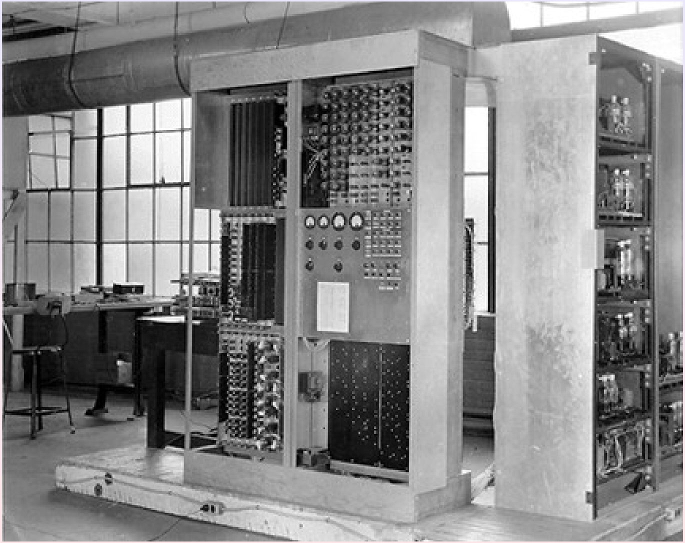
Hogyan lesz pontos a pontatlanból?

Stachó László

17/10/06. KKFH, Móra G.

Számítógép $\sim 1940 - 50$



Egyszerű feladat $\longrightarrow$ rossz eredmény

$$\begin{array}{cccccc}
A_{1,1}x_1 & +A_{1,2}x_2 & +A_{1,3}x_3 & +\dots & +A_{1,36}x_{36} & = B_1 \\
A_{2,1}x_1 & +A_{2,2}x_2 & +A_{2,3}x_3 & +\dots & +A_{2,36}x_{36} & = B_2 \\
A_{3,1}x_1 & +A_{3,2}x_2 & +A_{3,3}x_3 & +\dots & +A_{3,36}x_{36} & = B_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
A_{36,1}x_1 & +A_{36,2}x_2 & +A_{36,3}x_3 & +\dots & +A_{36,36}x_{36} & = B_{36}
\end{array}$$

SZÁMÍTÓGÉPPEL !!!

HIBÁS EREDMÉNY

MI AZ OKA ?!

Egyszerű feladat $\longrightarrow$ rossz eredmény

$$\begin{array}{cccccc}
A_{1,1}x_1 & +A_{1,2}x_2 & +A_{1,3}x_3 & +\dots & +A_{1,36}x_{36} & =B_1 \\
A_{2,1}x_1 & +A_{2,2}x_2 & +A_{2,3}x_3 & +\dots & +A_{2,36}x_{36} & =B_2 \\
A_{3,1}x_1 & +A_{3,2}x_2 & +A_{3,3}x_3 & +\dots & +A_{3,36}x_{36} & =B_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
A_{36,1}x_1 & +A_{36,2}x_2 & +A_{36,3}x_3 & +\dots & +A_{36,36}x_{36} & =B_{36}
\end{array}$$

SZÁMÍTÓGÉPPEL !!!

HIBÁS EREDMÉNY

MI AZ OKA ?!

Egyszerű feladat $\longrightarrow$ rossz eredmény

$$\begin{array}{cccccc}
A_{1,1}x_1 & +A_{1,2}x_2 & +A_{1,3}x_3 & +\dots & +A_{1,36}x_{36} & =B_1 \\
A_{2,1}x_1 & +A_{2,2}x_2 & +A_{2,3}x_3 & +\dots & +A_{2,36}x_{36} & =B_2 \\
A_{3,1}x_1 & +A_{3,2}x_2 & +A_{3,3}x_3 & +\dots & +A_{3,36}x_{36} & =B_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
A_{36,1}x_1 & +A_{36,2}x_2 & +A_{36,3}x_3 & +\dots & +A_{36,36}x_{36} & =B_{36}
\end{array}$$

SZÁMÍTÓGÉPPEL !!!

HIBÁS EREDMÉNY

MI AZ OKA ?!

Egyszerű feladat $\longrightarrow$ rossz eredmény

$$
\begin{array}{cccccc}
A_{1,1}x_1 & +A_{1,2}x_2 & +A_{1,3}x_3 & +\dots & +A_{1,36}x_{36} & =B_1 \\
A_{2,1}x_1 & +A_{2,2}x_2 & +A_{2,3}x_3 & +\dots & +A_{2,36}x_{36} & =B_2 \\
A_{3,1}x_1 & +A_{3,2}x_2 & +A_{3,3}x_3 & +\dots & +A_{3,36}x_{36} & =B_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
A_{36,1}x_1 & +A_{36,2}x_2 & +A_{36,3}x_3 & +\dots & +A_{36,36}x_{36} & =B_{36}
\end{array}
$$

SZÁMÍTÓGÉPPEL !!!

HIBÁS EREDMÉNY

MI AZ OKA ?!

HIBA KICSIBEN

BUTA GÉP
2 jeggyel számol

$$-x_1 + 97x_2 = 97 \quad (1)$$

$$x_1 + x_2 = 2 \quad (2)$$

HIBA KICSIBEN

BUTA GÉP
2 jeggyel számol

$$-x_1 + 97x_2 = 97 \tag{1}$$
$$x_1 + x_2 = 2 \tag{2}$$

Számítás

$$\begin{aligned} -x_1 + 97x_2 &= 97 \\ x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned}$$

SZIMBOLIKUSAN: (2) + (1) $\Longrightarrow$

$$-x_1 + 97x_2 = 97$$

$$98x_2 = 99 \quad \Longrightarrow \quad x_2 = 99/98, \;\; x_1 = 97/98$$

10 jegyre: $x_1 = 1.010204081 \approx 1, \quad x_2 = 0.9897959183 \approx 1$

Számítás

$$
\begin{aligned}
-x_1 + 97x_2 &= 97 \\
x_1 + x_2 &= 2
\end{aligned}
$$

SZIMBOLIKUSAN: (2) + (1) $\Longrightarrow$

$$-x_1 + 97x_2 = 97$$

$$98x_2 = 99 \quad \Longrightarrow \quad x_2 = 99/98,\ x_1 = 97/98$$

10 jegyre: $x_1 = 1.010204081 \approx 1, \quad x_2 = 0.9897959183 \approx 1$

Számítás

$$\begin{aligned} -x_1 + 97x_2 &= 97 \\ x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned}$$

SZIMBOLIKUSAN: (2) + (1) $\Longrightarrow$

$$-x_1 + 97x_2 = 97$$

$$98x_2 = 99 \quad \Longrightarrow \quad x_2 = 99/98, \; x_1 = 97/98$$

10 jegyre: $x_1 = 1.010204081 \approx 1, \quad x_2 = 0.9897959183 \approx 1$

Mit csinál a BUTA GÉP?

$$
\begin{aligned}
-x_1 + 97x_2 &= 97 \\
x_1 + x_2 &= 2
\end{aligned}
$$

$(2) + (1)$

$-x_1 + 97x_2 = 97$
$98x_2 = 99$

$x_2 = 99 : 98 = \mathbf{1.0}$

$(1) \Rightarrow \quad x_1 = 97x_2 - 97 = 97 - 97 = \mathbf{0.0} \quad$ **!!!**

Mit csinál a BUTA GÉP?

$$\begin{aligned} -x_1 + 97x_2 &= 97 \\ x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned}$$

(2) + (1)

$-x_1 + 97x_2 = 97$
$98x_2 = 99$

$x_2 = 99 : 98 = \mathbf{1.0}$

$(1) \Rightarrow \quad x_1 = 97x_2 - 97 = 97 - 97 = \mathbf{0.0} \qquad \mathbf{!!!}$

Mit csinál a BUTA GÉP?

$$\begin{aligned} -x_1 + 97x_2 &= 97 \\ x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned}$$

$(2) + (1)$

$-x_1 + 97x_2 = 97$
$98x_2 = 99$

$x_2 = 99 : 98 = \mathbf{1.0}$

$(1) \Rightarrow \quad x_1 = 97x_2 - 97 = 97 - 97 = \mathbf{0.0} \quad$ **!!!**

Mit csinál a BUTA GÉP?

$$\begin{aligned} -x_1 + 97x_2 &= 97 \\ x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned}$$

$(2) + (1)$

$-x_1 + 97x_2 = 97$
$98x_2 = 99$

$x_2 = 99 : 98 = \mathbf{1.0}$

$(1) \Rightarrow \quad x_1 = 97x_2 - 97 = 97 - 97 = \mathbf{0.0} \qquad$ **!!!**

Mit csinál a BUTA GÉP?

$$\begin{aligned} -x_1 + 97x_2 &= 97 \\ x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned}$$

$(2) + (1)$

$-x_1 + 97x_2 = 97$
$98x_2 = 99$

$x_2 = 99 : 98 = \mathbf{1.0}$

$(1) \Rightarrow \quad x_1 = 97x_2 - 97 = 97 - 97 = \mathbf{0.0} \quad$ **!!!**

Baj van, vagy nincs baj?

Neumann János
1903 – 1957

8 tizedesjegyű aritmetikánál
40-változós lineáris egyenletrendszer megoldása
GAUSS-ELIMINÁCIÓVAL 90% VAL0SZÍNŰSÉGGEL ROSSZ

Baj van, vagy nincs baj?

Neumann János
1903 – 1957

8 tizedesjegyű aritmetikánál
40-változós lineáris egyenletrendszer megoldása

GAUSS-ELIMINÁCIÓVAL 90% VALÓSZÍNŰSÉGGEL ROSSZ

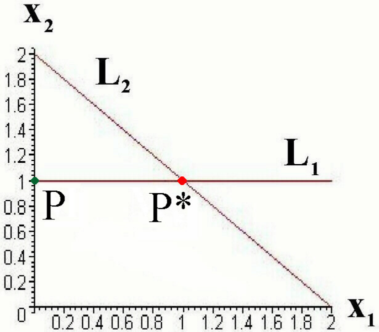
Baj van, vagy nincs baj?

Neumann János
1903 – 1957

8 tizedesjegyű aritmetikánál
40-változós lineáris egyenletrendszer megoldása

GAUSS-ELIMINÁCIÓVAL 90% VALÓSZÍNŰSÉGGEL ROSSZ

Javítás fokozatos közelítéssel

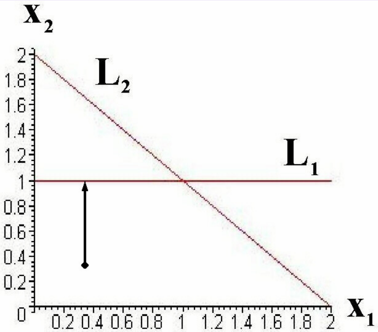


P^* =[Igazi megoldás]
P = [Buta Gép pontja]

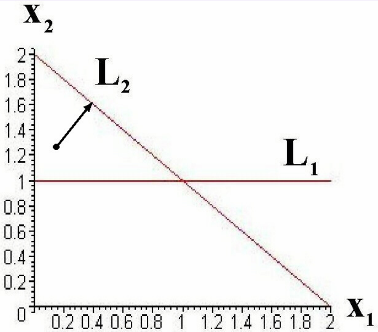
$$\begin{aligned}
L_1 &= \{(x_1, x_2):\ -x_1 + 97x_2 = 97\} \\
&= \{(x_1, x_2):\ x_2 = 1 + x_1/97\} \\
&\approx \{(x_1, x_2):\ x_2 = 1\} \\
L_2 &= \{(x_1, x_2):\ x_1 + x_2 = 2\} \\
&= \{(x_1, x_2):\ x_2 = 2 - x_1\}
\end{aligned}$$

Javítás fokozatos közelítéssel

$V_1 := \left[\text{Merőleges vetítés } L_1^*\text{-re}\right]$ $V_2 := \left[\text{Merőleges vetítés } L_2^*\text{-re}\right]$



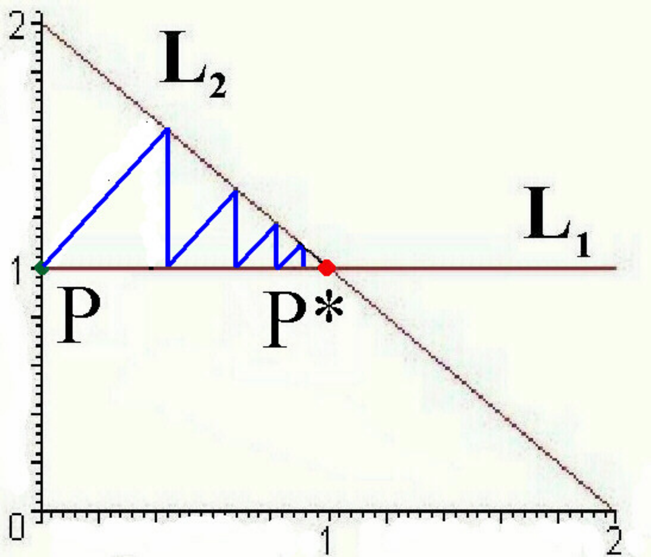
$V_1 : (x_1, x_2) \mapsto (x_1, 1)$



$$V_2 : (x_1, x_2) \mapsto \big(1 + (x_1 - x_2)/2,\; 1 + (x_2 - x_1)/2\big)$$

Javítás fokozatos közelítéssel

Alkalmazzuk többször a Buta Gép P pontjára a V_1, V_2 vetítéseket!



Még a Buta Géppel is

$P_0 := P = (\mathbf{0}, \mathbf{1})$

$P_1' = V_1(P_0) = (0\ \ , 1)$ $\qquad L_1$-en

$P_1 = V_2(P_1') = \left(1 + \frac{1-0}{2}, 1 + \frac{0-1}{2}\right) = (\mathbf{0.5}\,,\ \mathbf{1.5})$

$P_2' = V_1(P_2) = (0.5\,,\ 1)$

$P_2 = V_2(P_2') = \left(1 + \frac{0.5-1}{2}, 1 + \frac{1-0.5}{2}\right) = (\mathbf{0.7}\,,\ \mathbf{1.3})$

$P_3' = (0.7\,,\ 1)$

$P_3 = \left(1 + \frac{0.7-1}{2}, 1 + \frac{1-0.7}{2}\right) = (\mathbf{0.8}\,,\ \mathbf{1.2})$

$P_4' = (0.8\,,\ 1)$

$P_4 = \left(1 + \frac{0.8-1}{2}, 1 + \frac{1-0.8}{2}\right) = (\mathbf{0.9}\,,\ \mathbf{1.1})$

$P_5' = (0.8\,,\ 1), \qquad P_5 = \left(1 + \frac{0.8-1}{2}, 1 + \frac{1-0.8}{2}\right) = (\mathbf{0.9}\,,\ \mathbf{1.1})$

TOVÁBB NEM JAVUL

Még a Buta Géppel is

$P_0 := P = (\mathbf{0}, \mathbf{1})$

$P_1' = V_1(P_0) = (0\ \ , 1)$ $\qquad$ L_1-en

$P_1 = V_2(P_1') = \left(1 + \frac{1-0}{2}, 1 + \frac{0-1}{2}\right) = (\mathbf{0.5}\,,\ \mathbf{1.5})$

$P_2' = V_1(P_2) = (0.5\,,\ 1)$

$P_2 = V_2(P_2') = \left(1 + \frac{0.5-1}{2}, 1 + \frac{1-0.5}{2}\right) = (\mathbf{0.7}\,,\ \mathbf{1.3})$

$P_3' = (0.7\,,\ 1)$

$P_3 = \left(1 + \frac{0.7-1}{2}, 1 + \frac{1-0.7}{2}\right) = (\mathbf{0.8}\,,\ \mathbf{1.2})$

$P_4' = (0.8\,,\ 1)$

$P_4 = \left(1 + \frac{0.8-1}{2}, 1 + \frac{1-0.8}{2}\right) = (\mathbf{0.9}\,,\ \mathbf{1.1})$

$P_5' = (0.8\,,\ 1),\qquad P_5 = \left(1 + \frac{0.8-1}{2}, 1 + \frac{1-0.8}{2}\right) = (\mathbf{0.9}\,,\ \mathbf{1.1})$

TOVÁBB NEM JAVUL

Még a Buta Géppel is

$P_0 := P = (\mathbf{0}, \mathbf{1})$

$P_1' = V_1(P_0) = (0\ \ , 1)$ $\qquad$ L_1-en

$P_1 = V_2(P_1') = \left(1 + \frac{1-0}{2}, 1 + \frac{0-1}{2}\right) = (\mathbf{0.5}\,,\ \mathbf{1.5})$

$P_2' = V_1(P_2) = (0.5\,,\ 1)$

$P_2 = V_2(P_2') = \left(1 + \frac{0.5-1}{2}, 1 + \frac{1-0.5}{2}\right) = (\mathbf{0.7}\,,\ \mathbf{1.3})$

$P_3' = (0.7\,,\ 1)$

$P_3 = \left(1 + \frac{0.7-1}{2}, 1 + \frac{1-0.7}{2}\right) = (\mathbf{0.8}\,,\ \mathbf{1.2})$

$P_4' = (0.8\,,\ 1)$

$P_4 = \left(1 + \frac{0.8-1}{2}, 1 + \frac{1-0.8}{2}\right) = (\mathbf{0.9}\,,\ \mathbf{1.1})$

$P_5' = (0.8\,,\ 1),$ $\quad$ $P_5 = \left(1 + \frac{0.8-1}{2}, 1 + \frac{1-0.8}{2}\right) = (\mathbf{0.9}\,,\ \mathbf{1.1})$

TOVÁBB NEM JAVUL

Még a Buta Géppel is

$P_0 := P = (\mathbf{0}, \mathbf{1})$

$P_1' = V_1(P_0) = (0\ \ , 1)$ $\qquad$ L_1-en

$P_1 = V_2(P_1') = \left(1 + \frac{1-0}{2}, 1 + \frac{0-1}{2}\right) = (\mathbf{0.5}\,,\ \mathbf{1.5})$

$P_2' = V_1(P_2) = (0.5\,,\ 1)$

$P_2 = V_2(P_2') = \left(1 + \frac{0.5-1}{2}, 1 + \frac{1-0.5}{2}\right) = (\mathbf{0.7}\,,\ \mathbf{1.3})$

$P_3' = (0.7\,,\ 1)$

$P_3 = \left(1 + \frac{0.7-1}{2}, 1 + \frac{1-0.7}{2}\right) = (\mathbf{0.8}\,,\ \mathbf{1.2})$

$P_4' = (0.8\,,\ 1)$

$P_4 = \left(1 + \frac{0.8-1}{2}, 1 + \frac{1-0.8}{2}\right) = (\mathbf{0.9}\,,\ \mathbf{1.1})$

$P_5' = (0.8\,,\ 1),\qquad P_5 = \left(1 + \frac{0.8-1}{2}, 1 + \frac{1-0.8}{2}\right) = (\mathbf{0.9}\,,\ \mathbf{1.1})$

TOVÁBB NEM JAVUL

Még a Buta Géppel is

$$P_0 := P = (\mathbf{0}, \mathbf{1})$$

$$P_1' = V_1(P_0) = (0\ \ , 1) \qquad L_1\text{-en}$$

$$P_1 = V_2(P_1') = \left(1 + \tfrac{1-0}{2}, 1 + \tfrac{0-1}{2}\right) = (\mathbf{0.5}\,,\ \mathbf{1.5})$$

$$P_2' = V_1(P_2) = (0.5\,,\ 1)$$

$$P_2 = V_2(P_2') = \left(1 + \tfrac{0.5-1}{2}, 1 + \tfrac{1-0.5}{2}\right) = (\mathbf{0.7}\,,\ \mathbf{1.3})$$

$$P_3' = (0.7\,,\ 1)$$

$$P_3 = \left(1 + \tfrac{0.7-1}{2}, 1 + \tfrac{1-0.7}{2}\right) = (\mathbf{0.8}\,,\ \mathbf{1.2})$$

$$P_4' = (0.8\,,\ 1)$$

$$P_4 = \left(1 + \tfrac{0.8-1}{2}, 1 + \tfrac{1-0.8}{2}\right) = (\mathbf{0.9}\,,\ \mathbf{1.1})$$

$$P_5' = (0.8\,,\ 1), \qquad P_5 = \left(1 + \tfrac{0.8-1}{2}, 1 + \tfrac{1-0.8}{2}\right) = (\mathbf{0.9}\,,\ \mathbf{1.1})$$

TOVÁBB NEM JAVUL

Még a Buta Géppel is

$P_0 := P = (\mathbf{0}, \mathbf{1})$

$P_1' = V_1(P_0) = (0\ \ , 1)$ $\qquad L_1$-en

$P_1 = V_2(P_1') = \left(1 + \frac{1-0}{2}, 1 + \frac{0-1}{2}\right) = (\mathbf{0.5}\ , \ \mathbf{1.5})$

$P_2' = V_1(P_2) = (0.5\ , \ 1)$

$P_2 = V_2(P_2') = \left(1 + \frac{0.5-1}{2}, 1 + \frac{1-0.5}{2}\right) = (\mathbf{0.7}\ , \ \mathbf{1.3})$

$P_3' = (0.7\ , \ 1)$

$P_3 = \left(1 + \frac{0.7-1}{2}, 1 + \frac{1-0.7}{2}\right) = (\mathbf{0.8}\ , \ \mathbf{1.2})$

$P_4' = (0.8\ , \ 1)$

$P_4 = \left(1 + \frac{0.8-1}{2}, 1 + \frac{1-0.8}{2}\right) = (\mathbf{0.9}\ , \ \mathbf{1.1})$

$P_5' = (0.8\ , \ 1), \qquad P_5 = \left(1 + \frac{0.8-1}{2}, 1 + \frac{1-0.8}{2}\right) = (\mathbf{0.9}\ , \ \mathbf{1.1})$

TOVÁBB NEM JAVUL

Még a Buta Géppel is

$$P_0 := P = (\mathbf{0}, \mathbf{1})$$

$$P_1' = V_1(P_0) = (0\ \ , 1) \qquad L_1\text{-en}$$

$$P_1 = V_2(P_1') = \left(1 + \tfrac{1-0}{2}, 1 + \tfrac{0-1}{2}\right) = (\mathbf{0.5}\,,\ \mathbf{1.5})$$

$$P_2' = V_1(P_2) = (0.5\,,\ 1)$$

$$P_2 = V_2(P_2') = \left(1 + \tfrac{0.5-1}{2}, 1 + \tfrac{1-0.5}{2}\right) = (\mathbf{0.7}\,,\ \mathbf{1.3})$$

$$P_3' = (0.7\,,\ 1)$$

$$P_3 = \left(1 + \tfrac{0.7-1}{2}, 1 + \tfrac{1-0.7}{2}\right) = (\mathbf{0.8}\,,\ \mathbf{1.2})$$

$$P_4' = (0.8\,,\ 1)$$

$$P_4 = \left(1 + \tfrac{0.8-1}{2}, 1 + \tfrac{1-0.8}{2}\right) = (\mathbf{0.9}\,,\ \mathbf{1.1})$$

$$P_5' = (0.8\,,\ 1), \qquad P_5 = \left(1 + \tfrac{0.8-1}{2}, 1 + \tfrac{1-0.8}{2}\right) = (\mathbf{0.9}\,,\ \mathbf{1.1})$$

TOVÁBB NEM JAVUL

Még a Buta Géppel is

$$P_0 := P = (\mathbf{0}, \mathbf{1})$$
$$P_1' = V_1(P_0) = (0\ \ , 1) \qquad L_1\text{-en}$$
$$P_1 = V_2(P_1') = \left(1 + \tfrac{1-0}{2}, 1 + \tfrac{0-1}{2}\right) = (\mathbf{0.5}\,,\ \mathbf{1.5})$$
$$P_2' = V_1(P_2) = (0.5\,,\ 1)$$
$$P_2 = V_2(P_2') = \left(1 + \tfrac{0.5-1}{2}, 1 + \tfrac{1-0.5}{2}\right) = (\mathbf{0.7}\,,\ \mathbf{1.3})$$
$$P_3' = (0.7\,,\ 1)$$
$$P_3 = \left(1 + \tfrac{0.7-1}{2}, 1 + \tfrac{1-0.7}{2}\right) = (\mathbf{0.8}\,,\ \mathbf{1.2})$$
$$P_4' = (0.8\,,\ 1)$$
$$P_4 = \left(1 + \tfrac{0.8-1}{2}, 1 + \tfrac{1-0.8}{2}\right) = (\mathbf{0.9}\,,\ \mathbf{1.1})$$
$$P_5' = (0.8\,,\ 1), \qquad P_5 = \left(1 + \tfrac{0.8-1}{2}, 1 + \tfrac{1-0.8}{2}\right) = (\mathbf{0.9}\,,\ \mathbf{1.1})$$

TOVÁBB NEM JAVUL

Még a Buta Géppel is

$P_0 := P = (\mathbf{0}, \mathbf{1})$

$P_1' = V_1(P_0) = (0\ \ , 1)$ $\qquad L_1$-en

$P_1 = V_2(P_1') = \left(1 + \frac{1-0}{2}, 1 + \frac{0-1}{2}\right) = (\mathbf{0.5}\,,\ \mathbf{1.5})$

$P_2' = V_1(P_2) = (0.5\,,\ 1)$

$P_2 = V_2(P_2') = \left(1 + \frac{0.5-1}{2}, 1 + \frac{1-0.5}{2}\right) = (\mathbf{0.7}\,,\ \mathbf{1.3})$

$P_3' = (0.7\,,\ 1)$

$P_3 = \left(1 + \frac{0.7-1}{2}, 1 + \frac{1-0.7}{2}\right) = (\mathbf{0.8}\,,\ \mathbf{1.2})$

$P_4' = (0.8\,,\ 1)$

$P_4 = \left(1 + \frac{0.8-1}{2}, 1 + \frac{1-0.8}{2}\right) = (\mathbf{0.9}\,,\ \mathbf{1.1})$

$P_5' = (0.8\,,\ 1)$, $\quad P_5 = \left(1 + \frac{0.8-1}{2}, 1 + \frac{1-0.8}{2}\right) = (\mathbf{0.9}\,,\ \mathbf{1.1})$

TOVÁBB NEM JAVUL

Még a Buta Géppel is

$$P_0 := P = (\mathbf{0}, \mathbf{1})$$
$$P_1' = V_1(P_0) = (0\ \ ,1) \qquad L_1\text{-en}$$
$$P_1 = V_2(P_1') = \left(1 + \tfrac{1-0}{2}, 1 + \tfrac{0-1}{2}\right) = (\mathbf{0.5}\,,\ \mathbf{1.5})$$
$$P_2' = V_1(P_2) = (0.5\,,\ 1)$$
$$P_2 = V_2(P_2') = \left(1 + \tfrac{0.5-1}{2}, 1 + \tfrac{1-0.5}{2}\right) = (\mathbf{0.7}\,,\ \mathbf{1.3})$$
$$P_3' = (0.7\,,\ 1)$$
$$P_3 = \left(1 + \tfrac{0.7-1}{2}, 1 + \tfrac{1-0.7}{2}\right) = (\mathbf{0.8}\,,\ \mathbf{1.2})$$
$$P_4' = (0.8\,,\ 1)$$
$$P_4 = \left(1 + \tfrac{0.8-1}{2}, 1 + \tfrac{1-0.8}{2}\right) = (\mathbf{0.9}\,,\ \mathbf{1.1})$$
$$P_5' = (0.8\,,\ 1), \qquad P_5 = \left(1 + \tfrac{0.8-1}{2}, 1 + \tfrac{1-0.8}{2}\right) = (\mathbf{0.9}\,,\ \mathbf{1.1})$$

TOVÁBB NEM JAVUL

Még a Buta Géppel is

$$P_0 := P = (\mathbf{0}, \mathbf{1})$$

$$P'_1 = V_1(P_0) = (0\ \ , 1) \qquad L_1\text{-en}$$

$$P_1 = V_2(P'_1) = \left(1 + \tfrac{1-0}{2}, 1 + \tfrac{0-1}{2}\right) = (\mathbf{0.5}\,,\ \mathbf{1.5})$$

$$P'_2 = V_1(P_2) = (0.5\,,\ 1)$$

$$P_2 = V_2(P'_2) = \left(1 + \tfrac{0.5-1}{2}, 1 + \tfrac{1-0.5}{2}\right) = (\mathbf{0.7}\,,\ \mathbf{1.3})$$

$$P'_3 = (0.7\,,\ 1)$$

$$P_3 = \left(1 + \tfrac{0.7-1}{2}, 1 + \tfrac{1-0.7}{2}\right) = (\mathbf{0.8}\,,\ \mathbf{1.2})$$

$$P'_4 = (0.8\,,\ 1)$$

$$P_4 = \left(1 + \tfrac{0.8-1}{2}, 1 + \tfrac{1-0.8}{2}\right) = (\mathbf{0.9}\,,\ \mathbf{1.1})$$

$$P'_5 = (0.8\,,\ 1), \qquad P_5 = \left(1 + \tfrac{0.8-1}{2}, 1 + \tfrac{1-0.8}{2}\right) = (\mathbf{0.9}\,,\ \mathbf{1.1})$$

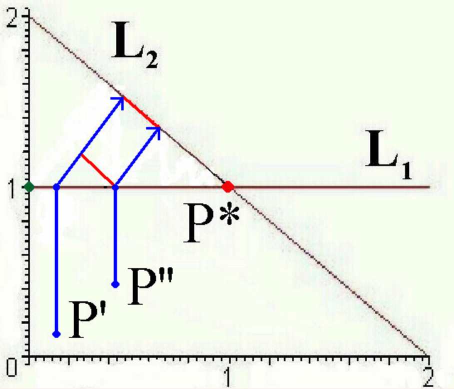
TOVÁBB NEM JAVUL

Miért működik?

$$W = \left[V_1 \text{ majd } V_2 \text{ együttes hatása}\right] = V_2 \circ V_1$$

$$W : (x_1, x_2) \overset{V_1}{\mapsto} (x_1, 1) \overset{V_2}{\mapsto} \left(1 + \frac{x_1 - 1}{2}, 1 - \frac{x_1 - 1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{x_1}{2}, \frac{3}{2} - \frac{x_1}{2}\right)$$

W ERŐSEN CSÖKKENTI A TÁVOLSÁGOKAT



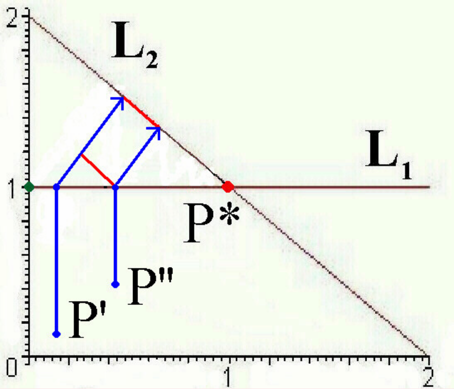
$$d\big(W(P'), W(P'')\big) \le \frac{1}{\sqrt{2}} \Big| x_1(P') - x_1(P'') \Big| \le \frac{1}{\sqrt{2}} d\big(P', P''\big)$$

Miért működik?

$$W = \left[V_1 \text{ majd } V_2 \text{ együttes hatása}\right] = V_2 \circ V_1$$

$$W : (x_1, x_2) \overset{V_1}{\mapsto} (x_1, 1) \overset{V_2}{\mapsto} \left(1 + \tfrac{x_1 - 1}{2}, 1 - \tfrac{x_1 - 1}{2}\right) = \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{x_1}{2}, \tfrac{3}{2} - \tfrac{x_1}{2}\right)$$

W ERŐSEN CSÖKKENTI A TÁVOLSÁGOKAT



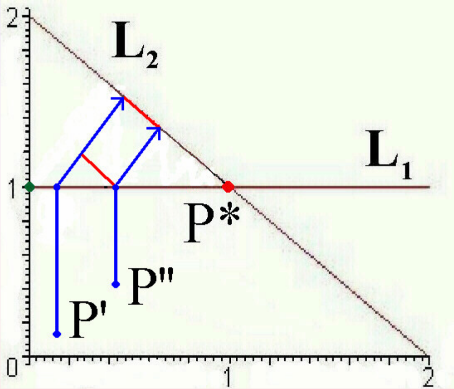
$$d\big(W(P'), W(P'')\big) \le \tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big|x_1(P') - x_1(P'')\Big| \le \tfrac{1}{\sqrt{2}} d\big(P', P''\big)$$

Miért működik?

$$W = \left[V_1 \text{ majd } V_2 \text{ együttes hatása} \right] = V_2 \circ V_1$$

$$W : (x_1, x_2) \overset{V_1}{\mapsto} (x_1, 1) \overset{V_2}{\mapsto} \left(1 + \tfrac{x_1 - 1}{2}, 1 - \tfrac{x_1 - 1}{2}\right) = \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{x_1}{2}, \tfrac{3}{2} - \tfrac{x_1}{2}\right)$$

W ERŐSEN CSÖKKENTI A TÁVOLSÁGOKAT



$$d\big(W(P'), W(P'')\big) \le \tfrac{1}{\sqrt{2}} \Big| x_1(P') - x_1(P'') \Big| \le \tfrac{1}{\sqrt{2}} d\big(P', P''\big)$$

FIXPONT ELV

$X = \Big[\ \mathbb{R}$ egyenes vagy $\mathbb{R}^2$ sík vagy **zárt** félegyenes... $\Big]$

$W : X \to X \quad W = \alpha\big[\text{TÁVOLSÁGCSÖKKENTŐ}\big] \qquad \exists\ \alpha < 1$

- *Ekkor* $\quad \exists!\ P^* \in X \quad W(P^*) = P^*$
- *Tetszőleges P-ből indulva*
  $W(P), W^2(P) = W\big(W(P)\big), W^3(P) = W\big(W^2(P)\big), \ldots \longrightarrow P^*$

Megjegyzés: (1)+(2) átírva $\quad W(P^*) = P^*$
FIXPONT-EGYENLETTÉ

FIXPONT ELV

$$X = \Big[\ \mathbb{R} \text{ egyenes vagy } \mathbb{R}^2 \text{ sík vagy } \textbf{zárt} \text{ félegyenes}\ldots\Big]$$

$$W : X \to X \qquad W = \alpha\big[\text{TÁVOLSÁGCSÖKKENTŐ}\big] \qquad \exists\ \alpha < 1$$

- *Ekkor* $\exists!\ P^* \in X \quad W(P^*) = P^*$
- *Tetszőleges P-ből indulva* $W(P), W^2(P) = W\big(W(P)\big), W^3(P) = W\big(W^2(P)\big), \ldots \longrightarrow P^*$

Megjegyzés: (1)+(2) átírva $W(P^*) = P^*$ FIXPONT-EGYENLETTÉ

FIXPONT ELV

$X = \Big[\ \mathbb{R}$ egyenes vagy $\mathbb{R}^2$ sík vagy **zárt** félegyenes...$\Big]$

$W : X \to X \quad W = \alpha\big[$TÁVOLSÁGCSÖKKENTŐ$\big] \quad \exists\ \alpha < 1$

- *Ekkor* $\quad \exists!\ P^* \in X \quad W(P^*) = P^*$
- *Tetszőleges P-ből indulva*
  $W(P), W^2(P) = W\big(W(P)\big), W^3(P) = W\big(W^2(P)\big), \ldots \longrightarrow P^*$

Megjegyzés: (1)+(2) átírva $W(P^*) = P^*$
FIXPONT-EGYENLETTÉ

FIXPONT ELV

$$X = \Big[\ \mathbb{R} \text{ egyenes vagy } \mathbb{R}^2 \text{ sík vagy } \textbf{zárt} \text{ félegyenes}\ldots\Big]$$

$$W : X \to X \qquad W = \alpha\big[\text{TÁVOLSÁGCSÖKKENTŐ}\big] \qquad \exists\ \alpha < 1$$

- *Ekkor* $\quad \exists!\ P^* \in X \quad W(P^*) = P^*$
- *Tetszőleges P-ből indulva*
  $W(P), W^2(P) = W\big(W(P)\big), W^3(P) = W\big(W^2(P)\big), \ldots \longrightarrow P^*$

Megjegyzés: (1)+(2) átírva $W(P^*) = P^*$
FIXPONT-EGYENLETTÉ

FIXPONT ELV

$X = \Big[\ \mathbb{R}$ egyenes vagy $\mathbb{R}^2$ sík vagy **zárt** félegyenes...$\Big]$

$W : X \to X \quad W = \alpha\big[\text{TÁVOLSÁGCSÖKKENTŐ}\big] \qquad \exists\ \alpha < 1$

- *Ekkor* $\quad \exists!\ P^* \in X \quad W(P^*) = P^*$
- *Tetszőleges P-ből indulva*
  $W(P), W^2(P) = W\big(W(P)\big), W^3(P) = W\big(W^2(P)\big), \ldots \longrightarrow P^*$

Megjegyzés: (1)+(2) átírva $\quad W(P^*) = P^*$
FIXPONT-EGYENLETTÉ

Gyökvonás

$x^2 = a$ nem fixpont-egyenlet

FIXPONT-EGYENLET

- Pl. $x = a/x$, $W(x) = a/x$

  $P = 1 \to 1, a, 1, a, 1, a \ldots$ NEM JÓ

- $x = a/x, \quad x = x \quad \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}\dfrac{a}{x}$

  Mezopotámia $\sqrt{2}$ $\left[2,\ 1\frac{30}{60},\ 1\frac{25}{60} \to \right]\ 1\ \frac{24}{60}\ \frac{\mathbf{52}}{3600}$

  $\mathbf{W(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\,a/x}$

  $d\big(W(x'), W(x'')\big) = \big|W(x') - W(x'')\big| \leq \frac{1}{2}d(x', x''),$

  ha $x', x'' \in X := [\sqrt{a}, \infty)$ **félegyenes**. Ezzel $W : X \to X$

  Biz.: $W(x) \geq \sqrt{a}$, ha $x \geq \sqrt{a}$, és

  $\frac{1}{2}\big[x' + \frac{a}{x'} - x'' - \frac{a}{x''}\big] = \frac{1}{2}(x' - x'')\big[1 - \frac{a}{x'x''}\big]$

Gyökvonás

$x^2 = a$ nem fixpont-egyenlet

FIXPONT-EGYENLET

- Pl. $x = a/x$, $W(x) = a/x$

  $P = 1 \to 1, a, 1, a, 1, a \dots$ NEM JÓ

- $x = a/x, \quad x = x \quad \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}\dfrac{a}{x}$

  Mezopotámia $\sqrt{2}$ $\left[2,\ 1\frac{30}{60},\ 1\frac{25}{60} \to \right]\ 1\ \frac{24}{60}\ \frac{\mathbf{52}}{3600}$

  $\mathbf{W(x)} = \frac{1}{2}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\,\mathbf{a/x}$

  $d\big(W(x'), W(x'')\big) = \big|W(x') - W(x'')\big| \le \frac{1}{2}d(x', x''),$

  ha $x', x'' \in X := [\sqrt{a}, \infty)$ **félegyenes**. Ezzel $W : X \to X$

  Biz.: $W(x) \ge \sqrt{a}$, ha $x \ge \sqrt{a}$, és

  $\frac{1}{2}\big[x' + \frac{a}{x'} - x'' - \frac{a}{x''}\big] = \frac{1}{2}(x' - x'')\big[1 - \frac{a}{x'x''}\big]$

Gyökvonás

$x^2 = a$ nem fixpont-egyenlet

FIXPONT-EGYENLET

- Pl. $x = a/x$, $W(x) = a/x$

$P = 1 \to 1, a, 1, a, 1, a \ldots$ NEM JÓ

- $x = a/x, \quad x = x \quad \Rightarrow x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\frac{a}{x}$

Mezopotámia $\sqrt{2}$ $\left[2,\ 1\frac{30}{60},\ 1\frac{25}{60} \to \right]\ 1\,\frac{24}{60}\,\frac{\mathbf{52}}{3600}$

$\mathbf{W(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\,a/x}$

$d\big(W(x'), W(x'')\big) = \big|W(x') - W(x'')\big| \leq \frac{1}{2}d(x', x''),$
ha $x', x'' \in X := [\sqrt{a}, \infty)$ **félegyenes**. Ezzel $W : X \to X$

Biz.: $W(x) \geq \sqrt{a}$, ha $x \geq \sqrt{a}$, és

$\frac{1}{2}\big[x' + \frac{a}{x'} - x'' - \frac{a}{x''}\big] = \frac{1}{2}(x' - x'')\big[1 - \frac{a}{x'x''}\big]$

Gyökvonás

$x^2 = a$ nem fixpont-egyenlet

FIXPONT-EGYENLET

- Pl. $x = a/x$, $W(x) = a/x$

  $P = 1 \to 1, a, 1, a, 1, a \ldots$ NEM JÓ

- $x = a/x, \quad x = x \quad \Rightarrow x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\frac{a}{x}$

  Mezopotámia $\sqrt{2}$ $\left[2,\ 1\frac{30}{60},\ 1\frac{25}{60} \to \right]\ 1\ \frac{24}{60}\ \frac{\mathbf{52}}{3600}$

  $\mathbf{W(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\,a/x}$

  $d\big(W(x'), W(x'')\big) = \big|W(x') - W(x'')\big| \leq \frac{1}{2} d(x', x'')$,
  ha $x', x'' \in X := [\sqrt{a}, \infty)$ **félegyenes**. Ezzel $W : X \to X$

  Biz.: $W(x) \geq \sqrt{a}$, ha $x \geq \sqrt{a}$, és

  $\frac{1}{2}\left[x' + \frac{a}{x'} - x'' - \frac{a}{x''}\right] = \frac{1}{2}(x' - x'')\left[1 - \frac{a}{x'x''}\right]$

Gyökvonás

$x^2 = a$ nem fixpont-egyenlet

FIXPONT-EGYENLET

- Pl. $x = a/x$, $W(x) = a/x$

  $P = 1 \to 1, a, 1, a, 1, a \dots$ NEM JÓ
- $x = a/x, \quad x = x \quad \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}\,\dfrac{a}{x}$

Mezopotámia $\sqrt{2}$ $\left[2,\ 1\frac{30}{60},\ 1\frac{25}{60} \to \right]\ 1\,\frac{24}{60}\,\frac{\mathbf{52}}{3600}$

$\mathbf{W(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\,a/x}$

$d\big(W(x'), W(x'')\big) = \big|W(x') - W(x'')\big| \le \frac{1}{2} d(x', x'')$,
ha $x', x'' \in X := [\sqrt{a}, \infty)$ **félegyenes**. Ezzel $W : X \to X$

Biz.: $W(x) \ge \sqrt{a}$, ha $x \ge \sqrt{a}$, és

$\frac{1}{2}\left[x' + \frac{a}{x'} - x'' - \frac{a}{x''}\right] = \frac{1}{2}(x' - x'')\left[1 - \frac{a}{x'x''}\right]$

Gyökvonás

$x^2 = a$ nem fixpont-egyenlet

FIXPONT-EGYENLET

- Pl. $x = a/x$, $W(x) = a/x$

  $P = 1 \to 1, a, 1, a, 1, a \dots$ NEM JÓ

- $x = a/x, \quad x = x \quad \Rightarrow x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\frac{a}{x}$

  Mezopotámia $\sqrt{2}$ $\left[2,\ 1\frac{30}{60},\ 1\frac{25}{60} \to \right]\ 1\ \frac{24}{60}\ \frac{\mathbf{52}}{3600}$

  $\mathbf{W(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\, a/x}$

  $d\big(W(x'), W(x'')\big) = \big|W(x') - W(x'')\big| \le \frac{1}{2} d(x', x'')$,

  ha $x', x'' \in X := [\sqrt{a}, \infty)$ **félegyenes**. Ezzel $W : X \to X$

  Biz.: $W(x) \ge \sqrt{a}$, ha $x \ge \sqrt{a}$, és

  $\frac{1}{2}\left[x' + \frac{a}{x'} - x'' - \frac{a}{x''}\right] = \frac{1}{2}(x' - x'')\left[1 - \frac{a}{x'x''}\right]$

Gyökvonás

$x^2 = a$ nem fixpont-egyenlet

FIXPONT-EGYENLET

- Pl. $x = a/x$, $W(x) = a/x$

  $P = 1 \to 1, a, 1, a, 1, a \dots$ NEM JÓ

- $x = a/x, \quad x = x \quad \Rightarrow x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\frac{a}{x}$

  Mezopotámia $\sqrt{2}$ $\left[2,\ 1\frac{30}{60},\ 1\frac{25}{60} \to \right]\ 1\ \frac{24}{60}\ \frac{\mathbf{52}}{3600}$

  $\mathbf{W(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\,a/x}$

  $d(W(x'), W(x'')) = \left|W(x') - W(x'')\right| \le \frac{1}{2}d(x', x'')$,

  ha $x', x'' \in X := [\sqrt{a}, \infty)$ **félegyenes**. Ezzel $W : X \to X$

  Biz.: $W(x) \ge \sqrt{a}$, ha $x \ge \sqrt{a}$, és

  $\frac{1}{2}\left[x' + \frac{a}{x'} - x'' - \frac{a}{x''}\right] = \frac{1}{2}(x' - x'')\left[1 - \frac{a}{x'x''}\right]$

Gyökvonás

$x^2 = a$ nem fixpont-egyenlet

FIXPONT-EGYENLET

- Pl. $x = a/x$, $W(x) = a/x$

  $P = 1 \to 1, a, 1, a, 1, a \ldots$ NEM JÓ

- $x = a/x, \quad x = x \quad \Rightarrow x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\frac{a}{x}$

  Mezopotámia $\sqrt{2}$ $\left[2,\ 1\frac{30}{60},\ 1\frac{25}{60} \to \right]\ 1\,\frac{24}{60}\,\frac{\mathbf{52}}{3600}$

  $\mathbf{W(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\,a/x}$

  $d\big(W(x'), W(x'')\big) = \big|W(x') - W(x'')\big| \le \frac{1}{2}d(x', x'')$,

  ha $x', x'' \in X := [\sqrt{a}, \infty)$ **félegyenes.** Ezzel $W : X \to X$

  Biz.: $W(x) \ge \sqrt{a}$, ha $x \ge \sqrt{a}$, és

  $\frac{1}{2}\left[x' + \frac{a}{x'} - x'' - \frac{a}{x''}\right] = \frac{1}{2}(x' - x'')\left[1 - \frac{a}{x'x''}\right]$

Gyökvonás

$x^2 = a$ nem fixpont-egyenlet

FIXPONT-EGYENLET

- Pl. $x = a/x$, $W(x) = a/x$

  $P = 1 \to 1, a, 1, a, 1, a \ldots$ NEM JÓ

- $x = a/x, \quad x = x \quad \Rightarrow x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\frac{a}{x}$

  Mezopotámia $\sqrt{2}$ $\left[2,\ 1\frac{30}{60},\ 1\frac{25}{60} \to \right]\ 1\ \frac{24}{60}\ \frac{\mathbf{52}}{3600}$

  $\mathbf{W(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\, a/x}$

  $d\big(W(x'), W(x'')\big) = \big|W(x') - W(x'')\big| \le \frac{1}{2} d(x', x'')$,
  ha $x', x'' \in X := [\sqrt{a}, \infty)$ **félegyenes.** Ezzel $W : X \to X$

  Biz.: $W(x) \ge \sqrt{a}$, ha $x \ge \sqrt{a}$, és

  $\frac{1}{2}\left[x' + \frac{a}{x'} - x'' - \frac{a}{x''}\right] = \frac{1}{2}(x' - x'')\left[1 - \frac{a}{x'x''}\right]$

Gyökvonás

$x^2 = a$ nem fixpont-egyenlet

FIXPONT-EGYENLET

- Pl. $x = a/x$, $W(x) = a/x$

  $P = 1 \to 1, a, 1, a, 1, a \ldots$ NEM JÓ

- $x = a/x, \quad x = x \quad \Rightarrow x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\frac{a}{x}$

  Mezopotámia $\sqrt{2}$ $\left[2,\ 1\frac{30}{60},\ 1\frac{25}{60} \to \right]\ 1\,\frac{24}{60}\,\frac{\mathbf{52}}{3600}$

  $\mathbf{W(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\,a/x}$

  $d\big(W(x'), W(x'')\big) = \big|W(x') - W(x'')\big| \le \frac{1}{2}d(x', x''),$
  ha $x', x'' \in X := [\sqrt{a}, \infty)$ **félegyenes.** Ezzel $W : X \to X$

  Biz.: $W(x) \ge \sqrt{a}$, ha $x \ge \sqrt{a}$, és

  $\frac{1}{2}\left[x' + \frac{a}{x'} - x'' - \frac{a}{x''}\right] = \frac{1}{2}(x' - x'')\left[1 - \frac{a}{x'x''}\right]$

Hatásos módszer

Pl. $\sqrt{2}$ $\qquad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left[x_n + 2/x_n\right], \;\; x_0 = 2$

1.500000000000000000000000000000000000000000000000

1.41666666666666666666666666666666666666666666666666

1.4142156862745098039215686274509803921

1.4142135623746899106262955788901349101165596221157440

1.414213562373095048801689623502530243614981925776197

1.4142135623730950488016887242096980785696718753772

1.4142135623730950488016887242096980785696718753769

Hatásos módszer

Pl. $\sqrt{2}$ $\qquad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left[x_n + 2/x_n\right],\ \ x_0 = 2$

1.500000000000000000000000000000000000000000000000000

1.41666666666666666666666666666666666666666666666666

1.414215686274509803921568627450980392156862745098039

1.414213562374689910626295578890134910116559622111157440

1.41421356237309504880168962350253024361498192577619 7

1.414213562373095048801688724209698078569671875377 2

1.4142135623730950488016887242096980785696718753769

Hatásos módszer

Pl. $\sqrt{2}$ $\quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left[x_n + 2/x_n\right], \;\; x_0 = 2$

1.5000000000000000000000000000000000000000000000000

1.41666666666666666666666666666666666666666666666666

1.41421568627450980392156862745098039215686274509803921

1.4142135623746899106262955788901349101165596221157440

1.414213562373095048801689623502530243614981925776197

1.41421356237309504880168872420969807856967187537772

1.41421356237309504880168872420969807856967187537694

Hatásos módszer

Pl. $\sqrt{2}$ $\qquad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left[x_n + 2/x_n\right], \;\; x_0 = 2$

1.50000000000000000000000000000000000000000000000000000

1.41666666666666666666666666666666666666666666666666666

1.41421568627450980392156862745098039215686274509803921

1.4142135623746899106262955788901349101165596221157440

1.414213562373095048801689623502530243614981925776197

1.4142135623730950488016887242096980785696718753772

1.4142135623730950488016887242096980785696718753769

Hatásos módszer

Pl. $\sqrt{2}$ $\qquad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left[x_n + 2/x_n\right], \;\; x_0 = 2$

1.500000000000000000000000000000000000000000000000000

1.4166666666666666666666666666666666666666666666666666

1.414215686274509803921568627450980392156862745098039 21

1.4142135623746899106262955788901349101165596221157440

1.414213562373095048801689623502530243614981925776197

1.41421356237309504880168872420969807856967187537772

1.41421356237309504880168872420969807856967187537 69

Hatásos módszer

Pl. $\sqrt{2}$ $\qquad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left[x_n + 2/x_n\right], \;\; x_0 = 2$

1.5000000000000000000000000000000000000000000000000

1.4166666666666666666666666666666666666666666666666

1.414215686274509803921568627450980392156862745098 03921

1.414213562374689910626295578890134910116559622115 7440

1.4142135623730950488016896235025302436149819257761 97

1.4142135623730950488016887242096980785696718753772

1.41421356237309504880168872420969807856967187537 69

Hatásos módszer

Pl. $\sqrt{2}$ $\qquad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left[x_n + 2/x_n\right], \;\; x_0 = 2$

1.50000000000000000000000000000000000000000000000000

1.41666666666666666666666666666666666666666666666666

1.41421568627450980392156862745098039215686274509803921

1.4142135623746899106262955788901349101165596221157440

1.41421356237309504880168962350253024361498192577619 7

1.41421356237309504880168872420969807856967187537772

1.41421356237309504880168872420969807856967187537 69

Hatásos módszer

Pl. $\sqrt{2}$ $\qquad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left[x_n + 2/x_n\right], \ \ x_0 = 2$

1.50000000000000000000000000000000000000000000000000000

1.41666666666666666666666666666666666666666666666666666

1.41421568627450980392156862745098039215686274509803921

1.4142135623746899106262955788901349101165596221157440

1.414213562373095048801689623502530243614981925776197

1.4142135623730950488016887242096980785696718753772

1.4142135623730950488016887242096980785696718753769

ÁLTALÁNOSÍTÁSOK

- Köbgyök: $\sqrt[3]{a}$ Kepler $W(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}a/x^2$
- p-edik gyök: $\sqrt[p]{a}$ Newton $W(x) = (1 - \frac{1}{p})x + \frac{1}{p}a/x^{p-1}$

ÁLTALÁNOSÍTÁSOK

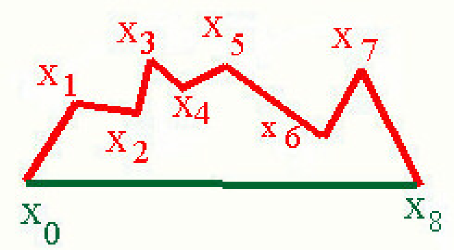
- Köbgyök: $\sqrt[3]{a}$ Kepler $W(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}a/x^2$
- p-edik gyök: $\sqrt[p]{a}$ Newton $W(x) = \left(1 - \frac{1}{p}\right)x + \frac{1}{p}a/x^{p-1}$

KONTRACIÓS FIXPONT-TÉTEL

$$X = \Big\{ \text{ OBJEKTUMOK } \Big\}$$

d távolság X elemei közt

- $d(x,y) = d(y,x) > 0$,   ha $x \neq y \in X$
- Kerülőút $\geq$ direkt út:



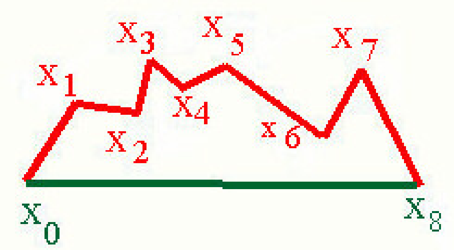
$$d(x_0,x_1) + d(x_1,x_2) + \cdots + d(x_{n-1},x_n) \geq d(x_0,x_n)$$

KONTRACIÓS FIXPONT-TÉTEL

$$X = \left\{ \text{OBJEKTUMOK} \right\}$$

d távolság X elemei közt

- $d(x, y) = d(y, x) > 0$, ha $x \neq y \in X$
- Kerülőút $\geq$ direkt út:



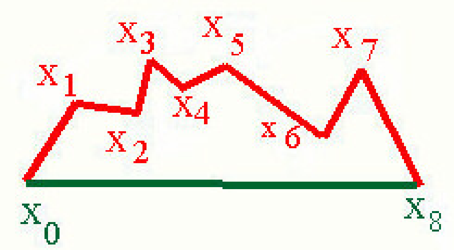
$$d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n) \geq d(x_0, x_n)$$

KONTRACIÓS FIXPONT-TÉTEL

$$X = \{ \text{ OBJEKTUMOK } \}$$

d távolság X elemei közt

- $d(x,y) = d(y,x) > 0$, ha $x \neq y \in X$
- Kerülőút $\geq$ direkt út:



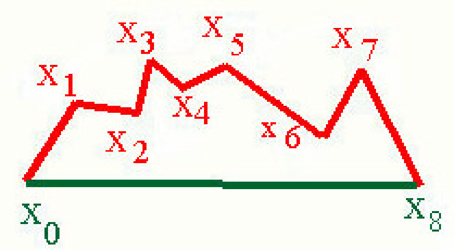
$$d(x_0,x_1) + d(x_1,x_2) + \cdots + d(x_{n-1},x_n) \geq d(x_0,x_n)$$

KONTRACIÓS FIXPONT-TÉTEL

$X = \{$ OBJEKTUMOK $\}$

d távolság X elemei közt

- $d(x, y) = d(y, x) > 0$, ha $x \neq y \in X$
- Kerülőút $\geq$ direkt út:



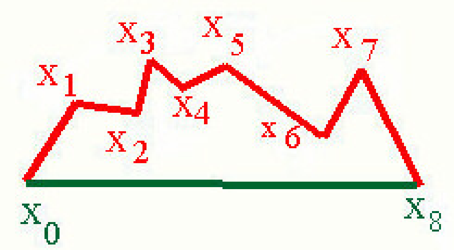
$$d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n) \geq d(x_0, x_n)$$

KONTRACIÓS FIXPONT-TÉTEL

$X = \{ \text{ OBJEKTUMOK } \}$

d távolság X elemei közt

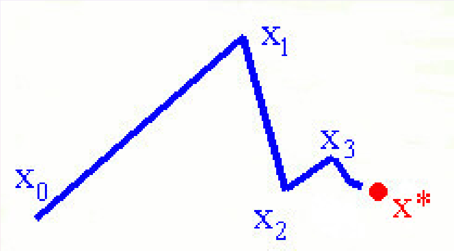
- $d(x,y) = d(y,x) > 0$, ha $x \neq y \in X$
- Kerülőút $\geq$ direkt út:



$$d(x_0,x_1) + d(x_1,x_2) + \cdots + d(x_{n-1},x_n) \geq d(x_0,x_n)$$

KONTRACIÓS FIXPONT-TÉTEL

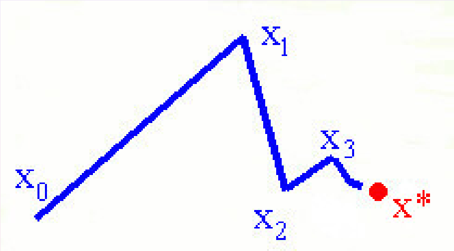
- **Teljesség:** A véges utak nem vezetnek ki X-ből:



$d(x_0, x_1) \leq 1,\ d(x_1, x_2) \leq \frac{1}{2},\ d(x_2, x_3) \leq \frac{1}{4}, \ldots \implies$
$\exists\, x^* \in X \quad d(x_n, x_*) \leq 1/2^{n-1} \quad (n = 0, 1, \ldots).$

KONTRACIÓS FIXPONT-TÉTEL

- **Teljesség:** A véges utak nem vezetnek ki X-ből:

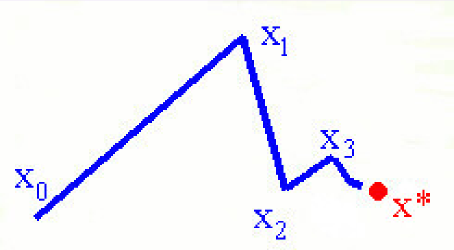


$d(x_0, x_1) \leq 1,\ d(x_1, x_2) \leq \frac{1}{2},\ d(x_2, x_3) \leq \frac{1}{4}, \ldots \implies$

$\exists\, x^* \in X \quad d(x_n, x_*) \leq 1/2^{n-1} \quad (n = 0, 1, \ldots).$

KONTRACIÓS FIXPONT-TÉTEL

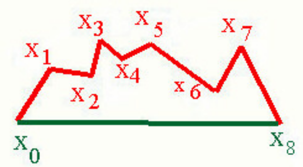
- **Teljesség:** A véges utak nem vezetnek ki X-ből:

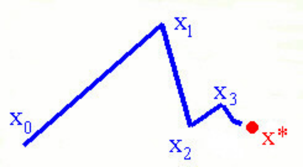


$$d(x_0, x_1) \leq 1,\; d(x_1, x_2) \leq \tfrac{1}{2},\; d(x_2, x_3) \leq \tfrac{1}{4}, \ldots \implies$$
$$\exists\, x^* \in X \quad d(x_n, x_*) \leq 1/2^{n-1} \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

KONTRACIÓS FIXPONT-TÉTEL

- **TÉTEL.** X, d *teljes metrikus tér*





- $W : X \to X$ leképezés $\alpha\big[$d-TÁVOLSÁGCSÖKKENTŐ$\big]$, $\alpha < 1$.

  Ekkor

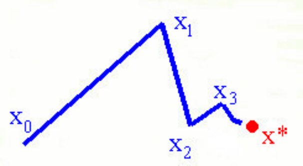
  $\exists!\ x^* \in X \qquad W(x^*) = x^*$

  és

  $\forall\ x_0 \in X \quad x_n := W^n(x_0) \to x^*.$

KONTRACIÓS FIXPONT-TÉTEL

- **TÉTEL.** X, d *teljes metrikus tér*



- $W : X \to X$ leképezés $\alpha\big[$d-TÁVOLSÁGCSÖKKENTŐ$\big]$, $\alpha < 1$.

  Ekkor

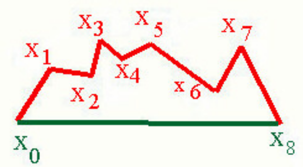
  $\exists! \; x^* \in X \qquad W(x^*) = x^*$

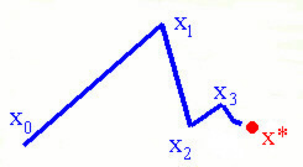
  és

  $\forall \; x_0 \in X \quad x_n := W^n(x_0) \to x^*$.

KONTRACIÓS FIXPONT-TÉTEL

- **TÉTEL.** X, d *teljes metrikus tér*





- $W : X \to X$ leképezés $\alpha\left[\text{d-TÁVOLSÁGCSÖKKENTŐ}\right]$, $\alpha < 1$.

  Ekkor

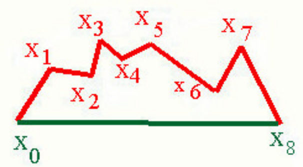
  $\exists!\ x^* \in X \qquad W(x^*) = x^*$

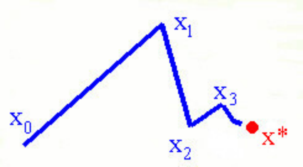
  és

  $\forall\ x_0 \in X \quad x_n := W^n(x_0) \to x^*.$

KONTRACIÓS FIXPONT-TÉTEL

- **TÉTEL.** X, d *teljes metrikus tér*





- $W : X \to X$ leképezés $\alpha\big[$d-TÁVOLSÁGCSÖKKENTŐ$\big]$, $\alpha < 1$.

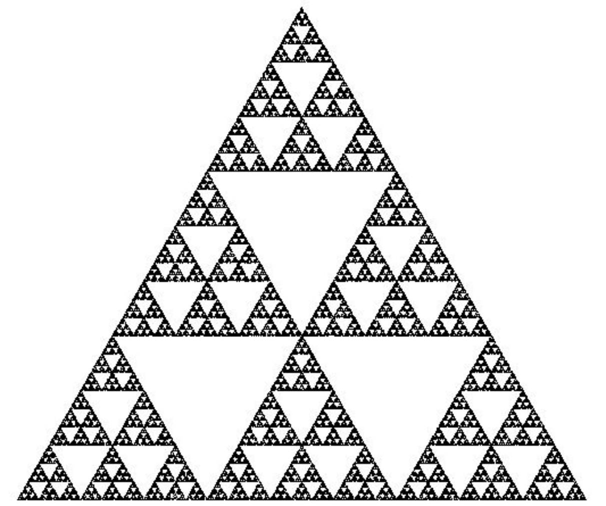
  Ekkor

  $\exists!\ x^* \in X \qquad W(x^*) = x^*$

  és

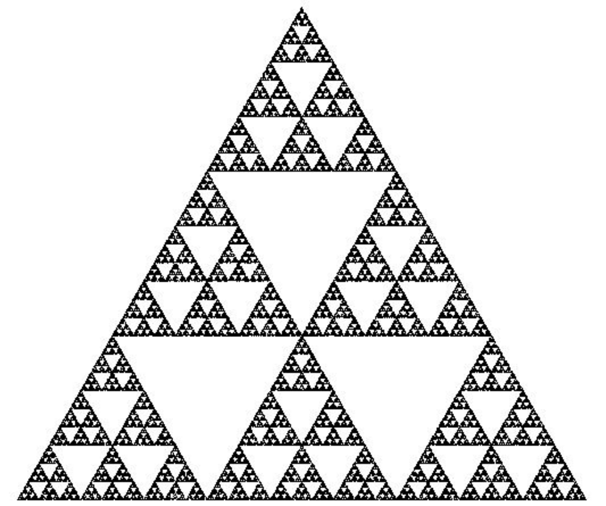
  $\forall\ x_0 \in X \quad x_n := W^n(x_0) \to x^*$.

FRAKTÁLOK



Hogyan jön ki ez a Kontrakciós Fixpont-tételből?

FRAKTÁLOK

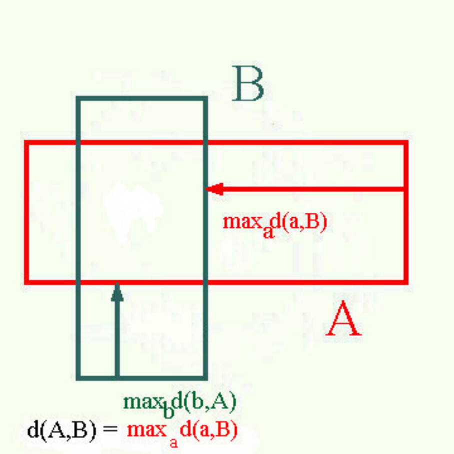


Hogyan jön ki ez a Kontrakciós Fixpont-tételből?

FRAKTÁLOK

$$X = \left\{ \mathbb{R}^2 \text{ SÍK KORLÁTOS ZÁRT HALMAZAI} \right\}$$

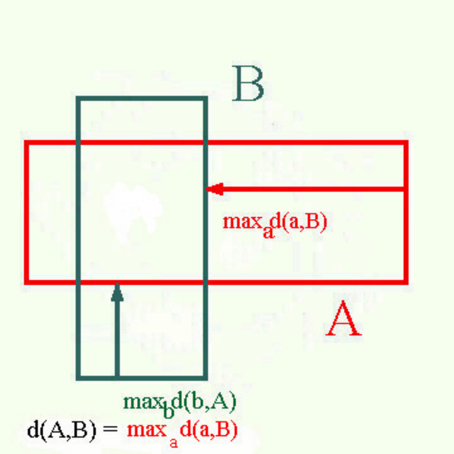
$$d(A, B) = \left[\text{MAXIMÁLIS ELTÉRÉS } A, B \text{ KÖZÖTT} \right]$$



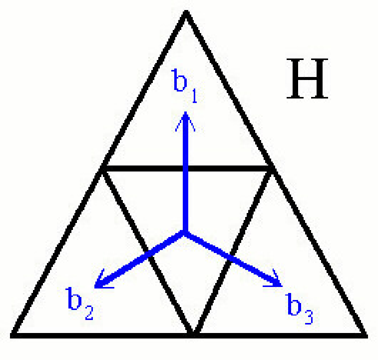
FRAKTÁLOK

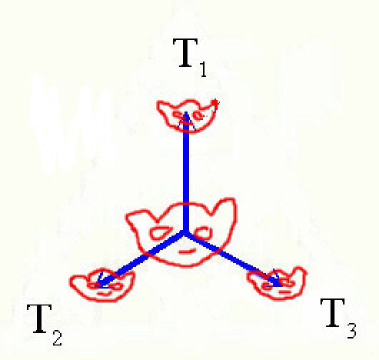
$$X = \left\{ \mathbb{R}^2 \text{ SÍK KORLÁTOS ZÁRT HALMAZAI} \right\}$$

$$d(A, B) = \Big[\text{MAXIMÁLIS ELTÉRÉS } A, B \text{ KÖZÖTT} \Big]$$



$W = ?$ $\qquad T_k(x) = \frac{1}{2}x + b_k \quad (k = 1, 2, 3)$

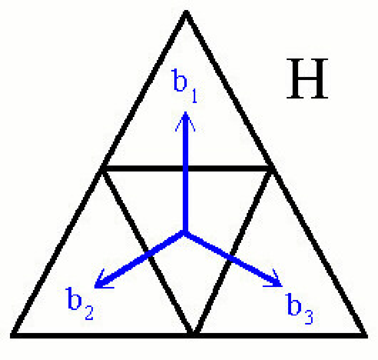


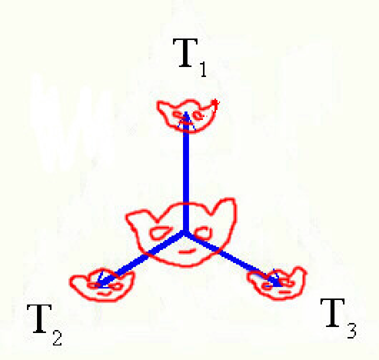


$W(A) := T_1(A) \cup T_2(A) \cup T_3(A) \quad$!!!!

FRAKTÁLOK

$W = ?$ $\qquad T_k(x) = \frac{1}{2}x + b_k \quad (k = 1, 2, 3)$





$W(A) := T_1(A) \cup T_2(A) \cup T_3(A)$!!!!

FRAKTÁLOK

ÁLTALÁBAN IS:

Ha
(X, d) *teljes és* $T_1, \ldots, T_n$ *tetszőleges erős kontrakciók d-szerint*
akkor
$W : A \mapsto T_1(A) \cup \cdots \cup T_n(A)$ *erős kontrakció*
a hamazok d-távolsága szerint.

EZÉRT H, $W(H)$, $W^2(H), \ldots$ *KONVERGÁL valamilyen alakzathoz !*

FRAKTÁLOK

ÁLTALÁBAN IS:

Ha
(X, d) *teljes és* $T_1, \ldots, T_n$ *tetszőleges erős kontrakciók d-szerint*

akkor
$W : A \mapsto T_1(A) \cup \cdots \cup T_n(A)$ *erős kontrakció*
a hamazok d-távolsága szerint.

EZÉRT H, $W(H)$, $W^2(H), \ldots$ *KONVERGÁL valamilyen alakzathoz !*

FRAKTÁLOK

ÁLTALÁBAN IS:

Ha
(X, d) *teljes és* $T_1, \ldots, T_n$ *tetszőleges erős kontrakciók d-szerint*
akkor
$W : A \mapsto T_1(A) \cup \cdots \cup T_n(A)$ *erős kontrakció*
a hamazok d-távolsága szerint.

EZÉRT H, $W(H)$, $W^2(H), \ldots$ *KONVERGÁL valamilyen alakzathoz !*

FRAKTÁLOK

ÁLTALÁBAN IS:

Ha

(X,d) *teljes és* $T_1,\dots,T_n$ *tetszőleges erős kontrakciók d-szerint*

akkor

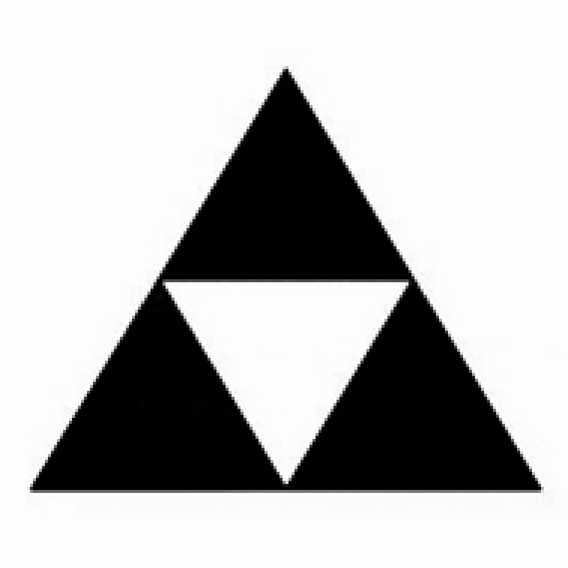
$W : A \mapsto T_1(A) \cup \dots \cup T_n(A)$ *erős kontrakció*

a hamazok d-távolsága szerint.

EZÉRT $H,\ W(H),\ W^2(H),\dots$ *KONVERGÁL valamilyen alakzathoz !*

VISSZA A HÁROMSZÖGHÖZ — H

$W(H)$



$W^2(H) = W(W(H))$

$W^3(H) = W(W^2(H))$

$W^4(H) = W(W^3(H)))$

TAJ MAHAL