:

$$\begin{aligned}\mathbf{D}^2(\xi+\eta) &= \mathbf{D}^2(\xi)\mathbf{D}^2(\eta) + 2\mathbf{D}(\xi)\mathbf{D}(\eta)\mathrm{corr}(\xi,\eta)\\ &= 100^2 + 80^2 + 2\cdot 100\cdot 80\cdot \mathrm{corr}(\xi,\eta) = 16.400 + 16.000\cdot \mathrm{corr}(\xi,\eta).\end{aligned}$$

(c)

(d) Ha a két változó független egymástól, akkor $\mathrm{corr}(\xi,\eta) = 0$, így pedig $\mathbf{D}(\xi) = \sqrt{16.400} \approx 128$.

(e) A szórásnégyzetre visszavezetve oldjuk meg a feladatot. A szórásnak pontosan 90-nek kell lennie, vagyis a szórásnégyzetnek 8100-nak, így

$$\begin{aligned}\mathbf{D}^2(\xi+\eta) &= 16.400 + 16.000\cdot \mathrm{corr}(\xi,\eta)\\ 8100 &= 16.400 + 16.000\cdot \mathrm{corr}(\xi,\eta)\\ -8.300 &= 16.000\cdot \mathrm{corr}(\xi,\eta)\\ \mathrm{corr}(\xi,\eta) &= -0{,}52.\end{aligned}$$

---

1. Feladat. A magyar egyetemisták testtömegének az átlaga 80 kg, a szórása 15 kg. A Bolyai épületben beszáll a liftbe 6 egyetemista, akikről feltehető, hogy egymástól független a tömegük. Határozzuk meg a 6 egyetemista együttes testtömegének várható értékét és szórását.

Végeredmények:

várható érték $= 480$; szórás $\approx 36{,}74$

Megoldás: YouTube

2. Feladat. A következő teniszmeccsemre szükségem van 2 db tenisz gripre, és 4 darab teniszlabdára. A két sporteszköz ára tekinthető véletlen változónak, ezeket jelölje rendre ξ és η. Egy darab tenisz grip árának várható értéke 300 Ft, szórása 30 Ft, míg egy darab labda árának várható értéke 500 Ft, szórása 50 Ft.

(a) Írjuk fel ξ és η segítségével a tenisz sporteszközökre elköltött összeget.

(b) Várhatóan hány forintot fogok majd tenisz sporteszközökre költeni?

(c) Mennyi az elköltött összeg szórása, ha a két változó közötti korreláció együttható 0,9?

(d) Milyen korrelációs együttható esetén fog majd teljesülni, hogy az elköltött összeg szórása pontosan 260?

Végeredmények:

(a) $2\xi + 4\eta$; (b) 2600; (c) 255; (d) 1

Megoldás: YouTube

3. Feladat. Édesapámnak 2.000 eurója van, és azon gondolkodik, hogy mit is kezdjen vele. Egyrészt ma beválthatja forintra, 850-es árfolyamon (vagyis egy euróért 850 forintot kapok). Másrészt el is rejtheti a pénzt az alkoholos üvegek közé a vitrinben, hogy majd tavasszal váltsa be, de ez kockázatos, hiszen nem tudja előre az árfolyamokat. Az előrejelzések alapján úgy ítélhetjük meg, hogy az euró árfolyama tavasszal várhatóan 1.000 forint lesz 200 forintos szórással.

(a) Tegyük fel, hogy édesapánk t eurót berak a vitrinbe, a maradékot pedig beváltja ma forintra. Várhatóan mennyi forintja lesz a 2.000 euróból? Mennyi ezen érték szórása? Ábrázoljuk a várható értéket és a szórást a t paraméter függvényében.

(b) Mennyi eurót rakjon félre, ha várható értékben legalább 2.210.000 forintot szeretne kapni.

(c) Mennyi eurót rakjon félre, ha ezen érték szórása legfeljebb 50.000 forint lehet? Ekkor mennyi a várható érték?

Végeredmények:

(a) várható érték $= 1700.000 + 150t$; szórás $= 200t$, ahol $t = 0, \ldots, 2.000$; (b) várható értékben ez nem lehetséges; (c) 250, ekkor a várható érték = 1.737.500

Megoldás: YouTube

4. Feladat. Egy játékautomatából egy mozgatható karral lehet plüssállatokat kiemelni, de ez egy kis szerencsét igényel. Az automatában 50 plüssállat van, egy játék 100 forintba kerül, és a próbálkozások egymástól függetlenül 20% valószínűséggel lesznek sikeresek.

(a) Várhatóan hány játék alatt fogynak el a plüssállatok az automatából? Mennyi a játékok számának a szórása?

(b) Várhatóan mennyi pénz lesz az automatában, mire elfogynak a plüssállatok? Mennyi az automatában összegyűlt pénz szórása?

Végeredmények:

(a) 250; 31,6 (b) 25.000; 3160

Megoldás: YouTube

5. Feladat. Egy vállalat egy hónapra eső nyeresége a havi teljes bevétel és a havi teljes kiadás különbségeként áll elő, ahol a bevétel és a kiadás is véletlen változó. A bevétel várható értéke 120 millió forint 30 millió forint szórással, míg a kiadás várható értéke 80 millió forint 20 millió forint szórással. Határozzuk meg az egy hónapra jutó nyereség várható értékét és szórását akkor, ha a bevétel és a kiadás független, illetve akkor, ha a közöttük lévő korrelációs együttható 0,8. A korreláció függvényében írjuk fel formulával és ábrázoljuk grafikonon a nyereség várható értékét és varianciáját.

Végeredmények:

várható érték: 40; variancia: $1300 - 1200\mathrm{corr}(\xi, \eta)$; ha a változók függetlenek, akkor a szórás $\sqrt{1300}$; ha a korrelációs együttható 0,8, akkor a szórás: $\sqrt{340}$

Megoldás: YouTube

6. Feladat. Adott egy kötvény és egy részvény. A kötvény a mai napon 1000 forintba kerül, és 8%-os éves hozamot fizet. A részvény jelenlegi ára 2000, és egy év múlva 1900, 2300 vagy 2700 forintot érhet rendre 0,3, 0,5 és 0,2 valószínűségekkel. 3 millió forint áll a rendelkezésünkre, ebből állítunk össze egy portfóliót.

(a) Ha a darab részvényt vásárolunk, akkor ez az értékpapírcsomag várhatóan mennyit fog majd érni egy év múlva? Mennyi a portfólió értékének a szórása? Ábrázoljuk a várható értéket és a szórást az a mennyiség függvényében.

(b) Hogyan állítsuk össze a portfóliónkat, ha az a célunk, hogy várható értékben 400 ezer forint hozamot realizáljunk?

(c) Hány darab részvényt vásároljunk, ha azt szeretnénk, hogy a portfólió jövőbeli értékének a szórása legfeljebb 200 ezer forint legyen? Mennyi ebben az esetben a hozam várható értéke?

Végeredmények:

(a) várható érték: $100a + 3.240.000$; szórás: $280a$; (b) 1600 darab részvényt, és -200 darab kötvényt kell vásárolni; $a \leq 741$, ekkor a várható érték: 3.311.400

Megoldás: YouTube YouTube

12. óra
Együttes eloszlás, kovariancia, korreláció

Legyen ξ és η olyan véletlen változók, melyeknek véges a szórása. Ekkor a két változó **kovarianciáját** a következőképpen számoljuk ki:

$$\mathrm{Cov}(\xi,\eta) = \mathbf{E}(\xi\eta) - \mathbf{E}(\xi)\mathbf{E}(\eta).$$

A két változó **korrelációja**

$$\mathrm{corr}(\xi,\eta) = \frac{\mathrm{Cov}(\xi,\eta)}{\mathbf{D}(\xi)\mathbf{D}(\eta)}.$$

Ha $\mathrm{corr}(\xi,\eta) = 0$, akkor a két változó **korrelálatlan**. Ha a ξ, és η változók függetlenek, akkor ez a két változó korrelálatlan is, tehát $\mathrm{corr}(\xi,\eta) = 0$. Ennek a megfordítása **nem igaz**, tehát a korrelálatlanságból még nem következik a függetlenség.

Mintafeladat. Egy kínai tartományban a tüdőrákos megbetegedések ($\xi = 0, 1$) és a betegek dohányzási szokásai ($\eta = 0, 1, 2$) közti kapcsolatot vizsgálták. A ξ véletlen változó pontosan akkor nulla, ha a beteg nem tüdőrákos; η pedig attól függően 0, 1, vagy 2, hogy a beteg nem dohányzik, kevesebb vagy legalább 10 szál cigit szív el egy nap. A megfigyelt 3.000 beteg és 3.000 egészséges egyén adatainak feldolgozása után a következő százalékos eredményt kapták.

$\xi \setminus \eta$	0	1	2
0	32	15	3
1	2	8	40

Határozzuk meg a két véletlen változó korrelációját.

Megoldás: A korrelációs együttható meghatározásához előbb ki kell számolnunk a kovarianciát, amihez szükségünk van ξ, és η várható értékére, amit az eloszlásukból tudunk meghatározni. Az együttes eloszlástáblázatból ξ eloszlását úgy kapjuk, hogy a $\xi = 0$ sor elemeit összeadva $\mathbf{P}(\xi = 0) = 50\% = 0{,}5$, valamint a $\xi = 1$-re hasonlóan $\mathbf{P}(\xi = 1) = 50\% = 0{,}5$. Az η változó eloszlását hasonlóan kapjuk, csak ebben az esetben az oszlopokban szereplő számokat kell összeadni, így $\mathbf{P}(\eta = 0) = 0{,}34$, $\mathbf{P}(\eta = 1) = 0{,}23$, valamint $\mathbf{P}(\eta = 2) = 0{,}43$. Nyilvánvalóan mindkét változó diszkrét, így a várható értéket, és a szórást az ismert eljárás szerint meghatározhatjuk:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\xi) &= 0\cdot 0{,}5 + 1\cdot 0{,}5 = 0{,}5 & \mathbf{E}(\eta) &= 0\cdot 0{,}34 + 1\cdot 0{,}23 + 2\cdot 0{,}43 = 1{,}09\\
\mathbf{E}(\xi^2) &= 0^2\cdot 0{,}5 + 1^2\cdot 0{,}5 = 0{,}5 & \mathbf{E}(\eta^2) &= 0^2\cdot 0{,}34 + 1^2\cdot 0{,}23 + 2^2\cdot 0{,}43 = 1{,}95\\
\mathbf{D}(\xi) &= \sqrt{0{,}5 - 0{,}5^2} = 0{,}5 & \mathbf{D}(\eta) &= \sqrt{1{,}95 - 1{,}09^2} \approx 0{,}87.
\end{aligned}$$

A kovarianciához szükségünk van még a $\xi\cdot\eta$ változó várható értékére. Ezt az együttes eloszlástáblázatot használva tudjuk kiszámolni. Előbb ehhez meg kell határozunk, hogy a $\xi\cdot\eta$ milyen lehetséges értékeket vehet fel. Látjuk, hogy ez lehet 0, ha $\xi = 0$, vagy $\eta = 0$, lehet 1, ha $\xi = 1$, és $\eta = 1$, valamint lehet 2, ha $\xi = 1$, és $\eta = 2$. Ezek alapján kapjuk, hogy az eloszlás

$$\mathbf{P}(\xi\eta = 0) = 0{,}52, \quad \mathbf{P}(\xi\eta = 1) = 0{,}08, \quad \mathbf{P}(\xi\eta = 2) = 0{,}4.$$

Mindebből a várható érték már könnyen meghatározható:

$$\mathbf{E}(\xi\eta) = 0 \cdot 0{,}52 + 1 \cdot 0{,}08 + 2 \cdot 0{,}4 = 0{,}88.$$

Ezek alapján a kovariancia:

$$\mathrm{Cov}(\xi, \eta) = \mathbf{E}(\xi\eta) - \mathbf{E}(\xi)\mathbf{E}(\eta) = 0{,}88 - 0{,}5 \cdot 1{,}09 = 0{,}335.$$

Így a korreláció:

$$\mathrm{corr}(\xi, \eta) = \frac{\mathrm{Cov}(\xi, \eta)}{\mathbf{D}(\xi)\mathbf{D}(\eta)} = \frac{0{,}335}{0{,}5 \cdot 0{,}87} = 0{,}77.$$

---

1. Feladat. Az egyik amerikai egyetemen a '60–as években azt vizsgálták, hogy az LSD hogyan hat a matematikai teljesítményre. A vizsga előtt fél órával véletlenszerűen három részre bontották a csoportot: az első csoport nem kapott semmit ($\eta = 0$), a második egy ($\eta = 1$), a harmadik pedig fejenként két ($\eta = 2$) darab 1 mg–os LSD tablettát kapott. (Már 20 mikrogrammnak is érezhető hatása van.) A kísérletben csak azt nézték, hogy a hallgató átment ($\xi = 1$) vagy megbukott ($\xi = 0$) a vizsgán. Százalékosan kifejezve a következő eredmény született:

$\xi \setminus \eta$	0	1	2
0	13	23	14
1	19	11	20

(a) Írjuk fel ξ és η százalékos eloszlását, várható értékét és szórását külön-külön.

(b) Írjuk fel $\xi \cdot \eta$ százalékos eloszlását és várható értékét. Adjuk meg ξ és η kovarianciáját és korrelációs együtthatóját.

(c) Ha egy véletlenszerűen választott résztvevőről tudjuk, hogy sikerült a vizsgája, akkor mekkora valószínűséggel kapott két tablettát? Független–e egymástól a két véletlen változó?

Végeredmények:

(a) $\mathbf{P}(\xi = 0) = \mathbf{P}(\xi = 1) = 50\%$; $\mathbf{E}(\xi) = 0{,}5$; $\mathbf{D}(\xi) = 0{,}5$; $\mathbf{P}(\eta = 0) = 32\%$; $\mathbf{P}(\eta = 1) = \mathbf{P}(\eta = 2) = 34\%$; $\mathbf{E}(\eta) = 1{,}05$; $\mathbf{D}(\eta) \approx 0{,}812$

(b) $\mathbf{P}(\xi \cdot \eta = 0) = 69\%$; $\mathbf{P}(\xi \cdot \eta = 1) = 11\%$; $\mathbf{P}(\xi \cdot \eta = 2) = 20\%$; $\mathbf{E}(\xi \cdot \eta) = 0{,}51$; $\mathrm{Cov}(\xi, \eta) = 0$; $\mathrm{corr}(\xi, \eta) = 0$

(c) $\mathbf{P}(\xi = 1 | \eta = 2) \approx 0{,}588$; a változók nem függetlenek

Megoldás: YouTube

2. Feladat. A közgazdász hallgatók elmúlt 20 év Kalkulus I. (ξ) és Lineáris algebra (η) tanulmányi eredményeit a rendelkezésre álló több mint 6.000 adatpár alapján értékelve az együttes eloszlásukra százalékban kifejezve a következő táblázatot kaptuk.
Adjuk meg ξ és η kovarianciáját és korrelációs együtthatóját. Milyen kapcsolat van a két érdemjegy között?

$\xi \setminus \eta$	1	2	3	4	5
1	19	5	16	0	0
2	1	29	7	3	0
3	0	1	7	5	1
4	0	0	1	0	3
5	0	0	1	0	1

Végeredmények:

$\mathrm{Cov}(\xi, \eta) = 0{,}6016$; $\mathrm{corr}(\xi, \eta) \approx 0{,}616$; a két jegy között pozitív irányú, közepes erősségű lineáris kapcsolat van

Megoldás: YouTube

3. Feladat. Adott két részvény, A és B, mindkét részvényből 1 millió forint értékben vásárolunk. A részvények árfolyamváltozására a következő 1 évben két különböző esetet fogunk majd vizsgálni:

1. eset: 1/2 valószínűséggel mindkét részvény árfolyama 30 százalékkal emelkedik; és 1/2 valószínűséggel mindkét árfolyam 10 százalékkal csökken.

2. eset: 1/2 valószínűséggel az A részvény árfolyama emelkedik 30 százalékot, a B részvényé pedig esik 10 százalékot; 1/2 valószínűséggel pedig az A részvény esik 10 százalékot, és a B részvény pedig emelkedik 30 százalékot.

Jelölje rendre ξ és η azt, hogy az A illetve a B részvénycsomag hány millió forintot fog majd érni egy év múlva! A fenti két esetet külön-külön vizsgálva válaszoljunk az alábbi kérdésekre!

(a) Írjuk fel a ξ és η változók együttes eloszlását. Határozzuk meg a marginális eloszlásokat és a korrelációs együtthatót.

(b) Adjuk meg a teljes portfólió jövőbeli értékének, tehát a $\xi + \eta$ változónak a várható értékét és szórását. Ehhez alkalmazzuk a várható értékre és a varianciára vonatkozó azonosságokat. Az 1. és a 2. esetet összehasonlítva hogyan viszonyulnak egymáshoz a várható értékek illetve a szórások? Mi ennek a szemléletes magyarázata?

(c) Adjuk meg a $\xi + \eta$ változó valószínűségeloszlását, majd ennek segítségével számoljuk ki ismét a $\xi + \eta$ összeg várható értékét és szórását. Ugyanazt az eredményt kapjuk, mint az előző feladatrészben?

Végeredmények:

(a)

1. eset:

$\eta \setminus \xi$	0,9	1,3	η
0,9	0,5	0	0,5
1,3	0	0,5	0,5
ξ	0,5	0,5	1

; $\mathrm{corr}(\xi, \eta) = 1$

2. eset:

$\eta \setminus \xi$	0,9	1,3	η
0,9	0	0,5	0,5
1,3	0,5	0	0,5
ξ	0,5	0,5	1

; $\quad \mathrm{corr}(\xi, \eta) = -1$

(b) 1. eset: $\mathbf{E}(\xi + \eta) = 2{,}2$; $\mathbf{D}(\xi + \eta) = 0{,}4$; 2. eset: $\mathbf{E}(\xi + \eta) = 2{,}2$; $\mathbf{D}(\xi + \eta) = 0$;

Megoldás: YouTube YouTube

4. Feladat. Feldobok egy szabályos dobókockát, és legyen ξ a dobott érték kettővel, η pedig a dobott érték hárommal vett maradéka. Adjuk meg a két változó együttes eloszlását és korrelációs együtthatóját. Független egymástól a ξ és az η változó?

Végeredmények:

$\xi \setminus \eta$	0	1	2	ξ
0	1/6	1/6	1/6	1/2
1	1/6	1/6	1/6	1/2
η	1/3	1/3	1/3	1

$\mathbf{E}(\xi) = 0{,}5; \mathbf{D}(\xi) = 0{,}5; \mathbf{E}(\eta) = 1; \mathbf{D}(\eta) = 0{,}82; \mathrm{Cov}(\xi, \eta) = 0; \mathrm{corr}(\xi, \eta) = 0;$ függetlenek

Megoldás: YouTube