

A NUMERIKUS MATEMATIKA HÁROM SZINTJE

Numerikus matematika $\approx$ elméleti formulák tényleges (fizikai, gépi kiszámítása)

1) Tiszta matematikai szint

Példa. Riemann-sejtés $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$

$$\zeta(z) = 0, z \neq -2, -4, \dots \implies \exists t \in \mathbb{R} \quad z = \frac{1}{2} + it$$

Kompromisszum-mentes axionmatikus bizonyítás kell.

Alan TURING: ellenpélda keresése (ős)számítógéppel.

2) Számítási eljárások elméleti vizsgálata.

Elméleti pontosság, adott erdményjelölt megbízhatósága. ("Szokásos" tananyag)

"Végtelen hosszú aritmetika" melletti véges számítások vizsgálata.

Példa. Newton-iteráció szokásos konvergencia-beclése.

Tovább megyünk: kaotikussági vizsgálat

3) "Mérnöki" szint. Gépek és számítási algoritmusok elméleti kritika nélkül.

Nem lenézendő 1-2) szempontjából sem:

Tanuló- és genetikus algoritmusok — nem kontrollált, de annál sikerebb.

Téma 2)-nek. Kvantumszámítógép

Példa 1-2-3) együttműködésére.

Kvantumkémiai számítások (Gaussian programcsomag, Nobel-díj 2000).

1) Schrödinger-egyenlet,

2) Közelítő megoldási algoritmusok ($\longrightarrow$ konjugált-gradiens módszer)

3) A 2)-beliek számítógépes imitációja (még messze a kereskedelmi sikertől)

NUMERIKUS MATEMATIKAI ALAPELVEK

Feladat: $F(x, d) = 0$ ahol $d := [\text{adatok}]$

Direkt probléma: ha F, d ismert, $x = ?$. **Inverz probléma:** ha F, x ismert, $d \in \{?\}$;

Identifikációs probléma: ha x, d ismert, $F = ?$..

Jól-pozícionáltság:

Stabilitás:

Relatív kondíciós szám

Stabilitás

A priori analízis

A posteriori analízis

NEWTON KÁOSZ

Emlékeztető. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ C^2 -síma, $f(x_*) = 0$, $f'(x_*) \neq 0$.

x_0 kiindulás, x_{n+1} : f 2-1-rendű x_n -köti Taylor-polinomjának 0-helye

Heurisztika: $f \approx [x \mapsto f'(x_n)(x - x_n)]$ x_n körül.

TÖBB DIM-ban is: $x_{n+1} := x_n - f'(x_n)^{-1}f(x_n)$,

ha $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ C^2 -síma, a jellések átvihetők (FRÉCHET).

$$\left. \begin{aligned} 0 &= f(x_*) \\ 0 &= f(x_n) + f'(x_n)(x_n + 1 - x_n) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} f(x_*) &=^{h:=x_*-x_n} f(x_n + h) = \\ &= f(x_n) + f'(x_n)h + \int_{t=0}^1 \int_{s=0}^t f''(x_n + sh)h^2 ds dt \\ x_{n+1} - x_* &= f'(x_n)^{-1} \int_{t=0}^1 \int_{s=0}^t f''(x_n + sh)(x_n - x_*)^2 ds dt. \end{aligned}$$

Egy konvex U környezetében x_* -nak,

ha $x_n \in U$ és $f'(x)$ invertálható minden $x \in U$ esetén,

$$\|x_{n+1} - x_*\| \leq M_U \|x_n - x_*\|^2, \quad \text{ahol } M_U := \frac{1}{2} \max_{x \in U} \|f'(x)^{-1}\| \max_{y \in U} \|f''(y)\|.$$

Jó kiindulás: $x_0 \in M_U$, ahol $M_U \|x_0 - x_*\| < 1$. Ekkor (indukcióval)

$$\|x_n - x_*\| \leq [M_U \|x_0 - x_*\|]^{2^n - 1} \|x_0 - x_*\| \searrow 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Tetszőleges kiindulás esete. Már polinom gyökénél is káosz.

Észrevétel: Holomorf $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvényt valós $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ leképezésként szemlélve a Newton iteráció lépése

$$z_{n+1} := N(z_n), \quad \text{ahol } N(z) := z - \frac{f(z)}{f'(z)} \quad \text{kompl. diff.}$$

Emlékeztető: Egy összefüggő kompakt $\mathbf{W}$ topologikus téren egy folytonos, nem 3-periodikus leképezés iteráltjai kaotikusak, ha van harmadrendű fixpont.

Tekintsük a fenti $N(\cdot)$ Newton-iteráló leképezést az egyszeres gyökű

$$f(z) := \prod_{k=1}^N (z - \omega_k), \quad \omega_k \neq \omega_\ell \quad (k \neq \ell)$$

polinom mellett az $N(\infty), N(\eta_1), \dots, N(\eta_{N-1}) := \infty$ folytonos kiterjesztéssel a Riemann-számgömbre az $N'(\cdot)$ derivált η_k gyökhelyeinél. $N(\cdot)$ harmadrendű fixpontjának egyenlete

$$z = N^{\circ 3}(z) = N(N(N(z))), \quad N(u) = u - \frac{1}{\sum_{k=1}^N \frac{1}{u - \omega_k}}.$$

Mivel $N(\cdot)$ racionális függvény, a $z \mapsto z - N^{\circ 3}(z)$ függvény is racionális. Vagyis a 3-fixpont egyenlete

$$0 = z - N^{\circ 3}(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \iff P(z) = 0$$

polinomiális alakra hozható. Az algebra alaptétele szerint ennek van komplex megoldása, tehát $N(\cdot)$ -nek mindig van 3-adrendű fixpontja. Azaz kaptuk:

Tétel. *Egy egyszeres gyökű polinom gyökkereső komplex Newton-iterációja vagy kaotikus vagy 3-periodikus.*

Megjegyzés. A 3-periodikusság konkrét esetekben komputeralgebrával ellenőrizhető. [Alig van ilyen eset]. Az elméleti vizsgálat, melyek a 3-periodikus esetek, nehezebb.

Példa. Newton módszerrel keressük az $f(x) := x^3 - x - \frac{1}{\sqrt{3}}$ polinom gyökét. Tehát

$$x_{n+1} = N(x_n), \quad \text{ahol} \quad N(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^3 - x - \frac{1}{\sqrt{3}}}{3x^2 - 1} \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Észrevétel: a $(-\infty, 0] \times \times 0$ x -tengelybeli félegyenes minden pontjából pontosan kettő érintő egyenes húzható f grafikonjához. Ezért

$$z < 0 \implies N^{-1}\{z\} = \{x : N(x) = z\} = \{N_-^{-1}(z), N_+^{-1}(z)\},$$

$$\text{ahol} \quad N_-^{-1}(z) = [x < z : N(x) = z], \quad N_+^{-1}(z) = [x > z : N(x) = z].$$

Mivel f konkáv a $(-\infty, 0]$ intervallumon és rajta lokális maximuma az $-1/\sqrt{3}$ helyen van, továbbá f grafikonjának az $1/\sqrt{3}$ inflexiós pont fölötti érintője épp az origón megy át,

$$N_-^{-1} : \mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{R}, 0 \mapsto -1/\sqrt{12} \text{ növő}, \quad N_+^{-1} : (-\infty, -1/\sqrt{3}] \leftrightarrow (-\infty, 0] \text{ növő}$$

függvények ezért az

$$I_0 := [-1/\sqrt{3}, 0], \quad I_1 := N_-^{-1}(I_0) \cap (-\infty, 0], \quad I_2 := N_-^{-1}(I_1) \cap (-\infty, -1/2]$$

jól-definiált $I_2 < I_1 < I_0$ sorrendben következő intervallumok, amelyekre $N : I_2 \leftrightarrow I_1 \leftrightarrow I_0$ növő módon. A jobb-oldali N_+^{-1} inverz tulajdonságai lehetővé teszik a

$$J_0 := N_+^{-1}(I_2), \quad J_1 := N_-^{-1}(J_0), \quad J_2 := N_-^{-2}(J_0) = N_-^{-1}(J_1)$$

intervallumok létrehozását, ahol $J_k \subset I_k$ ($k = 1, 2, 3$) és így $N : J_0 \leftrightarrow J_1 \leftrightarrow J_2$. Azaz

$$J_2 \subset I_0, \quad N^3 = N \circ N \circ N : J_2 \leftrightarrow I_2.$$

Mivel N, N^2, N^3 növő az $I_0 = [-1/\sqrt{3}, 0]$ intervallumon, $J_2 \subset I_2$ miatt az $x - N^3(x)$ függvény ≤ 0 J_2 bal végpontjában és ≥ 0 a jobb végpontban, Bolzano klasszikus tétele szerint van 0-helye, azaz van olyan $z_* \in J_2$ pont, amely 3-adrendű fixpontja az N Newton iterációs leképezésnek ($z_* = N^3(z_*) = N(N(N(z_*)))$). Ez pedig a Newton-teráció egyfajta (*Sharkovskii*-típusú) kaotikusságát jelenti.

KONDICIÓSZÁMOK

Emlékeztető. Az $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ szám az $x \in \mathbb{R}$ számot $|\tilde{x} - x|$ hibával, ill. $|\tilde{x} - x|/|x|$ relatív hibával közelíti. Hasonlóan: egy $(\mathbf{X}, \|\cdot\|)$ normált térnél $\tilde{x} \in \mathbf{X}$ közelítési hibája ill. relatív közelítési hibája $x \in \mathbf{X}$ -hez

$$\text{err}_x(\tilde{x}) := \|\tilde{x} - x\|, \quad \text{rel}_x(\tilde{x}) := \frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|}.$$

Definíció. Legyen U nyitott $\subset \mathbf{X}$, és $f : U \rightarrow \mathbf{X}$. Az f függvény (leképezés) *kondíciószáma* az $x \in U$ pontnál ill. az U tartományon

$$\text{cond}_x(f) := \limsup_{\tilde{x} \rightarrow x} \frac{\text{rel}_{f(x)}(f(\tilde{x}))}{\text{rel}_x(\tilde{x})}, \quad \text{cond}_U(f) := \sup_{x \in U} \text{cond}_x(f).$$

Lemma. Ha f C^1 -síma, akkor $\text{cond}_x = \|x\| \cdot \|f'(x)\|/\|f(x)\|$.

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} \text{cond}_x(f) &= \limsup_{v \rightarrow 0} \frac{\|f(x+v) - f(x)\|/\|f(x)\|}{\|(x+v) - x\|/\|x\|} = \\ &= \limsup_{v \rightarrow 0} \frac{\|f'(x)v + o(\|v\|)\|/\|f(x)\|}{\|v\|/\|x\|} = \\ &= \limsup_{v \rightarrow 0} \frac{\|f'(x)v\|}{\|v\|} \cdot \frac{\|x\|}{\|f(x)\|} = \frac{\|f'(x)\| \cdot \|x\|}{\|f(x)\|}. \end{aligned}$$

Mátrix kondíciószáma. Az $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ valós $(N \times N)$ -es mátrixot szokás szerint azonosítjuk az $x \mapsto Ax$ ($\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$)-típusú lineáris leképezéssel. Ennek alapján $x \neq 0$ ill. $0 \neq U$ esetén

$$\text{cond}_x(A) = \limsup_{v \rightarrow 0} \frac{\|Av\|}{\|v\|} \cdot \frac{\|x\|}{\|Ax\|} = \|A\| \frac{\|x\|}{\|Ax\|}.$$

Vagyis tetszőleges U 0-környezet esetén, és ha A invertálható,

$$\text{cond}_{U \setminus \{0\}}(A) = \sup_{x \neq 0} \text{cond}_x(A) = \|A\| \sup_{x \neq 0} \frac{\|x\|}{\|Ax\|} \stackrel{y=Ax}{=} \|A\| \sup_{y \neq 0} \frac{\|A^{-1}y\|}{\|y\|} = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|.$$

Definíció szerint az A mátrix *kondíciószáma*

$$\text{cond}(A) := \|A\| \cdot \|A^{-1}\|.$$

Propozíció. Direkt módon adódik:

- (1) $\text{cond}_x(f + g) \leq \text{cond}_x(f) + \text{cond}_x(g)$, (2) $\text{cond}_x(f \circ g) \leq \text{cond}_{g(x)}(f) \cdot \text{cond}_x(g)$,
- (3) $1 \geq \text{cond}(A) = \text{cond}(A^{-1}) \leq \text{cond}(B) \cdot \text{cond}(C)$ ha $A = BC$,
- (3) L^2 -norma szerint, ha Q ortogonális mátrix, akkor
 $\text{cond}(Q) = 1$ és $\text{cond}(QX) = \text{cond}(XQ) = \text{cond}(X)$.

LINEÁRIS HIBAANALÍZIS

Alaphelyzet: $A, \delta A \in \text{Mat}(N, N, \mathbb{R})$, $b, \delta b, x, \delta x \in \text{Mat}(N, 1, \mathbb{R})$ adott mátrixok ill. oszlopvektorok (itt δ nem operátor, csak "hibatagra" utaló jelölés), ahol

$$Ax = b \quad (\text{az ideális egyenlet}), \quad (A + \delta A)(x + \delta x) = b + \delta b \quad (\text{a számított megoldás}).$$

Feltevés (technikai): $\det(A) \neq 0$, $\|A^{-1}\delta A\| < 1$.

Megjegyzés. Ekkor $A + \delta A$ is invertálható. Nevezetesen

$$\begin{aligned} (A + \delta A)^{-1} &= [A(1 + A^{-1}\delta A)]^{-1} = (1 + A^{-1}\delta A)^{-1}A^{-1} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [A^{-1}\delta A]^n A^{-1}, \\ \|(A + \delta A)^{-1}\| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \|A^{-1}\delta A\|^n \|A^{-1}\| = \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\delta A\|}. \end{aligned}$$

Emlékeztető: $\text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$ az A mátrix kondíciószáma.

Alaptétel (az adatérzékenységről). *A feltevések mellett a relatív hibákra*

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\text{cond}(A)}{1 - \|A^{-1}\delta A\|} \left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \right).$$

Bizonyítás. $(A + \delta A)(x + \delta x) = b + \delta b$, $Ax = b$, $\implies \underline{(\delta A)x + (A + \delta A)\delta x = \delta b}$,

$$\begin{aligned} \delta x &= (A + \delta A)^{-1} [\delta b - (\delta A)x], \\ \|\delta x\| &\leq \|(A + \delta A)^{-1}\| [\|\delta b\| + \|\delta A\| \|x\|], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} &\leq \|(A + \delta A)^{-1}\| \left[\frac{\|\delta b\|}{\|x\|} + \|\delta A\| \right]. \\ \text{Észrevétel: } \frac{1}{\|x\|} &= \frac{1}{\|A^{-1}b\|} \leq \frac{1}{\|b\| \inf\{\|A^{-1}e\| : \|e\| = 1\}} = \\ &= \frac{1}{\|b\|} \frac{1}{\inf\{\|A^{-1}y\|/\|y\| : y \neq 0\}} = \\ &= \frac{1}{\|b\|} \sup\{\|y\|/\|A^{-1}y\| : y \neq 0\} = \\ &= \frac{1}{\|b\|} \sup\{\|Az\|/\|z\| : z \neq 0\} = \frac{1}{\|b\|} \|A\|. \end{aligned}$$

Vagyis

$$\begin{aligned} \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} &\leq \|(A + \delta A)^{-1}\| \left(\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \|A\| + \|\delta A\| \right) \leq \\ &\leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\delta A\|} \|A\| \left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \right). \quad \text{Qu.e.d.} \end{aligned}$$

Következmény. $\|A^{-1}\| \|\delta A\| < 1 \implies$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\text{cond}(A)}{1 - \text{cond}(A)\|\delta A\|/\|A\|} \left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \right).$$

Megjegyzés. A $\|\cdot\|$ norma tetszőleges $\mathbb{R}^N \equiv \text{Mat}(N, 1, \mathbb{R})$ -beli norma alapján lehet. Mi általában a $\|z\|_2 := [\sum_{k=1}^N z_k^2]^{1/2}$, $\|B\|_2 := \sup \{\|Bz\|_2 : \|z\|_2 = 1\}$ euklideszi normát használjuk. Érdekes geometriai tény:

$$\frac{1}{\text{cond}^{\|\cdot\|_2}(A)} = \min \left\{ \frac{\|\delta A\|_2}{\|A\|_2} : A + \delta A \text{ nem-invertálható} \right\}.$$

Alsó becslés $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}$ -re: $\delta A = 0 \implies \frac{1}{\text{cond}(A)} \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \leq \frac{\|\delta x\|}{\|x\|}.$

Bizonyítás. $\delta A = 0 \implies A\delta x = \delta b \implies \|\delta x\| \geq \|\delta b\|/\|A\|$. Mivel $\|x\| = \|A^{-1}b\| \leq \|A^{-1}\| \|b\|$, kapjuk, hogy $\|\delta x\|/\|x\| \geq [\|\delta b\|/\|A\|]/[\|A^{-1}\| \|b\|] = \|\delta b\|/[\text{cond}(A)\|b\|]$.

Becslés komponensenként ($\delta b = 0$ ill. $\delta A = 0$ esetén).

Jelölés: $|Z| := [z_{ij}]_{i=1}^K [j=1]^M$ tetsz. $K \times M$ -es mátrixnál; $e^{[i]} := [i. \text{egységvektor}]$.

Tétel. Tegyük fel, hogy $|\delta A| \leq \gamma|A|$, $|\delta b| \leq \gamma|b|$ az $(A + \delta A)(x + \delta x) = b + \delta b$ adatérzékenységi egyenletnél. Ekkor A^{-1} -nek az $s^{[i]} := [e^{[i]}]^T A^{-1}$ sorvektoraival

(1) $\delta b = 0$ és ismert $\hat{x} := x + \delta x$ esetén $|\delta x_i| \leq \gamma |s^{[i]}| |A| |\hat{x}|;$

(2) $\delta A = 0$ esetén $|\delta x_i| \leq \gamma |s^{[i]}| |b|$, $\frac{|\delta x_i|}{|x_i|} \leq \gamma \frac{|s^{[i]}| |b|}{|s^{[i]} b|}.$

Bizonyítás. $(A + \delta A)(x + \delta x) = b + \delta b \implies$

$$\begin{aligned} A\delta x &= -(\delta A)(x + \delta x) + \delta b, \\ \delta x &= A^{-1}[-(\delta A)(x + \delta x) + \delta b], \\ \delta x_i &= [e^{[i]}]^T \delta x = [e^{[i]}]^T A^{-1}[-(\delta A)(x + \delta x) + \delta b] = \\ &= s^{[i]}[-(\delta A)(x + \delta x) + \delta b]. \end{aligned}$$

(1) HA $\delta b = 0$, $|\delta x_i| \leq |s^{[i]}| |\delta A| \underbrace{|x + \delta x|}_{\hat{x}} \leq \gamma |s^{[i]}| |A| |\hat{x}|;$

(2) HA $\delta A = 0$, $|\delta x_i| \leq |s^{[i]}| |\delta b| \leq \gamma |s^{[i]}| |b|$,
 $\frac{|\delta x_i|}{|x_i|} \leq \gamma \frac{|s^{[i]}| |b|}{|e^{[i]} A^{-1} b|} \leq \gamma \frac{|s^{[i]}| |b|}{|s^{[i]} b|}.$ Q.e.d.

A priori analízis visszafelé

Alaphelyzet: $\hat{x} = x + \delta x = Cb$. Pl. $C = [A^{-1} \text{ kerekítési hibákkal}]$ nincs explicite kiszámítva;

A priori feltevés: $C = (A + \delta A)^{-1}$, ahol δA számunkra ismeretlen.

Lemma. Ha $R := I - AC$ normája < 1 , akkor C is invertálható, és

$$\|A^{-1}\| \leq \frac{\|C\|}{1 - \|R\|}, \quad \frac{\|R\|}{\|C\|} \leq \|C - A^{-1}\| \leq \frac{\|C\| \|R\|}{1 - \|R\|}.$$

Bizonyítás. $R = I - AC \Rightarrow C = A^{-1}(I - R)$ invertálhatók szorzata, ha $\|R\| < 1$.

$$R = I - AC \Rightarrow A = (I - R)C^{-1} \Rightarrow A^{-1} = C(I - R)^{-1} = C \sum_{n=0}^{\infty} R^n \Rightarrow \|A^{-1}\| \leq \|C\| \sum_{n=0}^{\infty} \|R\|^n.$$

$$R = I - AC \Rightarrow R = A(A^{-1} - C) \Rightarrow \|R\| \leq \|A\| \|A^{-1} - C\|.$$

$$\text{Itt } A^{-1} - C = C(I - R)^{-1} - C = C \sum_{n=0}^{\infty} R^n \Rightarrow \|A^{-1} - C\| \leq \|C\|/(1 - \|R\|).$$

Lemma. $C = \hat{A}^{-1} = (A + \delta A)^{-1}$ és $\|R\| < 1$ esetén

$$\|\delta A\| \leq \|R\| \|C^{-1}\| \leq \frac{\|R\| \|A\|}{1 - \|R\|}.$$

Bizonyítás. Észrevétel: $\delta A = C^{-1} - A = (I - AC)C^{-1} = RC^{-1}$.

Itt $C^{-1} = [A^{-1}(I - R)]^{-1} = (1 - R)^{-1}A$, ahonnan a norma-bebecslések azonnal adódnak.

A posteriori analízis

Alaphelyzet: Adott egy $y (= x + \delta x)$ közelítő megoldása $Ax = b$ -nek ($\det(A) \neq 0$). Adjunk bebecsléseket az

$$r := Ay - b (= (\delta A)(x + \delta x) - \delta b), \quad e := A^{-1}r$$

reziduális- ill. hibavektorra. A már ismert eredményeink alapján:

$$\textbf{Lemma.} \quad \|e\| \leq \|r\| \|A^{-1}\| \leq \frac{\|r\| \|C\|}{1 - \|R\|}, \quad \frac{\|e\|}{\|x\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|r\|}{\|b\|}.$$

A gépi reprezentációk pontatlanságainak figyelembe vétele

Legyen $\hat{r} = r + \delta r := [r (= b - Ay) \text{ gépi értéke}]$. Feltevés: $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$, és az u gépi 0-val

$$|\delta r| \leq \gamma_{N+1}(|A| |y| + |b|), \quad \text{ahol } \gamma_{N+1} := \frac{(N+1)u}{1 - (N+1)u}.$$

Tétel. Ekkor a $\|\cdot\| := \|\cdot\|_{\infty}$ normával

$$\frac{\|e\|_{\infty}}{\|y\|_{\infty}} \leq \frac{\| |A^{-1}| (|\hat{r}| + \gamma_{N+1}(|A| |y| + |b|)) \|_{\infty}}{\|y\|_{\infty}}.$$

A kerekítés hatása LU-faktorizációnál

Gépi kerekítés: $A \diamond (= +, -, \cdot, /)$ művelet gépi eredménye

$$[x \diamond y]^{\widehat{}} = (1 + \delta_{\diamond, x, y})(x \diamond y), \quad |\delta_{\diamond, x, y}| \leq u := [\text{gépi } 0].$$

Feltevés: $(A + \delta A) = (L + \delta L)(U + \delta U)$, ahol

$A = LU$, L alsó-triangularis 1-főátlójú, U felső-triangularis $N \times N$ -es mátrixok,
 $\widehat{A} := A + \delta A$, $\widehat{L} := L + \delta L$, $\widehat{U} := U + \delta U$ a gépi számítás eredményei, $u := [\text{gépi } 0]$.

Tétel. $A = LU$, $\widehat{A} = \widehat{L}\widehat{U}$, $[\widehat{L} \text{ főátlója}] = 1 \implies |\delta A| \leq \frac{Nu}{1 - Nu} |\widehat{L}| |\widehat{U}|$.

INTERVALLUM-ARITMETIKA

Általában $X \diamond Y := \{x \diamond y \in \mathbb{R} : x \in X, y \in Y\}$ ($X, Y \subset \mathbb{R}$).

Tétel. (Befoglalási tétel). $X_1 \subset X_2, Y_1 \subset Y_2 \implies X_1 \diamond Y_1 \subset X_2 \diamond Y_2$.

Tétel. (Elemi intervallum-műveletek tétele).

$$\text{Intv} \diamond \text{Intv} = \text{Intv} \quad (\diamond = +, -, \cdot, / \text{ (} 0 \notin \text{nevező)}).$$

Mindig $[a, b] \diamond [c, d] = [\varphi(a, b, c, d), \psi(a, b, c, d)]$ alakú.

Bizonyítás. Folytonos függvény kompakt összefüggő halmazt kompakt összefüggőbe visz, és $\mathbb{R}$ kompakt összefüggő részhalmazai pontosan a korlátos zárt intervallumok. A $\diamond = +, -, \cdot, /$ ($0 \notin$ nevező) műveletek az $\mathbb{R}_\varepsilon \times \mathbb{R}_\sigma$ ($\varepsilon, \sigma = \pm$) síknegyedeken monotonok – innen a végpontok előállítása.

Példa. $[a, b] \diamond [c, d] = [\min\{a \diamond c, a \diamond d\}, \max\{b \diamond c, b \diamond d\}]$ ($\diamond = \pm$).

Gyakorlat. 1) $[a, b] \cdot [c, d]$ végpontjai; 2) $[a, b]/[c, d]$ végpontjai.

Megjegyzés. $\mathbb{R}$ egy pontos $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ kompaktifikációjával, ahol a zárt körívek éppen a kompakt összefüggő halmazok, megadható egy kissé bonyolultabb algebrájú *körív-aritmetika*.

Definíció. Jelölés: $\text{Intv}(I) := \{[c, d] : c \leq d, [c, d] \subset I\}$ az I -beli részintervallumok.

Az $F : \text{Intv}(I) \rightarrow \text{Intv}(\mathbb{R})$ intervallum-függvény *befoglalás izoton*, ha

$$F(J_1) \subset F(J_2) \quad \text{valahányszor} \quad J_1 \subset J_2 \in \text{Intv}(I).$$

Legyen $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ egy $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon értelmezett függvény. Az $F : \text{Intv}(I) \rightarrow \text{Intv}(\mathbb{R})$ intervallum-függvény *befoglalja* f -et, ha

$$f(J)(:= \text{range}(f|J) = \{f(x) : x \in J\}) \subset F(J) \quad \text{valahányszor} \quad J \in \text{Intv}(I).$$

Algebrai formulák intervallum aritmetikával

Ettől kezdve

$$\mathcal{S} := \{x, \sin, \cos, \log, \dots\}$$

Intervallumokon értelmezett függvények egy adott családja – *speciális függvényeknek* hívjuk a tagjait. Mindegyikükhöz adott lesz egy rögzített izoton befoglaló intervallum-függvény

$$\mathfrak{S} := \{X, \text{Sin}, \text{Cos}, \text{Log}, \dots\}.$$

Megjegyzés. Az identitást jelentő $x : \mathbb{R} \ni \xi \mapsto \xi$ függvénynek általában nem az $\text{Intv}(\mathbb{R}) \ni I \mapsto I$ triviális leképezést feleltetjük meg. Ok: a gépi kerekítés imitálása.

Definíció. Legyen $\Phi = \Phi(x)$ az x változószimbólum elemi függvénykifejezése. Azaz Φ véges sok speciális függvényjelet és $\diamond \in \{\pm, \cdot, /, \max, \dots\}$ műveleti jelet tartalmazó szintaktikusan helyesen zárójelezett kifejezés. Ekkor az alábbi ${}^f\Phi$ ill. ${}^I\Phi$ szám- ill. intervallum értékű függvények Φ természetes aritmetikai ill. intervallum-aritmetikai realizációi

$${}^f\Phi(x) := \left[\text{Formális lépésenkénti behelyettesítése } x\text{-nek } \Phi\text{-be} \right],$$

$$\mathfrak{S}\Phi(J) := \left[\text{Formális lépésenkénti } \mathfrak{S}\text{-szerinti behelyettesítése } J\text{-nek } \Phi\text{-be} \right].$$

Példa. $\Phi_1(x) := 1 - x \cdot x$, $\Phi_2(x) := (1 - x) \cdot (1 + x)$ esetén ${}^f\Phi_1 = {}^f\Phi_2 : x \mapsto 1 - x^2$

$$\mathfrak{S}\Phi_1[-1, 1] = 1 - [-1, 1] \cdot [-1, 1] = [1, 1] - [-1, 1] = [0, 2],$$

$$\mathfrak{S}\Phi_2[-1, 1] = (([1, 1] - [-1, 1]) \cdot ([1, 1] + [-1, 1])) = [0, 2] \cdot [0, 2] = [0, 4].$$

A következő fontos állítások egyenesen (angol *straightforward*) beláthatók.

Lemma. Tegyük fel, hogy $I_1, I_2 \in \text{Intv}(\mathbb{R})$ és $k = 1, 2$ -re az $F_k : \text{Intv}(I_k) \rightarrow \text{Intv}(\mathbb{R})$ intervallumfüggvény izoton befoglalója az $f_k : I_k \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek. Ekkor

- (1) $F_1 \diamond F_2$ izoton befoglalója $f_1 \diamond f_2$ -nek, ha $I_1 = I_2$ és $\diamond = +, -, \cdot$, ill. ha $\diamond = /$ és $f_2(I_2) > 0$.
- (2) $F_1 \circ F_2$ izoton befoglalója $f_1 \circ f_2$ -nek, ha $f_2(I_2) \subset I_1$.

Innen a formula hossza szerinti indukcióval azonnal adódik:

Tétel. (Az intervallum-analízis alaptétele). Tegyük fel hogy, $I \in \text{Intv}(\mathbb{R})$ és Φ olyan elemi formula, amelynél az ${}^f\Phi$ behelyettesítési függvény jól-definiált I minden pontjában. Ekkor az $\mathfrak{S}\Phi$ intervallum-függvény izoton befoglalója $\mathfrak{S}\Phi$ -nek.

Tiszta matematikai vizsgálattal folytatjuk, mielőtt egy általános (a "pontatlan" számolást imitáló) $\mathfrak{S}$ intervallum-reprezentációt tekintünk.

Definíció. Az ideális intervallum-reprezentáció az elméletileg pontosan számított speciális függvények értékkészletével adódik: $\mathfrak{S}^* = \{X_*, \text{Sin}_*, \text{Exp}_*, \dots\}$, ahol

$$S_*[a, b] := [\min s([a, b]), \max s([a, b])], \quad \text{ahol } s \in \mathcal{S}, [a, b] \subset \text{dom}(s).$$

Példa. $\text{Sin}_*[0, 5\pi/4] = [-2^{-1/2}, 1]$ az irracionális $2^{-1/2}$ kerekítés nélküli (gyakorlatilag csak szimbolikus) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \binom{1/2}{k}$ értékével.

Tétel. (Értékkészlet-bennfoglalási* tétel). Ha Φ egy $\mathcal{S}$ szerint formula, az $\mathfrak{S}$ -beli függvények és a $\diamond$ operációk lokálisan Lipschitz-folytonosak az értelmezési tartományuk

* Angolul *range enclosure*.

belsejében*. Legyen I_0 egy nyitott intervallum, és $I_0 \supset I \in \text{Intv}(\mathbb{R})$. pedig olyan zárt intervallum, amelynek minden pontjában Φ részformuláiban előforduló $\mathfrak{S}$ -beli függvények ill. $\diamond$ operációk mind jól-definiáltak. Ekkor létezik olyan $K \in (0, \infty)$ konstans, hogy az $F := \mathfrak{S}^* \Phi$ ideális intervallum-realizációval bármely $I = \bigcup_{k=1}^n I_k$, $I_1, \dots, I_n \in \text{Intv}(I)$ lefedés esetén

$${}^f \Phi(I) \subset \bigcup_{k=1}^n F(I_k) \subset F(I), \quad \text{diam} \left(\bigcup_{k=1}^n F(I_k) \right) \leq \text{diam}(f(I)) + K \max_{k=1}^n \text{diam} I_k.$$

Bizonyítás. Az $f := {}^f \Phi$ jelöléssel $f(I) = \bigcup_{k=1}^n f(I_k) \subset \bigcup_{k=1}^n F(I_k) \subset F(\bigcup_{k=1}^n I_k) = F(I)$ mivel F izoton befedője (az elméleti) f -nek.

A range-bebecslés a következő lépésekkel történhet:

(1) Minden $z \in I$ ponthoz található olyan $\delta_z > 0$ és K_z konstans, hogy $[z - \delta_z, z + \delta_z] \subset I_0$ és $|f(x_1) - f(x_2)| \leq K_z |x_1 - x_2|$ ($z - \delta_z \leq x_1, x_2 \leq z + \delta_z$).

(2) Kompaktági érv $\Rightarrow \exists$ véges sok $z_1, \dots, z_N$ amelyre $I \subset \bigcup_{k=1}^N (z_k - \delta_{z_k}, z_k + \delta_{z_k})$.

(3) $K := \max_{k=1}^N K_{z_k}$ mellett $|f(x_1) - f(x_2)| \leq K |x_1 - x_2|$ ($x_1, x_2 \in I$).

(4) K Lipschitz-konstansú leképezés egy halmaz képenek átmérőjét legfeljebb K -szorosára növeli $\Rightarrow \text{diam}(F(J)) \leq K \text{diam}(J)$ valahányszor $J \in \text{Intv}(I)$.

(5) Tegyük fel, hogy $I_1, \dots, I_M \in \text{Intv}(I)$ lefedik I -t. Ekkor $p := \min {}^f \Phi(I) = x_{k_1}$ ill. $p := \max {}^f \Phi(I) = x_{k_2}$ és így az $\bigcup_{k=1}^M \mathfrak{S}^* \Phi(I_k)$ intervallum legfeljebb $\text{diam}(\mathfrak{S}^* \Phi(I_{k_1})) \leq K \text{diam}(I_{k_1})$ hosszal nyúlik túl balról ill. $\text{diam}(\mathfrak{S}^* \Phi(I_{k_2})) \leq K \text{diam}(I_{k_2})$ hosszal nyúlik túl jobbról az ${}^f \Phi(I)$ intervallumon ($\Rightarrow$ Tétel).

Programozás-független megközelítés

Alafogalmak. Intervallumok (N-dim)

$\text{Intv}(\mathbb{R}^N) := \{[a_1, b_1] \times \dots \times [a_N, b_N] : -\infty < a_k \leq b_k < \infty \ (k = 1, \dots, N)\}$,

$\text{Intv}(G) := \{I \in \text{Intv}(\mathbb{R}^N) : I \subset G\}$.

Megengedett (izoton) intervallum-függvény ($\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ típusú)

$F : \text{Intv}(\mathbb{R}^N) \supset \mathcal{G} \rightarrow \text{Intv}(\mathbb{R}^M)$, ha mindig $I \subset J \in \mathcal{G} \Rightarrow I \in \mathcal{G}$ és $F(I) \subset F(J)$.

Függvény lefedése (enclosure) megengedett intervallum függvénnel

$f \prec F$ ($F \succ f$) ha $f : \mathbb{R}^N \supset G \rightarrow \mathbb{R}^M$, $F : \text{Intv}(\mathbb{R}^N) \supset \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^M$, és

$\text{Intv}(G) \subset \mathcal{G}$ ($= \text{dom}(F)$), $f(I) (= \{f(x) : x \in I\}) \subset F(I)$ ($I \in \text{Intv}(G)$).

Lipschitz konstansok (max-norma szerint): $\text{Lip}(f) := \sup_{x \neq y \in \text{dom}(f)} \|f(x) - f(y)\| / \|x - y\|$,

$\text{Lip}(F) := \sup_{I \in \text{dom}(F)} \text{diam}(F(I)) / \text{diam}(I)$.

Megjegyzés. $f \prec F \Rightarrow \text{diam}(F(I)) \leq \text{Lip}(f) \cdot \text{diam}(I)$ ($I \in \text{Intv}(\text{dom}(f))$).

* Egy $h : \mathbb{R}^N \supset X \rightarrow \mathbb{R}$ függvény Lipschitz-folytonos, ha $\text{Lip}(h) \sup_{u, v \in X} \|h(u) - h(v)\| \leq \|u - v\| < \infty$. Példa: $\max : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto \max(x, y)$ esetén $\text{Lip}(\max) = 1$. Ez gyakorlatilag mindig teljesül. Praktikus kivétel pl. a nem-folytonos sgn.

Piccard–Lindelöf-tétel

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x(0) = x_0$$

$$f : [0, T] \times [p, q] \rightarrow \mathbb{R} \text{ folytonos, } |f| \leq M, \\ |f(\tau, \xi_1) - f(\tau, \xi_2)| \leq L|\xi_1 - \xi_2| \quad (0 \leq \tau \leq T, \xi_1, \xi_2 \in [p, q])$$

ÁBRA: f vektormezeje, egy $(0, x_0)$ -ból induló, ehhez símuló fgv grafikonja nem lép ki a $(0, x_0), (\tau_*, x_0 \pm M\tau_*)$ háromszögből, ahol

$$\tau_* := \min\{(q - x_0)/M, (x_0 - p)/M\}$$

$$x(t) = x_0 + \int_{s=0}^t f(s, x(s)) \, ds \quad \text{ekvív int-egyenlet}$$

$$x_0(t) \equiv x_0, \quad x_{n+1}(t) := x_0 + \int_{s=0}^t f(s, x_n(s)) \, ds \quad (0 \leq t \leq \tau_*)$$

$$x_n : [0, \tau_*] \rightarrow [p, q] \quad \text{jól-def } \forall n,$$

Ha $x_0, x_1, \dots$ egyenl konv, akkor ennek x_* limeze az egyedüli megold.

$$x_1(t) - x_0(t) = \int_{s=0}^t [f(s, x_0)] \, ds,$$

$$x_{n+1}(t) - x_n(t) = \int_{s=0}^t [f(s, x_n(s)) - f(s, x_{n-1}(s))] \, ds \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Az M, L korlátok miatt

$$|x_1(t) - x_0| \leq \int_{s=0}^t |f(s, x_0)| \, ds \leq \int_{s=0}^t M \, ds = Mt,$$

$$|x_{n+1}(t) - x_n(t)| \leq \int_{s=0}^t |f(s, x_n(s)) - f(s, x_{n-1}(s))| \, ds \leq \\ \leq \int_{s=0}^t L|x_n(s) - x_{n-1}(s)| \, ds$$

IND n -re $\Rightarrow$

$$|x_{n+1}(t) - x_n(t)| \leq ML^n t^{n+1}/(n+1)! \quad \left(= \int_{s=0}^t L \cdot [ML^n s^n/n!] \, ds \right)$$

$\|\cdot\|_\infty$ -norma (max-norma) szerint $x_0, x_1, x_2, \dots$ véges út $\mathcal{C}[0, \tau_*]$ -ban:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_{n+1}(t) - x_n(t)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} ML^n \tau_*^{n+1}/(n+1)! = M[e^{L\tau_*} - 1] < \infty$$

Ezért az $x_* := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \mathcal{C}[0, \tau_*]$ megoldásfgv-re

$$|x_*(t) - x_r(t)| \leq \sum_{n=r}^{\infty} ML^n t^{n+1}/(n+1)! \quad (r = 0, 1, \dots; 0 \leq t \leq \tau_*),$$

de mindenképpen $x_* : [0, \tau_*] \rightarrow [p, q]$ is!

Piccard-Lindelöf konstrukció intv-aritmetikával

$F_t : \text{Intv}([0, T] \times [p, q]) \rightarrow \text{Intv}(\mathbb{R})$ úgy, hogy $f \prec F$.

Ekkor $f(t, \xi) \in F(I \times J)$ valahányszor $t \in I, \xi \in J$.

Kiindulás: $x_0 \in X_0 \in \text{Intv}([p, q]); \quad X_0(t) \equiv X_0$.

Vegyünk egy $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N = \tau_*$ beosztását $[0, \tau_*]$ -nak.

$I_k := [\tau_{k-1}, \tau_k], \quad \ell(t) := [k : t \in I_k, t < \tau_k]$

$$\begin{aligned} x_{n+1}(t) &= x_0 + \int_{s=0}^t f(s, x(s)) \, ds = \\ &= x_0 + \sum_{k:k < \ell(t)} \int_{s \in I_k} f(s, x(s)) \, ds + \int_{s=\tau_{\ell(t)-1}}^{\tau(\ell(t))} f(s, x(s)) \, ds \in X_n(t), \end{aligned}$$

ahol

$$X_{n+1}(t) := X_0 + \sum_{k:k < \ell(t)} (\tau_k - \tau_{k-1}) F\left(I_k \times \bigcup_{t \in I_k} X_n(t)\right) + (t - \tau_{\ell(t)}) F\left(I_{\ell(t)} \times \bigcup_{t \in I_k} X_n(t)\right)$$

Észrevétel. Az $X_{n+1}(t)$ intv-ok felső és alsó határai t szerint, vagyis a

$$t \mapsto a_{n+1}(t) := t \mapsto \min X_{n+1}(t), \quad t \mapsto b_{n+1}(t) := \max X_{n+1}(t)$$

fgv-ek *szakaszonként lineárisak*.

Ezért könnyű a (bonyolultnak látszó) $\bigcup_{t \in I_k} X_n(t)$ intv-ok kiszámítása:

ÁBRA

$$\bigcup_{t \in I_k} X_n(t) = [\min\{a_n(\tau_{k-1}), a_n(\tau_k)\}, \max\{a_n(\tau_{k-1}), a_n(\tau_k)\}].$$

$$[a_{n+1} \text{ meredeksége } I_k \text{ fölött}] = F\left(I_k \times \bigcup_{t \in I_k} X_n(t)\right).$$

Piccard-Lindelöf csővek a megoldás körül. Mivel $x_n(t) \in X_n(t)$ és

$$|x_*(t) - x_n(t)| \leq \varepsilon_n(t) := \sum_{k:k > n} ML^{k-1} t^n / n!,$$

az x_* megoldásra

$$a_n(t) - \varepsilon_n(t) \leq x_*(t) \leq b_n(t) + \varepsilon_n(t) x_*(t).$$

Tehát a grafikonja a következő *Piccard-Lindelöf csővekben* van

$$(t, x(t)) \in \text{PL-CSŐ}_n'' := \bigcup_{s \in [0, \tau_*]} \{s\} \times [a_n(t) - \varepsilon_n(t), b_n(t) + \varepsilon_n(t)].$$

Euler-csövek a megoldás körül

Technikai feltevés (alig erősebb a PL-esetnél): $f \prec F$, $L := \text{Lip}(F) < \infty$.

Vehető $-M \leq \min f \leq F(I) \leq \max f \leq M$ ($\forall I$). Jelölések mint PL-nél:

$x_0 \in (p, q)$, $M := \max |f|$, $\tau_* := \min \{(q - x_0)/M, (x_0 - p)/M\}$, $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N = \tau_*$.

$$\frac{d}{dt}x_*(t) = f(t, x_*(t)), \quad x_*(t) = x_0 + \int_{s=0}^t f(s, x_*(s)) ds.$$

$$1) \quad t \in I_1 = [0, \tau_1] \implies x_*(t) \in X_0 + [-Mt, x_0 + Mt] \subset J_1 := X_0 + [-M\tau_1, M\tau_1]$$

$$\frac{d}{dt}x_*(t) = f(t, x_*(t)) \in F(I_1 \times J_1), \quad x_*(t) \in X_0 + tF(I_1 \times J_1),$$

ÁBRA

$x_*(t) \in [a(t), b(t)]$ ($t \in I_1$), ahol $a(\cdot), b(\cdot)$ lin fgv-ek, $a(0) = \max X_0$, $b(0) := \min X_0$,
 $[a \text{ meredeksége}] = \min F(I_1 \times J_1)$, $[b \text{ meredeksége}] = \max F(I_1 \times J_1)$.

Geometriailag: $X_1 := X_0 + \tau_1 F(I_1 \times J_1)$ mellett

x_* grafikonja egy olyan $\mathcal{T}_1$ trapézban halad, amelynek

két párhuzamos oldala X_0 ill. X_1 , magassága $\tau_1 = \text{diam}(I_1)$.

k) Ha már az $I_1, \dots, I_{k-1}$ interv-on $a(\cdot), b(\cdot)$ szakaszonként lin (folyt) úgy, hogy

$$a(t) \leq x_*(t) \leq b(t) \quad (0 \leq t \leq \tau_{k-1}),$$

$$\text{akkor } I_k \text{ fölött } \frac{d}{dt}x_*(t) = f(t, x_*(t)) \in [-M, M] \implies$$

$$x_*(t) \in [a(\tau_{k-1}) - M(t - \tau_{k-1}), b(\tau_{k-1}) + M(t - \tau_{k-1})] =: J_k.$$

Így még $\frac{d}{dt}x_*(t) = f(t, x_*(t)) \in F(I_k \times J_k)$, $x_*(t) \in [a(t), b(t)]$, ahol $a(t) := a(\tau_{k-1}) + t \min F(I_k \times J_k)$, $b(t) := b(\tau_{k-1}) + t \max F(I_k \times J_k)$.

ÁBRA

Geometriailag: $X_k := X_{k-1} + (\tau_k - \tau_{k-1})F(I_1 \times J_1)$ mellett

x_* grafikonja egy olyan $\mathcal{T}_k$ trapézban halad, amelynek

két párhuzamos oldala X_{k-1} ill. X_k , magassága $\tau_k - \tau_{k-1} = \text{diam}(I_k)$.

Euler-cső (x_* -hoz a $0 = \tau_0, \dots, \tau_n$ idő-lépésekkel) $E\text{-CSÖ} = \bigcup_{k=1}^n \mathcal{T}_k$.

Becslés a cső szélességére. Feltevés: $\tau_k - \tau_{k-1} \equiv \tau_*/n =: \delta$ egyenletes beosztás.

Elegendő $\ell_k := \text{diam}(X_k)$ felső becslése $k = 1, \dots, n$ -re.

ÁBRA

$$\mathcal{T}_k \subset I_k \times [a(\tau_{k-1}) - M\delta, b(\tau_{k-1}) + M\delta] = I_k \times J_k \implies \text{diam}(\mathcal{T}_k) \leq \delta + \ell_{k-1} + 2M\delta;$$

$$\ell_k = \text{diam}(X_k) = b(\tau_k) - a(\tau_k) =$$

$$= [b(\tau_{k-1}) + \delta \max F(I_k \times J_k)] - [a(\tau_{k-1}) + \delta \min F(I_k \times J_k)] =$$

$$= [b(\tau_{k-1}) - a(\tau_{k-1})] + \delta [\max F(I_k \times J_k) - \min F(I_k \times J_k)] =$$

$$= \ell_{k-1} + \delta \text{diam} F(I_k \times J_k) \leq \ell_{k-1} + \delta L \text{diam}(I_k \times J_k) =$$

$$\leq \ell_{k-1} + \delta L[\delta + \ell_{k-1} + 2M\delta] = (1 + \delta L)\ell_{k-1} + (2M + 1)L\delta^2.$$

INDUKCIÓ k -ra: $\ell_k \leq \ell_0(1 + \delta L)^k + (2M + 1)L\delta^2[1 + (1 + \delta L) + \cdots + (1 + \delta L)^{k-1}]$.

Megjegyzés. Az $\ell_k = A\ell_{k-1} + B$ lin rekurzió nál $\ell_k = A^k\ell_0 + (1 + A + \cdots + A^k)B = A^k\ell_0 + B(A^k - 1)/(A - 1)$. Tehát

$$\begin{aligned}\ell_k &\leq (1 + L\delta)^k\ell_0 + (2M + 1)L\delta^2[(1 + L\delta)^k - 1]/[(1 + L\delta) - 1] = \\ &= (1 + L\delta)^k\ell_0 + (2M + 1)\delta[(1 + L\delta)^k - 1].\end{aligned}$$

Mivel $\delta = \tau_*/n$,

$$\begin{aligned}\ell_k &\leq (1 + L\tau_*/n)^k\ell_0 + (2M + 1)(\tau_*/n)[(1 + L\tau_*/n)^k - 1] \leq \\ &\leq e^{L\tau_*}\ell_0 + \tau_*[e^{L\tau_*} - 1]/n\end{aligned}$$

Speciálisan kaptuk a következőt:

Tétel. A beosztás sűrítésével pontos $\ell_0 = 0$ kiindulás esetén az Euler-csővel egyenletesen konvergálnak a megoldáshoz.

Elemi lépések Tegyük fel, hogy

$0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_n = \tau_*$ és $a, b : [0, \tau_*] \rightarrow [\min f, \max f]$ olyan függvények, hogy a, b folyt és lin (=affin?) a $[\tau_{k-1}, \tau_k]$ szakaszokon, és $a(t) \leq x_*(t) \leq b(t)$, $\frac{d}{dt}a(t) \leq \frac{d}{dt}x_*(t) = f(t, x_*(t)) \leq \frac{d}{dt}b(t)$ ($t \in [0, \tau_*]$).

Beiktatunk egy $\tilde{\tau} \in (\tau_{\ell-1}, \tau_\ell)$ új pontot, és konstruálunk egy olyan "jobb"

$\tilde{a}, \tilde{b} : [0, \tau_*] \rightarrow \mathbb{R}$ függvénpárt, amely folyt és lin (=affin?) a

$\tau_0, \dots, \tau_{\ell-1}, \tilde{\tau}, \tau_\ell, \dots, \tau_n$ beosztás $I_0, I_1, \dots, I_{n+1}$ szakaszain, és mindenütt

$$(*) \quad a \leq \tilde{a} \leq x_* \leq \tilde{b} \leq b, \quad \frac{d}{dt}a \leq \frac{d}{dt}\tilde{a} \leq \frac{d}{dt}x_* \leq \frac{d}{dt}\tilde{b} \leq \frac{d}{dt}b.$$

Legyen $\tilde{a}(t) \equiv a(t)$, $\tilde{b}(t) \equiv b(t)$ a $t \leq \tau_{\ell-1}$ szakaszon (az $I_1, \dots, I_{\ell-1}$ intervallumokon).

Az $I_\ell = [\tau_{\ell-1}, \tilde{\tau}]$, $I_{\ell+1} = [\tilde{\tau}, \tau_\ell]$, $I_{\ell+j+1} = [\tau_{\ell+j}, \tau_{\ell+j+1}]$ ($j = 1, \dots, n - \ell$) intervallumokon egymás után $k = \ell, \dots, n + 1$ mellett I_k fölött legyen

$$[\tilde{a}|I_k \text{ meredeksége}] := \max \left\{ [a|I_k \text{ meredeksége}], \min F(I_k \times [\min a|I_k, \max b|I_k]) \right\},$$

$$[\tilde{b}|I_k \text{ meredeksége}] := \min \left\{ [b|I_k \text{ meredeksége}], \max F(I_k \times [\min a|I_k, \max b|I_k]) \right\}.$$

Ezen meredekségek alapján egymás után $k = \ell, \ell + 1, \dots, n + 1$ mellett egyértelműen meghatározhatók az $\tilde{a}|I_k, \tilde{a}|I_k$ lineáris függvények, hiszen értékük I_k bal végpontjában már ismert. Az $f \prec F$ reláció miatt pedig a (*) feltétel is teljesül automatikusan.

ÁBRA

Gyakorlat. Írjunk optimalizált algorimust $n = 1, 2, 4, 8, \dots, 2^r$ tagú egyenletes beosztások Euler-csőveihez.

2D kihasználása. Legyen $f : [0, T] \times [p, q] \rightarrow \mathbb{R}$ mint eddig, továbbá $p < \xi_{-1} < \xi_0 < \xi_1 < q$. Ekkor a $(0, \xi_0)$ -ből induló $\phi_0 : [0, \tau_*] \rightarrow [p, q]$ megoldása a $\frac{d}{dt}x(t) = f(t, x(t))$ diff egy-nek fölött halad a $(0, \xi_{-1})$ -ből kiinduló $\phi_{-1} : [0, \tau_*] \rightarrow [p, q]$ megoldásnak, és így a ϕ_{-1} -hez szerkeszthető akármelyik alakú Euler-cső alsó határfüggvényének.

Ha tehát egy ilyen Euler-cső

$\left\{ (t, \xi) : t \in [0, \tau_*], \xi \in [a_{-1}(t), b_{-1}(t)] \right\}$ alakú,
továbbá ha az $(0, \xi_0)$ -ból induló ϕ_1 megoldás egy Euler-csőve
 $\left\{ (t, \xi) : t \in [0, \tau_*], \xi \in [a_1(t), b_1(t)] \right\}$ alakú, akkor
 $a_{-1}(t) \leq \phi_0(t) \leq b_1(t) \quad (t \in [0, \tau_*])$

ÁBRA

Előfordulhat $b_1(t) - a_{-1}(t) < \xi_1 - \xi_{-1}$, annak ellenére, hogy az Euler-csövek szélesednek.

Példa. $\frac{d}{dt}x(t) = -x(t)$, $\xi_k = k$ ($k = -1, 0, 1$).

Euler-cső magasabb rendű lépésekkel.

Indukció k szerint a $\frac{d}{dt}x(t) = f(t, x(t))$ diff egy-re $\implies$

$$\frac{d^k}{dt^k}x(t) = f_k(t, x(t)) \quad (k = 1, \dots, N)$$

valamely $f_1, \dots, f_N$ fgv-ekkel, ha $f \in \mathcal{C}^N([0, T] \times [p, q])$.

$$\begin{aligned} \text{Taylor-formula} \Rightarrow x(t+h) &= \sum_{k:k \leq N} \frac{1}{k!} x^{(k)}(t) h^k + \frac{1}{N!} x^{(N)}(s) h^N = \\ &= \sum_{k:k \leq n} \frac{1}{k!} f_k(t, x(t)) h^k + \frac{1}{N!} f_N(s, x(s)) h^N, \quad \text{ahol } \exists s \in [t, t+h]. \end{aligned}$$

Legyen $f_k \prec F_k$ ($k = 1, \dots, N$), és vegyünk egy $0 = \tau_0 < \dots < \tau_n = \tau_*$ beosztást.

Megkonstruálunk egy olyan $a, b : [0, \tau_*] \rightarrow \mathbb{R}$ fgv párt, amely az összes $I_m := [\tau_{m-1}, \tau_m]$ szakaszokon N -edfokú polinom, és amelyre $a(t) \leq x_*(t) \leq b(t)$ ($0 \leq t \leq \tau_*$).

Adott $a_0 \leq x_0 \leq b_0$, amivel $a(0) = a_0$, $x_*(0) = x_0$, $b(0) = b_0$.

Tegyük fel, hogy $a|_{[0, \tau_{m-1}]}$, $b|_{[0, \tau_{m-1}]}$ már kész. Ekkor

$$\begin{aligned} x_*(\tau_{m-1} + h) &= \sum_{k:k \leq n} \frac{1}{k!} f_k(t, x_*(\tau_{m-1})) h^k + \frac{1}{N!} f_N(s, x_*(s)) h^N \in \\ &\in [a(\tau_{m-1}), b(\tau_{m-1})] + \sum_{k:k \leq n} \frac{1}{k!} F_k(\{\tau_{m-1}\} \times [a(\tau_{m-1}), b(\tau_{m-1})]) h^k + \\ &\quad + \frac{1}{N!} F_N(I_m \times [a(\tau_{m-1}) - M \text{diam}(I_m), b(\tau_{m-1}) + M \text{diam}(I_m)]) h^N. \end{aligned}$$

Vagyis, amennyiben nem megyünk túl f értelmezési tartományán, az

$$\begin{aligned} a_m(t) &:= a(\tau_{m-1}) + \sum_{k:k \leq n} \frac{1}{k!} \min F_k(\{\tau_{m-1}\} \times [a(\tau_{m-1}), b(\tau_{m-1})]) (t - \tau_{m-1})^k + \\ &\quad + \frac{1}{N!} \min F_N(I_m \times [a(\tau_{m-1}) - M \text{diam}(I_m), b(\tau_{m-1}) + M \text{diam}(I_m)]) (t - \tau_{m-1})^N, \\ b_m(t) &:= b(\tau_{m-1}) + \sum_{k:k \leq n} \frac{1}{k!} \max F_k(\{\tau_{m-1}\} \times [a(\tau_{m-1}), b(\tau_{m-1})]) (t - \tau_{m-1})^k + \\ &\quad + \frac{1}{N!} \max F_N(I_m \times [a(\tau_{m-1}) - M \text{diam}(I_m), b(\tau_{m-1}) + M \text{diam}(I_m)]) (t - \tau_{m-1})^N \end{aligned}$$

választás megfelel a $t \in I_m$ helyeken.

Amennyiben túlmegyünk, új $\tilde{\tau} \in I_m$ osztópontot iktatunk be.

ÁBRA

Példa. ???????

MÁTRIXOK SVD-FELBONTÁSA

$A \in \mathbb{R}^{N \times K} (= \text{Mat}(N, K, \mathbb{R}))$,

$A \equiv [x \mapsto Ax]$ kanonikus azonosítás $\mathbb{R}^{K \times 1} \rightarrow \mathbb{R}^{N \times 1}$ lin operátorral.

Euklideszi norma $\|\cdot\| (= \|\cdot\|_2)$ a $\langle \cdot | \cdot \rangle$ természetes skalárszorzat szerint az oszlopvektorok $\mathbb{R}^{K \times 1} \equiv \mathbb{R}^K$ ill. $\mathbb{R}^{N \times 1} \equiv \mathbb{R}^N$ terein.

Propozíció. Legyen $e \in \mathbb{R}^{K \times 1}$ olyan egységvektor, amelyre $\|Ae\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$. Ekkor $f \perp e$ esetén mindig $Af \perp Ae$.

Megjegyzés. A $\max_{\|x\|=1} \|Ax\|$ érték jól-definiált az $\{x \in \mathbb{R}^{K \times 1} : \|x\| = 1\}$ egységgömb kompaktasága és $x \mapsto \|Ax\|$ folytonossága miatt.

Bizonyítás. Vethető $\|f\| = 1$. Ekkor az $e_t := [\cos t]e + [\sin t]f$ vektorok egységvektorok ($\|e_t\|^2 = \cos^2 t \|e\|^2 + \sin^2 t \|f\|^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$ $e \perp f$ miatt).

Az $\|Ae\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$ feltevés szerint a

$\varphi : t \mapsto \|Ae_t\|^2$ fgv a $t = 0$ helyen felveszi maximumát. Azaz

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi(t) = 0,$$

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \langle [\cos t]Ae + [\sin t]Af | [\cos t]Ae + [\sin t]Af \rangle = 0,$$

$$0 = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} [\cos^2 t \|Ae\|^2 + 2 \cos t \sin t \langle Ae | Af \rangle + \sin^2 t \|Af\|^2],$$

$$0 = 0 \cdot \|Ae\|^2 + 2 \cdot \langle Ae | Af \rangle + 0 \cdot \|Af\|^2,$$

$$0 = \langle Ae | Af \rangle \quad \text{Q.e.d.}$$

Algoritmus. Legyen $\mathbf{S}_1 := \{x \in \mathbb{R}^{K \times 1} : \|x\| = 1\}$, továbbá legyen

e_1 egy megoldása az $\|Ae\| \rightarrow \text{MAX}$, $e \in \mathbf{S}_1$ feltételes szélsőérték problémának.

Rekurzió $k = 2, \dots, K$ mellett:

Amennyiben $e_1, \dots, e_{k-1}$ már definiálva vannak úgy, hogy $\ell < k$ esetén mindig

e_ℓ egy megoldása az $\|Ae\| \rightarrow \text{MAX}$, $e \in \mathbf{S}_\ell := \{e \in \mathbb{R}^{K \times 1} : \|e\| = 1, e \perp e_j (j < \ell)\}$

feltételes szélsőérték problémának, akkor legyen

e_k is egy megoldása az $\|Ae\| \rightarrow \text{MAX}$, $e \in \mathbf{S}_k := \{e \in \mathbb{R}^{K \times 1} : \|e\| = 1, e \perp e_j (j < k)\}$

feltételes szélsőérték problémának.

Tétel. (1) A fenti $e_1, \dots, e_K$ vektorok teljes ortonormált rendszer alkotnak $\mathbb{R}^{K \times 1}$ -ben.

(2) Az $Ae_1, \dots, Ae_K$ vektorok páronként egymásra merőlegesek.

(3) $\|A\| = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_K$, ahol $\lambda_k := \|Ae_k\| = \|A|_{\text{Span}(\mathbf{S}_k)}\|$ ($k = 1, \dots, K$).

Bizonyítás. A Propozíció miatt az Algoritmus minden lépésében teljesülnek az (1–3)-beli tulajdonságok.

Következmény (SVD=Singular Value Decomposition). $A \neq 0$ esetén léteznek olyan egyértelmű $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r > 0 = \lambda_{r+1} = \dots = \lambda_K$ értékek, továbbá olyan (nem egyértelmű en meghatározott) $Q \in \text{ORT}(N)$ ill. $R \in \text{ORT}(K)$ mátrixok, amelyekre

$$A = Q\Lambda R^T, \quad \text{ahol} \quad \Lambda \in \mathbb{R}^{N \times K}, \quad [\Lambda]_{kk} = \lambda_k \quad (k = 1, \dots, r), \quad [\Lambda]_{ij} = 0 \text{ egyébként.}$$

Bizonyítás. Megfelelő választás a Tétel alapján:

$$R := [e_1, \dots, e_K], \quad Q := [Ae_1/\lambda_1, \dots, Ae_r/\lambda_r, q_{r+1}, \dots, q_N],$$

ahol a $q_{r+1}, \dots, q_N \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ oszlopvektorok teljes ortonormált rendszerré egészítik ki az ortonormált $\{Ae_1/\lambda_1, \dots, Ae_r/\lambda_r\}$ -et.

Geometriai interpretáció. Van olyan kocka, amelyet az A lineáris leképezés *téglatestbe* (nemcsak általános paralelepipedonba) visz át.

ÁBRA

SVD-felbontás algebrai módszerrel

Definíció. Az $A \in \text{Mat}(M, N, \mathbb{R})$ mátrixnak az

$$A = Q_1 \Lambda Q_2^T$$

szorzat-alak egy *SVD-felbontása*, ha

$$Q_1 \in \text{ORT}(M, \mathbb{R}), \quad Q_2 \in \text{ORT}(N, \mathbb{R}), \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \text{Mat}(M, N, \mathbb{R}),$$

ahol $r = \text{rank}(A)$ és $\lambda_1, \dots, \lambda_r > 0$.

Megjegyzés. Q_2 oszlopai az $N \times N$ -es $B := A^T A \succ 0$ mátrix páronként egymásra merőleges 1 hosszú sajátvektorai,

$$\text{charpoly}_B(\lambda) = \lambda^{N-r} \prod_{k=1}^r (\lambda - \lambda_k^2), \quad B[Q_2 \text{ } k.\text{oszl.}] = \lambda_k^2 [Q_2 \text{ } k.\text{oszl.}] \quad (k = 1, \dots, r).$$

Q_1 oszlopai, amelyek szintén páronként egymásra merőleges egységvektorok közül az első r kifejezhető A -val:

$$[Q_1 \text{ } k.\text{oszl.}] = \frac{1}{\lambda_k} A[Q_2 \text{ } k.\text{oszl.}] \quad (k = 1, \dots, r).$$

Konstrukció. 1) Meghatározzuk $B := A^T A$ sajátértékeit multiplicitással:

$$\text{charpoly}_B(\lambda) = \lambda^{N-r} \prod_{j=1}^s (\lambda - \mu_j)^{m_j}, \quad \mu_j, m_j > 0, \quad \sum_{j=1}^s m_j = r.$$

2) Mindegyik μ_j sajátértékhez meghatározunk B -nek egy m_j páronként egymásra merőleges μ_j -sajátértékű sajátvektoraiaból álló $v_1^{(j)}, \dots, v_{m_j}^{(j)}$ rendszerét. Ezek adják Q_2 oszlopait.

3) Q_1 első r oszlopát az $u_k^{(j)} := (1/\sqrt{\mu_j})Av_k^{(j)}$ ($j \leq s$) vektorok adják. A többi $(M-r)$ oszlop ennek tetszőleges ortonormált kiegészítése.

Példa. $a := \sqrt{2}$, $b := \sqrt{3}$, $A := \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & a \\ b & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & a \\ b & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & a \end{bmatrix}$ egy SVD-felbontása.

$$B := A^T A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 6 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad \text{charpoly}_B(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 12)^2.$$

Két egymásra merőleges saját-egységvektor B -hez $\mu := 12$ sajátértékkal:

$$v := [x, y, z, u]^T, \quad Bv - 12v = 0 \iff -6x + 6z = 0, -6y + 6u = 0, 6x - 6z = 0, 6y - 6u = 0.$$

Megfelel $v_1 := [2^{-1/2}, 0, 2^{-1/2}, 0]^T$, $v_2 := [0, 2^{-1/2}, 0, 2^{-1/2}]^T$.

Két egymásra merőleges saját-egységvektor B -hez 0 sajátértékkal:

$$Bv = 0 \iff 6x + 6z = 0, 6y + 6u = 0, 6x + 6z = 0, 6y + 6u = 0.$$

Megfelel $v_3 := [2^{-1/2}, 0, -2^{-1/2}, 0]^T$, $v_4 := [0, 2^{-1/2}, 0, -2^{-1/2}]^T$. Vehető

$$Q_2 := [v_1 | \dots | v_4] = \begin{bmatrix} 2^{-1/2} & 0 & 2^{-1/2} & 0 \\ 0 & 2^{-1/2} & 0 & 2^{-1/2} \\ 2^{-1/2} & 0 & -2^{-1/2} & 0 \\ 0 & 2^{-1/2} & 0 & -2^{-1/2} \end{bmatrix}.$$

Kiszámítjuk $Q_1 = [u_1 | \dots | u_5]$ oszlopvektorait:

$$u_1 = \mu^{-1/2} Av_1 = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{bmatrix} 0 & 2^{1/2} & 0 & 2^{1/2} \\ 3^{1/2} & 0 & b & 0 \\ 0 & 2^{1/2} & 0 & 2^{1/2} \\ 3^{1/2} & 0 & 3^{1/2} & 0 \\ 0 & 2^{1/2} & 0 & 2^{1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^{-1/2} \\ 0 \\ 2^{-1/2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2^{-1/2} \\ 0 \\ 2^{-1/2} \\ 0 \end{bmatrix} = 2^{-1/2}(e_2 + e_4).$$

Hasonlóan $u_2 = \mu^{-1/2} Av_2 = [3^{-1/2}, 0, 3^{-1/2}, 0, 3^{-1/2}]^T = 3^{-1/2}(e_1 + e_3 + e_5)$.

Ezután $\{u_3, u_4, u_5\}$ tetszőleges, $\{u_1, u_2\}$ -re merőleges ortonormált rendszer.

Észrevétel: $u_3 := 2^{-1/2}(e_2 - e_4)$, $u_4 := 2^{-1/2}(e_1 - e_5)$ mellett $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ ortonormált.

Választhatjuk u_5 -öt a szimmetrikus $u_5 := xe_1 + ye_3 + xe_5$ alakban. Ekkor automatikusan $u_5 \perp u_1, u_3, u_4$, és $u_5 \perp u_2 \iff x + y + x = 0$, ahonnan $y = -2x$. Vagyis és az $1 =$

$\|u_5\|^2 = 2x^2 + y^2$ normálás miatt megfelel $u_5 := 6^{-1/2}(e_1 - 2e_3 + e_5)$. Vagyis A egy SVD-felvbontása az $\alpha := 2^{-1/2} = 1/\sqrt{2}$ ill. $\beta := 3^{-1/2} = 1/\sqrt{3}$ konstansokkal

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \beta & 0 & \alpha & \alpha\beta \\ \alpha & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 & -\alpha\beta \\ \alpha & 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & -\alpha & \alpha\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & -\alpha \end{bmatrix}.$$

Gyakorlat. <https://www.youtube.com/watch?v=c0UTpq1X-Xs> .

Poz def mátrix főtengetly trf hatvány-módszerrel

$A \in \text{Mat}_{++}(N, N, \mathbb{R})$

Tudjuk: $A = Q\Lambda Q^T$, ahol $Q \in \text{ORT}(N, \mathbb{R})$, $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$, $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_N > 0$.

Észrevétel: $A^n = Q \text{diag}(\lambda_1^n, \dots, \lambda_N^n) Q^T$

Ha $\rho_n \lambda_1^n \rightarrow 1$, akkor $\rho_n A^n \rightarrow Q \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{\lambda_1 = \dots = \lambda_R = 1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{\lambda_{R+\ell} < 1}) Q^T$

Emlékeztető: $X \in \text{Mat}(N, N, \mathbb{C})$ *Hilbert-Schmidt normája*

$$\|X\|_{\text{HS}} = \sum_{i,j=1}^N |X_{ij}|^2 = \sum_{i=1}^N [X^T X]_{ii} = \text{Trace}(X^T X).$$

Trace hasonlóság-invariáns $\Rightarrow \|A^n\|_{\text{HS}} = \text{Trace}(\Lambda^n) = \lambda_1^{2n} + \dots + \lambda_N^{2n}$.

Algoritmus (max saját- és vektor hatvány-iterációval):

$$\|A^{(1)} := A/\|A\|_{\text{HS}}, \quad A^{(n+1)} := [A^{(n)}]^2 / \|[A^{(n)}]^2\| \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Ekkor $A^{(n)} = \sigma_n A^{2^n}$, ahol $\|A^{(n)}\|_{\text{HS}} = 1$.

Vagyis $\sigma_n = 1/\sqrt{(\lambda_1^{2^n})^2 + \dots + \lambda_N^{2^n}}$ és $R := \#\{j : \lambda_j = \lambda_1\}$ mellett

$$A^{(n)} = \sigma_n Q \text{diag}(\lambda_1^{2^n}, \dots, \lambda_N^{2^n}) Q^T \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{R}} Q \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_R, 0, \dots, 0) Q^T.$$

Legyen $L(A) := \lim_{n \rightarrow \infty} A^{(n)}$ és

$e(A)$ egy olyan egységvektor, amely többszöröse $L(A)$ első $\neq 0$ oszlopának.

Észrevétel: $Ae(A) = \lambda_1 e(A)$, $\Rightarrow \lambda_1 = \langle Ae(A) | e(A) \rangle = e(A)^T Ae(A)$.

Algoritmus (A főtengetly trf = SVD felb-hoz).

$$e_1 := e(A), \quad \lambda_1 := e_1^T A e_1, \quad A_1 := A - \lambda_1 e_1 e_1^T,$$

Ezután $k = 2, \dots, N$ mellett

$$e_k := e(A_{k-1}), \quad \lambda_k := e_k^T A e_k, \quad A_k := A_{k-1} - \lambda_k e_k e_k^T.$$

Eredmény: $A = Q\Lambda Q^T$, ahol $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$, $Q := [e_1, \dots, e_N]$.

MOORE–PENROSE-INVERZ

Lineáris egyenletrendszer normál közelítő megoldása

Az $m \times n$ -es valós mátrixok halmazát $\text{Mat}(\mathbb{R}, m, n)$ fogja jelölni. Speciálisan $\text{Mat}(\mathbb{R}, n, 1)$ elemei: n -es oszlopvektorok. Rajtuk a skalár-szorzat

$$\langle x|y \rangle := \sum_{k=1}^n \xi_k \eta_k, \quad \text{ha} \quad x = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix}.$$

Az x vektor hossza $\|x\| := \langle x|x \rangle^{1/2}$. Általában is, az $A \in \text{Mat}(\mathbb{R}, m, n)$ mátrix normája

$$\|A\| := \max \{ \|Ax\| : x \in \text{Mat}(\mathbb{R}, n, 1), \|x\| = 1 \}.$$

Definíció. Ettől kezdve m, n rögzített, $H := \text{Mat}(\mathbb{R}, n, 1)$ és $K := \text{Mat}(\mathbb{R}, m, 1)$. Legyen $A \in \text{Mat}(\mathbb{R}, m, n)$, $z \in H$ és $b \in K$. Ekkor

z egy legjobb célközelítő megoldása az $Ax = b$ egyenletnek, ha $\|b - Az\| = \min_{x \in H} \|Ax - b\|$.

Megjegyzés. Tudjuk: az A mátrix $\text{ran}(A) := \{Az : z \in H\}$ képtere egy altér K -ban. Az pontjai közül a b vektornak a reá való $P_{\text{ran}(A)}b$ merőleges vetülete van legközelebb b -hez. Tehát $P_{\text{ran}(A)}b$ az a vektor, amelyet a legjobb célközelítéssel el lehet érni: mindig

$$\|b - Az\| \leq \min_{x \in H} \|Ax - b\| = \min_{y \in \text{ran}(A)} \|y - b\| = \|b - P_{\text{ran}(A)}b\|.$$

A legjobb célközelítést adó vektorok halmaza tehát a

$$H_{A,b} := \{x \in H : Ax = P_{\text{ran}(A)}b\}$$

alakzat. Ez egy párhuzamos eltoltja az A mátrix $\ker(A) := \{u \in H : Au = 0\}$ magterének. Valóban, ha x_1 egy tetszőlegesen rögzített eleme $H_{A,b}$ -nek, akkor $x_1 + u \in H_{A,b} \iff A(x_1 + u) = P_{\text{ran}(A)}b \iff Au = Ax_1 - P_{\text{ran}(A)}b = P_{\text{ran}(A)}b - P_{\text{ran}(A)}b = 0$. Vagyis $H_{A,b} = x_1 + \ker(A)$ bármelyik $x_1 \in H_{A,b}$ mellett.

Definíció. $H_{A,b}$ elemei között is van egy (metrikus szempontból) kitüntetett: az origóhoz legközelebbi, amelyet az $Ax = b$ egyenlet normál közelítő megoldásának nevezünk. Ez nem más, mint 0-nak a $H_{A,b} = x_1 + \ker(A)$ affin altérre való merőleges vetülete, vagyis az

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^+(b) &:= P_{H_{A,b}}^{\text{affin}}(0) = \left[x_1 - P_{\ker(A)}x_1 : x_1 \in H_{A,b} \text{ tetszőleges} \right] = \\ &= \left[\text{az origóhoz legközelebbi legjobb célközelítő megoldása } Ax = b\text{-nek} \right] \end{aligned}$$

vektor H -ban.

Mátrix általánosított (Moore–Penrose-féle) inverze

Emlékeztető. Azonosítjuk $\mathbb{R}^d$ -t az oszlopmátrixok $\text{Mat}(d, 1, \mathbb{R})$ terével, az $A \in \text{Mat}(n, m, \mathbb{R})$ mátrixot pedig az $x \mapsto Ax$ lineáris $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ leképezéssel. A skalárszorzat $\mathbb{R}^d$ -ben: $\langle x|y \rangle := y^T x$ ($x, y \in \mathbb{R}^d \equiv \text{Mat}(d, 1, \mathbb{R})$).

Tudjuk: $A : \ker(A)^\perp \leftrightarrow \text{ran}(A)$, ahol $\ker(A) := \{u \in \mathbb{R}^m : Au = 0\}$ A -nak a *magtere*, $\text{ran}(A) := A\mathbb{R}^m = \{Ax : x \in \mathbb{R}^m\}$ A -nak a *képtere* (a *range* angol szó alapján). $W^\perp := \{u : u \perp W\} = \{u : \langle u|w \rangle = 0 \ (w \in W)\}$ a $W \subset \mathbb{R}^m$ tér *ortogonális komplementere*.

A transzponáltról tudjuk: $A^T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\langle Ax|y \rangle = \langle x|A^T y \rangle$ ($x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$), továbbá $\ker(A^T) = \text{ran}(A)^\perp$, $\text{ran}(A^T) = \ker(A)^\perp$.

Tétel. Legyen $A \in \text{Mat}(n, m, \mathbb{R})$. Ekkor a az $Ax = b$ egyenletrendszer normál közelítő megoldása lineárisan függ a b célvektortól. Nevezetesen

$$A^+(b) = [A|_{\ker(A)^\perp}]^{-1} P_{\text{ran}(A)} b \quad (b \in \mathbb{R}^n).$$

Itt $A|_{\ker(A)^\perp}$ az $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ leképezés megszorítottja a $\ker(A)^\perp$ altérre, ami egy lineáris $\ker(A)^\perp \leftrightarrow \text{ran}(A)$ leképezés, $P_{\text{ran}(A)}$ pedig a $\text{ran}(A)$ altérre való merőleges vetítés.

Bizonyítás. Mivel $A^+(b)$ egy legjobb célközelítős megoldása $Ax = b$ -nek,

$$A(A^+(b)) \in H_{A,b} := \{x \in \mathbb{R}^m : Ax = P_{\text{ran}(A)} b\} \implies A(A^+(b)) = P_{\text{ran}(A)} b.$$

Másrészt, mivel $A^+(b)$ a legkisebb normájú legjobban közelítő megoldás,

$$H_{A,b} = A^+(b) + \ker(A) \implies \|A^+(b)\| \leq \|x\| \leq \|A^+(b) + u\| \quad (u \in \ker(A)) \implies A^+(b) \perp \ker(A).$$

Vagyis $A^+(b) \in \ker(A)^\perp$. Mivel pedig $A : \ker(A)^\perp \leftrightarrow \text{ran}(A)$, szükségképpen

$$A^+(b) = [x \in \ker(A)^\perp : Ax = P_{\text{ran}(A)} b] = [A|_{\ker(A)^\perp}]^{-1} P_{\text{ran}(A)} b.$$

Következmény. (Geometriai jellemzés). $x = A^+(b) \iff x \perp \ker(A)$ és $Ax - b \perp \text{ran}(A)$.

Definíció. A lineáris $b \mapsto A^+(b)$ leképezés mátrixát ($\mathbb{R}^m$ ill. $\mathbb{R}^n$ kanonikus egységvektorai szerint) szintén A^+ jelöli. Elnevezés: az A^+ mátrix [lineáris leképezés] az A mátrixnak [lineáris leképezésnek] a *Moore–Penrose-inverze* vagy egyszerűen *általánosított inverze*.

Tétel. Ha $A \in \text{Mat}(n, d, \mathbb{R})$, $B \in \text{Mat}(d, m, \mathbb{R})$, akkor

$$\ker(A)^\perp = \text{ran}(B) \implies [AB]^+ = B^+ A^+.$$

Bizonyítás. Tudjuk a következő leképezési viszonyokat:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n \supset \text{ran}(A) &\xleftarrow{A} \ker(A)^\perp = \text{ran}(B) \xleftarrow{B} \ker(B)^\perp \subset \mathbb{R}^m, \\ \text{ahol } A : \mathbb{R}^d &\leftrightarrow \text{ran}(A), \quad B : \ker(B)^\perp \leftrightarrow \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Innen azonnal következik, hogy $\text{ran}(AB) = A\text{ran}(B) = A\ker(A)^\perp = \text{ran}(A)$, másrészt $\ker(AB) = \ker(B)$. Ezért

$$[AB|\ker(AB)^\perp]^{-1} = [AB|\ker(B)^\perp]^{-1} = [B|\ker(B)^\perp]^{-1}[A^{-1}|\text{ran}(A)],$$

ahonnan*

$$\begin{aligned} [AB]^+ &= [AB|\ker(AB)^\perp]^{-1}P_{\text{ran}(AB)} = \\ &= [AB|\ker(B)^\perp]^{-1}P_{\text{ran}(A)} = \\ &= [B|\ker(B)^\perp]^{-1}[A^{-1}|\text{ran}(A)]P_{\text{ran}(A)} = A:\ker(A)^\perp \leftrightarrow \text{ran}(A)=\ker(B)^\perp \\ &= [B|\ker(B)^\perp]^{-1}\underbrace{P_{\ker(B)^\perp}}_{P_{\text{ran}(A)}}[A|\ker(A)^\perp]^{-1}P_{\text{ran}(A)} = B^+A^+. \end{aligned}$$

Példa. $A := [1 \ 0]$, $B := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ esetén $AB = [1 \ 0]$, $A^+ = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $B^+ = B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Ekkor $[AB]^+ = [1 \ 0]^+ = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \neq B^+A^+ = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Gyakorlat. Igaz-e, hogy $AB, B^+A^+ \neq 0 \implies \ker(A)^\perp$?

Általánosított inverz QR-felbontással

Tétel. Ha $0 \neq A = QR$ az A mátrixnak egy [ortogonális]·[felső-triangularis] felbontása, akkor

$$A^+(b) = \left[R_0^T [R_0 R_0^T]^{-1}, \underbrace{0}_{n-r} \right] Q^T b \quad (b \in K),$$

ahol R_0 az R mátrixnak a nem-zéró soraiból álló részmátrixa.

Bizonyítás. Legyen $0 \neq A = QR$, ahol $Q \in \text{Ort}(\mathbb{R}, m)$, $R = \begin{bmatrix} R_0 \\ 0 \end{bmatrix}$ az $R_0 \in \text{Mat}(\mathbb{R}, r, n)$, $r := \text{rank}(A) \leq n$ rangú lineárisan független sorokból álló felső-triangularis mátrixszal.** Mivel az ortogonális mátrixszal való szorzás nem változtatja a vektorhosszakat, az a Q^T -tal beszorzott $Rx = Q^T b$ egyenlet normál közelítő megoldása ugyanaz, mint az eredeti $Ax = b$ -é.

Jegyezzük meg, hogy az $r \times r$ -es $R_0 R_0^T$ mátrix valóban invertálható, mivel nem-nulla vektort nem-nulla vektorba visz. Ugyanis ha $0 \neq w \in \text{Mat}(\mathbb{R}, r, 1)$, akkor a $w^T R_0$ vektor egy R_0 soraiból alkotott nem-triviális lineáris kombináció, így $\neq 0$ e sorok lineáris függetlensége miatt. Ennek transzponáltja $R_0^T w \neq 0$, és ezért $0 \neq \langle R_0^T w | R_0^T w \rangle = \langle R_0 R_0^T w | w \rangle$. Ez pedig csak úgy lehet, ha $R_0 R_0^T w \neq 0$. Ezért befejezésül elég megmutatnunk, hogy az

$$x_* := \left[R_0^T [R_0 R_0^T]^{-1}, 0 \right] c$$

* A levezetésben $X = A, B, AB$ -re $[X|\ker(X)^\perp]^{-1} : \text{ran}(X) \rightarrow \ker(X)^\perp$ lin. leképezés.

** Voltaképpen elég a gondolatmenethez, hogy R_0 sorai lineárisan függetlenek.

vektor az $Rx = c$ egyenlet normál közelítő megoldása (nemcsak $c := Q^T b$ -re). Ehhez csak azt kell verifikálnunk, hogy

1) Rx_* a c vektor merőleges vetülete $\text{ran}(R)(= \{Rx : x \in H\})$ -ra;

2) x_* merőleges a $\ker(A)(= \{u : Ru = 0\})$ altérre.

1) Belátandó: $\langle c - Rx_* | Rx \rangle = 0$ minden $x \in H$ mellett. Ezzel ekvivalens: $\langle R^T c - R^T Rx_* | x \rangle = 0$ ($x \in H$), azaz $R^T Rx_* = R^T c$. Ez utóbbi igaz, mert a $c = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix}$ $r \oplus (n - r)$ -dimenziós felbontással

$$\begin{aligned} R^T c &= \begin{bmatrix} R_0^T, 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_0^T c_0 \end{bmatrix}, \\ R^T Rx_* &= \begin{bmatrix} R_0^T, 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_0^T [R_0 R_0^T]^{-1}, 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} R_0^T, 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_0^T [R_0 R_0^T]^{-1} c_0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} R_0^T, 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_0 R_0^T [R_0 R_0^T]^{-1} c_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} R_0^T, 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_0^T c_0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

2) Legyen $u \in \ker(A)$, azaz $Ru = 0$. Belátandó: $\langle x_* | u \rangle = 0$. Ez is áll, mert

$$\langle x_* | u \rangle = \left\langle R_0^T [R_0 R_0^T]^{-1} c_0 \middle| u \right\rangle = \left\langle [R_0 R_0^T]^{-1} c_0 \middle| \underbrace{R_0 u}_0 \right\rangle = 0. \square$$

Definíció. Ettől kezdve A^+ fogja jelölni az $A \in \text{Mat}(\mathbb{R}, m, n)$ mátrixhoz asszociált fenti $b \mapsto \mathbf{A}(b)$ normál közelítő megoldási lineáris leképezés $(n \times m)$ -es mátrixát. Elnevezés: A^+ A -nak az *általánosított inverze*. Konvenció: $0^+ := 0$.

Megjegyzés. Az általánosított inverz másik gyakori neve: *Moore–Penrose-inverz*.

Propozíció. $(AB)^+ = B^+ A^+$, ha $A \in \text{Mat}(\mathbb{R}, m, r)$, $B \in \text{Mat}(\mathbb{R}, r, n)$ és $m, n \geq r = \text{rank}(A) = \text{rank}(B)$.

Bizonyítás. Legyen $K := \text{Mat}(\mathbb{R}, m, 1)$, $H := \text{Mat}(\mathbb{R}, n, 1)$, $F := \text{Mat}(\mathbb{R}, r, 1)$. Ekkor a $\mathbf{B} : x \mapsto Bx$, $\mathbf{A} : y \mapsto Ay$ leképezésekre

$$(1) \quad H \xrightarrow{\mathbf{B}} \text{ran}(B) = F \xleftarrow{\mathbf{A}} \text{ran}(A) \subset K.$$

Ugyanis $r = \dim(F) = \text{rank}(B) = \dim(\text{ran}(B)) = \dim(\mathbf{B}H) \leq \dim(F) = r$ (mivel $\mathbf{B}H \subset F$). Vagyis $F = \mathbf{B}H = \text{ran}(B)$. Másrészt az $m \geq r = \text{rank}(A)$ feltevés miatt A

oszlopai lineárisan függetlenek. Ezért az $\mathbf{A}$ leképezés injektív (azaz $y_1 \neq y_2 \Rightarrow Ay_1 \neq Ay_2$). Azonnal következik (1)-ből, hogy

$$\begin{aligned}\operatorname{ran}(AB) &= \{\mathbf{A}\mathbf{B}x : x \in H\} = \mathbf{A}(\mathbf{B}H) = \mathbf{A}F = \operatorname{ran}(A), \\ \ker(AB) &= \{u \in H : \mathbf{A}\mathbf{B}u = 0\} = \{u \in H : \mathbf{B}u = 0\} = \ker(B).\end{aligned}$$

Legyen $b \in K$ egy tetszőlegesen adott vektor, és legyen z_* a legközelebbi pontja $\operatorname{ran}(A) = \operatorname{ran}(AB)$ -nek b -hez. Tekintsük az $y_* := A^+b$ ill. $x_* := B^+y_*$ pontokat. Definíció szerint $Ay_* = z_*$. Mivel pedig $\operatorname{ran}(B)$ a teljes F tér, a $Bx = y_*$ egyenlet megoldható, és így $Bx_* = y_*$. Tehát $ABx_* = Ay_* = z_*$, azaz x_* a normál közelítő megoldása az $ABx = b$ egyenletnek. Mivel $x_* = B^+y_*$, fennáll $x_* \perp \ker(B)$. Mivel pedig $\ker(AB) = \ker(B)$, egyben $x_* = (AB)^+b$. Tehát $(AB)^+b = x_* = B^+y_* = B^+A^+b$. $\square$

Gyakorlatok.

- 1) $A^+ = A^{-1}$, ha A invertálható.
- 2) a) $(QA)^+ = A^+Q^T$, ha Q ortogonális mátrix.
b) $(AQ)^+ = Q^TA^+$, ha Q ortogonális mátrix.
- 3) a) $\begin{bmatrix} A_0 & 0 \end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix} A_0^+ \\ 0 \end{bmatrix}$,
b) $\begin{bmatrix} A_0 \\ 0 \end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix} A_0^+ & 0 \end{bmatrix}$,
c) $\begin{bmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix} A_0^+ & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.
- 4) a) $X^+ = X^T[XX^T]^{-1}$, ha X sorai lineárisan függetlenek.
b) $Y^+ = [Y^TY]^{-1}Y^T$, ha Y oszlopai lineárisan függetlenek.
- 5) $(A^T)^+ = (A^+)^T$.
- 6) $A^+ = ?$, ha $A := [\xi_i \eta_j]_{i=1, j=1}^m \ n$.
- 7) $A^+ = ?$, ha $A := [\alpha_k + k\beta_\ell]_{k=1, \ell=1}^m \ n$.
- 8) $P^+ = P$, ha P merőleges vetítés mátrixa.
- 9) Igaz-e általában is, hogy $[\text{projekció}]^+ = [\text{projekció}]$?
- 10) Adjunk példát az $(AB)^+ \neq B^+A^+$ esetre.
- 11) Ha $u, v \in \operatorname{Mat}(\mathbb{R}, m, 1)$ egységvektorok ($u^T u = v^T v = [1]$),
akkor $[u^T v]^+ = [u^T v]^{-1} \in \operatorname{Mat}(\mathbb{R}, 1, 1)$. [Használjuk ezt 10)-hez!]
- 12) Igaz-e, hogy $(AB)^+ = B^+A^+$, ha
 $\operatorname{pr}_{\operatorname{ran}(A)}$ felcserélhető $\operatorname{pr}_{\ker^\perp(B)}$ -vel és $\operatorname{pr}_{\operatorname{ran}(B)}$ felcserélhető $\operatorname{pr}_{\ker^\perp(A)}$ -val?

Általánosított inverz Raileigh–Ritz(= SVD)-felbontással

Emlékeztető. (Raileigh–Ritz-felbontás). Ha $0 \neq A \in \text{Mat}(\mathbb{R}, m, n)$ és $r = \text{rank}(A)$, akkor $\exists \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r > 0 \quad \exists V \in \text{Ort}(\mathbb{R}, n), V \in \text{Ort}(\mathbb{R}, m)$

$$A = V\Lambda U^T = V \begin{bmatrix} \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^T,$$

ahol $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ az az $(r \times r)$ -es mátrix, amelynek főátlójában $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ áll, a többi tagjai pedig 0-k. Tehát U oszlopvektorait $u_1, \dots, u_n$ -el, V oszlopait $v_1, \dots, v_m$ -mel jelölve,

$$\begin{aligned} A : u_1 &\xrightarrow{U^T} e_1 \xrightarrow{\Lambda} \lambda_1 e_1 \xrightarrow{V} \lambda_1 v_1, \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ u_r &\xrightarrow{U^T} e_r \xrightarrow{\Lambda} \lambda_r e_r \xrightarrow{V} \lambda_r v_r, \\ u_{r+1}, \dots, u_n &\mapsto 0, \end{aligned}$$

ahol $k=1, \dots, n$ -re $e_k := [\delta_{k1}, \delta_{k2}, \dots, \delta_{kn}]^T$ a k -adik n -es oszlop-egységvektor ($\delta_{k\ell} := [1$ ha $k = \ell$, 0 egyébként] a Kronecker-delta). Mivel $\{u_1, \dots, u_n\}, \{v_1, \dots, v_m\}$ ortonormált rendszerek,

$$\begin{aligned} \ker(A) &= \mathbb{R}u_{r+1} + \dots + \mathbb{R}u_n, & \ker^\perp(A) &= \mathbb{R}u_1 + \dots + \mathbb{R}u_r, \\ \text{ran}(A) &= \mathbb{R}v_1 + \dots + \mathbb{R}v_r, & \text{ran}^\perp(A) &= \mathbb{R}v_{r+1} + \dots + \mathbb{R}v_m. \end{aligned}$$

Az 1,2,3) gyakorlatok állításai szerint

$$A^+ = U\Lambda^+V^T = U \begin{bmatrix} \text{diag}(1/\lambda_1, \dots, 1/\lambda_r) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^T,$$

azaz $A^+ : v_1 \mapsto (1/\lambda_1)u_1, \dots, v_r \mapsto (1/\lambda_r)u_r$, és $0 = A^+v_{r+1} = \dots = A^+v_m$, továbbá $\text{ran}(A^+) = \ker^\perp(A)$, $\ker(A^+) = \text{ran}^\perp(A)$.

Következmény. $AA^+ = P_{\text{ran}(A)}$, $A^+A = P_{\ker^\perp(A)}$, $AA^+A = A$, $A^+AA^+ = A^+$.

Bizonyítás. Az előző jelöléseket használva,

$$\begin{aligned} AA^+ : v_1 &\xrightarrow{A^+} (1/\lambda_1)u_1 \xrightarrow{A} v_1, \dots, v_r \xrightarrow{A^+} (1/\lambda_r)u_r \xrightarrow{A} v_r, \{v_{r+1}, \dots, v_m\} \xrightarrow{A^+} 0 \xrightarrow{A} 0, \\ A^+A : u_1 &\xrightarrow{A} \lambda_1 v_1 \xrightarrow{A^+} u_1, \dots, u_r \xrightarrow{A} \lambda_r v_r \xrightarrow{A^+} u_r, \{u_{r+1}, \dots, u_n\} \xrightarrow{A} 0 \xrightarrow{A^+} 0. \end{aligned}$$

Vagyis $A^+A = P_{\ker^\perp(A)} = P_{\text{ran}(A^+)}$ és $AA^+ = P_{\text{ran}(A)}$. Innen $AA^+A = (AA^+)A = P_{\text{ran}(A)}A = A$, és $A^+AA^+ = (A^+A)A^+ = P_{\text{ran}(A^+)}A^+ = A^+$. $\square$

Tétel. (Az általánosított inverz algebrai jellemzése). Az $(n \times m)$ -es X mátrix pontosan akkor általánosított inverze az $(m \times n)$ -es $A \neq 0$ mátrixnak, ha

$$(*) \quad AX = [AX]^T, \quad XA = [XA]^T, \quad AXA = A, \quad XAX = X.$$

Bizonyítás. Mivel a merőleges vetítések mátrixai szimmetrikusak, az $X := A^+$ választáskor teljesül (*) a Következmény szerint.

Fordítva: tegyük fel, hogy az $(n \times m)$ -es X mátrix teljesíti a (*)-beli négy egyenletet. Írjuk fel X -et az $X = U M V^T$ alakban (az $M = U^T X V$ mátrixszal). Ekkor $A X = V \Lambda U^T U M V^T = V [\Lambda M] V^T$. Az $A X = [A X]^T$ reakció jelentése tehát $V [\Lambda M] V^T = V [\Lambda M]^T V^T$, azaz $\Lambda M = [\Lambda M]^T$. Hasonlóan eliminálhatjuk a többi egyenletből is az U, V ortogonális mátrixokat. Vagyis (*) ekvivalens az egyszerűbb

$$(**) \quad \Lambda M = [\Lambda M]^T, \quad M \Lambda = [M \Lambda]^T, \quad \Lambda M \Lambda = \Lambda, \quad M \Lambda M = M$$

alakokkal. Legyen $\Lambda_0 := \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$, és használjuk az $([r + (n-r)] \times [r + (m-r)])$ -es $M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$, ill. $([r + (m-r)] \times [r + (n-r)])$ -es $\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, felbontást. Ezzel (**) nem más mint

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Lambda_0 M_{11} & \Lambda_0 M_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} M_{11}^T \Lambda_0 & 0 \\ M_{12}^T \Lambda_0 & 0 \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} M_{11} \Lambda_0 & 0 \\ M_{21} \Lambda_0 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Lambda_0 M_{11}^T & \Lambda_0 M_{21}^T \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \Lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Lambda_0 M \Lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} M_{11} \Lambda_0 M_{11} & M_{11} \Lambda_0 M_{12} \\ M_{21} \Lambda_0 M_{11} & M_{21} \Lambda_0 M_{12} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Az első egyenlet alapján $\Lambda_0 M_{12} = 0$, ahonnan $M_{12} = 0$. Hasonlóan a második egyenletből $M_{21} = 0$. A harmadik egyenlet szerint $\Lambda_0 M_{11} \Lambda_0 = \Lambda_0$, ahonnan $M_{11} = \Lambda_0^{-1}$. Ezeket az utolsó egyenletbe behelyettesítve kapjuk, hogy $M_{22} = 0$. Vagyis $M = \begin{bmatrix} \Lambda_0^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \Lambda^+$ és $X = U M V^T = U \Lambda^+ V^T = A^+$. $\square$

Általánosított inverz Frobenius-felbontással

Az $A \in \text{Mat}(n, m, \mathbb{R})$ mátrixnak egy *Frobenius-felbontása* a következő szorzatalak:

$$A = A_1 A_2, \quad \text{ahol} \quad A_1 \in \text{Mat}(n, r, \mathbb{R}), \quad A_2 \in \text{Mat}(r, m, \mathbb{R}), \quad r = \text{rank}(A).$$

Tudjuk: minden mátrixnak vannak Frobenius-felbontásai (ld. köv. alfejezet).

Lemma. Ha $A = A_1 A_2$ egy Frobenius-felbontás, akkor $A^+ = A_2^+ A_1^+$.

Bizonyítás. Legyen $r := \text{rank}(A)$. Ekkor $X := A_1, A_2$ -re $r = \text{rank}(X) = \dim(\text{ran}(X)) = \dim(\ker(X)^\perp)$. Ezért $\text{ran}(A_2) = \mathbb{R}^r = \ker(A_1)^\perp$. Tudjuk: ez elegendő feltétele az $[A_1 A_2]^+ = A_2^+ A_1^+$ relációnak.

Propozíció. (i) $A_1 \in \text{Mat}(n, r, \mathbb{R}), \quad r = \text{rank}(A_1) \leq n \Rightarrow A_1^+ = [A_1^T A_1]^{-1} A_1^T,$
(ii) $A_2 \in \text{Mat}(r, m, \mathbb{R}), \quad r = \text{rank}(A_2) \leq m \Rightarrow A_2^+ = A_2^T [A_2 A_2^T]^{-1}.$

Bizonyítás. (i) SVD-felbontással: $A_1 = Q_1 [\Lambda, 0] Q_2^T \Rightarrow [A_1^T A_1]^{-1} A_1^T = Q_2 [\Lambda^{-1}, 0]^T Q_1^T.$

Direkt: Fennáll $A_1 : \ker(A_1)^\perp \leftrightarrow \text{ran}(A_1) = \mathbb{R}^r$. Ezért A_1 injektív, és a 2×2 -es $A_1^T A_1$ mátrix invertálható. Legyen $b \in \mathbb{R}^n$ tetszőlegesen adott, és legyen $x := [A_1^T A_1]^{-1} A_1^T b$.

Belátandó: (1) $x \perp \ker(A)$, (2) $A_1 x - b \perp \text{ran}(A_1)$.

(1) triviális, mert A_1 injektivitása miatt $\ker(A_1) = \{0\}$. Mivel $\text{ran}(A_1)$ elemei $A_1 v$ alakúak, (2) $\iff \langle A_1 x - b | A_1 v \rangle = 0$ ($v \in \mathbb{R}^n$). Itt $\langle A_1 x - b | A_1 v \rangle = \langle A_1^T A_1 x - A_1^T b | v \rangle = \langle A_1^T b - A_1^T b | v \rangle = 0$.

(ii) azonnal következik (i)-ből, azt A_2^T -ra alkalmazva:

$$A_2^+ = ([A_2^T]^T)^+ = \left([[A_2^T]^T A_2^T]^{-1} [A_2^T]^T \right)^T = A_2^T [A_2 A_2^T]^{-1}.$$

Frobenius-felbontás Gauss–Jordan-eliminációval

Legyen A egy $r > 0$ rangú $n \times n$ -es mátrix. Alkalmazzunk a soraira Gauss–Jordan-eliminációt. Ez r lépésben A -t olyan $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}]$ mátrixba viszi, amelynek $n - r$ sora 0. Sőt, ha pivotok indexei: $(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_r, j_r)$. akkor $k = 1, \dots, r$ mellett

$$\tilde{a}_{i_k, j_k} = 1 \quad \tilde{a}_{i, j_k} = 0 \quad (i \neq i_k), \quad \tilde{a}_{i, j} = 0 \quad (i \notin \{i_1, \dots, i_r\}, j \text{ tetsz.}).$$

$\tilde{A}$ nem-0 sorai π permutációjával kaphatunk olyan $(r \times n)$ -es mátrixot, amelynek $j_1, \dots, j_r$ -edik oszlopai épp az egységmátrixot adják. Legyenek

$$A_1 := \begin{bmatrix} A \text{ } j_1, \dots, j_r \text{-edik} \\ \text{oszlopai} \\ \text{eredeti sorrendben} \end{bmatrix}, \quad A_2 := \begin{bmatrix} [\tilde{A} \text{ } i_{\pi(1)} \text{-sora}] \\ \vdots \\ [\tilde{A} \text{ } i_{\pi(r)} \text{-sora}] \end{bmatrix}$$

Tudjuk: az $r \times m$ -es A_2 mátrix sorai lineárisan függetlenek, és A sorainak a lineáris kombinációi. Mivel $\text{rank}(A) = r$, bázist alkotnak az A mátrix sorai lineáris kombinációihoz. Mivel pedig A_2 j_k -edik oszlopában a k -edik sorban 1-es a többi helyen 0 van,

$$[A \text{ } i \text{-sora}] = a_{i, j_1} [A_2 \text{ } 1 \text{-sora}] + \dots + a_{i, j_r} [A_2 \text{ } r \text{-sora}].$$

Ez pontosan azt jelenti, hogy $A = A_1 A_2$. Mivel a Gauss–Jordan-elimináció véges sok $+$, $-$, $\cdot$, $/$ műveletből áll, kaptuk a következőt.

Tétel. Minden A mátrixnak van olyan Frobenius-felbontása, amelynek tagjai mind az A tagjai által generált számtestben vannak. Pl. racionális mátrixnak vannak racionális Frobenius-felbontásai. Speciálisan, A^+ tagjai az A tagjai által generált számtestben vannak.

Megjegyzés. A Gauss–Jordan-elimináció úgy is megtehető, hogy a pivotokra teljesüljön $i_1 < i_2 < \dots < i_r$. Ekkor egyszerűen $A_2 = [\tilde{A} \text{-ből kihagyva a 0-sorok}]$.

Példa. $A := \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$. Pivotok: $(1, 3), (3, 1) \rightarrow \tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & \mathbf{1} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow$

$$A_1 := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & \mathbf{1} & 3 \end{bmatrix}.$$

$$A^+ = A_2^+ A_1^+ = A_2^T [A_2 A_2^T]^{-1} [A_1^T A_1]^{-1} A_1^T = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -2 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Az $[AB]^+ = B^+A^+$ relációról

Tegyük fel, hogy $[AB]^+ = B^+A^+$. Ekkor

$$\begin{aligned}
 P_{\text{ran}}(AB) &= [AB[AB]^+]^n = [ABB^+A^+]^n = \\
 &= A[[BB^+][A^+A] \cdots [BB^+][A^+A][BB^+]]A^+ = \\
 &= A[P_{\text{ran}(B)}P_{\ker^\perp(A)}]^{n-1}P_{\text{ran}(B)}A^+ \rightarrow \\
 &\rightarrow AP_{\text{ran}(B) \cap \ker^\perp(A)}A^+. \\
 \text{ran}(AB) &= A[\text{ran}(B) \cap \ker^\perp(A)], \\
 A^+\text{ran}(AB) &= A^+A[\text{ran}(B) \cap \ker^\perp(A)], \\
 P_{\ker^\perp(A)}\text{ran}(B) &= P_{\ker^\perp(A)}[\text{ran}(B) \cap \ker^\perp(A)] = \\
 &= \text{ran}(B) \cap \ker^\perp(A).
 \end{aligned}$$

Ez utóbbi pontosan akkor teljesül, ha a $P_{\text{ran}(B)}, P_{\ker^\perp(A)}$ ortogonális projekciók felcserélhetők (l. Megjegyzés), azaz ha a merőleges $\oplus$ felbontással

$$(*) \quad \text{ran}(B) + \ker^\perp(A) = [\text{ran}(B) \cap \ker^\perp(A)] \oplus [\text{ran}(B) \cap \ker(A)] \oplus [\text{ran}^\perp(B) \cap \ker(A)].$$

Az $A_0 := A|_{\ker^\perp(A)}$, $A = P_{\text{ran}(A)}A_0P_{\ker^\perp(A)}$, $A^+ = P_{\ker^\perp(A)}A_0^{-1}P_{\text{ran}(A)}$ ill.

$B_0 := B|_{\ker^\perp(B)}$, $B = P_{\text{ran}(B)}B_0P_{\ker^\perp(B)}$ főrészfelbontásokkal adódik a fordított is.

Tétel. *Pontosan akkor áll az $[AB]^+ = B^+A^+$ reláció, ha $(*)$ teljesül, azaz ha a $P_{\text{ran}(B)}, P_{\ker^\perp(A)}$ ortogonális projekciók felcserélhetők.*

Megjegyzés. Legyenek S, T zárt alterek egy X belső-szorzat-térben. Ekkor

$$S \cap T = P_S T \iff P_S P_T = P_T P_S \iff X = (S \cap T) \oplus (S^\perp \cap T) \oplus (S \cap T^\perp) \oplus (S^\perp \cap T^\perp).$$

Bizonyítás: Mindig $S \cap T = P_S(S \cap T) \subset P_S T$.

(a) Tegyük fel, hogy $P_S P_T = P_T P_S$. Ekkor $P_S T \subset \text{ran}(P_S) = S$ továbbá $P_S T = P_S P_T X = P_T P_S X \subset \text{ran}(P_T) = T$, ahonnan $SP_S T \subset S \cap T$.

(b) Tegyük fel, hogy $S \cap T = P_S T$. Ekkor $S \cap T = P_S P_T X$ és minden $x \in X$ -re $P_S P_T x \in S \cap T \Rightarrow P_T P_S P_T x$, azaz $P_S P_T = P_T P_S P_T$. Itt $P_T P_S P_T$ szimmetrikus, mivel ortogobnalitásuk miatt P_S, P_T szimmetrikusak ($P_S = P_S^T, P_T = P_T^T$). Vagyis $P_S P_T = P_T P_S P_T = (P_T P_S P_T)^T = (P_S P_T)^T = P_T P_S$.

(c) A $\bar{P} = I - P$ komplementer-projekciókkal jól-ismert (Bool-algebrából), hogy $P_S \sim P_T$ pontosan akkor, ha $P_S P_T = P_{S \cap T}$, $P_S \bar{P}_T = P_{S \cap T^\perp}$, $\bar{P}_S P_T = P_{S^\perp \cap T}$, $\bar{P}_S \bar{P}_T = P_{S^\perp \cap T^\perp}$ páronként 0-szorzatú (azaz merőleges képterű) ortogonális projekciók $I = \text{Id}_X$ összeggel.

3- ÉS N-SPLINE FÜGGVÉNYEK

Definíció. Adottak $x_0 < x_1 < \dots < x_r$ és $y_1, \dots, y_r \in \mathbb{R}$.

Az $f : [x_0, x_r] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény *3-spline* az $\{x_1 \mapsto y_1, \dots, x_r \mapsto y_r\}$ függvénycsírához [jelölésben: $f \in \text{Spline}_3\{(x_0, y_0), \dots, (x_r, y_r)\}$], ha

$$\begin{aligned} f(x_0) = y_0, \dots, f(x_r) = y_r, \quad f \in \mathcal{C}^2[x_0, x_r]; \\ f|_{[x_{k-1}, x_k]} \in \text{Pol}_3 \quad (k = 1, \dots, r). \end{aligned}$$

Lemma. Ha $a, b, c, y_* \in \mathbb{R}$ továbbá $h > 0$ tetszőlegesen adottak, akkor

$$\exists! P \in \text{Pol}_3 \quad P(0) = a, \quad P'(0) = b, \quad P''(0) = c, \quad P(h) = y_*.$$

Bizonyítás. Triviális: $P = a + bx + (c/2)x^2 + dx^3$, ahol $d = [y_* - [a + bh + (c/2)h^2]]/h^3$.

Következmény. Tetszőleges $p, q \in \mathbb{R}$ számokhoz

$$\exists! f_{p,q} \in \text{Spline}_3\{(x_0, y_0), \dots, (x_r, y_r)\} \quad f'(x_0) = p, \quad f''(x_0) = q.$$

Algoritmus. $f_{p,q}$ konstrukciója [lépések: 1), 2), $\dots$, r).

1) A Lemma alapján $P_1 \in \text{Pol}_3$ szerkesztése, amelynél

$$P_1(x_0) = y_0, \quad P_1'(x_0) = p, \quad P_1''(x_0) = q. \quad \text{Ezzel } f_{p,q}|_{[x_0, x_1]} := P_1.$$

A folytatáshoz $p_1 := P_1'(x_1)$, $q_1 := P_1''(x_1)$.

$\vdots$

$k + 1$) A Lemma alapján $P_{k+1} \in \text{Pol}_3$ szerkesztése, amelynél

$$P_{k+1}(x_k) = y_0, \quad P_{k+1}'(x_k) = p_k, \quad P_{k+1}''(x_k) = q_k. \quad \text{Ezzel } f_{p,q}|_{[x_k, x_{k+1}]} := P_{k+1}.$$

A folytatáshoz $p_{k+1} := P_{k+1}'(x_{k+1})$, $q_{k+1} := P_{k+1}''(x_{k+1})$ (ha $k < r$).

Jelölések. Ettől kezdve rögzített $x_0 < \dots < x_r$, ill. $y_0, \dots, y_r$ mellett

$$\mathcal{F} := \text{Spline}_3\{(x_k, y_k)\}_{k=0}^r, \quad \mathcal{S} := \text{Spline}_3\{(x_k, 0)\}_{k=0}^r,$$

$$f_{p,q} := [f \in \mathcal{F} : f'(x_0) = p, \quad f''(x_0) = q], \quad s_{p,q} := [s \in \mathcal{S} : s'(x_0) = p, \quad s''(x_0) = q].$$

Megjegyzés. $\mathcal{F}$ 2-dimenziós affin alsokaság $\mathcal{C}^2[x_0, x_r]$ -ben, amelyek érintőtere $\mathcal{S}$. Azaz

$$\mathbf{T}\mathcal{F} = \mathcal{S} = \{f - g : f, g \in \mathcal{F}\} = \mathbb{R}s_{1,0} + \mathbb{R}s_{0,1}, \quad f_{p,q} = f_{0,0} + p s_{1,0} + q s_{0,1}.$$

Probléma. Milyen kétoldali peremfeltételekhez van 3-spline függvény? Azaz milyen $u, v, \alpha, \beta, \lambda, \mu$ esetén

$$\exists f \in \mathcal{F} \quad \alpha f'(x_0) + \beta f''(x_0) = u, \quad \lambda f'(x_r) + \beta f''(x_r) = v ?$$

Az $(\alpha, \beta, \lambda, \mu) = (1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1)$ ill. $u = v = 0$ esetek (fizikai) szempontból fontosak.

Lemma. Az $[a \mapsto 0, a+h \mapsto 0]$ függvénycsírához az $s'(a) = \alpha$, $s''(a) = \beta$ kezdeti feltétellel pontosan egy $s_{\alpha,\beta} \in \text{Spline}_3\{(a, 0), (a+h, 0)\}$ függvény található. Ennek első két deriváltja az $a+h$ pontban negatív mátrixú lineáris módon függ az $(\alpha, \beta) = (s'_{\alpha,\beta}(a), s''_{\alpha,\beta}(a))$ pártól. Nevezetesen

$$\begin{bmatrix} s'_{\alpha,\beta}(a+h) \\ s''_{\alpha,\beta}(a+h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -h/2 \\ -6/h & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}.$$

Bizonyítás. Egy harmadfokú s polinom a Taylor-formula szerint

$$s(x) = s(a) + s'(a)(x-a) + \frac{1}{2}s''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{6}s^{(3)}(a)(x-a)^3$$

alakú. Vagyis, ha itt $s(a) = s(a+h) = 0$, $s'(a) = \alpha$, $s''(a) = \beta$ ill. $s^{(3)}(a) = \gamma$, akkor

$$s(h) = \alpha h + \frac{1}{2}\beta h^2 + \frac{1}{6}\gamma h^3 = 0 \implies \gamma = -\frac{6}{h^3}(\alpha h + \frac{1}{2}\beta h^2).$$

Tehát egyértelműen csak

$$s_{\alpha,\beta}(x) = \alpha(x-a) + \frac{1}{2}\beta(x-a)^2 - \frac{1}{h^3}(\alpha h + \frac{1}{2}\beta h^2)(x-a)^3.$$

Ennek első két deriváltja az $a+h$ végpontban

$$\begin{aligned} s'_{\alpha,\beta}(a+h) &= \alpha + \beta h + \frac{1}{2}\left[-\frac{6}{h^3}(\alpha h + \frac{1}{2}\beta h^2)\right]h^2 = -2\alpha - \frac{1}{2}\beta h, \\ s''_{\alpha,\beta}(a+h) &= \beta + \left[-\frac{6}{h^3}(\alpha h + \frac{1}{2}\beta h^2)\right]h = -\frac{6}{h}\alpha - 2\beta. \quad \text{Qu.e.d.} \end{aligned}$$

Következmény. Az $\{a_0 \mapsto 0, a_1 \mapsto 0, \dots, a_n \mapsto 0\}$ függvénycsírához az $s'(a) = 0$, $s''(a) = 1$ kezdeti feltétellel interpoláló $s_{0,1}$ 3-spline függvény deriváltja az a_n végpontban nem tűnhet el: $s'_{0,1}(a_n) \neq 0$.

Bizonyítás. Legyen $h_k := a_k - a_{k-1}$ ($k = 1, \dots, n$). Lépésenként megkonstruálva az $s_{0,1}$ spline-t az $(a_0, a_1), (a_1, a_2), \dots, (a_{n-1}, a_n)$ intervallumok felett, a lineáris függés miatt rendre

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} s'_{0,1}(a_1) \\ s''_{0,1}(a_1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & -h_1/2 \\ -6/h_1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} s'_{0,1}(a_2) \\ s''_{0,1}(a_2) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & -h_2/2 \\ -6/h_2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -h_1/2 \\ -6/h_1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ &\vdots \\ \begin{bmatrix} s'_{0,1}(a_n) \\ s''_{0,1}(a_n) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & -h_n/2 \\ -6/h_n & -2 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} -2 & -h_2/2 \\ -6/h_2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -h_1/2 \\ -6/h_1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Mivel pozitív tagú mátrixok szorzata pozitív tagú, itt mindig

$$\begin{bmatrix} s'_{0,1}(a_k) \\ s''_{\alpha,\beta}(a_k) \end{bmatrix} = (-1)^n \begin{bmatrix} p_{11}^{(k)} & p_{12}^{(k)} \\ p_{21}^{(k)} & p_{22}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = (-1)^n \begin{bmatrix} p_{21}^{(k)} \\ p_{22}^{(k)} \end{bmatrix}$$

valamely $p_{ij}^{(k)} > 0$ ($i, j \in \{1, 2\}$, $k = 1, \dots, n$) tagokkal.

Algoritmus. Adottak: $A, B \in \mathbb{R}$, $\varphi := \{x_0 \mapsto y_0, \dots, x_n \mapsto y_n\}$. Jelölje $p_k \in \text{Pol}_3$ a φ csíra x_0 -nál A deriváltú és B második deriváltú 3-splinejének $[x_{k-1}, x_k]$ fölötti szakaszát. *Rekurzió a*

$$p_0 := y_0 + A(x - x_0) + \frac{1}{2}B(x - x_0)^2 \text{ segédfüggvénnyel:}$$

$$p_{k+1} := p_k + C_k(x - x_k)^3, \text{ ahol } C_k := [C : p_k(x_{k+1}) + C(x_{k+1} - x_k)^3 = y_{k+1}].$$

Az x_0 -nál U , x_n -nél V deriváltú s 3-spline-ja φ -nek a következtetőképén szerkeszthető: *Vesszük az $(A, B) := (U, 0), (U, 1)$ párokhoz az s_0 ill. s_1 3-spline-okat. Ezekkel*

$$s := \lambda_0 s_0 + \lambda_1 s_1, \text{ ahol}$$

$$(\lambda_0, \lambda_1) := \left[(\tilde{\lambda}_0, \tilde{\lambda}_1) : \sum_k \tilde{\lambda}_k = 1, \sum_k \tilde{\lambda}_k s'_k(x_n) = V \right].$$

EUKLIDESZI TÁVOLSÁG 3-SPLINE-OKRA

$$\mathcal{S} := \{f \in \mathcal{C}^2[x_0, \dots, x_N] : f(x_0) = y_0, \dots, f(x_N) = y_N\}$$

$$\mathcal{S}_3 := \{f \in \mathcal{S} : s|_{[x_{k-1}, x_k]} \in \text{Pol}_3\}$$

$\mathcal{S}_3, \mathcal{S}_3^0$ hasonlóan $y_0 = \dots = y_N = 0$ mellett.

$$\langle f|g \rangle := \int_{x_0}^{x_N} f''(x)g''(x) dx \quad (f, g \in \mathcal{C}^2[x_0, \dots, x_N])$$

Lemma. $d(f, g) := \langle f - g|f - g \rangle^{1/2}$ metrika $\mathcal{S}$ -en, $\|h\| := \langle h|h \rangle^{1/2}$ euklideszi norma $\mathcal{S}^0$ -on

Bizonyítás. $f, g \in \mathcal{S}$, $h := f - g \in \mathcal{S}^0$; $\langle h|h \rangle = 0 \implies h'' \equiv 0 \implies h(x) = ax + b$

$$h(x_0) = h(x_N) = 0 \implies a, b = 0 \implies h \equiv 0. \text{ Qu.e.d.}$$

Jelölés. $s_f := [s \in \mathcal{S}_3 : s'(x_0) = f'(x_0), s'(x_N) = f'(x_N)]$.

Tétel. $s_f = [s \in \mathcal{S}_3 : d(f, s) = \min d(f, \mathcal{S}_3)]$.

Bizonyítás. d euklideszi távolság $\mathcal{S}$ -en

$$\text{Kell: } [f - s_f] \perp [\mathcal{S}_3 \text{ érintőtere}] = \{s - t : s, t \in \mathcal{S}_3\} = \mathcal{S}^0$$

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_N} [f - s_f]'' h'' &= \sum_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} [f - s_f]'' h'' = \sum_k [f - s_f]' h'' \Big|_{x_{k-1}}^{x_k} - \int_{x_{k-1}}^{x_k} [f - s_f]' h''' = \\
&= \underbrace{[f - s_f]' h''}_0 \Big|_{x_0}^{x_N} - \sum_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} [f - s_f]' h''' = \\
&= - \sum_k \underbrace{[f - s_f] h'''}_0 \Big|_{x_{k-1}}^{x_k} + \sum_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} [f - s_f] \underbrace{h''''}_0 = 0. \quad \text{Qu.e.d.}
\end{aligned}$$

Gyakorlat. $[s \in \mathcal{S}_3 : \int_{x_0}^{x_n} s''(x)^2 dx \text{ minimális}] = [s \in \mathcal{S}_3 : s''(x_0) = s''(x_n) = 0]$.

Tétel. Legyen ϕ az $\int (s'')^2 \rightarrow \text{MIN}$, $s \in \mathcal{S}$ feladat megoldása. Ekkor $\phi \in \text{Pol}_3$ mindegyik (x_{k-1}, x_k) intervallumon.

Bizonyítás. Tekintsünk egy tetsz $(a, b) = (x_{k-1}, x_k)$ szakaszt, és legyen $\varepsilon > 0$.

Megmutatjuk, hogy $\phi''|(a + \varepsilon, b - \varepsilon)$ lineáris fgv.

Tudjuk: $\phi \perp s$ ($s \in \mathcal{S}^0$). Speciálisan tetsz $s \in \mathcal{C}_0^\infty(a + \varepsilon, b - \varepsilon)$ fgv-t véve (azaz ha $ss \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ és $s(x) = 0$ $x \notin (a + \varepsilon, b - \varepsilon)$ esetén)

$$\int_a^b \phi''(x) s''(x) dx = 0, \quad \text{sőt} \quad \int_a^b \phi''(x) s''(x+t) dx = \int_a^b \phi''(x-t) s''(x) dx = 0 \quad \text{ha} \quad |t| < \varepsilon.$$

ÁBRA

Ezért tetsz páros pozitív 1-integrálú $w \in \mathcal{C}_0^\infty(-\varepsilon, \varepsilon)$ súlyfgv-nyel

$$0 = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} w(t) \int_a^b \phi''(x-t) s''(x) dx dt = \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} [w * \phi''](x) s''(x) dx.$$

Tudjuk: $w * g$ mindig $\mathcal{C}^\infty$ -fgv. Tehát parciális integrálással kapható

$$0 = \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} [w * \phi'']''(x) s(x) dx \quad (s \in \mathcal{C}_0(a + \varepsilon, b - \varepsilon)).$$

Következmény: $[w * \phi'']'' \equiv 0$, azaz $w * \phi''$ lineáris fgy $(a + \varepsilon, b - \varepsilon)$ -on. Tudjuk: a $w_n(x) := nw(nx)$ $n = 1, 2, \dots$ súlyfgvekkel $w_n * \phi'' \rightarrow \phi''$. Ezért

$$\alpha_n x + \beta_n = [w_n * \phi''](x) \rightarrow \phi''(x) \quad (a - \varepsilon \leq x \leq b + \varepsilon),$$

ahonnan ϕ'' linearitása azonnal adódik.

N-SPLINE-OK

Definíció. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $N \in \mathbb{N}$. Az $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény N -spline, ha $(N-1)$ -szer folytonosan deriválható, továbbá található olyan véges $I_1 \cup \dots \cup I_n = I$ felbontása I -nek részintervallumokra, ahol $f^{(N+1)}|_{I_k} \equiv 0$ ($k = 1, \dots, n$), azaz, ha vannak olyan $\inf I = x_0 < x_1 < \dots < x_n = \sup I$ számok, hogy az $f|(x_{k-1}, x_k)$ függvények N -edfokú polinomok.

Észrevétel. Ha $f, g \in \text{Pol}(\mathbb{R})$ és $f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a)$ ($k = 0, \dots, N-1$), akkor $f - g = (x - a)^N h(x)$ valamilyen $h \in \text{Pol}(\mathbb{R})$ mellett.

Tétel. Legyenek tetszőlegesen adottak az $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ helyek, továbbá az $y_0, \dots, y_n$ ill. $\varphi_0^{(0)}, \varphi_0^{(1)}, \dots, \varphi_0^{(N-1)}, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ konstansok. Ekkor pontosan egy olyan $f : [x_0, x_n] \rightarrow \mathbb{R}$ N -spline függvény van, amelynek az $[x_{k-1}, x_k]$ intervallumokba eső részei N -edfokú f_k polinomok (megszorítottjai) és

$$f^{(d)}(x_0) = \varphi_0^{(d)} \quad (d = 0, \dots, N-1), \quad f(x_k) = \varphi_k \quad (k = 1, \dots, n).$$

Ez a függvény felírható az alábbi alakban:

$$f(x) = \sum_{d=0}^{N-1} \frac{1}{d!} \varphi_0^{(d)} (x - x_0)^d + \sum_{k=1}^n A_k [(x - x_{k-1})_+]^N$$

Bizonyítás. Legyen $f_0 := \sum_{d=0}^{N-1} \frac{1}{d!} \varphi_0^{(d)} (x - x_0)^d$. Ezzel $f_0^{(d)}(x_0) = \varphi_0^{(d)}$ ($d = 0, \dots, N-1$). Ezután a $k = 1, 2, \dots, n$ mellett rekurzióval definiált

$$\begin{aligned} (\text{ALG}) \quad A_k &:= \frac{\varphi_k - P_k(x_k)}{(x_k - x_{k-1})^N}, \quad f_k(x) := f_{k-1}(x) + A_k(x - x_{k-1})^N, \\ f|[x_{k-1}, x_k] &:= f_k|[x_{k-1}, x_k] \end{aligned}$$

sorozat megfelel (és csak az).

Megjegyzés. Rögzített $x_0, \dots, x_n$ és $\varphi_0(:= \varphi_0^{(0)}), \varphi_1, \dots, \varphi_n$ mellett legyen

$$f^{(\varphi_0^{(1)}, \dots, \varphi_0^{(N-1)})}$$

az (ALG) algoritmussal konstruált spline-függvény. Ekkor a

$$D : (\varphi_0^{(1)}, \dots, \varphi_0^{(N-1)}) \mapsto \left([f^{(\varphi_0^{(1)}, \dots, \varphi_0^{(N-1)})}]'(x_n), \dots, [f^{(\varphi_0^{(1)}, \dots, \varphi_0^{(N-1)})}]^{(N-1)}(x_n) \right)$$

leképezés affin (azaz constans+lineáris).

Megjegyzés. Az $f^{(\varphi_0^{(1)}, \dots, \varphi_0^{(N-1)})}$ spline-t célszerű két standard, elméletileg jól kontrollálható lépésben megkonstruálni:

- 1) Az $f^{(0,\dots,0)}$ alap spline megkonstruálása az $y_0 + \frac{y_1-y_0}{(x_1-x_0)^N}(x-x_0)^N$ polinommal indulva.
- 2) Az $\{x_k \rightarrow 0 : k = 0, \dots, n\}$ triviális függvénycsírához a $q := q^{(\varphi_0^{(1)}, \dots, \varphi_0^{(N-1)})}$ spline megkonstruálása. Ha $s_k := q|_{[x_{k-1}, x_k]}$ kész, akkor az $[x_k, x_{k+1}]$ intervallumon $s_{k+1} = q(x) = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{i!} \frac{d^i s_k}{dx^i} \Big|_{x=x_k} (x-x_k)^i + A(x-x_k)^N$ alakú, ahol az A konstans az $s_{k+1}(x_{k+1}) = 0$ feltételből számoljuk ki. Nevezetesen

$$s_{k+1}(x) = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{i!} \frac{d^i s_k}{dx^i} \Big|_{x=x_k} (x-x_k)^i - \left[\sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{i!} \frac{d^i s_k}{dx^i} \Big|_{x=x_k} (x_{k+1}-x_k)^{i-N} \right] (x-x_k)^N.$$

- 3) Végül $f^{(\varphi_0^{(1)}, \dots, \varphi_0^{(N-1)})} := f^{(0,\dots,0)} + q^{(\varphi_0^{(1)}, \dots, \varphi_0^{(N-1)})}$.

Propozíció. A D leképezés $\mathbb{R}^{N-1} \leftrightarrow \mathbb{R}^{N-1}$ (azaz minden derivált-kezdőállapotból minden lehetséges végállapot elérhető).

Bizonyítás. A konstrukciót x_n -ből kiindulva visszafelé is végrehajthatjuk. Eszerint minden $(\varphi_0^{(1)}, \dots, \varphi_n^{(N-1)})$ szám- $(N-1)$ -eshez van egy olyan egyértelmű

$$g^{(\varphi_n^{(1)}, \dots, \varphi_n^{(N-1)})}$$

N -edfokú polinomokból álló N -spline függvény, amelyre

$$[g^{(\varphi_n^{(1)}, \dots, \varphi_n^{(N-1)})}]^{(\ell)}(x_n) = \varphi_n^{(\ell)} \quad (\ell = 1, \dots, N-1).$$

A spline-ok egyértelműsége miatt az affin

$$\overline{D} : (\varphi_n^{(1)}, \dots, \varphi_n^{(N-1)}) \mapsto \left([g^{(\varphi_n^{(1)}, \dots, \varphi_n^{(N-1)})}]'(x_0), \dots, [g^{(\varphi_n^{(1)}, \dots, \varphi_n^{(N-1)})}]^{(N-1)}(x_0) \right)$$

leképezés D -vel összetéve identitást ad $\mathbb{R}^{N-1}$ -en. Qu.e.d.

Tétel. A D leképezés lineáris része mátrixában minden $(\varphi_0^{(1)}, \dots, \varphi_0^{(N-1)})$ -szerinti) együttható előjele $= (-1)^n$, és a mátrix determinánsa is $= (-1)^{n(N-1)}$.

Bizonyítás. Észrevétel: a D leképezés lineáris részének mátrixa nem más, mint a lineáris

$$(\varphi_0^{(1)}, \dots, \varphi_0^{(N-1)}) \mapsto \left(\frac{d^\ell}{dx^\ell} \Big|_{x=x_N} q^{(\varphi_0^{(1)}, \dots, \varphi_0^{(N-1)})} : \ell = 1, \dots, N-1 \right)$$

leképezés mátrixa. Ez pedig lépésenkénti felbontással

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_n \mathbf{D}_{n-1} \cdots \mathbf{D}_1,$$

alakú, ahol a Megjegyzés 2) pontja szerint

$$\mathbf{D}_k := \left[(z_1, \dots, z_{N-1}) \mapsto \left(\frac{d^\ell s_{k+1}^{(z_1, \dots, z_{N-1})}}{dx^\ell} \Big|_{x=x_{k+1}} : \ell = 1, \dots, K-1 \right) \text{ mátrixa} \right],$$

$$s_{k+1}^{(z_1, \dots, z_{K-1})} := \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{i!} z_i (x - x_k)^i - \left[\sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{i!} z_i (x_{k+1} - x_k)^{i-N} \right] (x - x_k)^N.$$

Elegendő csak egyetlen lépésre belátni, hogy $\mathbf{D}_k$ tagjai mind *negatívok* és $\det(\mathbf{D}_k) = (-1)^{N-1}$. Legyen k tetszőlegesen adott, $\mathbf{D}_k = [d_{\ell,i}]_{\ell,i=1}^{N-1}$, és legyen $h := x_{k+1} - x_k$. Az általánosság megszorítása nélkül vehető $x_k := 0$ is. Ekkor a $\chi(m) := [0 \text{ ha } m < 0, \ 1 \text{ ha } m \geq 0]$ választó függvénnyel

$$\begin{aligned} d_{\ell,i} &= \left[z_i \text{ együtthatója } \frac{d^\ell s_{k+1}^{(z_1, \dots, z_{N-1})}}{dx^\ell} \Big|_{x=h} - \text{ban} \right] = \\ &= \frac{d^\ell}{dx^\ell} \Big|_{x=h} \left[\frac{1}{i!} x^i - \frac{1}{i!} h^{i-N} x^N \right] = \\ &= \frac{1}{i!} \chi(i-\ell) i(i-1) \cdots (i-\ell+1) h^{i-\ell} - \frac{1}{i!} h^{i-N} N(N-1) \cdots (N-\ell+1) h^{N-\ell} = \\ &= \frac{h^i}{i!} \frac{\ell!}{h^\ell} \left[\chi(i-\ell) \binom{i}{\ell} - \binom{N}{\ell} \right] < 0. \end{aligned}$$

Tehát a $\Lambda := \text{diag}(\ell!/h^\ell : \ell = 1, \dots, N-1)$ és a $\mathbf{C} = [c_{\ell,i}]_{\ell,i=1}^{N-1}$, $c_{\ell,i} := \chi(i-\ell) \binom{i}{\ell} - \binom{N}{\ell}$ mátrixokkal

$$\mathbf{D}_k = \Lambda \mathbf{C} \Lambda^{-1}, \quad \det(\mathbf{D}_k) = \det(\mathbf{C}) = \det \left[\chi(i-\ell) \binom{i}{\ell} - \binom{N}{\ell} \right]_{\ell,i=1}^{N-1}.$$

Megjegyzés: a Newton-féle $\binom{\alpha}{\ell} := \alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-\ell+1)/\ell!$ binomiális együtthatók analitikusan folytatják α -ban az egész $\mathbb{R}$ -re a kombinatorikus definíciót. Speciálisan mindig $\binom{\alpha}{\ell-1} + \binom{\alpha}{\ell} = \binom{\alpha+1}{\ell}$. Ezért a χ függvény elhagyható, és

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{C}) &= \det \left[1.-2., \dots, (N-2).-(N-1). \text{ oszlop} \right] = \\ &= \det \left[\binom{i}{\ell} - \binom{N}{\ell} - \binom{i+1}{\ell} + \binom{N}{\ell} \right]_{\ell,i=1}^{N-1} = \det \left[\binom{i}{\ell} - \binom{i+1}{\ell} \right]_{\ell,i=1}^{N-1} = \\ &= \det \left[-\binom{i}{\ell-1} \right]_{\ell,i=1}^{N-1} = (-1)^{N-1} \det \left[\binom{i}{\ell-1} \right]_{\ell,i=1}^{N-1}. \end{aligned}$$

Végezzük el az $\mathbf{A} := [\binom{i}{\ell-1}]_{\ell,i=1}^N$ mátrixon a következő műveleteket, amelyek a determinánsát nem változtatják: 2.-1. sor, 2.-3. sor, 3.-4. sor, ..., $(N-1).$ - $(N-2).$ sor.

Megmutatjuk: ezekkel a műveletekkel olyan felső-triangularis $\mathbf{B} = [b_{\ell,i}]_{\ell,i=1}^N$ mátrixot kapunk, amelynek főátlójában csupa 1-esek vannak, ami bizonyítja a tételt.

Mivel $i < \ell - 1$ esetén $a_{\ell,i} = \binom{i}{\ell-1} = 0$, a $\mathbf{B}$ mátrix szubdiagonálisa alatt továbbra is 0-k lesznek: $b_{i+d,i} = 0$, ha $d \geq 2$. Másrészt $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{N-1}$ -gyel illetve $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{N-1}$ -gyel jelölve $\mathbf{A}$ ill. $\mathbf{B}$ sorait, ℓ -szerinti indukcióval adódik, hogy

$$\mathbf{b}_\ell = \mathbf{a}_\ell - \mathbf{a}_{\ell-1} + \dots + (-1)^{\ell-1} \mathbf{a}_1 = \sum_{k=1}^{\ell} (-1)^{\ell-k} \mathbf{a}_k \quad (\ell = 2, \dots, N).$$

A szubdiagonális elemekre $\mathbf{B}$ -ben $i = 1, \dots, N - 2$ mellett

$$b_{i+1,i} = \sum_{k=1}^{i+1} (-1)^{i+1-k} \binom{i}{k-1} = (-1)^i \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{i}{j} (-1)^i (1-1)^i = 0.$$

A diagonális elemekre $\mathbf{B}$ -ben $i = 2, \dots, N - 1$ mellett

$$b_{i,i} = \sum_{k=1}^i (-1)^{i-k} \binom{i}{k-1} = - \left[\sum_{k=1}^{i+1} (-1)^{i+1-k} \binom{i}{k-1} \right] + \binom{i}{i} = 0 + 1 = 1.$$

Végül pedig szintén $b_{1,1} = a_{1,1} = \binom{1}{0} = 1$. Qu.e.d.

Tétel (DeBoor). Legyen $N = 2K - 1$ és $x_0 < x_1 < \dots < x_n$. Tegyük fel, hogy $f : [x_0, x_n] \rightarrow \mathbb{R}$ egy olyan N -szer folytonosan deriválható függvény, amelyre $f(x_k) = y_k$ ($k = 0, \dots, n$). Legyen továbbá $s : [x_0, x_n] \rightarrow \mathbb{R}$ az (jól-definiált) N -spline, amelyre $s(x_k) = y_k$ ($k = 0, \dots, n$) és $s^{(d)}(x_0) - f^{(d)}(x_0) = s^{(d)}(x_n) - f^{(d)}(x_n) = 0$ ($d = 1, \dots, K$). Ekkor

$$\int |f^{(K)}(x)|^2 dx \geq \int |s^{(K)}(x)|^2 dx.$$

Bizonyítás. Az $\langle \phi, \Psi \rangle := \int \phi^{(k)}(x) \psi^{(k)}(x) dx$ pozitív szemidefinit skalárszorzatot véve elég bizonyítani, hogy $f - s \perp s$ (a Pythagoras-tétel szerint). Parciális integrálással ($(K-1)$ -szer)

$$\begin{aligned} \langle f - s, s \rangle &= \int [f^{(K)} - s^{(K)}] s^{(K)} = \\ &= \underbrace{[f^{(K-1)} - s^{(K-1)}] s^{(K)}}_{0 \text{ ha } x=x_i} \Big|_{x_0}^{x_n} - \int [f^{(K-1)} - s^{(K-1)}] s^{(K+1)} = \\ &= - \int [f^{(K-1)} - s^{(K-1)}] s^{(K+1)} = \int [f^{(K-2)} - s^{(K-2)}] s^{(K+2)} = \\ &\vdots \\ &= (-1)^{K-2} \int [f'' - s''] s^{(2K-2)} = \\ &= (-1)^{K-2} \sum_{k=1}^n \left[\underbrace{[f' - s']}_0 s^{(2K-2)} \Big|_{x_{k-1}}^{x_k} - \int_{x_{k-1}}^{x_k} [f' - s'] \underbrace{s^{(2K-1)}}_{\alpha_k \text{ const.}} \right] = \\ &= (-1)^{K-1} \sum_{k=1}^n \alpha_k \left[\underbrace{f - s}_0 \Big|_{x_{k-1}}^{x_k} \right] = 0. \quad \text{Qed.} \end{aligned}$$

Tétel. Az $\mathbf{E} : f \mapsto \int |f^{(K)}(x)|^2 dx$ funkcionál felveszi a minimumát az

$$\mathcal{F} := \left\{ f \in \mathcal{C}^{2K-1}[x_0, x_n] : f(x_k) = y_k \ (k = 1, \dots, n) \right\}$$

téren, mégpedig annál az $s \in \mathcal{F}$ $(2K-1)$ -spline függvényénél, amelyre

$$s^{(d)}(x_0) = s^{(d)}(x_n) = 0 \quad (d = K, \dots, 2K-2).$$

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{S} := \left\{ s \in \{(2K-1)\text{-spline fgv-ek}\} : s(x_k) = y_k \ (k = 0, \dots, n) \right\}$.

Láttuk: minden $f \in \mathcal{F}$ függvényhez van nála $\leq \mathbf{E}$ -értéket adó $\mathcal{S}$ -beli spline. Mivel $\mathcal{S}$ véges-dimeziós affin altér $\mathcal{C}^{2K-1}[x_0, x_n]$ -ben, rajta a pozitív-szemidefinit $\mathbf{E}$ kvadratikus alak felveszi a minimumát. Legyen ez (egy ilyen minimalizáló) az s spline. Ekkor a $\langle \phi, \Psi \rangle := \int_{x_0}^{x_n} \phi^{(K)}(x) \Psi^{(K)}(x) dx$ pozitív-szemidefinit skalárszorzattal

$$\begin{aligned} \langle s, g \rangle &= 0 \quad \forall g \in \text{TS} = [\mathcal{S} \text{ érintőtere}] = \{s_1 - s_2 : s_1, s_2 \in \mathcal{S}\} = \\ &= \left\{ g \ (2K-1)\text{-spline, } g(x_k) = 0 \ (k = 0, \dots, n) \right\}. \end{aligned}$$

Kiszámítjuk $(K-1)$ -szeri parciális integrálással a $\langle s, g \rangle$ skalár-szorzatot úgy, hogy g -t integráljuk minden lépésben:

$$\begin{aligned} \langle s, g \rangle &= \int s^{(K)} g^{(K)} = \\ &= g^{(K-1)} s^{(K)} \Big|_{x_0}^{x_n} - \int g^{(K-1)} s^{(K+1)} = \\ &= g^{(K-1)} s^{(K)} \Big|_{x_0}^{x_n} - g^{(K-2)} s^{(K+1)} \Big|_{x_0}^{x_n} + \int g^{(K-2)} s^{(K+2)} = \\ &\quad \vdots \\ &= \sum_{d=1}^{K-1} (-1)^{d-1} g^{(K-d)} s^{(K+d-1)} \Big|_{x_0}^{x_n} + (-1)^{K-1} \int g' s^{(2K-1)}. \end{aligned}$$

Itt az utolsó integrálos tagot az $[x_{k-1}, x_k]$ részintervallumokon még egyszer integrálhatjuk parciálisan. Ezt használva

$$\begin{aligned} 0 = \langle s, g \rangle &= \sum_{d=1}^{K-1} (-1)^{d-1} g^{(K-d)} s^{(K+d-1)} \Big|_{x_0}^{x_n} + (-1)^{K-1} \sum_{k=1}^n \left[\underbrace{g s^{(2K-1)}}_{0 \leftarrow g(x_i)=0} \Big|_{x_{k-1}}^{x_k} - \int_{x_{k-1}}^{x_k} \underbrace{g s^{(2K)}}_{\equiv 0} \right] = \\ &= \sum_{d=1}^{K-1} g^{(K-d)} s^{(K+d-1)} \Big|_{x_0}^{x_n} \quad (g \in \text{TS}). \end{aligned}$$

Tudjuk: bármely $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(K-1)}$ ill. $\beta^{(1)}, \dots, \beta^{(K-1)}$ mellett van olyan $g \in \text{TS}$ spline, amelyre $g^{(d)}(x_0) = \alpha^{(d)}$ és $g^{(d)}(x_n) = \beta^{(d)}$ ($d = 1, \dots, K-1$). Ezért szükségképpen $s^{(K+d-1)}(x_0) = s^{(K+d-1)}(x_n) = 0$ ($d = 1, \dots, K-1$). Qed.

SPLINE-OK MINT EXTREMÁLIS FÜGGVÉNYEK

$(\mathcal{F}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ szemidefinit belső-szorzat tér, $\|x\| := \langle x | x \rangle^{1/2}$

$\mathcal{A}$ affin altér $\subset \mathcal{F}$, $\text{T}\mathcal{A} := \mathcal{A} - \mathcal{A} = \{f - g : f, g \in \mathcal{F}\}$ $\mathcal{A}$ érintőtere.

Lemma. ($\sim$ Riesz). $\delta := \text{dist}(0, \mathcal{A}) = \inf\{\|a\| : a \in \mathcal{A}\}$, $\varepsilon > 0$ esetén

$$\text{diam}\{x \in \mathcal{A} : \|x\| \leq \delta + \varepsilon\} = 2\sqrt{(\delta + \varepsilon)^2 - \delta^2}.$$

Bizonyítás. Legyen $x, y \in \mathcal{A}$ két különböző pont, amelyre $\|x\|, \|y\| \leq \delta + \varepsilon$. Tekintsük a

$$z := \left[\text{az } \{x, y\}\text{-on átmenő egyenes } 0\text{-hoz (egy) legközelebbi pontja} \right]$$

pontot. (Ilyen van, mert a $t \mapsto \langle (1-t)x + ty | (1-t)x + ty \rangle$ hossz-négyzet 2-odfokú polinom $\mathbb{R}$ -en, amel ≥ 0 , és így felveszi a minimumát). Mivel $\mathcal{A}$ affin altér $\mathcal{F}$ -ben, $t \in \mathcal{A}$. Másrészt $z \perp z - x$, és a Pythagoras-tétel szerint

$$\|x - z\| \leq \sqrt{\|x\|^2 - \|z\|^2} \leq \sqrt{(\delta + \varepsilon)^2 - \delta^2}.$$

Hasonlóképpen $\|y - z\| \leq \sqrt{(\delta + \varepsilon)^2 - \delta^2}$. A háromszög-egyenlőtlenség szerint így $\|x - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| \leq 2\sqrt{(\delta + \varepsilon)^2 - \delta^2}$.

Következmény. Ha $f_1, f_2, \dots \in \mathcal{A}$ és $\|f_n\| \rightarrow \text{dist}(0, \mathcal{A})$, akkor $[f_1, f_2, \dots]$ Cauchy-féle $a \|\cdot\|$ félnorma szerint, és

$$\langle f_n | s \rangle \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty; s \in \text{T}\mathcal{A}).$$

Bizonyítás. Legyen $\delta_n := \sup\{\|f_n\|, \|f_{n+1}\|, \dots\}$. Ekkor $\delta_n \rightarrow \delta := \text{dist}(0, \mathcal{A})$, és így $\text{diam}\{f_n, f_{n+1}, \dots\} \leq \sqrt{\delta_n^2 - \delta^2} \rightarrow 0$ (ami azt jelenti, hogy $[f_1, f_2, \dots]$ $\|\cdot\|$ -Cauchy). HTekintsünk egy $s \in \text{T}\mathcal{A}$ pontot. Ha $\|s\| = 0$, akkor triviálisan $\langle f_n | s \rangle = 0$ mindig. Legyen $\|s\| > 0$. Mivel $s \in \text{T}\mathcal{A}$, az $f_n + \mathbb{R}s$ egyenes $\mathcal{A}$ -ban fekszik, és ennek az origóhoz legközelebbi pontja $s_n := f_n - \langle f_n | s \rangle \langle s | s \rangle^{-1} s$. Tudjuk már: ez a pont f_n -től $\sqrt{\delta_n^2 - \delta^2}$ -nél nem lehet távolabb. Ezért $\|f_n - s_n\| = |\langle f_n | s \rangle \langle s | s \rangle^{-1}| \|s\| = |\langle f_n | s \rangle| / \|s\| \rightarrow 0$.

Definíció. Ettől kezdve $x_0 < x_1 < \dots < x_N$, $y_0, \dots, y_N \in \mathbb{R}$ adott valós számok, $K > 0$ adott egész,

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &:= \left\{ f \in C^K[x_0, x_N] : f(x_0) = y_0, \dots, f(x_N) = y_N \right\}, \\ \mathcal{S} &:= \text{T}\mathcal{F} = \left\{ s \in C^K[x_0, x_N] : s(x_0) = \dots = s(x_N) = 0 \right\}, \\ \mathcal{S}_0 &:= \left\{ s \in \mathcal{S} \cap C^\infty[x_0, x_N] : s^{(\ell)}(x_k) = 0 \quad (k = 0, \dots, N; \ell = 0, 1, \dots) \right\}, \\ \langle f | g \rangle &:= \int_{x_0}^{x_N} f^{(K)}(x) g^{(K)}(x) dx \quad (f, g \in \mathcal{F}). \end{aligned}$$

Alapfeltevés. Ettől kezdve feltesszük, hogy

$$\mathcal{A} \text{ affin altér} \subset \left\{ f \in \mathcal{F} : f(x_k) = y_k \quad (k = 0, \dots, N) \right\}, \quad \mathcal{S}_0 \subset \text{TA} := \mathcal{A} - \mathcal{A}.$$

Lemma. Tegyük fel, hogy $f_1, f_2, \dots \in \mathcal{F}$ Cauchy-sorozat a $\langle \cdot | \cdot \rangle$ szemidefinit skalárszorzat $\| \cdot \|$ félnormája szerint. Ekkor

$$\begin{aligned} \exists g \in C^{K-1}[x_0, x_N] \quad \exists p_1, p_2, \dots \in \text{Pol}_{K-1} \\ [f_n - p_n]^{(\ell)} \xrightarrow{\quad} g^{(\ell)} \quad (n \rightarrow \infty; \ell = 0, \dots, K-1). \end{aligned}$$

Bizonyítás. Válasszuk p_n -et úgy, hogy $[f_n - p_n]^{(\ell)}(x_0) = 0$ ($\ell = 0, \dots, K-1$) legyen, azaz $p_n := \sum_{\ell=0}^{K-1} f_n^{(\ell)}(x_0)(x - x_0)^\ell / \ell!$, és tekintsük a $g_n := f_n - p_n$ függvényeket. Triviálisan $f_n^{(K)} = g_n^{(K)}$ ($n = 1, 2, \dots$). Ezért $x \in [x_0, x_N]$ esetén

$$\begin{aligned} \left| g_n^{(K-1)}(x) - g_m^{(K-1)}(x) \right| &= \left| \int_{x_0}^x [g_n - g_m]^{(K)} \right| \leq \int_{x_0}^x \left| [f_n - f_m]^{(K)} \right| \leq^{\text{Cauchy-Schwarz}} \\ &\leq \left[\int_{x_0}^x \left| [f_n - f_m]^{(K)} \right|^2 \right]^{1/2} \left[\int_{x_0}^x 1 \right]^{1/2} = \|f_n - f_m\| \sqrt{x - x_0}. \end{aligned}$$

Innen $k = 1, 2, \dots, (K-1)$ -szeri integrálással kapjuk, hogy

$$\frac{\left| g_n^{(K-1-k)}(x) - g_m^{(K-1-k)}(x) \right|}{\|f_n - f_m\|} \leq \int_{z_1=x_0}^x \int_{z_2=x_0}^{z_1} \dots \int_{z_k=x_0}^{z_{k-1}} \sqrt{z_k - x_0} \, dz_k \dots dz_2 \, dz_1,$$

vagyis az $\ell = 0, 1, \dots, (K-1)$ -edik deriváltakra

$$\left| g_n^{(\ell)}(x) - g_m^{(\ell)}(x) \right| \leq \frac{\|f_n - f_m\|}{\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \dots \frac{2(K-1-\ell)+1}{2}} [x - x_0]^{K-1-\ell+(1/2)}.$$

A jobb oldal pontos alakja kevésbé érdekes, csak annyi kell, hogy innen következzenek az

$$\max_{x \in [x_0, x_N]} \left| g_n^{(\ell)}(x) - g_m^{(\ell)}(x) \right| \rightarrow 0 \quad (n, m \rightarrow \infty; \ell = 0, \dots, K-1)$$

egyenletes konvergenciák. Ez $C^{K-1}[x_0, x_N]$ teljessége miatt adja a Lemma állítását.

Megjegyzés. A Lemma konstruktív bizonyítása olyan $f \in C^{K-1}[x_0, x_N]$ függvényt ad, amelyre $f^{(\ell)}(x_0) = 0$ ($\ell = 0, \dots, K-1$).

Tétel. Tegyük fel, hogy $f_1, f_2, \dots \in \mathcal{A}$ és $\|f_n\| \searrow \text{dist}(0, \mathcal{A})$ ($n \rightarrow \infty$). Ekkor

$$\begin{aligned} \exists g \in C^{K-1}[x_0, x_N] \quad \exists p_1, p_2, \dots \in \text{Pol}_{K-1} \\ [f_n - p_n]^{(\ell)} \xrightarrow{\quad} g^{(\ell)} \quad (n \rightarrow \infty; \ell = 0, \dots, K-1), \\ \int_{x_0}^{x_N} g^{(K-1)}(x) s^{(K+1)}(x) \, dx = 0 \quad \left(s \in \text{TA} \cap C^{K+1}[x_0, x_N] \right). \end{aligned}$$

Bizonyítás. Riesz Lemmája szerint az $f_1, f_2, \dots$ sorozat Cauchy-féle az $\langle \cdot | \cdot \rangle$ skalárszorzat félnormája szerint. A g függvényt és a p_n polinomokat vegyük ezért a Lemma alapján. Legyen $s \in \mathcal{TA} \cap C^{K+1}[x_0, x_N]$ tetszőlegesen adott. Tudjuk: $s(x_0) = s(x_N) = 0$. Sőt Riesz Lemmája szerint fennáll

$$\langle f_n - p_n | s \rangle = \langle f_n | s \rangle \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

is. Itt a $g_n := f_n - p_n$ függvényekre parciális integrálással

$$\langle g_n | s \rangle = \int_{x_0}^{x_N} g_n^{(K)} s^{(K)} = g_n^{(K-1)} s^{(K)} \Big|_{x_0}^{x_N} - \int_{x_0}^{x_N} g_n^{(K-1)} s^{(K+1)} = \int_{x_0}^{x_N} g_n^{(K-1)} s^{(K+1)}.$$

Mivel pedig $g_n^{(K-1)} \xrightarrow{\rightrightarrows} g^{(K-1)}$, innen $\int_{x_0}^{x_N} g^{(K-1)} s^{(K+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^{x_N} g_n^{(K-1)} s^{(K+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle g_n | s \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n | s \rangle = 0$.

Következmény. 1) Ha az alappontok száma $N \geq K - 1$, akkor

$$\begin{aligned} \exists f \in C^{K-1}[x_0, x_N] \quad f(x_k) &= y_k \quad (k = 0, \dots, N) \\ f_n^{(\ell)} &\xrightarrow{\rightrightarrows} f^{(\ell)} \quad (n \rightarrow \infty; \ell = 0, \dots, K-1), \\ \int_{x_0}^{x_N} f^{(K-1)}(x) s^{(K+1)}(x) dx &= 0 \quad \left(s \in \mathcal{TA} \cap C^{K+1}[x_0, x_N] \right). \end{aligned}$$

2) Ha az alappontok száma $N < K - 1$, akkor

$$\begin{aligned} \exists f \in C^{K-1}[x_0, x_N] \quad \exists q_1, q_2, \dots \in \text{Pol}_{K-1} \\ f(x_k) = y_k, \quad q_n(x_k) &= 0 \quad (k = 0, \dots, N; n = 1, 2, \dots) \\ [f_n + q_n]^{(\ell)} &\xrightarrow{\rightrightarrows} f^{(\ell)} \quad (n \rightarrow \infty; \ell = 0, \dots, K-1), \\ \int_{x_0}^{x_N} f^{(K-1)}(x) s^{(K+1)}(x) dx &= 0 \quad \left(s \in \mathcal{TA} \cap C^{K+1}[x_0, x_N] \right). \end{aligned}$$

Bizonyítás. 1) Az előző jelölésekkel $g_n = f_n - p_n$, $g_n \rightarrow g$ ($C^{K-1}[x_0, x_N]$ -ben)*, továbbá $f_n(x_k) = y_k$ ($k = 0, \dots, N$). Vagyis

$$p_n = f_n - g_n, \quad p_n(x_k) = y_k - g_n(x_k) \rightarrow y_k - g(x_k) \quad (n \rightarrow \infty; k = 0, \dots, N).$$

Mivel $p_n \in \text{Pol}_{K-1}$ és $\deg(p_n) \leq K - 1 \leq N$, a $[p_1, p_2, \dots]$ polinomsorozat konvergenciája az $x_0 < \dots < x_N$ pontokban maga után vonja az együtthatóik konvergenciáját is, azaz

$$\exists p \in \text{Pol}_{K-1} \quad p_n \rightarrow p \quad (C^\infty[x_0, x_N]\text{-ben}).$$

Ekkor $f_n = g_n + p_n \rightarrow g + p =: f$ ($C^{K-1}[x_0, x_N]$ -ben), ahol $f(x_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_k) = y_k$ ($k = 0, \dots, N$).

* Szokásosan $g_n \rightarrow g$ ($C^{K-1}[x_0, x_N]$ -ben) jelentése: $g_n^{(\ell)} \xrightarrow{\rightrightarrows} g^{(\ell)}$ ($n \rightarrow \infty; \ell = 0, \dots, K-1$)

2) Legyen $r_n := \left[\text{Lagrange-inp. pol. } \{x_k \mapsto g_n(x_k) - y_k : k=0, \dots, N\}\text{-hez} \right]$, ezzel pedig $q_n := p_n + r_n$. Ekkor $r_n(x_k) \rightarrow r := \left[\text{Lagrange-inp. pol. } \{x_k \mapsto g(x_k) - y_k : k=0, \dots, N\}\text{-hez} \right]$ $C^\infty[x_0, x_N]$ -ben, továbbá

$$f_n + q_n = (g_n - p_n) + (p_n + r_n) = g_n + r_n \rightarrow g - r \quad (C^\infty[x_0, x_N]\text{-ben}).$$

Vagyis az $f := g - r$ választás megfelel.

Lemma. (Polinomok disztribúciós jellemzése).

Ha $\varphi \in C[a, b]$ és $\int_a^b \varphi(x) s^{(\ell)}(x) dx = 0$ ($s \in C_0^\infty(a, b)$), akkor $\varphi \in \text{Pol}_{\ell-1}$.

Következmény. Ha $g \in C^{K-1}[x_0, x_N]$ és $\int_{x_0}^{x_N} g^{(K-1)}(x) s^{(K+1)}(x) dx = 0$ ($s \in \mathcal{S}_0$), akkor $g|_{[x_{k-1}, x_k]} \in \text{Pol}_{2K-1}$ ($k = 1, \dots, N$). Speciálisan a Tétel g ill. a Köv. f limeszfüggvénye az $[x_{k-1}, x_k]$ szakaszokon $2K-1$ -edfokú polinom (mivel $g^{(K-1)}|_{[x_{k-1}, x_k]} \in \text{Pol}_K$). Ezzel tetszőleges $\phi \in C^K[x_0, x_N]$ mellett

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_N} f^{(K)} \phi^{(K)} &= \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} f^{(K)} \phi^{(K)} =_{\text{parc.int.}} \\ &= \sum_{k=1}^N \left[f^{(K)} \phi^{(K-1)} \Big|_{x_{k-1}}^{x_k} - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f^{(K+1)} \phi^{(K-1)} \right] = \\ &= \sum_{k=1}^N \left[f^{(K+1)} \phi^{(K-2)} \Big|_{x_{k-1}}^{x_k} - f^{(K+2)} \phi^{(K-1)} \Big|_{x_{k-1}}^{x_k} + \int_{x_{k-1}}^{x_k} f^{(K+2)} \phi^{(K-2)} \right] = \\ &= \dots = \\ &= \sum_{k=1}^N \left[\sum_{\ell=0}^{K-1} (-1)^\ell f^{(K+\ell)} \phi^{(K-\ell-1)} \Big|_{x_{k-1}}^{x_k} + (-1)^K \int_{x_{k-1}}^{x_k} \underbrace{f^{(2K)}}_{\equiv 0} \underbrace{\phi^{(0)}}_{\phi} \right] = \\ &= \sum_{\ell=0}^{K-1} (-1)^\ell \sum_{k=1}^N f^{(K+\ell)} \phi^{(K-\ell-1)} \Big|_{x_{k-1}}^{x_k} = \\ &= \sum_{\ell=0}^{K-1} (-1)^\ell \left[f^{(K+\ell)} \phi^{(K-\ell-1)} \Big|_{x_0}^{x_N} - \sum_{k=1}^{N-1} f^{(K+\ell)} \Big|_{x_k=0}^{x_k+0} \phi^{(K-\ell-1)}(x_k) \right]. \end{aligned}$$

Főtétel. Tegyük fel, hogy $\mathcal{A}$ érintőtere tetszőleges $[\lambda_{k,\ell}]_{k=1}^{N-1} \ell=1^K$ mátrix mellett tartalmazza az összes olyan $s \in C^\infty[x_0, x_N] \cap \mathcal{S}$ függvényt, amelyre $s^{(\ell)}(x_0) = \lambda_{k,\ell}$, $s^{(\ell)}(x_0) = s^{(m)}(x_N) = 0$ ($0 < k < N$; $0 < \ell < K$; $m \in \mathbb{N}$). Ekkor létezik pontosan egy olyan $f : [x_0, x_N] \rightarrow \mathbb{R}$ $(2K-1)$ -spline, amelyre

$$\int_{x_0}^{x_N} |f^{(K)}|^2 = \text{dist}(0, \mathcal{A})^2, \quad \int_{x_0}^{x_N} |f_n^{(K)} - f^{(K)}|^2 \rightarrow 0 \quad \text{valahányszor } f_n \in \mathcal{A}, \quad \|f_n\| \rightarrow \text{dist}(0, \mathcal{A}).$$

Bizonyítás. Az előbbiek alapján csak annyit kell bizonyítani, hogy az előző Tétel f függvénye $(2K-1)$ -spline. Tudjuk már, hogy f $(K-1)$ -szer folytonosan differenciálható az $[x_{k-1,k}]$ intervallumokon $\leq (2K-1)$ -edfokú polinom. Tehát elegendő belátni, hogy

$$(*) \quad f^{(\ell)}(x_k - 0) = f^{(\ell)}(x_k + 0) \quad (\ell = K, K+1, \dots, 2K-1).$$

Ez következik a legutóbbi integrálformulából és abból a tényből, hogy $\int_{x_0}^{x_N} f^{(K)} s^{(K)} = 0$ ($s \in \mathcal{TA}$). Feltevés szerint minden $\Lambda = [\lambda_{k\ell}] \in \mathbb{R}^{(K-1) \times (N-1)}$ mátrixhoz van (több) olyan $\phi = \phi_\Lambda \in \mathcal{TA}$ függvény, hogy $\phi^{(2K-1-\ell)}(x_k) = \lambda_{k\ell}$, $\phi^{(\ell)}(x_0) = \phi^{(\ell)}(x_N) = 0$. Ezért

$$0 = \int_{x_0}^{x_N} f^{(K)} \phi^{(K)} = \sum_{k=1}^{N-1} \lambda_{k\ell} f^{(2K-1-\ell)} \Big|_{x_k-0}^{x_k+0} \quad (\ell = 1, \dots, K-1; [\lambda_{k\ell}] \in \mathbb{R}^{(K-1) \times (N-1)}).$$

Innen azonnal következnek a $(*)$ relációk.

Technikai feltevés. *Ettől kezdve az alappontok számára $N > K-1$.*

Ekkor a $d(f, g) := \sqrt{\int_{x_0}^{x_N} [f^{(K)} - g^{(K)}]^2}$ félmérika $\mathcal{F}$ -en már mérika ($d(f, g) = 0 \Rightarrow f = g$).

Ilyenkor ugyanis $\phi \in \mathcal{TF}$, $\phi^{(K)} \equiv 0 \Rightarrow \phi \in \text{Pol}_{K-1}$, $\phi(x_0) = \dots = \phi(x_N) = 0 \Rightarrow \phi \equiv 0$.

Normál spline

Propozíció. *Az $\mathcal{F} \ni f \mapsto \|f\|$ funkcionál minimalizáló sorozatainak $C^{K-1}[x_0, x_N]$ -beli limesze ($\mathcal{A} = \mathcal{F}$ eset) egy olyan (egyedüli) $f : [x_0, x_N] \rightarrow \mathbb{R}$ $(2K-1)$ -spline, amelyre*

$$(**) \quad f^{(\ell)}(x_0) = f^{(\ell)}(x_N) = 0 \quad (\ell = K, \dots, 2K-1).$$

Bizonyítás. Tetszőleges $\tilde{\Lambda} = [\lambda_{k\ell}]_{k=0}^N_{\ell=1}^{K-1}$ mátrixhoz található olyan $\phi = \phi_{\tilde{\Lambda}} \in \mathcal{S} = \mathcal{TA}$ függvény, amelyre $\phi^{(\ell)}(x_k) = \lambda_{k\ell}$ $0 \leq k \leq N$; $0 < \ell < K$). Ezért

$$0 = \int_{x_0}^{x_N} f^{(K)} \phi^{(K)} = -\lambda_{0,\ell} f^{(\ell)}(x_0) + \sum_{k=1}^{N-1} \lambda_{k\ell} f^{(2K-1-\ell)} \Big|_{x_k-0}^{x_k+0} + \lambda_{N,\ell} f^{(\ell)}(x_N)$$

az összes $\lambda_{k\ell} \in \mathbb{R}$ választásnál, ami bizonyítja $(**)$ -ot.

Definíció. Az $\{(x_k, y_k) : k = 0, \dots, N\}$ pontrendszer $(2K-1)$ -ed rendű *normál spline*-ja a $(**)$ relációkat teljesítő $(2K-1)$ -spline.

Peremfeltételi spline-ok

Probléma. *Milyen $r_0, r_N < R$, $0 \leq \ell_1 < \dots < \ell_{r_N} < R$, $0 \leq m_1 < \dots < m_{r_N} < R$ sorozatok mellett létezik tetszőleges $[y_0^{(\ell_1)}, \dots, y_0^{(\ell_{r_0})}] \in \mathbb{R}^{r_0}$, $[y_N^{(m_1)}, \dots, y_N^{(m_{r_N})}] \in \mathbb{R}^{r_N}$ esetén olyan $f \in \mathcal{F}$ R -spline, amelyre*

$$(***) \quad f^{(\ell_j)}(x_0) = y_0^{(\ell_j)} \quad (1 \leq j \leq r_0); \quad f^{(\ell_j)}(x_N) = y_N^{(m_j)} \quad (1 \leq j \leq r_N).$$

Ezzel kapcsolatban az $R := 2K - 1$ esetet tudjuk

$$(V) \quad f \in \mathcal{A} \left(\subset C^K[x_0, x_N] \right), \quad \int_{x_0}^{x_N} |f^{(K)}|^2 \rightarrow \text{MIN}$$

variációs módszerrel kezelni. Tekintsük először a (V) problémát az

$$\mathcal{A} := \left\{ f \in C^K[x_0, x_N] : f^{(\ell)}(x_0) = y_0^{(\ell)}, f^{(m)}(x_N) = y_N^{(m)} \quad (\ell \in I_0, m \in I_N) \right\}$$

esetben, ahol $I_0, I_N \subset \{1, 2, \dots, K\}$. Megjegyzés: $I_0 = I_N = \emptyset \rightarrow$ normál spline. A Főtétel azonnali következménye az alábbi.

Propozíció. *Tetszőlegesen adott $\lambda := [\lambda_1, \dots, \lambda_{K-1}]$, $\mu := [\mu_1, \dots, \mu_{K-1}]$ sorozatokhoz található (pontosan egy) olyan $f \in \mathcal{F}$ $(2K-1)$ -spline, amelyre $f^{(\ell)}(x_0) = \lambda_\ell$, $f^{(\ell)}(x_N) = \mu_\ell$ ($\ell = 1, \dots, K-1$). Ez nem más, mint a (V) probléma megoldása az $r_0 = r_N = K-1$, $\ell_i = m_i = i$ ($i = 1, \dots, K-1$) esetben.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{A} := \left\{ f \in \mathcal{F} : f^{(\ell)}(x_0) = \lambda_\ell, f^{(\ell)}(x_N) = \mu_\ell \quad (\ell = 1, \dots, K-1) \right\}$, és tekintsünk egy $f_1, f_2, \dots \in \mathcal{F}$ sorozatot, amelyre $\int_{x_0}^{x_N} [f^{(K)}]^2 \searrow \text{dist}(0, \mathcal{A})$. Mivel $\text{TA} = \left\{ f \in \mathcal{S} : f^{(\ell)}(x_0) = f^{(\ell)}(x_N) = 0 \quad (\ell = 1, \dots, K-1) \right\}$, alkalmazható a Főtétel. Innen a konklúzió: $C^{K-1}[x_0, x_N]$ -ben $f_n \rightarrow f$ valamely $f \in \mathcal{F}$ $(2K-1)$ -spline-ra. Speciálisan $\lambda_\ell = f_n^{(\ell)}(x_0) \rightarrow f^{(\ell)}(x_0)$, $\mu_\ell = f_n^{(\ell)}(x_N) \rightarrow f^{(\ell)}(x_N)$ ($\ell = 1, \dots, K-1$).

Jelölés: $f_{[\lambda, \mu]} := [\text{a Propozícióban leírt spline}]$.

Algoritmus. (Normál spline és $f_{[\lambda, \mu]}$ szerkesztése). *Külön-külön megszerkesztjük intervallumonként azokat az $f_0 \in \mathcal{F}$, $\phi_1, \dots, \phi_{2K-2} \in \mathcal{S}$ $(2K-1)$ -spline-okat, amelyekre*

$$\begin{aligned} f_0|_{[x_0, x_1]} &\equiv y_0 + (y_1 - y_0) \frac{(x - x_0)^{2K-1}}{(x_1 - x_0)^{2K-1}}, \\ \phi_\ell|_{[x_0, x_1]} &\equiv \frac{1}{\ell!} (x - x_0)^\ell - \frac{1}{\ell!} \frac{(x_1 - x_0)^\ell}{(x_1 - x_0)^{2K-1}} \frac{(x - x_0)^{2K-1}}{(x_1 - x_0)^{2K-1}}. \end{aligned}$$

Mind a normál spline, mind bármelyik $f_{[\lambda, \mu]}$ ezek alkalmas $f_0 + \sum_\ell \alpha_\ell \phi_\ell$ alakú kombinációi. Nevezetesen: $[\text{normál spline}] = f_0 + \sum_{\ell=1}^{K-1} \alpha_\ell \phi_\ell$, $f_{[\lambda, \mu]} = f_0 + \sum_{\ell=1}^{K-1} \lambda_\ell \phi_\ell + \sum_{\ell=K}^{2K-2} \alpha_\ell \phi_\ell$.

Ezután áttérünk a $(***)$ probléma általános megoldására $1 < R_0, R_n < k$ esetén.

Ettől kezdve feltesszük, hogy $\emptyset \neq I, J \subset \{1, \dots, K-1\}$, továbbá hogy az $[y_0^{(\ell)} : \ell \in I]$, $[y_N^{(m)} : m \in J]$ sorozatok tetszőlegesen adottak. Legyen most

$$\mathcal{A} := \left\{ f \in \mathcal{F} : f^{(\ell)}(x_0) = y_0^{(\ell)} \quad (\ell \in I), \quad f^{(m)}(x_N) = y_N^{(m)} \quad (m \in J) \right\}.$$

Propozíció. Az $f_n \in \mathcal{A}$, $\int_{x_0}^{x_N} |f_n^{(K)}|^2 \searrow \min_{f \in \mathcal{A}} \int_{x_0}^{x_N} |f^{(K)}|^2$ sorozatok $C^{2K-1}[x_0, x_N]$ -ben egy $(***)$ -ot teljesítő $(2K-1)$ -spline-hoz tartanak. Ezt $(***)$ -gal együtt egyértelműen jellemzik a következő peremfeltételek

$$(P) \quad f^{(2K-1-\bar{\ell})}(x_0) = 0 \quad (1 \leq \bar{\ell} < K; \bar{\ell} \notin I), \quad f^{(2K-1-\bar{m})}(x_N) = 0 \quad (1 \leq \bar{m} < K; \bar{m} \notin J)$$

Bizonyítás. Jelölje f az $[f_n : n = 1, 2, \dots]$ sorozat limeszfüggvényét. Tudjuk a Főtételből: $f \in \mathcal{F}$ egy olyan $(2K-1)$ -spline, amelyre $f \perp \phi$ ($\phi \in \mathcal{TA}$) a $\langle \varphi | \psi \rangle := \int_{x_0}^{x_N} \varphi^{(K)} \psi^{(K)}$ skalárszorzat szerint. Itt

$$\mathcal{TA} = \left\{ \phi \in C^K[x_0, x_N] : \phi(x_k) = 0 \quad (\forall k); \quad \phi^{(\ell)}(x_0) = \phi^{(m)}(x_N) = 0 \quad (\ell \in I, m \in J) \right\}.$$

Vagyis a Főtétel előtti most levezetés a következőképpen specializálódik: ha $\phi \in \mathcal{TA}$,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle f | \phi \rangle = \int_{x_0}^{x_N} f^{(K)} \phi^{(K)} = \\ &= \sum_{\ell=1}^{K-1} (-1)^\ell \left[\underbrace{f^{(K+\ell)} \phi^{(K-\ell-1)}}_{\substack{0 \text{ ha } K-\ell-1 \in I, x=x_0 \\ 0 \text{ ha } K-\ell-1 \in J, x=x_N}} \Big|_{x_0}^{x_N} - \sum_{k=1}^{N-1} \underbrace{f^{(K+\ell)}}_{0 \leftarrow (2K-1)\text{-spline}} \Big|_{x_k-0}^{x_k+0} \phi^{(K-\ell-1)}(x_k) \right] = \\ &= - \sum_{0 < \ell < K, \ell \notin I} (-1)^\ell f^{(K+\ell)} \phi^{(K-\ell-1)}(x_0) + \sum_{0 < \ell < K, \ell \notin J} (-1)^\ell f^{(K+\ell)} \phi^{(K-\ell-1)}(x_N) = \\ &= \sum_{0 < \bar{\ell} < K, \bar{\ell} \notin I} (-1)^{K-\bar{\ell}} f^{(2K-1-\bar{\ell})} \phi^{(\bar{\ell})}(x_0) - \sum_{0 < \bar{m} < K, \bar{m} \notin J} (-1)^{K-\bar{m}} f^{(K+\ell)} \phi^{(\bar{m})}(x_N) \end{aligned}$$

az $x = x_0$ esetben az $\bar{\ell} := K - \ell - 1$, az $x = x_N$ esetben az $\bar{m} = K - \ell - 1$ indextranszformációval. Tetszőleges $[\lambda_1, \dots, \lambda_{K-1}], [\mu_1, \dots, \mu_{K-1}]$ sorozatkhoz van olyan $\phi \in \mathcal{TA}$ függvény, amelynél $\phi^{(\bar{\ell})}(x_0) = \lambda_{\bar{\ell}}$ ($0 < \bar{\ell} < K, \bar{\ell} \notin I$) és $\phi^{(\bar{m})}(x_N) = \mu_{\bar{m}}$ ($0 < \bar{m} < K, \bar{m} \notin J$). Ez csak úgy lehetséges, ha (P) teljesül.

Unicitás: mivel az előbbi levezetés megfordítható, $(***) + (P) \iff f \perp \mathcal{TA}$.

Mely $(2K-2)$ -rendű peremfeltételek adnak $(2K-1)$ -spline-okat?

Ettől kezdve feltesszük, hogy $1 \leq r_0, r_N < 2K$, továbbá hogy $[y_0^{(\ell_1)}, \dots, y_0^{(\ell_{r_0})}] \in \mathbb{R}^{r_0}$, $[y_N^{(m_1)}, \dots, y_N^{(m_{r_N})}] \in \mathbb{R}^{r_N}$ tetszőlegesen adott. Legyen most

$$\mathcal{A} := \left\{ f \in \mathcal{F} : f|_{[x_0, x_1]}, f|_{[x_{N-1}, x_N]} \in \text{Pol}_{2K-1}; \quad (***) \right\}.$$

Propozíció. Ha $r_0 + r_N \leq 2K$, akkor az $f_n \in \mathcal{A}$, $\int_{x_0}^{x_N} |f_n^{(K)}|^2 \searrow \min_{f \in \mathcal{A}} \int_{x_0}^{x_N} |f^{(K)}|^2$ sorozatok $C^{2K-1}[x_0, x_N]$ -ben egy $(***)$ -ot teljesítő $(2K-1)$ -spline-hoz tartanak.

Bizonyítás. Jelölje f az $[f_n : n = 1, 2, \dots]$ sorozat limeszfüggvényét. Tudjuk: $f \perp \phi$ ($\phi \in \text{T}\mathcal{A}$) a $\langle \phi | \psi \rangle := \int_{x_0}^{x_N} \phi^{(K)} \psi^{(K)}$ skalárszorzat szerint. Itt

$$\begin{aligned} \text{T}\mathcal{A} = \left\{ \phi \in C^K[x_0, x_N] : \phi(x_k) = 0 \quad (0 \leq k \leq N); \quad \phi|_{[x_0, x_1]}, \phi|_{[x_{N-1}, x_N]} \in \text{Pol}_{2K-1}, \right. \\ \left. \phi^{(\ell_i)}(x_0) = \phi^{(m_j)}(x_N) = 0 \quad (1 \leq i \leq r_0; 1 \leq j \leq r_N) \right\}. \end{aligned}$$

Speciálisan az összes olyan C^∞ -függvény $\text{T}\mathcal{A}$ -ban van, amelynek tartója valamely zárt (kompakt) (x_{k-1}, x_k) -beli halmaz. Ezért a polinomok disztribúciós jellemzése szerint $f|_{[x_{k-1}, x_k]} \in \text{Pol}_{2K-1}$ ($k = 1, \dots, N$) is. A Főtétel gondolatmenete azt is adja, hogy a "belső" intervallumokon f már $(2K-1)$ -spline, azaz $f^{(\ell)}|_{x_k-0}^{x_k+0} = 0$ ($2 \leq k \leq N-2$; $0 \leq \ell \leq 2K-1$). Vagyis

$$\begin{aligned} 0 = \langle f | \phi \rangle &= \int_{x_0}^{x_N} f^{(K)} \phi^{(K)} = \text{Főtétel előtt} \\ &= \sum_{\ell=1}^{K-1} (-1)^\ell \left[f^{(K+\ell)} \phi^{(K-\ell-1)} \Big|_{x_0}^{x_N} - \sum_{k=1}^{N-1} f^{(K+\ell)} \Big|_{x_k-0}^{x_k+0} \phi^{(K-\ell-1)}(x_k) \right] = \\ &= - \sum_{\ell: \nexists i \ell=\ell_i} (-1)^\ell f^{(K+\ell)} \phi^{(K-\ell-1)}(x_0) + \sum_{\ell: \nexists j \ell=m_j} (-1)^\ell f^{(K+\ell)} \phi^{(K-\ell-1)}(x_N) + \\ &\quad + \sum_{\ell=1}^{K-1} (-1)^\ell f^{(K+\ell)} \phi^{(K-\ell-1)} \Big|_{x_1-0}^{x_1+0} - \sum_{\ell=1}^{K-1} (-1)^\ell f^{(K+\ell)} \phi^{(K-\ell-1)} \Big|_{x_{N-1}-0}^{x_{N-1}+0}. \end{aligned}$$

Emlékeztető ("N-spline-ok" fejezet): mivel $\phi \in \text{T}\mathcal{A}$ esetén $\phi|_{[x_0, x_1]}$ $(2K-1)$ -edfokú polinom, amelynél $\phi(x_0) = \phi(x_1) = 0$, van egy olyan $(2K-2) \times (2K-2)$ -es $\mathbf{D}_1$ mátrix, hogy

$$\begin{bmatrix} \phi^{(1)}(x_1) \\ \vdots \\ \phi^{(2K-2)}(x_1) \end{bmatrix} = \mathbf{D}_1 \begin{bmatrix} \phi^{(1)}(x_0) \\ \vdots \\ \phi^{(2K-2)}(x_0) \end{bmatrix} \quad (\phi \in \text{T}\mathcal{A}).$$

Nevezetesen itt $h_1 := x_1 - x_0$ mellett

$$\mathbf{D}_1 = \Lambda_1 \mathbf{C} \Lambda_1^{-1}, \quad \text{ahol} \quad \mathbf{C} := \left[\binom{i}{\ell} - \binom{N}{\ell} \right]_{\ell, i=1}^{2K-2}, \quad \Lambda_1 := \text{diag}(\ell! / h_1^\ell : \ell = 1, \dots, 2K-2).$$

Hasonlóan $[\phi^{(\ell)}(x_N)]_{\ell=1}^{2K-2} = \mathbf{D}_N [\phi^{(\ell)}(x_{N-1})]_{\ell=1}^{2K-2}$, ahol $\mathbf{D}_N := \Lambda_N \mathbf{C} \Lambda_N^{-1}$ a $h_N := x_N - x_{N-1}$ melletti $\Lambda_N := \text{diag}(\ell! / h_N^\ell : \ell = 1, \dots, 2K-2)$ mátrixszal.

Észrevétel: tetszőleges olyan $[\lambda_1, \dots, \lambda_{2K-2}]$, $[\mu_1, \dots, \mu_{2K-2}]$ sorozatpárhoz, amelynél

$$(S) \quad \lambda_{\ell_i} = 0 \quad (1 \leq i \leq r_0), \quad \mu_{m_j} = 0 \quad (1 \leq j \leq r_N),$$

található olyan $\phi \in \mathcal{TA}$ függvény, hogy $\phi^{(\ell)}(x_0) = \lambda_\ell$, $\phi^{(\ell)}(x_N) = \mu_\ell$ ($\ell = 1, \dots, N$). Ezért az ilyen sorozatokkal

$$\begin{aligned} 0 = & - \sum_{\ell=1}^{K-1} (-1)^\ell f^{(K+\ell)}(x_0) \lambda_{K-\ell-1} + \sum_{\ell=1}^{K-1} (-1)^\ell f^{(K+\ell)}(x_N) \mu_{K-\ell-1} + \\ & + \sum_{\ell=1}^{K-1} (-1)^\ell f^{(K+\ell)} \Big|_{x_1-0}^{x_1+0} [\mathbf{D}_1 \lambda]_{K-\ell-1} - \sum_{\ell=1}^{K-1} (-1)^\ell f^{(K+\ell)} \Big|_{x_{N-1}-0}^{x_{N-1}+0} [\mathbf{D}_N^{-1} \mu]_{K-\ell-1}. \end{aligned}$$

A λ ill. μ sorozatok egymástól függetlenül választhatók, ezért külön is

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^{K-1} (-1)^\ell f^{(K+\ell)}(x_0) \lambda_{K-\ell-1} - \sum_{\ell=1}^{K-1} (-1)^\ell f^{(K+\ell)} \Big|_{x_1-0}^{x_1+0} [\mathbf{D}_1 \lambda]_{K-\ell-1} &= 0, \\ \sum_{\ell=1}^{K-1} (-1)^\ell f^{(K+\ell)}(x_N) \mu_{K-\ell-1} - \sum_{\ell=1}^{K-1} (-1)^\ell f^{(K+\ell)} \Big|_{x_{N-1}-0}^{x_{N-1}+0} [\mathbf{D}_N^{-1} \mu]_{K-\ell-1} &= 0 \end{aligned}$$

az (S)-et teljesítő sorozatokra.

HERMITE-3 SPLINE-OK (ND)

3-adfokó Hermite-spline (1D)

Emlékeztető. $\mathbf{f}_1 = (x_1, f_1, m_1), \mathbf{f}_2 = (x_2, f_2, m_2) \in \mathbb{R}^3$, $x_1 < x_2$ esetén

$$\exists P = P_{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2} \in \text{Pol}_3(\mathbb{R}) \quad P(x_k) = f_k, \quad P'(x_k) = m_k \quad (k = 1, 2).$$

Jelölés. $\text{CINT}(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 | x) \equiv P_{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2}(x)$ gyakran az irodalomban. ($\text{CINT} \sim$ cubic interpolation).

Alapfvg-ek: $\varphi_{a,b} := \text{CINT}((a, 1, 0), (b, 0, 0) | \cdot)$, $\psi_{c,d} := \text{CINT}((c, 0, 1), (d, 0, 0) | \cdot)$.

Megengedett esetek $a > b$, $c > d$ is.

ÁBRA

Gyakorlat. $\varphi_{a,b}(x) = (x-b)^2(Ax+B)$, $\psi_{c,d}(x) = (x-d)^2(Cx+D)$ formánál $A, B, C, D = ?$

Definíció. $x_0 < x_1 < \dots < x_N$ esetén az $\mathbf{F} = \{\mathbf{f}_k : k = 0, \dots, N\}$, $\mathbf{f}_k = (x_k, f_k, m_k)$ függvénycsíra *köbös Hermite-spline*-ja

$$\text{CINT}(\mathbf{F}, x) := \left[S(: [x_0, x_N] \rightarrow \mathbb{R}) : S|_{[x_{k-1}, x_k]} = \text{CINT}(\mathbf{f}_{k-1}, \mathbf{f}_k | \cdot) \quad (k = 1, \dots, N) \right].$$

Propozíció. Az $S := \text{CINT}(\mathbf{F} | \dots)$ Hermite-spline $\mathcal{C}^1$ -síma, de nem feltétlenül $\mathcal{C}^2$ -síma fgv, amelyre $S(x_k) = f_k$, $S'(x_k) = m_k$ ($k = 0, \dots, N$). Az $x \in [x_{k-1}, x_k]$ pontokban egyértelmű együtthatókkal

$$S(x) = f_{k-1}\varphi_{x_{k-1}, x_k}(x) + m_{k-1}\psi_{x_{k-1}, x_k}(x) + f_k\varphi_{x_k, x_{k-1}}(x) + \psi_{x_k, x_{k-1}}(x).$$

Bizonyítás. Direkt verifikálás. Adott k -nál az $f := \varphi_{x_{k-1}, x_k}$, $g := \psi_{x_{k-1}, x_k}$, $\bar{f} := \varphi_{x_k, x_{k-1}}$, $\bar{g} := \psi_{x_k, x_{k-1}}$ fvek és deriváltjaik már az x_{k-1}, x_k végpontokban is lin fgtlenek:

$$\begin{aligned} [f(x_{k-1}), f(x_k), f'(x_{k-1}), f'(x_k)] &= [1, 0, 0, 0], & [g(x_{k-1}), g(x_k), g'(x_{k-1}), g'(x_k)] &= [0, 1, 0, 0] \\ [\bar{f}(x_{k-1}), \bar{f}(x_k), \bar{f}'(x_{k-1}), \bar{f}'(x_k)] &= [0, 0, 1, 0], & [\bar{g}(x_{k-1}), \bar{g}(x_k), \bar{g}'(x_{k-1}), \bar{g}'(x_k)] &= [0, 0, 0, 1] \end{aligned}$$

Példa. Nem $\mathcal{C}^2$ -síma köbös Hermite-spline: $\text{CINT}((-1, 0, 0), (0, 1, 0), (2, 0, 0) | \cdot)$.

Catmull-Rom spline. $x_0 < x_1 < \dots < x_N$ esetén az $\mathbf{F} = \{\mathbf{f}_k : k = 0, \dots, N\}$, $\mathbf{f}_k = (x_k, f_k)$ függvénycsíra *Catmull-Rom-spline*-ja

$\text{CINT}_{\text{CR}}(\tilde{\mathbf{F}} | \cdot) := \text{CINT}(\tilde{\mathbf{F}} | \cdot)$, ahol $\tilde{\mathbf{F}} := \{(x_k, f_k, m_k) : k = 0, \dots, N\}$, meredekségei

$$m_0 := \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}, \quad m_k := \frac{f_{k+1} - f_{k-1}}{x_{k+1} - x_{k-1}} \quad (0 < k < N), \quad m_N := \frac{f_N - f_{N-1}}{x_N - x_{N-1}}.$$

Köbös Hermite-spline 2D-háló felett

Adott: a $x_0 < x_1 < \dots < x_N$, $y_0 < y_1 < \dots < y_M$ beosztásokkal a

$H := \{(x_k, y_\ell) : 0 \leq k \leq N, 0 \leq \ell \leq M\}$ 2D-háló, és rajta az

$\mathbf{F} = \{\mathbf{f}_{k,\ell} : 0 \leq k \leq N, 0 \leq \ell \leq M\}$, $\mathbf{f}_{k,\ell} = (x_k, y_\ell, f_{k,\ell}, m_{k,\ell}^{(x)}, m_{k,\ell}^{(y)})$ függvénycsíra.

Megkonstruálandó olyan $S : [x_0, x_N] \times [y_0, y_M] \rightarrow \mathbb{R}$ fgv, amely $\mathcal{C}_1$ -síma, (x, y) -polinom az összes $I_{k,\ell} := [x_{k-1}, x_k] \times [y_{\ell-1}, y_\ell]$ intervallumokon, és amelyre mindig

$$(*) \quad S(x_k, y_\ell) = f_{k,\ell}, \quad \frac{\partial S}{\partial x} \Big|_{(x,y)=(x_k,y_\ell)} = m_{k,\ell}^{(x)}, \quad \frac{\partial S}{\partial y} \Big|_{(x,y)=(x_k,y_\ell)} = m_{k,\ell}^{(y)}.$$

Természetesen a megoldás nem egyértelmű (ha létezik).

Alapfgv-ek:

$$\varphi_{a,b} \otimes \varphi_{c,d} : (x, y) \mapsto \varphi_{a,b}(x) \varphi_{c,d}(y),$$

$$\varphi_{a,b} \otimes \psi_{c,d} : (x, y) \mapsto \varphi_{a,b}(x) \psi_{c,d}(y),$$

$$\psi_{a,b} \otimes \varphi_{c,d} : (x, y) \mapsto \psi_{a,b}(x) \varphi_{c,d}(y).$$

Megjegyzés. A $\psi_{a,b} \otimes \varphi_{c,d}$ fgv és x, y -szerinti parciális deriváltjai mind $\equiv 0$ az $[a, b] \times [c, d]$ intervallum határán. Ezért nem vesszük alapfgv-nek.

Legyen az $I := [a, b] \times [c, d]$ ($a > b, c > d$ megengedett) 2D-intervallum tetsz. rögz..

Jelöljük a csúcsait $P := (a, c)$, $P_y := (a, d)$, $P_x := (b, c)$, $P_{xy} := (b, d)$ -vel, és tekintsük rajta az

$$f := \varphi_{a,b} \otimes \varphi_{c,d}, \quad g := \varphi_{a,b} \otimes \psi_{c,d}, \quad h := \psi_{a,b}(x) \varphi_{c,d}(y)$$

fgv-eket.

ÁBRA

Lemma. A $Q \in [I \text{ csúcsai}]$ pontoknál a $\phi = f, g, h$ fgv-ekre

$$\phi(Q), \phi'_x(Q), \phi'_y(Q) = 0 \quad \text{kivéve} \quad f(P) = g'_y(P) = h'_x(P) = 1.$$

Az I intv éleinél pedig

$$f(a, \cdot) \equiv \varphi_{c,d}, \quad f'_x(a, \cdot) \equiv 0, \quad g(a, \cdot) \equiv \psi_{c,d}, \quad g'_x(a, \cdot) \equiv 0, \quad h(a, \cdot) \equiv 0, \quad h'_x(a, \cdot) \equiv \psi_{c,d},$$

$$f(b, \cdot) \equiv 0, \quad f'_x(b, \cdot) \equiv 0, \quad g(b, \cdot) \equiv 0, \quad g'_x(b, \cdot) \equiv 0, \quad h(b, \cdot) \equiv 0, \quad h'_x(b, \cdot) \equiv \varphi_{c,d},$$

$$f(\cdot, c) \equiv \varphi_{a,b}, \quad f'_y(\cdot, c) \equiv 0, \quad g(\cdot, c) \equiv 0, \quad g'_y(\cdot, c) \equiv \psi_{b,c}, \quad h(\cdot, c) \equiv \psi_{a,b}, \quad h'_y(\cdot, c) \equiv 0,$$

$$f(\cdot, d) \equiv 0, \quad f'_y(\cdot, d) \equiv 0, \quad g(\cdot, d) \equiv 0, \quad g'_y(\cdot, d) \equiv 0, \quad h(\cdot, d) \equiv \varphi_{a,b}, \quad h'_y(\cdot, d) \equiv 0.$$

Tétel. Az $S(x, y) := \text{CINT}(\mathbf{F}|(x, y))$ fgv alakja az $I_{k\ell} = [x_{k-1}, x_k] \times [y_{\ell-1}, y_\ell]$ intervallumon a $\mathcal{P}_{k\ell} := \{(p, q, r, s) : (x_p, y_r), (x_q, y_s) \in I_{k\ell} \text{ átellenes csúcsai}\}$ jelöléssel

$$S(x, y) = \sum_{(p,q,r,s) \in \mathcal{P}_{k\ell}} \left[f_{pq} \varphi_{x_p, x_q}(x) \varphi_{y_r, y_s}(y) + m_{pq}^{(x)} \psi_{x_p, x_q}(x) \varphi_{y_r, y_s}(y) + m_{pq}^{(y)} \varphi_{x_p, x_q}(x) \psi_{y_r, y_s}(y) \right].$$

Hermite-3 spline N -dimenzióban

Adott:

$$x_0^{(1)} < x_1^{(1)} < \dots < x_{r_1}^{(1)}, \quad x_0^{(2)} < x_1^{(2)} < \dots < x_{r_2}^{(2)}, \quad \dots, \quad x_0^{(N)} < x_1^{(N)} < \dots < x_{r_N}^{(N)}$$

beosztásokkal a

$$H := \left\{ (x_{k_1}^{(1)}, \dots, x_{k_N}^{(N)}) : 0 \leq k_i \leq r_i, \quad (i = 0, \dots, N) \right\}$$

ND-háló, és rajta az

$$\mathbf{F} = \left\{ \mathbf{f}_{k_1, \dots, k_N} : 0 \leq k_i \leq r_i, \quad (i = 0, \dots, N) \right\},$$

$$\mathbf{f}_{k_1, \dots, k_N} = (x_{k_1}^{(1)}, \dots, x_{k_N}^{(N)}, f_{k_1, \dots, k_N}, m_{k_1, \dots, k_N}^{(1)}, \dots, m_{k_1, \dots, k_N}^{(N)})$$

függvénycsíra. Megkonstruálandó olyan

$$S : [x_0^{(1)}, x_{r_1}^{(1)}] \times [x_0^{(2)}, x_{r_2}^{(2)}] \times \dots \times [x_0^{(N)}, x_{r_N}^{(N)}] \rightarrow \mathbb{R}$$

fgv, amely $\mathcal{C}_1$ -síma, $(x^{(1)}, \dots, x^{(N)})$ -polinom az összes

$$I_{k_1, \dots, k_N} := [x_{k_1-1}^{(1)}, x_{k_1}^{(1)}] \times \dots \times [x_{k_N-1}^{(1)}, x_{k_N}^{(1)}]$$

intervallumokon, és amelyre minden $k_1, \dots, k_N$ mellett

$$(*) \quad S(x_{k_1}^{(1)}, \dots, x_{k_N}^{(N)}) = f_{k_1, \dots, k_N}, \quad S'_{x^{(i)}}(x_{k_1}^{(1)}, \dots, x_{k_N}^{(N)}) = m_{k_1, \dots, k_N}^{(i)} \quad (i = 1, \dots, N).$$

Tétel. Az $S(x^{(1)}, \dots, x^{(N)}) := \text{CINT}(\mathbf{F}|(x^{(1)}, \dots, x^{(N)}))$ fgv alakja az $I_{k_1, \dots, k_N}$ intervallumon a

$$\mathcal{P}_{k_1, \dots, k_N} := \left\{ (p_1, q_1, \dots, p_N, q_N) : \right.$$

$$\left. (x_{p_1}^{(1)}, \dots, x_{p_N}^{(N)}), (x_{q_1}^{(1)}, \dots, x_{q_N}^{(N)}) \text{ } I_{k_1, \dots, k_N} \text{ átellenes csúcsai} \right\}$$

jelöléssel :

$$S(x^{(1)}, \dots, x^{(N)}) = \sum_{\substack{(p_1, q_1, \dots) \in \\ \in \mathcal{P}_{k_1, \dots, k_N}}} \left[f_{p_1, \dots, p_N} \prod_{i=1}^N \varphi_{x_{p_i}^{(i)}, x_{q_i}^{(i)}}(x^{(i)}) + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^M m_{k_1, \dots, k_N}^{(j)} \psi_{x_{p_j}^{(j)}, x_{q_j}^{(j)}}(x^{(j)}) \prod_{i:i \neq j} \varphi_{x_{p_i}^{(i)}, x_{q_i}^{(i)}}(x^{(i)}) \right].$$

2D-SPLINE HÁROMSZÖG-HÁLÓ FÖLÖTT

Alapfgv-ek $p_0, p_1, p_2 \in \mathbb{R}^2$ egy nem-degenerált háromszög $\Delta := \text{co}\{p_0, p_1, p_2\}$ csúcsai.
 $\Phi, \Psi, \Theta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ adott $\mathcal{C}^2$ -síma fgv-ek:

$$\begin{aligned}\Phi(0) &= 1, & \Phi'(0) &= \Phi(1) = \Phi'(1) = 0; \\ \Psi'(0) &= 1, & \Psi(0) &= \Psi(1) = \Psi'(1) = 0; \\ \Theta(0) &= 1, & \Theta(1) &= 0 \quad (\text{lehetőleg } \Theta \equiv \Phi).\end{aligned}$$

Posztulátum. Adott (p_0, p_1, p_2) mellett (a sorrend fontos) a $\varphi = \varphi_{p_0, p_1, p_2}, \psi = \psi_{p_0, p_1, p_2}$ alapfgv-ekre teljesüljön $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^1(\Delta)$, és

- 1) $\varphi, \nabla\varphi : \text{co}\{p_1, p_2\} \rightarrow 0, \quad \nabla\varphi(p_0) = 0;$
- 2) $\Phi(t) \equiv \varphi((1-t)p_0 + tp_1) = \varphi((1-t)p_0 + tp_2);$
- 3) $u \perp p_1 - p_0, w \perp p_2 - p_0$ esetén $\langle \nabla\varphi((1-t)p_0 + tp_1) | u \rangle \equiv 0, \quad \langle \nabla\varphi((1-t)p_0 + tp_2) | w \rangle \equiv 0;$

ÁBRA

- 1') $\psi, \nabla\psi : \text{co}\{p_1, p_2\} \rightarrow 0, \quad \psi : \text{co}\{p_0, p_2\} \rightarrow 0;$
- 2') $\Psi(t) \equiv \psi((1-t)p_0 + tp_1)$
- 3') $w \perp p_2 - p_0$ esetén $\langle \nabla\psi((1-t)p_0 + tp_2) | w \rangle / \Theta(t) \equiv \text{Const.}$

ÁBRA

Tétel. Legyen $\Delta_1, \dots, \Delta_M$ egy háromszögelés a $a_1, \dots, a_N$ csúcsokkal. Ekkor tetsz adott $[(a_1, f_1, m_1^{(x)}, m_1^{(y)}), \dots, (a_N, f_N, m_N^{(x)}, m_N^{(y)})]$ fgc-csírához található olyan $F : \bigcup_{k=1}^M \Delta_k \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$ -síma fgv, amely $\Delta_j = \text{co}\{a_0^j, a_1^j, a_2^j\}$ háromszögön (egyértelmű) lineáris kombinációja a $\phi_{a_0^j, a_1^j, a_2^j}, \phi_{a_1^j, a_2^j, a_0^j}, \phi_{a_2^j, a_0^j, a_1^j}$ ill. $\psi_{a_{\pi(0)}^j, a_{\pi(1)}^j, a_{\pi(2)}^j}$ ($\pi \in \text{PERM}\{0, 1, 2\}$) fgv-eknek.

ÁBRA

Sejtés. A posztulátumok teljesíthetők polinomiális fgv-ekkel.

Legyenek $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ egy háromszög csúcsai. Ekkor a velük szemben levő a, b, c eldalgényesek megadhatók (egyértelműen)

$$a := (\ell_1 = 0) = \{p : \ell_1(p) = 0\}, \quad b := (\ell_2 = 0), \quad c := (\ell_0 = 0)$$

alakban, ahol mindegyik ℓ_k affin (lin+const) fgv, és

$$\begin{aligned}\ell_0(A) &= \ell_0(B) = 0, \quad \ell_0(C) = 1, \\ \ell_1(B) &= \ell_1(C) = 0, \quad \ell_1(A) = 1, \\ \ell_2(C) &= \ell_2(A) = 0, \quad \ell_2(B) = 1.\end{aligned}$$

ÁBRA

Észrevétel: valamely $g_0, g_1, g_2 \in \mathbb{R}^2$ vektorokkal $\nabla\ell_k \equiv g_k$.

Másrészt $\ell_0 + \ell_1 + \ell_2 : A, B, C \mapsto 1$, az affinitás miatt $\ell_0 + \ell_1 + \ell_2 \equiv 1$.

A a, b, c oldalegyenesű $\text{co}\{A, B, C\}$ háromszög metrikus adataival kifejezve

$$\ell_0(p) = \frac{\text{dist}(p, c)}{\text{dist}(C, c)}, \quad \ell_1(p) = \frac{\text{dist}(p, a)}{\text{dist}(A, a)}, \quad \ell_2(p) = \frac{\text{dist}(p, b)}{\text{dist}(B, b)}.$$

A $g_k \equiv \nabla \ell_k$ konstans gradiens-vektorok kifejezhetők az M_a, M_b, M_c magassági talppontokkal:

$$g_0 = \frac{C - M_c}{\text{dist}(C, c)^2}, \quad g_1 = \frac{A - M_a}{\text{dist}(A, a)^2}, \quad g_2 = \frac{B - M_b}{\text{dist}(B, b)^2}.$$

Innen speciálisan $\langle g_0 | g_0 \rangle = \text{dist}(C, c)^{-2}$, $\langle g_1 | g_1 \rangle = \text{dist}(A, a)^{-2}$, $\langle g_2 | g_2 \rangle = \text{dist}(B, b)^{-2}$. A háromszög A, B, C -nél levő α, β, γ szögeivel pedig

$$\langle g_1 | g_0 \rangle = -\frac{\cos \beta}{\text{dist}(C, c) \text{dist}(A, a)}, \quad \langle g_2 | g_0 \rangle = -\frac{\cos \alpha}{\text{dist}(C, c) \text{dist}(B, b)}.$$

Olyan $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ polinomiális fgv-t keresünk, amely $\equiv 0$ c mentén, 1-et vesz fel C -nél, az ABC háromszög oldalain normális irányú derivált $\equiv 0$, ráadásul az alakja az AC, BC szakaszok felett egy adott (a végpontokban 0 deriváltú, az egyik végpontban 0, a másikban 1 polinom) alakú Φ fgv. Azaz

$$f = \Phi(\ell_0) + \ell_0^2 \ell_1 \ell_2 P(\ell_1, \ell_2),$$

ahol $\Phi(t) = t^2(3 - 2t) + t^2(1 - t)^2 \varphi(t)$

valamilyen φ, P egy- ill. 2-változós polinomokkal.

Tekintsünk egy $p \in a$ pontot. Itt

$$\ell_1(p) = 0, \quad t := \ell_0(p) \quad \text{mellett} \quad \ell_2(p) = 1 - t (= 1 - \ell_0(p) - \ell_1(p)), \quad \text{és ezért}$$

$$\begin{aligned} \nabla f(p) &= \Phi'(\ell_0(p)) \nabla \ell_0(p) + \ell_0(p)^2 \ell_2(p) P(0, \ell_2(p)) \nabla \ell_1(p) = \\ &= \Phi'(t) g_0 + t^2(1 - t) P(0, 1 - t) g_1. \end{aligned}$$

A normális irányú derivált eltűnése p -nél: $\nabla f(p) \perp g_1$, azaz $\langle \nabla f(p) | g_1 \rangle = 0$. Vagyis a

$$\gamma_1 := -\frac{\langle g_0 | g_1 \rangle}{\langle g_1 | g_1 \rangle} = \frac{\text{dist}(A, a)}{\text{dist}(C, c)} \cos \beta$$

konstanssal

$$P(0, 1 - t) = \gamma_1 \frac{\Phi'(t)}{t^2(1 - t)} = \gamma_1 \left[\frac{6 + 2\varphi(t)}{t} - 4\varphi(t) + (1 - t)\varphi'(t) \right] \quad t\text{-polinom.}$$

Ez csak akkor lehetséges, ha $t = 0$ esetén is $6 + 2\varphi(0) = 0$, vagyis ha $\varphi(0) = -3$. Ekkor

$$P(0, 0) = \lim_{t \nearrow 1} P(0, 1 - t) = [6 - 2\varphi(1)] \gamma_1.$$

Megismételve a gondolatmenetet a $p \in b$ pontokra, az $1 \leftrightarrow 2$ indexcserével és a $P(0, 1-t) \leftrightarrow P(1-t, 0)$ cserével kapjuk a $P(0, 0) = [6-2\varphi(1)]\gamma_2$ konklúziót, ahol $\gamma_2 = -\langle g_0|g_2 \rangle / \langle g_2|g_2 \rangle = [\text{dist}(B, b) / \text{dist}(c, C)] \cos \alpha$. A $P(0, 0)$ két kifejezésének összehasonlításával látjuk, hogy minden lehetséges háromszögre pontosan akkor alkalmazható a Φ polinom, ha $P(0, 0) = 0$, azaz ha $\varphi(1) = 3$. Mivel $\varphi(0) = -3$ is,

$$\varphi(t) = (-3 + 6t) + t(1-t)\varphi_0(t) \quad \text{valamely } \varphi_0 \text{ polinommal.}$$

A $P(0, 0) = 0$ reláció a $P(s, t) = \sum_{k, \ell} c_{k\ell} s^k t^\ell$ sorfejtésre nézve azt jelenti, hogy

$$P(s, t) = \sum_{k>0} c_{k0} s^k + \sum_{\ell>0} c_{0\ell} t^\ell + st \sum_{k, \ell>0} c_{k\ell} s^{k-1} t^{\ell-1} = P(s, 0) + P(0, t) + stP_0(s, t)$$

valamilyen $P_0(s, t)$ 2-változós polinommal. Visszahelyettesítés után

$$\begin{aligned} f &= \Phi(\ell_0) + \ell_0^2 \ell_1 \ell_2 P(\ell_1, \ell_2), \quad \text{ahol} \\ \Phi(t) &= t^3 [(10 - 15t + 6t^2) + (1-t)^3 \varphi_0(t)], \\ P(0, 1-t) &= \gamma_1 \Theta(t), \quad P(1-t, 0) = \gamma_2 \Theta(t), \quad \text{ahol} \\ \Theta(t) &:= (1-t) [30 + (3-6t)\varphi_0(t) + t(1-t)\varphi_0'(t)], \\ P(s, t) &= \gamma_2 \Theta(1-s) + \gamma_1 \Theta(1-t) + stP_0(s, t). \end{aligned}$$

Legegyszerűbb megfelelő választás: $\varphi_0(t) \equiv 0, P_0(s, t) \equiv 0$ mellett

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= t^3 (10 - 15t + 6t^2), \quad \Theta(t) = 30(1-t), \quad P(s, t) = 30(\gamma_2 s + \gamma_1 t), \\ f &= \Phi(\ell_0) + \ell_0^2 \ell_1 \ell_2 P(\ell_1, \ell_2) = \ell_0^2 [10\ell_0 - 15\ell_0^2 + 6\ell_0^3 - 30\ell_1 \ell_2 (\gamma_2 \ell_1 + \gamma_1 \ell_2)]. \end{aligned}$$

Propozíció. a) $p \in c = \text{co}\{A, B\} \implies f(p) = 0, \nabla f(p) = 0$;

b) $p_t := (1-t)B + tC \in a = \text{co}\{B, C\} \implies f(p_t) = \Phi(t), \nabla f(p_t) = \Phi'(t) \text{dist}(B, C)^{-2}(C-B)$;

c) $q_s := (1-t)A + sC \in b = \text{co}\{A, C\} \implies f(q_s) = \Phi(s), \nabla f(q_s) = \Phi'(s) \text{dist}(A, C)^{-2}(C-A)$.

Bizonyítás. a) $p \in c$ esetén mindig $\ell_0(p) = 0$. Mivel $f = \ell_0^2 \cdot Q$ alakú egy $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ polinommal, $f(p) = \ell_0(p)^2 Q(p) = 0$ és $\nabla f(p) = 2\ell_0(p)Q(p)g + \ell_0^2(p)\nabla Q(p) = 0$.

b) Észrevétel: $\ell_0(p_t) = t, \ell_1(p_t) = 0, \ell_2(p_t) = 1 - \ell_0(p_t) - \ell_1(p_t) = 1 - t$. Innen

$$f(p_t) = \Phi(\ell_0(p_t)) + \ell_0(p_t)^2 \ell_1(p_t) \ell_2(p_t) P(\ell_1(p_t), \ell_2(p_t)) = \Phi(\ell_0(p_t)) = \Phi(t).$$

Tudjuk: f konstrukciója szerint $\nabla f(p_t) \perp \nabla \ell_1(p_t) = g_1$, azaz $\nabla f(p_t) \parallel c$, ami azt jelenti, hogy a $\nabla f(p_t)$ gradiensvektor a $C-B$ vektor skalárszorosa. Ha $\nabla f(p_t) = \lambda(C-B)$, akkor $\frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=t} f(p_\tau) = \langle \nabla f(p_t) | C-B \rangle = \langle \lambda(C-B) | C-B \rangle$. Ezért

$$\nabla f(p_t) = \frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=t} f(p_\tau) \frac{C-B}{\|C-B\|^2} = \Phi'(t) \frac{C-B}{\|C-B\|^2}.$$

c) Analóg b)-vel.

Következmény. Ha az A csúcs helyett egy $\text{co}\{A, B, C\}$ -n kívüli $\tilde{A}$ ponttal (és változatlan B, C -vel) megkonstruáljuk az f -nek megfelelő $\tilde{f}$ fgv-t, akkor f és $\tilde{f}$ C^1 -síma módon kapcsolódnak a $\text{co}\{A, B, C\}$, $\text{co}\{\tilde{A}, B, C\}$ háromszögek $\text{co}\{B, C\}$ közös szakaszán.

Bizonyítás. Az a)b)c)-beli formulák függetlenek A -tól, csak B, C kifejezései.

Ezután olyan h polinomot keresünk a $\text{co}\{A, B, C\}$ háromszögön, amelynek gradiense a C csúcsnál egy adott $g \in \mathbb{R}^2$ vektor, $h(A) = h(B) = h(C) = 0$, a c oldalnál 2-odrendben eltűnik (osztható ℓ_0^2 -tel), és az a, b oldalakon a p_t, q_s pontoknál $h(p_t), \nabla h(p_t)$ képlete ill. $h(q_s), \nabla h(q_s)$ képlete felírható (kanonikus formában) a (t, g, B, C) ill. (s, g, A, C) változókkal.

Propozíció. Az $\ell(p) := \langle p - C | g \rangle$ affin funkcionállal a $h := \ell \cdot f$ szorzatfgv megfelel a kívánalmaknak.

Bizonyítás. Mivel ℓ_0^2 osztója f -nek, osztója h -nak is, azaz h másodrendben eltűnik c körül. Mivel $\ell(C) = 0$, teljesül $h(C) = 0$ is.

Tekintsük a $p_t := (1 - t)B + tC$ pontokat az a szakaszon. Észrevétel:

$$\ell(p_t) = \langle (1 - t)B + tC - C | g \rangle = (1 - t)\langle B - C | g \rangle.$$

Ez csak (t, g, B, C) függvénye, így $t \mapsto h(p_t) = \ell(p_t)f(p_t)$ is az [előző Prop. b) miatt].

Szintén előző Prop. b) szerint

$$\begin{aligned} \nabla h(p_t) &= \ell(p_t)\nabla f(p_t) + f(p_t)\nabla \ell(p_t) = \\ &= (t - 1)\langle C - B | g \rangle \Phi'(t)\|C - B\|^{-2}(C - B) + \Phi(t)g. \end{aligned}$$

Ez is csak (t, g, B, C) függvénye (rögzített Φ -nél). Hasonlán $h(q_s), \nabla h(q_s)$ is csak (t, g, A, C) függvénye. Végül

$$\nabla h(C) = \nabla h(p_1) = (1 - 1)\langle C - B | g \rangle \Phi'(1)\|C - B\|^{-2}(C - B) + \Phi(1)g = 0 + 1 \cdot g = g.$$

Következmény. Adott $g \in \mathbb{R}^2$ mellett, ha az A csúcs helyett egy $\text{co}\{A, B, C\}$ -n kívüli $\tilde{A}$ ponttal (és változatlan B, C -vel) megkonstruáljuk a h -nek megfelelő $\tilde{h}$ fgv-t, akkor h és $\tilde{h}$ C^1 -síma módon kapcsolódnak a $\text{co}\{A, B, C\}$, $\text{co}\{\tilde{A}, B, C\}$ háromszögek $\text{co}\{B, C\}$ közös szakaszán.

GYORS DISZKRÉT FOURIER-TRANSZFORMÁCIÓ

$$a = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$$

$$\omega_n := e^{-2\pi i/n}, \quad \Omega_n := [\omega_n^{pq}]_{p,q=0}^{n-1} \in \text{Mat}(n, n, \mathbb{C})$$

$$\widehat{a} := (a_0 + a_1 \omega_n^k + a_2 \omega_n^{2k} + \dots + a_{n-1} \omega_n^{(n-1)k} : k = 1, \dots, n) = a \Omega_n$$

$$a = \widehat{a} \frac{1}{n} \Omega_n^* = \widehat{a} \frac{1}{n} \overline{\Omega_n}, \quad \text{mivel } \Omega_n = \sqrt{n} \text{ORT mátrix.}$$

Lemma. Legyen $c := (a_0, b_0, a_1, b_1, \dots, a_{n-1}, b_{n-1}) \in \mathbb{C}^{2n}$. Ekkor

$$\begin{aligned} [\widehat{c}]_k &= [\widehat{a}]_k + \omega_{2n}^k [\widehat{b}]_k & \text{ha } 0 \leq k \leq n-1, \\ [\widehat{c}]_{n+\ell} &= [\widehat{a}]_\ell - \omega_{2n}^\ell [\widehat{b}]_\ell & \text{ha } 0 \leq \ell \leq n-1 \end{aligned}$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} [\widehat{c}]_p &= a_0 + b_0 \omega_{2n}^p + a_1 \omega_{2n}^{2p} + b_1 \omega_{2n}^{3p} + \dots + a_{n-1} \omega_{2n}^{(2n-2)p} + b_{n-1} \omega_{2n}^{(2n-1)p} = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega_{2n}^{2kp} + \sum_{k=0}^{n-1} b_k \omega_{2n}^{(2k+1)p} \stackrel{\text{mivel } \omega_{2n}^2 = \omega_n, \omega_{2n}^n = -1}{=} \\ &= [\widehat{a}]_{\text{mod}_n p} + (-1)^{[p/n]} \omega_{2n}^p [\widehat{b}]_{\text{mod}_n p} \end{aligned}$$

Következmény. A $J_n := \text{diag}(1, \omega_{2n}, \dots, \omega_{2n}^{n-1})$ mátrixszal

$$(a_0, b_0, a_1, b_1, \dots, a_{n-1}, b_{n-1})^\widehat{=} = (\widehat{a}, \widehat{b}) L_n, \quad \text{ahol } L_n := \begin{bmatrix} I_n & I_n \\ J_n & -J_n \end{bmatrix}.$$

Algoritmus $(a_0, \dots, a^{2^N-1})^\widehat{=}$ kiszámítására

N lépés

$$1) (a_0, a_{2^{N-1}})^\widehat{=}, (a_1, a_{2^{N-1}+1})^\widehat{=}, \dots, (a_{2^{N-1}-1}, a_{2^{N-1}+2^{N-1}-1})^\widehat{=}$$

$$\ell) (a_{2^{N-\ell}p+k} : p=0, \dots, 2^\ell-1)^\widehat{=} \quad (k=0, \dots, 2^{N-\ell}) \text{ kiszámítása} \\ (a_{2^{N-(\ell-1)}p+k} : p=0, \dots, 2^{\ell-1}-1)^\widehat{=} \quad (k=0, \dots, 2^{N-(\ell-1)}-1) \text{ alapján:}$$

$$\begin{aligned} (a_{2^{N-\ell}p+k} : p=0, \dots, 2^\ell-1)^\widehat{=} &= \\ &= [(a_{2^{N-(\ell-1)}p+k} : p=0, \dots, 2^{\ell-1}-1)^\widehat{=}, (a_{2^{N-(\ell-1)}p+k+2^{N-(\ell-1)}} : p=0, \dots, 2^{\ell-1}-1)^\widehat{=}] L_{2^{\ell-1}} \end{aligned}$$

Minden ℓ lépésben $2^{N-\ell}$ db. 2^ℓ hosszú vektor Fourier transzformáltját számítjuk ki 2^N szorzással. [Az $\omega_1, \omega_2, \omega_4, \dots, \omega_{2^N}$ konstansok már elővannak készítve].
Tehát $N2^N$ szorzás elegendő. Ezzel szemben $a\Omega_{2^N}$ -hez $(2^N)^2$ szorzás kell.

Megjegyzés. Írjuk fel a $0, 1, \dots, 2^N - 1$ indexeket 2-es számrendszerben, majd ezeket a 2-es számrendszerbeli alakokat fordítsuk meg. Olyan sorrendet kapunk, hogy az alá képezhető bináris fa szerint haladhatunk az algoritmusbeli duplázással.

Példa. ($N = 3$)

$$\begin{array}{cccccccc}
 000 & 001 & 010 & 011 & 100 & 101 & 110 & 111 \\
 000 & 100 & 010 & 110 & 001 & 101 & 011 & 111 \\
 \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{6} & \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{3} & \mathbf{7} \\
 (\mathbf{0}, \mathbf{4}) & & (\mathbf{2}, \mathbf{6}) & & (\mathbf{1}, \mathbf{5}) & & (\mathbf{3}, \mathbf{7}) & \\
 & & (\mathbf{0}, \mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{6}) & & & & (\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{5}, \mathbf{7}) & \\
 & & & & & & (\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{6}, \mathbf{7}) &
 \end{array}$$

Lemma. (A Megjegyzés alapja). A $T_n[\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n]_2 := [\alpha_n\alpha_{n-1}\dots\alpha_1]_2$ ($\alpha_1, \dots, \alpha_n = 0, 1$) leképezésre* állnak a következők:

- (1) $T_n : \{0, 1, \dots, 2^n - 1\} \leftrightarrow \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$,
- (2) $T_n\{\ell : 2^k m \leq \ell < 2^k(m+1)\}$ mindig egy 2^{n-k} -differenciájú számtani sorozat.

Bizonyítás. (1) triviális.

(2): 2-es számrendszerben az $\{\ell : 2^k m \leq \ell < 2^k(m+1)\}$ halmaz tagjai

$$[\beta_1\beta_2\dots\beta_{n-k}\alpha_1\dots\alpha_k]_2 \quad (\alpha_1, \dots, \alpha_k = 0, 1), \text{ ahol } [\beta_1\dots\beta_{n-k}]_2 = m.$$

Vagyis az $\overline{m} := [\beta_{n-k}\dots\beta_1]_2 = T_{n-k}(m)$ számmal

$$\begin{aligned}
 T_n\{\ell : 2^k m \leq \ell < 2^k(m+1)\} &= \{[\alpha_k\dots\alpha_1\beta_{n-k}\dots\beta_1]_2 : \alpha_1, \dots, \alpha_k = 0, 1\} = \\
 &= \{2^{n-k}[\alpha_1\dots\alpha_k]_2 + [\beta_{n-k}\dots\beta_1]_2 : \alpha_1, \dots, \alpha_k = 0, 1\} = \\
 &= \{2^{n-k}r + \overline{m} : r = 0, \dots, 2^k - 1\}.
 \end{aligned}$$

* $[\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n]_2 := 2^{-1}n\alpha_1 + 2^{n-2}\alpha_2 + \dots + 2^0\alpha_n$ a 2-es számrendszerbeli érték.