

LED: PD13

Output voltage characteristics

$$I = \frac{V}{R}$$

$$R = \frac{V}{I}$$

$$E5V = 4,74$$

$$5V_{STC} = 5,07V$$

cool-in in:

Time

1 unit is big enough?

Alternation 1-2 units

Time

capture interval

PWM signal

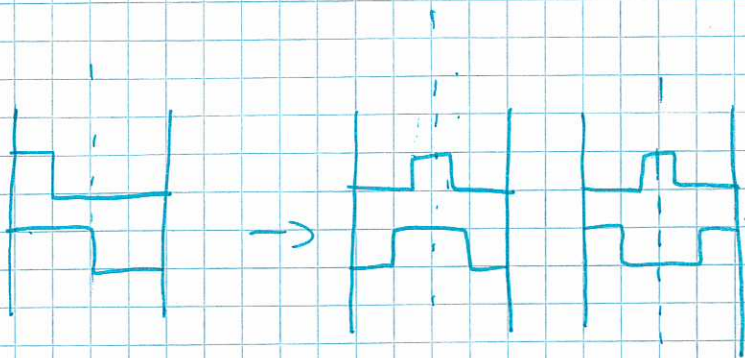
1, center-aligned PWM signal

2 PWM signal

2, normal signal - A/D digital signal

2 hr. digital in, digital, normal signal, etc

- Ziel:
- wegen 2a periodisch:
 - in Schrittweite λ gehen
 - an 1 richtig schreiben



$$\frac{2a \cdot N}{2 \cdot 2a \pm \frac{N}{2}}$$

C_1 10 948

10 976

10 977

C_2 5562

5553

5555

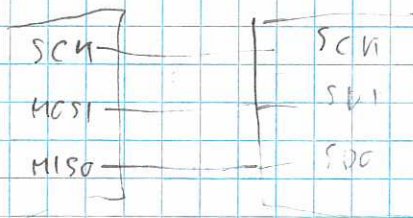
1 count: $\frac{1}{80} \cdot 10^6$

$\tau: 10 \times 10, 11 \cdot \frac{1}{80} \cdot 10^6$

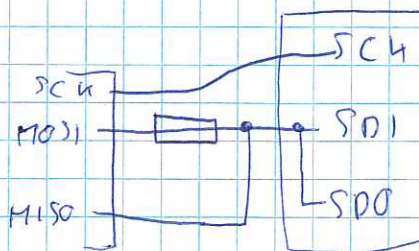
$\frac{1}{80} \cdot 10^6 \text{ ms}$

$\frac{1}{80} \text{ ms} = 12,5 \text{ ms}$

SPI



deh' eku:



Ellerilla's antide: loyem allan, loy a slone 1-2 mA-oid
regalir inut ne lallja aaglitana (niam)

nasim: a pascitidapacitandut pl lall tildenie ne
ellerilland, or ee nary inajehel gudet daret

PA5 - CS

PA6 - MOSI

PA7 - MISO

PA1 - SCK

CS $\rightarrow$ 1

CS $\rightarrow$ 0

~~PA5~~ Write (0x07)

Read (status register) (1 or 8 byte)

CS $\rightarrow$ 1

~~Write out [256]~~

idx = status_register >> 1;

buffer_out[256] (indexable)

buffer_in[256]

Kapazität berechnen

$$R = 10 \text{ k}\Omega$$

$$C_1 = 220 \text{ nF}$$

$$\Delta u = 1 \text{ V} = |u_2 - u_1|$$

$$C_2 = 22 \text{ nF}$$

$$u_1 = 2 \text{ V}$$

$$u_2 = 1 \text{ V}$$

t = t_{abgleich}

$$u_2 = u_1 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

$$\frac{u_2}{u_1} = 1 - e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$e^{-\frac{t}{RC}} = 1 - \frac{u_2}{u_1}$$

$$-\frac{t}{RC} = \ln\left(1 - \frac{u_2}{u_1}\right) = -0,6931$$

$$\frac{t}{RC} = 0,6931$$

12 Hz
abg

$$\begin{cases} t_1 = 0,6931 \cdot 10 \cdot 10^3 \Omega \cdot 220 \cdot 10^{-9} \text{ F} = 1,5 \text{ s} \\ t_2 = 0,15 \text{ s} \end{cases}$$

count / freq

↙
↘
↖
↗

$$C = \frac{t}{R \cdot 0,6931} \cdot 10^6 \text{ nF}$$

↑ ↑
count count

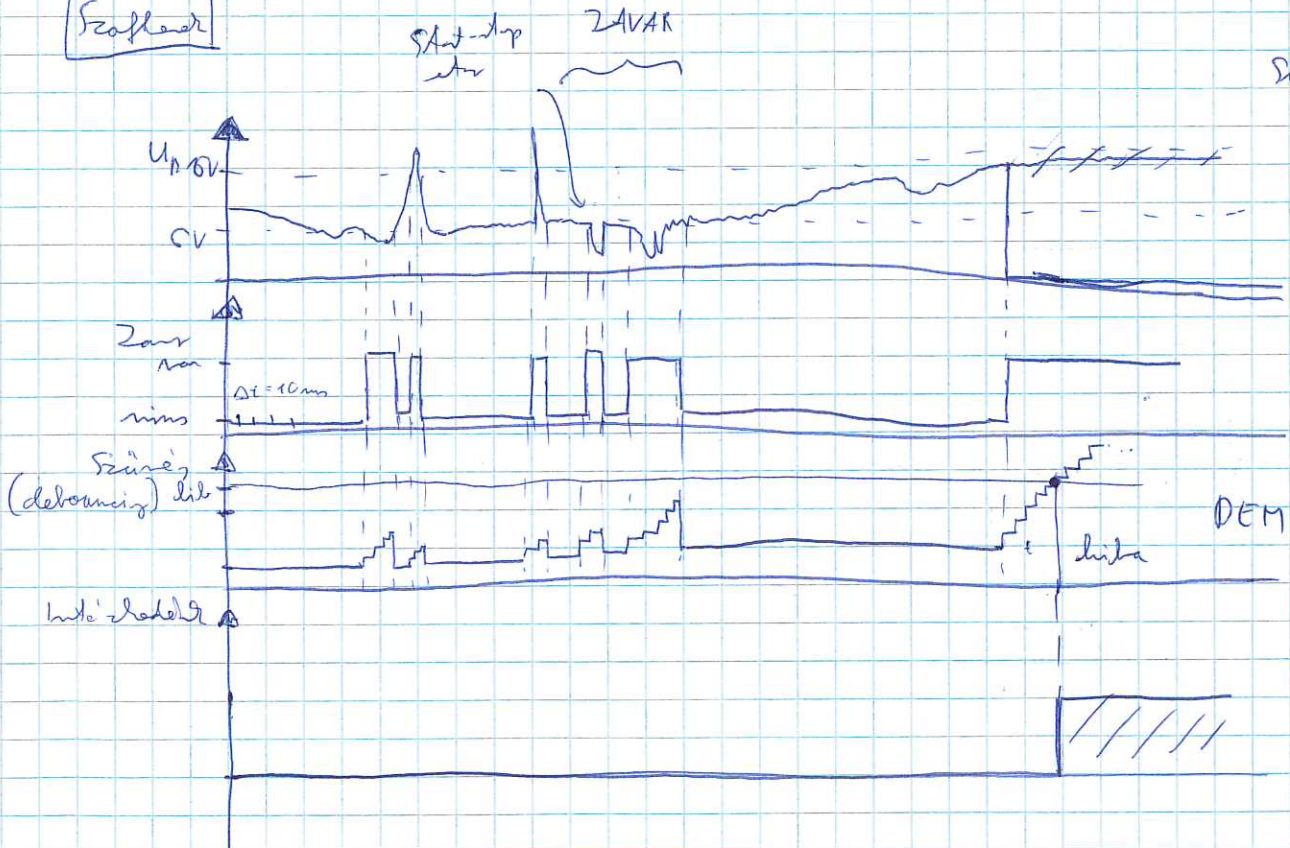
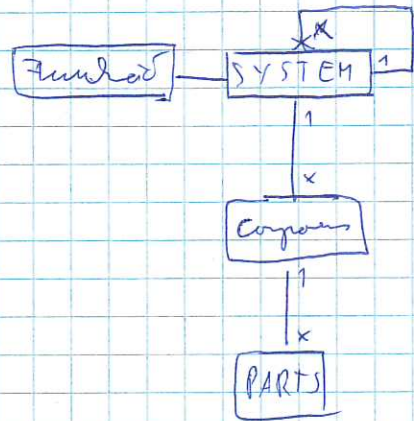
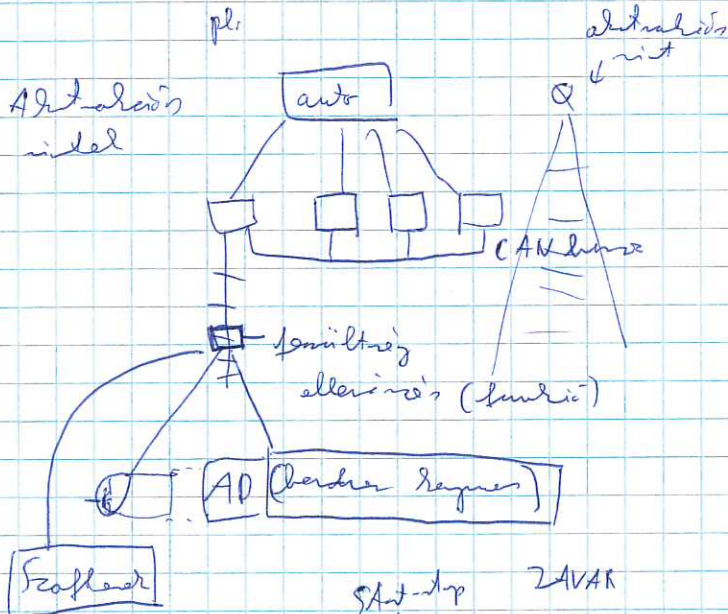
$$2 \text{ V} = \frac{x}{(2-1)} \cdot 7700 \rightarrow x \rightarrow 2482$$

$$1 \text{ V} = \frac{x}{(2-1)} \cdot 7700 \rightarrow x \rightarrow 1241$$

Alkalmazás

rendszerek

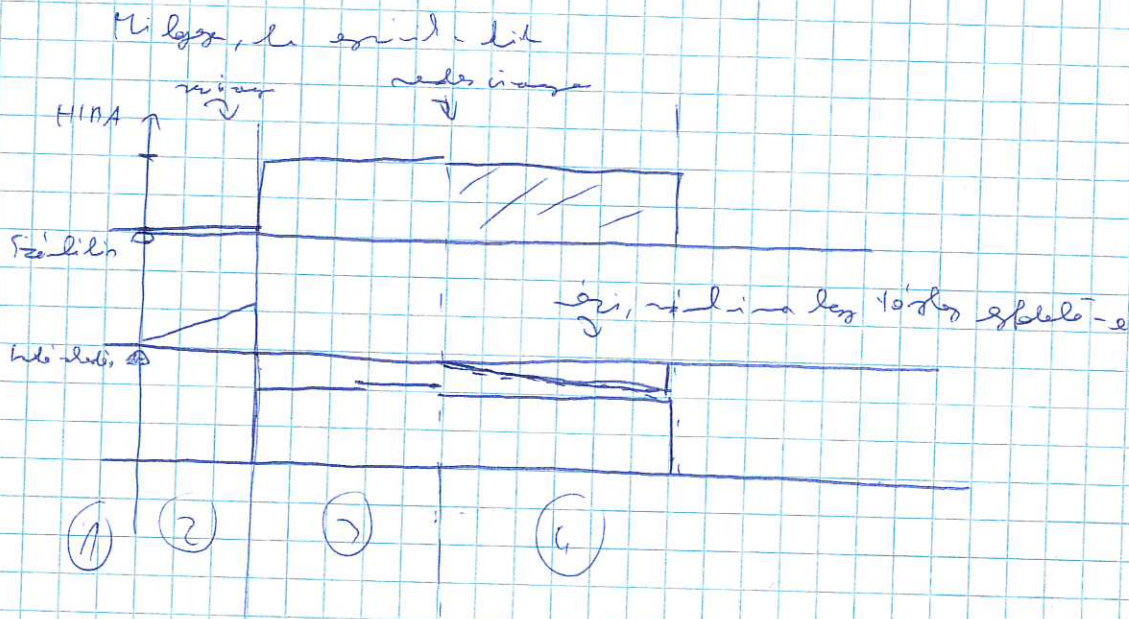
Autonóm rendszer



System != failure

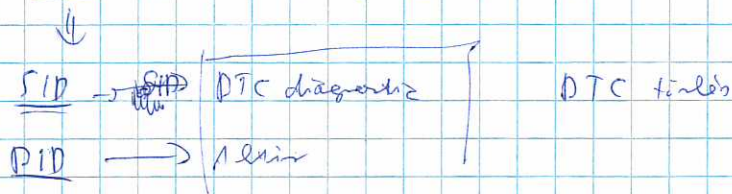
Zavar != hibák

DEM - diagnosztikai rendszer

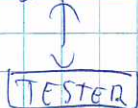


DTC szolvasása

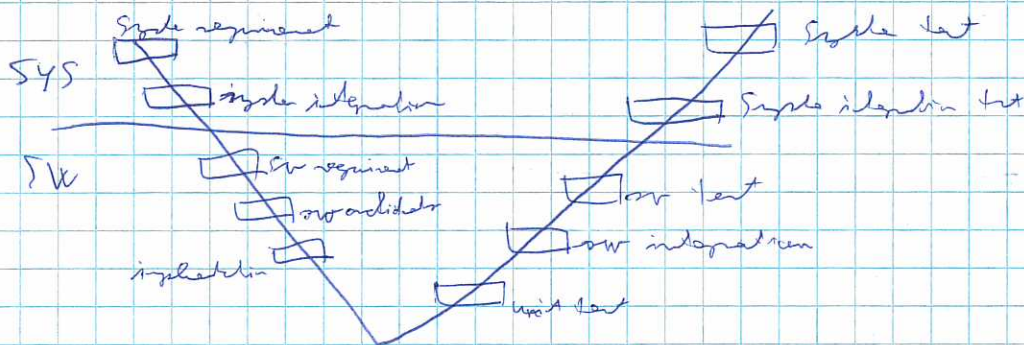
UDS (Unified Diagnostic Service)



ECU - electronic control unit

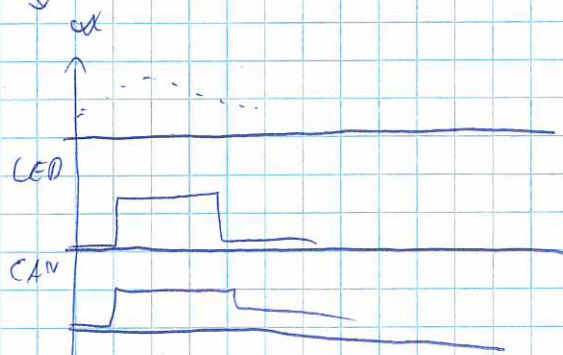
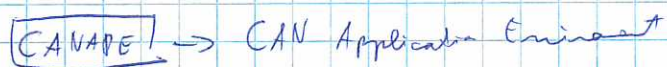
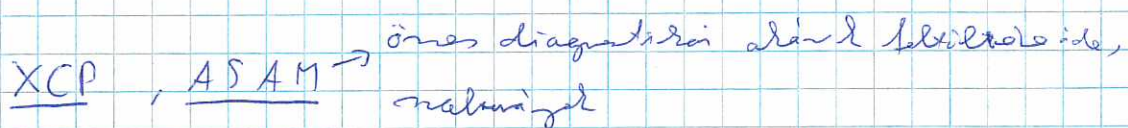


ASPICE (Softwarefejlesztési szabvány)

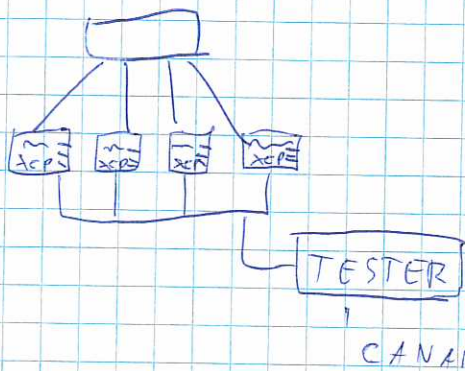


személyi felelősség a szoftverfejlesztésben és a tesztelésben

személyi felelősség a szoftverfejlesztésben és a tesztelésben
személyi felelősség a szoftverfejlesztésben és a tesztelésben

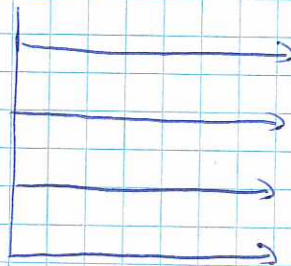


→ regularitet,
analizirala,
hibridizacija



✓ auto valós idejű működését ellenőrzés

CAN PE



Közelbets a fejlesztes életciklusa.

Rejtett hibák felismerése.

Reagorant headendo

- APC Schwingung: 500π 200Hz

Einheit:

$$R = \frac{R_{ref} \cdot x}{N - x}$$

x = akt. Stütz

$$N = 2^h = 2^{17} =$$

$$\left| \frac{\Delta R}{R} \right| = \left| \frac{N}{x(N-x)} \Delta x \right| + \left| \frac{\Delta R_{ref}}{R_{ref}} \right|$$

1/

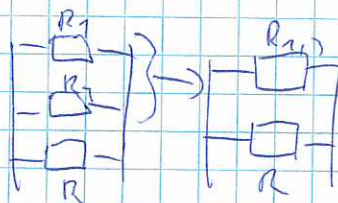
$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}$$

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R} + \frac{1}{\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}}$$

$$= \frac{1}{R} + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$R_{e1,2} = \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \right)^{-1}$$



$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_e} - \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right)^{-1}}$$

R_e

R_1 100k	R_2 10k	R_3 1k	R_{RET}	R_{min} 0,5%	R_{max} 0,5%
1	0	0	100k		
1	1	0			
1	1	1			
0	1	0	10k		
0	1	1			
0	0	1	1k		
1	0	1			

10k: [2626,7 ; 2757,7]

1k: [262,67 ; 275,77]

100k: [26267 ; 275770]

1,5%

1k: [210,66 ; 2218,9]

10k: [2106,6 ; 22189]

100k: [21066 ; 221890]

0,1 0,1 0,1

1,54%

$$\left(\frac{a+d}{a+b}\right) \cdot a$$

$$\frac{1}{10} = \frac{\frac{4096}{2048 - \sqrt{2048^2 - \frac{16784}{\gamma - 0,01}}} - 1}{\frac{4096}{2048 + \sqrt{2048^2 - \frac{16784}{\gamma - 0,01}}} - 1}$$

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_i} - \frac{R_i + R_j}{R_i \cdot R_j}$$

$$|\Delta R| = \frac{R_{ref} \times}{(N-x)^2} \cdot \Delta x + \Delta R_{ref}$$

$$|\Delta R|^2 = \left(\frac{R_i^2 \cdot R_j^2}{\left(\frac{R_{ref}(R_i + R_j) + R_i \cdot R_j}{A} \right)^2} \right)^2 \cdot \Delta R_{ref}^2 + \left(\frac{R_i^2 \cdot R_j^2}{A} \right)^2 \cdot \Delta R_i^2 + \left(\frac{R_{ref}^2 + R_i^2}{A} \right)^2 \cdot \Delta R_j^2$$

$$\Delta R_{ref} = \sqrt{\frac{\left(\frac{R_{ref}^2 + R_i^2}{A} \right)^2 \cdot \Delta R_j^2 + \left(\frac{R_i^2 \cdot R_j^2}{A} \right)^2 \cdot \Delta R_i^2 - |\Delta R|^2}{\left(\frac{R_i^2 \cdot R_j^2}{A} \right)^2}} \quad \left. \begin{array}{l} \text{allein} \\ \text{mit} \end{array} \right\}$$

$$|\Delta R|^2 = \frac{D^2}{A^2} \Delta R_{ref}^2 + \frac{C^2}{A^2} \Delta R_i^2 + \frac{D^2}{A^2} \Delta R_j^2$$

$$\sqrt{|\Delta R|^2} = \frac{A}{A^2}$$

$$\frac{D^2}{A^2} \Delta R_{ref}^2 = \frac{C^2}{A^2} \Delta R_i^2 + \frac{D^2}{A^2} \Delta R_j^2 + |\Delta R|^2 \quad \cdot A^2$$

enum { R_1=1, R_10=2, R_100 } // R_ref, '10' l
 uint8_t STATE -label: R_1, R_10, R_100

#define ~~delta~~ R_1_min=710.66, R_1_max=7218.9 N=4048
 R_10_min=7106.6, R_10_max=72189
 R_100_min=71066, R_100_max=721890
 delta_X=4

typedef
 struct resistance {
 float value;
 float rel.
 float error;
 } resistance;

resistance calculate_resistance { ~~ADC value~~ x }
 ADC value

{
 switch (STATE) {

case R_1
 R_i = R_2
 R_j = R_3
 R_ref = R_1
 break;

case R_2
 R_i = R_1
 R_j = R_3
 R_ref = R_2
 break;

case R_3
 R_i = R_1
 R_j = R_2
 R_ref = R_3
 break;

}

$$R_e = (R_{ref} \cdot x) / (N - x);$$

$$R_{var} = 1 / \left(\left(1 / R_{ref}^2 \right) - \left((R_i + R_j) / (R_i \cdot R_j) \right) \right);$$

$$\Delta R_e = (R_{ref} - x) \cdot \Delta x / (N - x)^2;$$

$$\Delta R_i = R_i \cdot 0.01;$$

$$\Delta R_j = R_j \cdot 0.01;$$

$$\text{float } A = (R_{\text{res}}(R_i + R_j) + R_i \cdot R_j)^{1/2};$$

$$\text{diff_Re_Rres} = (R_i^2 \cdot R_j^{1/2}) / A;$$

$$\text{diff_Re_Ri} = (R_{\text{res}}^{1/2} \cdot R_j^{1/2}) / A;$$

$$\text{diff_Re_Rj} = (R_{\text{res}}^{1/2} \cdot R_i^{1/2}) / A;$$

$$\text{delta_Rres} = \text{sqrt}((\text{diff_Re_Ri}^2 \cdot \text{delta_Ri}^2 + \text{diff_Re_Rj}^2 \cdot \text{delta_Rj}^2));$$

$$\text{resistor } R = \{R_{\text{res}}, R_{\text{value}}\};$$

return R;

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_m} + \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_j} = \frac{1}{R_m} + 1,01 \cdot 10^{-7}$$

$$\frac{1}{R_m} = \frac{1}{R_e} - \frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_j} = \frac{1}{R_e} - 1,01 \cdot 10^{-7}$$

$$R_m = \frac{1}{\frac{1}{R_e} - \frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_j}}$$

$$\frac{1}{R_e} > 1,01 \cdot 10^{-7}$$

$$\frac{R_{\text{res}} \cdot x}{N - x} = R_e < 950$$

$$\frac{10900 \cdot x}{4000 - x} < 950 < 1000 / 1000$$

$$\frac{10 \cdot x}{4000 - x} < 1$$

$$10 \cdot x < 4000 - x$$

$$11 \cdot x < 4000$$

$$x < 363$$

$$1/2 \cdot (\Delta R_i^2 - \Delta R_e^2) / \text{diff } R_e - R_{\text{mean}}^2)$$

$$\frac{D^2}{A^2} \Delta R_i^2 = (DR)^2 - \frac{C^2}{A^2} \Delta R_i^2 - \frac{D^2}{A^2} \Delta R_j^2$$

$$\Delta R_i^2 = \frac{A^2}{D^2} \Delta R^2 - \frac{C^2}{D^2} \Delta R_i^2 - \frac{D^2}{D^2} \Delta R_j^2$$

gegeben:

$$A^2 \sim 10^{27}$$

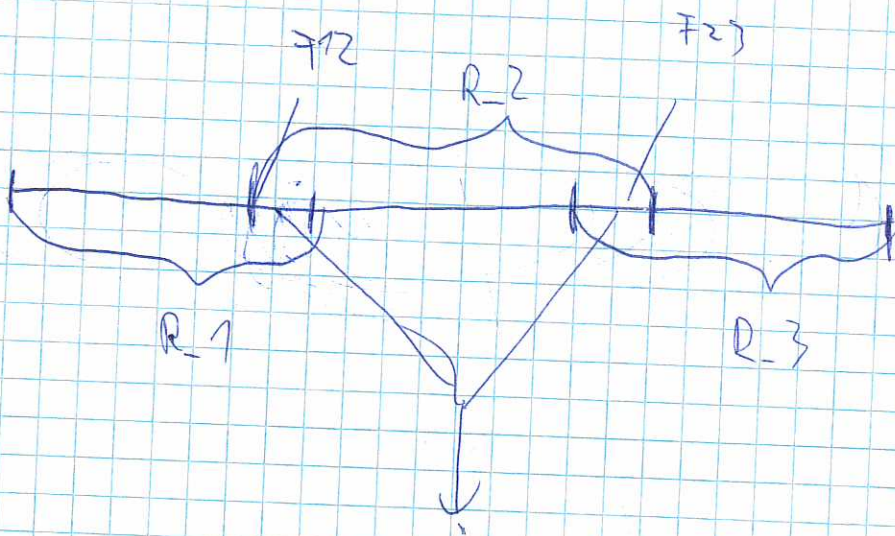
$$R, C, D^2 \sim 10^{17} - 10^{18}$$

$$\frac{A^2}{D^2} \approx \frac{10^{27}}{10^{16}} \approx 10^{11}$$

$$\frac{C^2}{D^2} \approx \frac{10^{17}}{10^{16}} \approx 10^1$$

$$\frac{D^2}{D^2} = \frac{10^{17}}{10^{16}} \approx 10^1$$

$$\begin{matrix} \approx 10^{1,5} \\ 10^{-1,5} \\ \sqrt{10} \end{matrix}$$



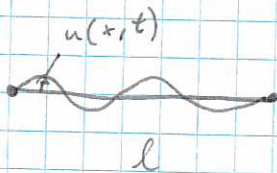
$R_p = R$
 gl. do.
 $\text{mes}(R)$

Hümmat

Hüllengleichung

10

längere x-achsen, t-achsen



Kipwinkel hier negativ

T fest ist

a hier homogen, ρ räumlich (kg/m)

" $T = m \cdot a$ "

A diagram of a small element of a string of length dx . Tension forces T are applied at both ends. The net force is given by $\approx \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx$.

$$T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} T \sim \text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ \rho \sim \frac{\text{kg}}{\text{m}} \end{array} \right\} \frac{T}{\rho} = \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2$$

$$c := \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

y : lassen ("separieren") nicht
schleichen

$$y := c \cdot t$$

$$y := c \cdot t$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial A}{\partial t} & \frac{\partial A}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A}{\partial y} & \frac{\partial A}{\partial \bar{x}} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial x} \\ \frac{\partial \bar{x}}{\partial t} & \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial A}{\partial y} & \frac{\partial A}{\partial \bar{x}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \frac{\partial A}{\partial y} & \frac{\partial A}{\partial \bar{x}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial A}{\partial t} & \frac{\partial A}{\partial x} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = c \frac{\partial A}{\partial y} \quad \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 A}{\partial y^2}$$

$$c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$\boxed{\Delta u = 0} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

D'Alembert helgeteridone

$$w = x + y$$

$$r = x - y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

w, r-hel

$$w = x + y$$

$$y = w - x$$

$$r = x - w + x$$

$$r + w = 2x$$

$$x = \frac{r + w}{2}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial w} & \frac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial w} & \frac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial w} + \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial r} \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial w} + \frac{\partial}{\partial r}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial r}$$

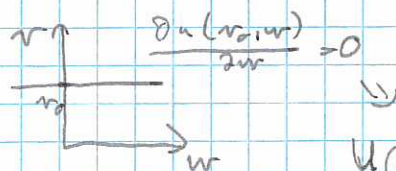
$$g = \frac{\partial}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial}{\partial w} \left[\frac{\partial}{\partial w} + \frac{\partial}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial}{\partial w} + \frac{\partial}{\partial r} \right] = \frac{\partial^2}{\partial w^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial w \partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial w^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial w \partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}$$

$$\boxed{\partial u = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial w \partial r} = 0} \rightarrow \text{D'Alembert}$$

$$u = \frac{\partial u}{\partial r} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial r} = 0$$



$u(r_0, w) = \text{konstante,}$
 $\text{hängende } w\text{-Teil,}$
 $\text{da hängt } r_0\text{-Teil}$

$$u(x) = u_1(r) + u_2(w)$$

Teilg: $\frac{\partial u_1(r)}{\partial r \partial r} + \frac{\partial u_2(w)}{\partial w \partial w} = 0 + 0 = 0$

$\uparrow$ $\uparrow$
 $\partial u = 0$ $\partial u = 0$

u_1, u_2 separat für,
 unabhängig

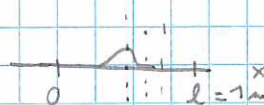
$$u(x, t) = u_1(r) + u_2(w) = u_1(x + ct) + u_2(x - ct) =$$

$$= u_1(x - ct) + u_2(x + ct)$$

$$u(x, t) = u_1(x - ct) + u_2(x + ct)$$

Spezielles Netz: 1, $u_2 = 0$
 "nieder"

$t = 0$



$l = 1\text{m}, c = 100\text{m/s}$

$$u(x, 0) = u_1(x)$$

$t = 0,0001$



$$u(x, 0,0001) = u_1(x - 0,01)$$

$t = 0,0002$



$$u(x, 0,0002) = u_1(x - 0,02)$$

$$2, u_1 = 0$$

A másik irányba mozdul el

Amellettől hátravan

Az általános eset levezetése

$$u(x, t) = u_1(x - ct) + u_2(x + ct)$$

$$u(0, t) = 0 \quad (\text{szimmetria feltétel})$$

$$u(l, t) = 0 \quad (\text{szimmetria feltétel})$$

$$0 = u(0, t) = u_1(-ct) + u_2(ct)$$

$$u_1, u_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$0 = u(l, t) = u_1(l - ct) + u_2(l + ct)$$

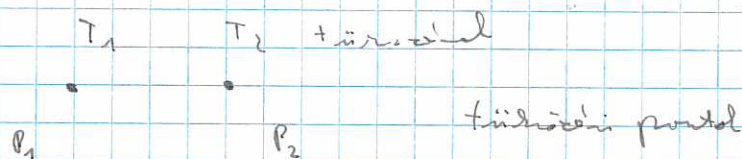
szimmetria feltétel

$$u_1(-x) + u_2(x) = 0 \quad \forall x$$

$$u_1(-x) = -u_2(x) \quad (x = ct = \text{arbitr.})$$

u_1, u_2 tényleg párosak (origóra)

l -re is tényleg párosnak kell lenni



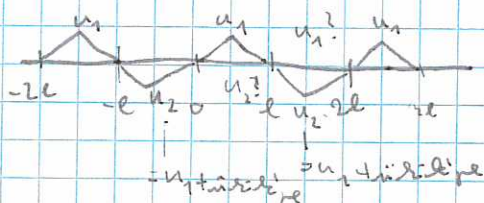
$$T_1: [u_1 \text{ graf}] \rightarrow [u_2 \text{ graf}]$$

$$T_2: [u_2 \text{ graf}] \rightarrow [T_2 T_1 [u_1 \text{ graf}]] = \sum_{2l} [u_1 \text{ graf}]$$

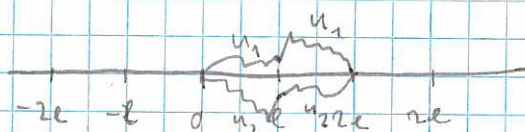
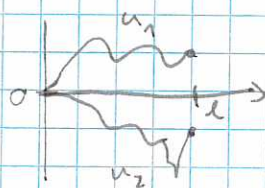
eltolódás $2l$ -kel

u_1 és u_2 $2l$ periodikus

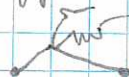
u_1 és u_2 relető: $u_1(0) = u_2(0) = 0$



Adott



Es lesz minden hullámot $0, l$ végpontoknál



Alapvető:

- ① Gitár $u(x,0)$ adott, 0 határolás $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$
- ② Zongora 0 határolás, de $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$ adott



Mit tanulunk a hullám? (részletre néz)



c hullámhossz

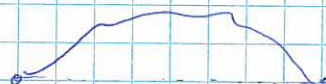
Készlet alatti

alatt a $t=0$ -ra

$$u(x,0) = u(x)$$

sebesség a $t=0$ -ra

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v(x)$$



Alupurathal:

a, gitar $V(x) = 0$, $u(x)$ adult

h, zongra $u(x)=0$, $V(x)$ adott

Erhöhter ~~degenerat~~ pro'leben

A'etaleimn set: $u(x), v(x) \neq 0$

(weiter gegeben: $u(0) = u(l) = v(0) = v(l) = 0$)

Superpozici: $u(x,t) = u_{\text{gitar}}(x,t) + u_{\text{zorgne}}(x,t)$

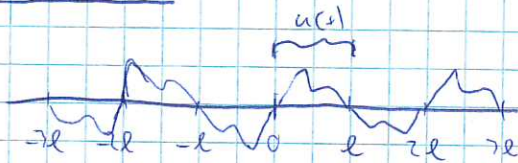
ok:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} \cdot \frac{1}{c^2} = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

(a) ixtlil xitlani, zongorina,
dinaz ingine)

Tibbidionia bulligaelet
pl.

Gitarre ergo dicitur:



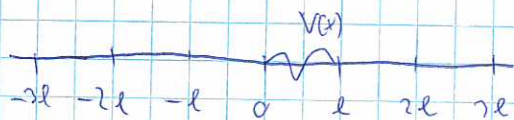
- 2 l periodicitás
- gonopontura tükörzóna

$\bar{u}(x)$ - Lösung für $u(x) = 0$

$$\bar{u}(y^*) = \frac{1}{2} \bar{u}(x + ct) + \frac{1}{2} \bar{u}(x - ct)$$

Zongor golden

Longwave equation:



alternating
↓

$$u(x,t) = u_1(x+ct) + u_2(x-ct)$$

~~from~~

$$u_1 + u_2 = 0$$

$$u_2 = -u_1$$

$$u(x,t) = u(x+ct) - u(x-ct) \quad u=?$$

$$\left. \frac{du}{dt} \right|_{t=0} u(x,t) = V(x)$$

$$u'(x+ct) \cdot c \Big|_{t=0} - u'(x-ct) \cdot (-c) \Big|_{t=0} = V(x)$$

$$u'(x) + u'(x) = \frac{1}{c} V(x)$$

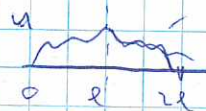
$$u'(x) = \frac{1}{2c} V(x)$$

$$u(x) = \int_{-x}^x \frac{1}{2c} V(s) ds$$

∫

V von alternieren

$$\int_{-x}^x \frac{1}{2c} V(s) ds$$



u eine nicht-ideale,
2π-periodische

2D → 3D

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \Delta u$$

~
útkör,
vagyis idő

$$\tilde{\Delta} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \Delta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

Elliptikus $\tilde{\Delta} u = 0$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right)$$

1D $\rightarrow$ 2D



$\Omega = \mathbb{R}^2$

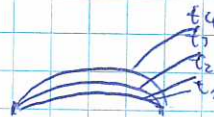
alapalakzat: $\bigcirc$

és $\square$

Fourier-sorozat: állathullámok felépítésére

$$u = u(x_1, \dots, x_n, t)$$

$$u = f(t) u(x_1, \dots, x_n)$$



Különböző időpillanatokban
vagy az az idő

Teljesen szabad: állathullámok superpozíciója

minden t esetén a megoldások felépítésére

Allgemeines Beispiel

$$\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n^2}$$

$$u(x_1, \dots, x_n, t) = f(t) u(x_1, \dots, x_n)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = f(t) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f'(t) u(x_1, \dots, x_n)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f''(t) u(x_1, \dots, x_n)$$

$$\frac{1}{c^2} \cdot f''(t) \cdot u = \sum_{i=1}^n f(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

Trick $\div f(t) \cdot u(x_1, \dots, x_n)$

$$\frac{1}{c^2} \frac{f''(t)}{f(t)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{u(x_1, \dots, x_n)} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

$$\left. \vphantom{\frac{1}{c^2} \frac{f''(t)}{f(t)}} \right\} \Rightarrow f''(t) = f(t) \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

$\Downarrow$
 sind alle Summanden
 konstant

$$\frac{1}{c^2} \frac{f''(t)}{f(t)} = k = \sum_{i=1}^n \frac{1}{u(x_1, \dots, x_n)} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

$$f''(t) = k c^2 \cdot f(t)$$

$\Downarrow$
 Lösung ist regulär
 nicht (energieunendlich
 nicht)

$$f''(t) = kc^2 f(t)$$

egésen: Laplace- transzformált: sin, cos, sinh, cosh
vél a kvadratúra

$$f(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) = \bar{A} \sin(\omega t + \varphi)$$

$\omega = 0$ szűrés alatt megvan

$$f''(t) = kc^2 f(t)$$

$$\frac{d^2 \sin(\omega t)}{dt^2} = kc^2 \sin(\omega t)$$

$$\frac{d \sin(\omega t)}{dt} = \omega \cos \omega t$$

$$\frac{d^2 \sin(\omega t)}{dt^2} = -\omega^2 \sin \omega t$$

$$-\omega^2 \sin(\omega t) = kc^2 \sin(\omega t)$$

$$\boxed{-\omega^2 = kc^2}$$

$\Rightarrow$ periodikus mozgás

időmérés alatt ~~megvan~~ megvan

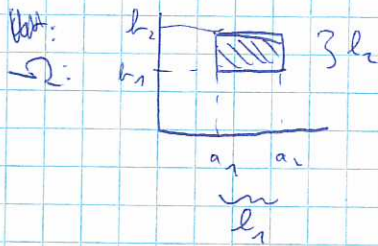
$$\frac{\Delta u}{u} = k$$

$$\Delta u = -\left(\frac{w^2}{c}\right) u$$

parciális diff. egyenlet (nagysebesség)



minden < 2 alapszámú
20-ban (csak $\square$)



$$u(x,y) = \sin(\text{cut}) \cdot \underline{u(x,y)}$$

- räumliche Verteilung

$$u_1(x) + u_2(y)$$

$$\Delta u = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 u$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial x} \cdot u_2 \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_1''(x) u_2(y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u_2''(y) u_1(x)$$

$$u_1''(x) + u_2''(y) + u_1(x) \cdot u_2''(y) = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 u_1(x) u_2(y)$$

$$u_1(x) u_2(y)$$

$$\frac{u_1''(x)}{u_1(x)} + \frac{u_2''(y)}{u_2(y)} = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = R$$

$$\frac{u_1''(x)}{u_1(x)} = R \cdot \left(-\frac{u_2''(y)}{u_2(y)} \right)$$

$$\frac{u_1''(x)}{u_1(x)} = R_1, \quad \frac{u_2''(y)}{u_2(y)} = R_2$$

$$R_1 + R_2 = R = -\frac{\omega^2}{c^2}$$

$$u_1''(x) = R_1 u_1(x) \quad (\text{Gleichung erfüllt})$$

$\Downarrow$

$$u_1(x) = C_1 \sin(\omega_1 x + \varphi_1)$$

$$u_2(y) = C_2 \sin(\omega_2 y + \varphi_2)$$

$$\frac{u_1''}{u_1} = -\frac{\omega_1^2}{c^2} = R_1$$

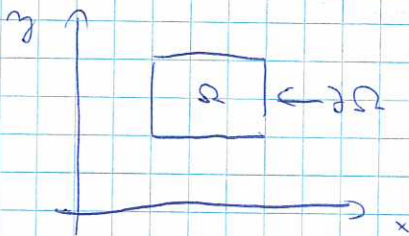
$$\frac{u_2''}{u_2} = -\frac{\omega_2^2}{c^2} = R_2$$

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = \omega^2$$

Teigklapp allöskallarmi:

$$u(x, y, t) = A \sin(\omega t + \varphi) \sin(\omega_1 x + \varphi_1) \sin(\omega_2 y + \varphi_2)$$

Uj önn



Allöskallmi Ω -nn

$0 \mid \partial \Omega$ bestimbar (pl. fínitett eðsö)

Indign: $u(x, y, t) = A(t) u_1(x) u_2(y)$

$\Downarrow$

$$= A \sin(\omega t + \varphi) \sin(\omega_1 x + \varphi_1) \sin(\omega_2 y + \varphi_2)$$

(Dimension ??)

$$\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2$$

$$\uparrow \quad \uparrow \quad \nearrow$$

$$\left[\frac{1}{\text{tid}} \right]^2 \quad \left[\frac{1}{\text{fjarlægð}} \right]^2 \quad \left[\frac{1}{\text{fjarlægð}} \right]^2$$

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \omega_1^2 + \omega_2^2$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$\Downarrow$

$$(-1 \cdot A) \frac{1}{c^2} \omega^2 \sin(\omega t + \varphi) \sin(\omega_1 x + \varphi_1) \sin(\omega_2 y + \varphi_2) = \omega_1^2 \cdot 1 + \omega_2^2 \cdot 1$$

Általában N dimenzióban

$$u(x_1, \dots, x_N, t) = A \cdot f(t) u_1(x_1) \dots u_N(x_N)$$

$$f(t) = \sin(\omega t + \varphi)$$

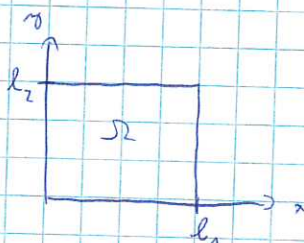
$$u_2(x) = \sin(\omega_2 x_2 + \varphi_2)$$

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \omega_1^2 + \dots + \omega_N^2 = \sum_{i=1}^N \omega_i^2$$

$$u(x, y, t) = 0, \text{ ha } x, y \in \partial\Omega$$

Határfeltétel: $u(\partial\Omega, t) \equiv 0$ (hővezetés a határon)

Válassz: $\varphi = 0$



(*"zongora hang"*)
(*"egykétes dob"*)
(*"harminc dobos a körbe"*)

$$u(x, y, t) = \sin(\omega t) \sin(\omega_1 x + \varphi_1) \sin(\omega_2 y + \varphi_2) = 0$$

ha: $(x, y) \in [\text{valamelyik oldal}]$



u analitikus fr. (szóval fejthető, egyelőre nézzük Taylor-sorát)

- nem minden négyzetes differenciálható fr. analitikus

pl. $\psi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$

$$\text{Taylor}(\psi(x)) = \sum_{k=1}^{\infty} 0 \cdot x^k \neq 0$$

Ha egy analitikus fr. 0 egy bizonyos egy helyen, akkor 0 a görbe egésze is.

$$u(x, y, t) = 0, \text{ bei } x=0 \parallel y=0 \parallel x=l_1 \parallel y=l_2$$

$$3, 2, \sin(\omega t) \sin(\omega_1 x + \varphi_1) \sin(\omega_2 y + \varphi_2) = 0$$

$$\sin(\omega t) \sin(\varphi_1) \sin(\omega_2 y + \varphi_2) = 0$$

$$\downarrow$$

$$[-1, +1]$$

$$\downarrow$$

$$[-1, +1]$$

$$\varphi_1 = 2\pi, \lambda \in \mathbb{Z}^+$$

$$\varphi = 2 \cdot \pi$$

$$\uparrow$$

$$\varphi_2 = \pi \cdot \mathbb{Z}$$

$$\sin(\omega_1 x + 2\pi) = (-1)^2 \sin(\omega_1 x)$$

$$\sin(\omega_2 y + 2\pi) = (-1)^2 \sin(\omega_2 y)$$



$$u(x, y, t) = A \sin(\omega t) \sin(\omega_1 x) \sin(\omega_2 y)$$

(A willkürlich)

3, 4,

$$u(l_1, y, t) = 0, \forall y, t$$

$$\sin(\omega t) \sin(\omega_1 l_1) \sin(\omega_2 y) = 0$$

$$\downarrow$$

$$\sin(\omega_1 l_1) = 0$$

$$\downarrow$$

$$\omega_1 l_1 = \pi \cdot \mathbb{Z}$$

$$\omega_1 = \frac{\pi}{l_1} \mathbb{Z} = \frac{l_1}{l_1} \pi, \lambda \in \mathbb{Z}$$

$$\text{heronüber: } \omega_2 = \frac{l_2}{l_2} \pi, l_2 \in \mathbb{Z}$$



$$\sin(\omega_1 x + \varphi_1) = \pm \sin\left(2\pi \frac{x}{l_1}\right)$$

$$\sin(\omega_2 y + \varphi_2) = \pm \sin\left(2\pi \frac{y}{l_2}\right)$$

$$u(x, y, t) = A \sin(\omega t) \sin(l_1 \pi \frac{x}{l_1}) \sin(l_2 \pi \frac{y}{l_2})$$

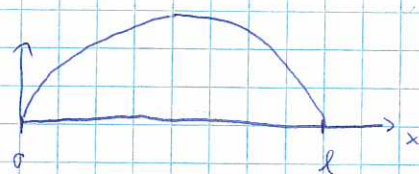
$$l_1, l_2 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \left(\frac{l_1 \pi}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{l_2 \pi}{l_2}\right)^2 = \pi^2 \left[\frac{l_1^2}{l_1^2} + \frac{l_2^2}{l_2^2} \right]$$

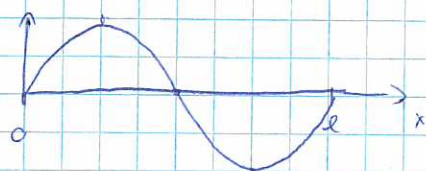
$$\omega = \pi \cdot c \cdot \sqrt{\left(\frac{l_1}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{l_2}{l_2}\right)^2}$$

Abmáßzahlen:

$$\sin(l_1 \pi \frac{x}{l_1})$$



$$l=1$$

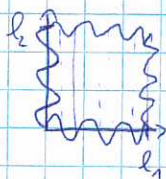


$$l=2$$

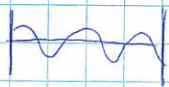


$$l=3$$

$$\sin(l_1 \pi \frac{x}{l_1}) \sin(l_2 \pi \frac{y}{l_2})$$



Klemm-Verfahren: $u'(0) = 0 = u'(l)$



sin befestigt an beiden
"cos($l_1 \pi \frac{x}{l_1}$)"

$$u(0)=0, \quad u'(l)=0 \quad \text{"orgoncsip szél"}$$



$$\sin\left(\left(2+\frac{1}{2}\right)\pi\frac{x}{l}\right)$$

Teljes (Dirichlet) (Carlsberg fjárművel ~500000 Ft-ért)

1. trükkös feladat: egy húrnál történő hullám

Fourier-sorok ~~széles~~ feladata

Alapfeladat (néhány rögzített húr)

$$u(x,t) = A \sin(\omega t) \sin\left(2\pi\frac{x}{l}\right)$$

$$1D \quad \omega = 2\pi c/l \Rightarrow \omega_0 = \pi \frac{c}{l}$$

$$2D: \quad \omega = c\pi \sqrt{\left(\frac{x_1}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{l_2}\right)^2}$$

Teljes: ω_0 egyenlőre l_1-t, l_2-t

szóval: Mely lehel a ballal az alábbiak a dolgom?

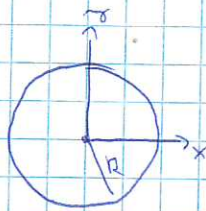
Ellenpélda: Talsorhi ~~húrnál~~ húrnál

Dolgozatpélda: alapfeladat példák

Köraların enlolar

(dab)

A'la-halland:



$$u(x, y, t) = \sin(\omega t + \varphi) \cdot U(x, y)$$

$u(x, y, t) = \sin(\omega t + \varphi) \cdot \underbrace{u_r(r)}_{\text{radialer Anteil}} \cdot u_z(z)$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y^2} = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

$$\frac{1}{c^2} - \omega^2 \sin(\omega t + \varphi) u_1(r) u_2(\varphi) = \sin(\omega t + \varphi) \cdot \left[\frac{1}{r} u_1'(r) \frac{1}{r} u_1'(r) + \frac{1}{r^2} u_2'(r) \right]$$

$$-\frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} v^2 \sin(\omega t + \varphi) = k = v^2 \left[\ddot{u}_r(r) + \frac{1}{r} \dot{u}_r(r) \right] = k_1$$

$$u^u(\varphi) = K_2$$

ne belat lipijen - in aliphatischer
1
uig spec. fr. Benzol w-el

Matematikai statisztika

Jegyzet: Viharos dala: A stochastic degen
- coospace - a feladat

1. Z_t : lin. gitter Ω
2. lin. zongora Ω
3. időbeli alapszám alapszám Ω
4. maximum likelihood becszés Ω
5. statisztika Ω

(Központi téma)

Valószínűségi osztályozás:

$$(\Omega, A, P/\mu)$$

alapszám
(előzetes)

$$\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$$

osztályozás: Számjegyek (!!) osztályozás Ω -ra

$$A = \{\text{osztályozás}\}, \quad \Phi \in \mathcal{P}(A)$$

osztályozás: $\{\Omega \text{ és osztályozás}\}$

$$A = \{\Omega \text{ osztályozás}\} \neq A^2$$

pl: osztályozás osztályozás

- osztályozás (osztályozás)

$$\Omega = \{\text{osztályozás}\}$$

probléma: van osztályozás, de osztályozás nem lehet osztályozás

90-3 kaja:

- Gyűjt:
- nétféjűk még van darabja
 - ismeretlen névféjű 2 db nagyon jó
 - jól be, hirtelen

Banach-Tarski paradoxon

U) unimodális tartomány-függvény nem lehet

↑
Térhőhöz halmaz fogalma

↑
Ha lehet tartományt még valószínűségi halmaz

A valószínűségi halmaz (melyet nem tartomány/tartomány)

≠

$\{ \Omega \text{ ismeretlen} \}$

$P/\mu = \text{valószínűség}$ Ω A -hez $P(A) = \{ A \text{ valószínűsége} \}$

pl. kocka

$P\{X \in \text{dohány} \} = \frac{1}{6}$ $(k=1, \dots, 6)$ ha nem csinált a kocka.

↑

statisztikai alapján létező

[x^2 pila]

$$A \subseteq \Omega \quad P(A) = \sum_{k=1}^6 \frac{1}{6} \begin{cases} 1 & \text{ha } k \in A \\ 0 & \text{ha } k \notin A \end{cases}$$

cinkelet kocka:

$$P(A) = \sum_{k=1}^5 \frac{1}{5} P\{k \text{ dohány} \} = \begin{cases} 1 & \text{ha } k \in A \\ 0 & \text{ha } k \notin A \end{cases}$$

Axiom 2

$$\begin{aligned} & \Omega \in \mathcal{A} \\ & 1. \emptyset \in \mathcal{A} \quad \text{d.h. } A_1, A_2, A_3, \dots \text{ mindig szerepel } \mathcal{A} \text{-ben, illetve} \\ & \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A} \end{aligned}$$

$$A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A} \quad A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad P: \mathcal{A} &\rightarrow [0, 1] & P(\Omega) &= 1 & P(\emptyset) &= 0 \\ & & P(\emptyset) &= 0 & P(\Omega) &= P(\emptyset) + P(\Omega) = 1 \end{aligned}$$

pl: egyenletes eloszlás: $\bigcirc$ - $n=1$ körön

hiszen $\text{hossza} = \Omega$

hiszen: $P(\Omega) = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$

A konstrukciója:

hasonló $\in \mathcal{A}$

$$P(T) = \frac{\text{hossz}(T)}{\Omega}$$



$\rightarrow$ A az a legkisebb körívszöghez tartozó szög, $1 - \dots$

Véletlenjel generátor

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

Minden olyan szöghez hozzárendeljük egy véletlenjel értékét, ha $\omega \in \Omega$

1. pl: egyenletes eloszlás: $X(\omega) = [\omega \text{ körívszögének értéke}]$

pl: $X(1) = 1$ -et választunk

2. pl: Egyenletes eloszlás:



$$X(\omega) = [\omega \text{ körívszögének értéke}]$$

vagyis egyenletes eloszlás: valószínűségi pontszám



$$X(\omega) = \dots$$



$$T(\omega) = \begin{cases} 10 & \text{da } r(\omega) \leq 1/10 \\ 9 & \text{da } 1/10 < r(\omega) \leq 2/10 \\ 8 & \text{da } 2/10 < r(\omega) \leq 3/10 \\ 7 & \text{da } 3/10 < r(\omega) \leq 4/10 \\ 6 & \text{da } 4/10 < r(\omega) \leq 5/10 \\ 5 & \text{da } 5/10 < r(\omega) \leq 6/10 \\ 4 & \text{da } 6/10 < r(\omega) \leq 7/10 \\ 3 & \text{da } 7/10 < r(\omega) \leq 8/10 \\ 2 & \text{da } 8/10 < r(\omega) \leq 9/10 \\ 1 & \text{da } 9/10 < r(\omega) \leq 1 \end{cases}$$

Feladat: $P(T=7) = \frac{\frac{1}{10} + \frac{1}{10}}{1} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

valószínűségi mérték nem lehet aláírni

$$(a < T < b) = \{\omega \in \Omega : a < T(\omega) < b\} \in \mathcal{A}$$

↓

született lehet legyen,

vagyis $P(a < T < b)$ mindig értelmezhető $\forall a, b \in \mathbb{R}$ -re

↓

$P(T \in D)$, ahol D az $\mathbb{R}$ -ben bármilyen halmaz, azaz számok halmaza (Borel-halmaz)

Valószínűségi mérték statisztikai modellek

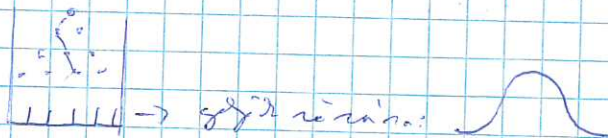
$P(A) \approx$ [A esemény bekövetkezési valószínűsége]

$P(G)$ - azaz a valószínűség

eredék: 777 kártya → valószínűségi számítás (~ 100-120)

Centrális határelosztás tétele

Ha n független, azonos eloszlású véletlen számok összege, akkor az eloszlás normális lesz.



X független, azonos eloszlású valószínűségi változó

$x_1, x_2, \dots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változó

$$P(a \leq x_n \leq b) = P(a \leq x \leq b) \quad \forall a, b, n$$

$$P(a \leq x_n \leq b, c \leq x_n \leq d) = P(a \leq x_n \leq b) \cdot P(c \leq x_n \leq d)$$

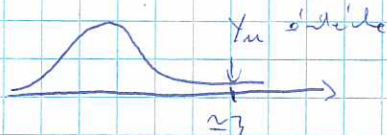
$\forall a, b, c, d$ számok
melyek

Gauss-függvény

$$P\left(a < \underbrace{\frac{x_1 + \dots + x_n - \frac{n}{\theta}}{\sqrt{\left(x_1 - \frac{1}{\theta}\right)^2 + \dots + \left(x_n - \frac{1}{\theta}\right)^2}}}_{Y_n} < b\right) \rightarrow \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

ha $n \rightarrow \infty, \forall a, b$

Az értéke 3, hogy:



$$P(Y_n > 3) \approx 0,001$$

"durva szám" nemre kell ehhez,
meg kell vizsgálni hogy a valószínűségi
eloszlásuk ilyen legyen

(n-jelen
n-jelen)

Kérdés: A doha emelt-e?

n feldobás

1. kérdés: annak a valószínűsége, hogy 6-ot dobunk, éppen $\frac{1}{6}$ -al?

$$P(G=6) \stackrel{?}{=} \frac{1}{6}$$

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{ha } G=6 \\ 0, & \text{ha } \neq 6 \end{cases}$$

X_1 - első dobás
 X_2 - második dobás
...

$$\sum_{i=1}^n X_i$$

$$X_1 + \dots + X_n = \# \text{ 6-ot } n \text{ dobásnál}$$

ω : egy sorozat

pl: $n=10$

$\Omega = \{1, \dots, 6\}^{10}$ (összes lehetséges)

Ω_{10} : 6^{10} elemű

$$\Omega_{10} \equiv \{(d_1, d_2, \dots, d_{10}) : d_1, d_2, \dots, d_{10} \in \{1, \dots, 6\}\}$$

$$X_2(\omega) = ? \quad \text{ha } \omega = (6, 5, 7, 1, 2, 5, 5, 5, 2, 2)$$

$$X_2(\omega) = ? \quad (\text{hányszor dobta a kocka a 2-t})$$

$$\text{ha } \Omega_{\infty} \equiv \{(d_1, d_2, \dots) : d_i \in \{1, \dots, 6\}, i \in \mathbb{N}^+\}$$

(végtelen sok dobásig a kocka)

2. Welches Ereignis ist es genau, dass endl. paarweise abh. sind?

$$P_{\text{pair}} = \{ \omega \in \Omega : x_i(\omega) \in \{2, 4, 6\}, i \in \mathbb{N}^+ \}$$

$$P(P_{\text{pair}}) =$$

$$P(x_1 \in \{2, 4, 6\}, x_2 \in \{2, 4, 6\}, \dots, x_n \in \{2, 4, 6\}) = P\left(\bigcap_{i=1}^n P(x_i \in \{2, 4, 6\})\right)$$

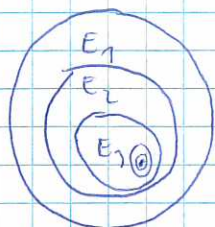
Ha. a. dabei sind függh. sind:

$$\prod_{i=1}^n P(x_i \in \{2, 4, 6\}) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$P(P_{\text{pair}}) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(x_1 \text{ pair}, x_2 \text{ pair}, \dots, x_n \text{ pair}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

Hier ist lim?

$$P_{\text{pair}} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x_i \text{ pair}\} \quad E_n \text{ genau } : x_1 \dots x_n \text{ pair}$$



$$E_1 \supset E_2 \supset E_3 \dots$$

$$\text{Axiom meint: } P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(E_n)$$

Pl: 100 dollars, die 20 Lats

- ne cinklētāl līdz 16 - dāvē 6 - omlēvē
?

Centrālā limitēšanas tēlā: $n \rightarrow \infty$

$$\frac{x_1 + \dots + x_n - n \cdot E(x)}{D(x) \cdot \sqrt{n}}$$

→ (standarta normalā, centrālā)

$$E(x) = \frac{1}{6}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 1 \mid 0 \mid 0 \mid 0 \mid 0 \mid 0$$

$$E(x) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \dots$$

$$6 \ 5 \ 4 \ 3 \ 2 \ 1$$

$$D(x) = [E(x - E(x))^2]^{1/2}$$

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$$

$$x - E(x)$$

$$E(x - E(x))^2 = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^2$$

6 pareizām kombinācijām → centrālā

$$\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^2$$

$$= \frac{25 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1}{6^3} = \frac{30}{216} = \frac{5}{36}$$

$$U_n = \frac{x_1 + \dots + x_n - n \cdot \frac{1}{6}}{\sqrt{n} \cdot \frac{5}{6}}$$

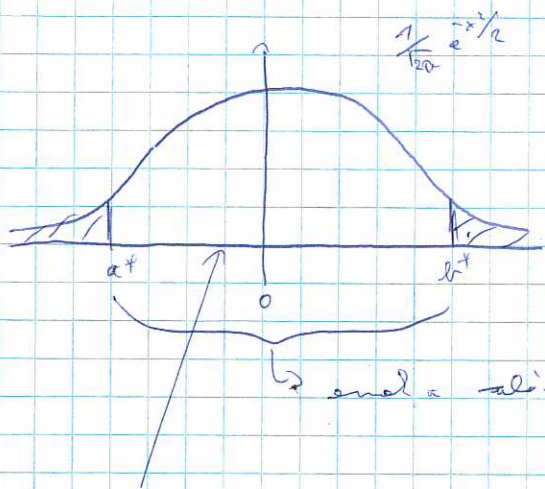
→ $N(0, 1)$

(Centrālā limitē, 1 novērtē, centrālā)

$$P(a < U_n < b) \Rightarrow \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

→ Gauss

Válasz a centrális limit-tételre: 1. lépés:



mind a két irányba a 95%-os

mind a két irányba a 95%-os

u_n statisztika ($n > 40$, konvergenz)

$$u_{100} = \frac{x_1 + \dots + x_n - 100 \cdot \frac{1}{6}}{\sqrt{100} \cdot \frac{1}{6}} = \frac{57 - \frac{100}{6}}{\sqrt{100} \cdot \frac{1}{6}}$$

$$u_{100} = \frac{195 - 100}{10 \cdot \frac{1}{6}} = 4,7828$$

$$b^* < u_{100}$$

Konklúzió: (a matematikailag nem döntendő)

$u_{100} > b^*$, $u_{100} \notin [a^*, b^*]$ tehát a feladat megoldása (döntés)

valószínűségi: "Az értékek többsége a feladat megoldása."

De: az összes statisztika, hogy
nem lesz a feladat megoldása (< 5%)"

Adat: Ha $Y = X_1 + \dots + X_n$, ahol $X_1, \dots, X_n$ függetlenek és
"független" statisztika, akkor Y eloszlása $\sim N(m, d)$

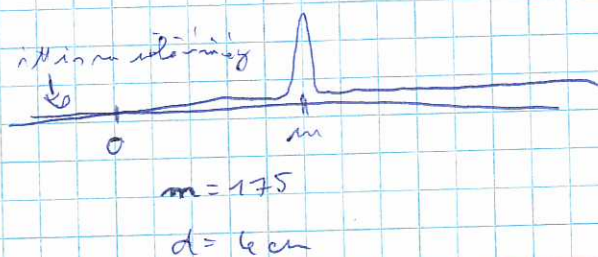
statisztika statisztika

phi érték megadás: $n \approx 85000$

Itt mindig döntendő

" H_2 átlagos eloszlás 1. golfozója van"

Kérdés: lehet-e végtelen sok dobásból az eloszlás megismerése?



→ ha végtelen sok dobás

Tartalék - Döntés

u. probla, T. probla, 2. és 3. T. probla, x² probla (valószínűségi eloszlás)

Közele:

- 1, Van egy kockadobás, hogy a játékos
(hisztelen, stb.) ^{x valószínűségi eloszlás} eredmények alapján annak
a valószínűsége, hogy az a kocka lesz

$$P(a < x < b) = \frac{1}{\sigma_1, \dots, \sigma_2} (a, b) \text{ leírja}$$

$\sigma_1, \dots, \sigma_2$ alatt

↳ lehet az indoklás is

- 2, Adott eloszlás $\sigma_1, \dots, \sigma_2$ valószínűségi eloszlás.

Vagyis végtelen $P(a < x < b) = \frac{1}{\sigma_1, \dots, \sigma_2} (a, b)$
elofordulási- és eloszlási eloszlás?

- 3, $x_1, \dots, x_n$ az egy adott eloszlás x , és
annak a függvénye

Megállástunk (előző) egy olyan $\mathbb{R}^k(x_1, \dots, x_n, \overset{x_1}{\theta_1}, \dots, \overset{x_k}{\theta_k})$
 és a^*, b^* mellett,
 függvény, amelynek annál a minimuma van, hogy

$$P(a^* < \mathbb{R}(x_1, \dots, x_n, \theta_1, \dots, \theta_k) < b^*) = 0,95$$

Ha $x_1, \dots, x_n$ a értékek, és $a^* < \mathbb{R}(x_1, \dots, x_n, \theta_1, \dots, \theta_k) < b^*$,
 akkor elfogadjuk, hogy tényleg $\theta_1, \dots, \theta_k$ az igazi paraméterek.

Példa: χ^2 próba

Kockadobásmű:	1	2	3	4	5	6	→ szám	} valószínűség
	15	15	15	15	20	20	→ ár	

Címeltre a kocka?

Ha címetlét ért: n dobásmű $\sim \frac{1}{6} \cdot n$ 1, 2, 3, 4, 5, 6

[általában k lehetőség, $p_1, \dots, p_k$ valószínűség]

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(U_i - n p_i)^2}{n p_i}$$

$U_1, \dots, U_k$ db, $n = U_1 + \dots + U_k$
 részletek

$$H_n \quad n \rightarrow \infty \Rightarrow \chi^2_{n,n} \xrightarrow{\text{konvergen}} \chi^2_k$$

↳ limitáció, mert kv.
 pl. táblázatban van

↳

Cinlelt-e a kocka?

$$\chi^2_{6,100} = \sum_{i=1}^6 \frac{(\#(i \text{ dolár min}) - \frac{100}{6})^2}{\frac{100}{6}}$$

$$\frac{100}{6} = 100 \cdot \frac{1}{6} \quad \begin{matrix} \text{relatív} \\ \text{dolás} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \# \\ \text{dolás} \end{matrix} \quad E\left(\begin{matrix} 100 \text{ db} \\ 1 \rightarrow 2 \text{ dolár} \end{matrix}\right) = E\left(\begin{matrix} 100 \text{ db} \\ 2 \rightarrow 3 \text{ dolár} \end{matrix}\right)$$

↑
100 dolárát i-sz a minélis értéke

$$p_i = P(1 \text{ dolárát } i \text{ jöttén}) = \frac{1}{6} \text{ a } j \text{-es dolárát}$$

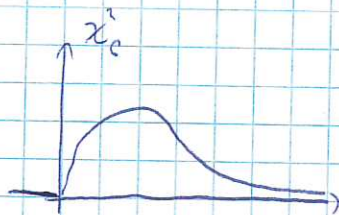
$$\chi^2_{6,n} = \sum_{i=1}^6 \frac{(\#(i \text{ dolárát}) - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i} \xrightarrow{\text{dolás}} \chi^2_6 \quad (\text{ha } n \rightarrow \infty)$$

|||

↑
hogy $p_1, \dots, p_6$ -től

$$P(\chi^2_{6,n} \in [a, b]) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P(\chi^2_6 \in [a, b]) = ?$$

$$\text{Teljesen igaz folytonos tr.} \quad \int_a^b f(x) dx \quad \text{hogy } P(\chi^2_6 \in [a, b]) = \int_a^b f_6(x) dx$$



f_6 : 6 db független standard normális dőlési relatívitégi nélkül szimmetrizációval az dőlés

↑
csökkentés, nagy kocka

beispiel?

x, y füssellen mal nicht. $P(X \in [a, b]) = \int_a^b f(x) dx$

$P(Y \in [a, b]) = \int_a^b g(x) dx$

beispiel: $X \sim N(0, 1)$ standard

$\hookrightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ (Gauss)

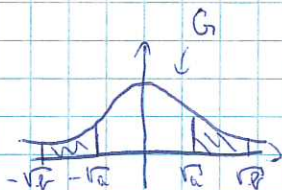
$X_1^2 \sim N(0, 1)$ standard symmetrisch, $G \sim N(0, 1)$ standard

$P(X_1^2 \in [a, b]) = P(G^2 \in [a, b]) = P(G \in [\sqrt{a}, \sqrt{b}] \cup [-\sqrt{b}, -\sqrt{a}])$
 $a, b \geq 0, a < b$

$P(X_1^2 \in [a, b]) = P(G \in [\sqrt{a}, \sqrt{b}]) + P(G \in [-\sqrt{b}, -\sqrt{a}])$

$= \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \int_{-\sqrt{b}}^{-\sqrt{a}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

$= 2 \cdot \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \stackrel{?}{=} \int_a^b f(x) dx$



$f(x) = ?$

$\int_0^{\sqrt{b}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_0^b f(y) dy$

$\frac{G(\sqrt{b})}{2\sqrt{b}} = f(b)$

$f(b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{b}{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{b}}$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot e^{-\frac{x}{2}}$

Newton-Leibniz istal

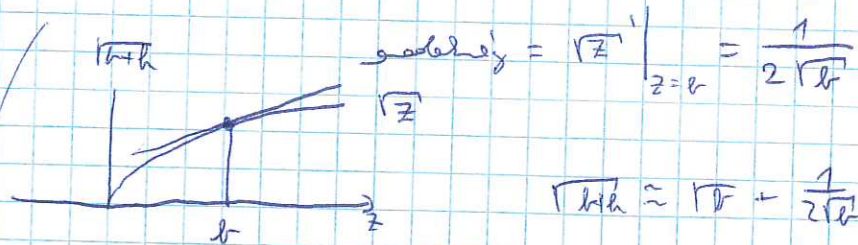
$\frac{\partial}{\partial b} \int_0^b G(x) dx =$

Diagram showing a rectangle with width h and height $G(\sqrt{b})$. The area is $\int_{\sqrt{b}}^{\sqrt{b+h}} G(x) dx$. The text $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\sqrt{b}}^{\sqrt{b+h}} G(x) dx = f(b)$ is written next to it.

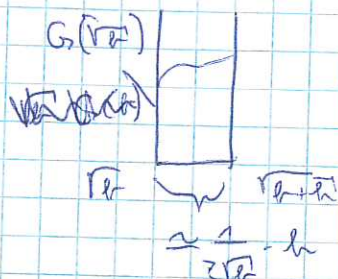
Leibniz:

$\approx \frac{\partial}{\partial b} \int_0^{\sqrt{b+h}} G(x) dx - \int_0^{\sqrt{b}} G(x) dx =$

$= \frac{1}{h} \int_{\sqrt{b}}^{\sqrt{b+h}} G(x) dx \approx \frac{1}{h} G(\sqrt{b}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{b}} \cdot h$
 $\approx \frac{G(\sqrt{b})}{2\sqrt{b}}$



$$\sqrt{b+h} \approx \sqrt{b} + \frac{1}{2\sqrt{b}} \cdot h$$



$$P(X_1^2 \in [a, b]) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot e^{-\frac{x}{2}} dx$$

X_0^2 minőségjellege

x_1, x_2 független, t_1, t_2 minőségjellege $\Rightarrow x_1 + x_2$ minőségjellege
 $t_1 \neq t_2$

$$X_0^2 = 1 * 1 * 1 * 1 * 1 * 1, \text{ ahol } 1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2}}$$

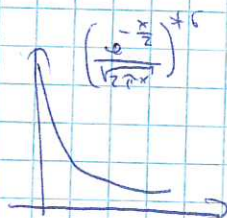
$\hookrightarrow$ reket numerikus minőségjellege is lehet számolni

Konkrét Laplace-transzformálást

$$\mathcal{L}X_0^2 = (\mathcal{L}1)^6$$

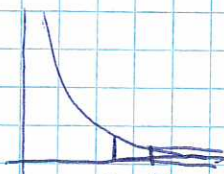
$$X_0 = \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}1^6)$$

X_0^2
minőségjellege



χ^2_6 a lokálnel a szálainál:

$$\chi^2_{6,100} = 4 \cdot \frac{(15-16,6)^2}{16,6} + 2 \cdot \frac{(20-16,6)^2}{16,6} = 2$$



2 $\uparrow$ $\downarrow$ 7,81 $\rightarrow$ 0,05 - szignifikancia szintes táblázat

Mivel $2 < 7,81$, ezért valószínűleg nem esik ki a kocka.

Maximum likelihood módszer

Kocka 1, 2, 3, 4 $\rightarrow$ 15
5, 6 $\rightarrow$ 20

Után nézzük p_i -ket, ha $p_i = P(\text{dobás} = i)$

TFH.: $p_1, \dots, p_6$ a valószínűségek.

Legyen a valószínűség annál, hogy $P(1, 2, 3, 4 \rightarrow 15, 5, 6 \rightarrow 20)$?

Experimentális módszerrel:

$$\begin{aligned} & \overbrace{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots}^{100 \text{ dobás}} \\ & P(\cdot) = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdot p_5 \cdot p_6 \cdot \dots \\ & = \cancel{100(p_1 + p_2 + p_3 + p_4)} \cdot 20(p_5) \\ & \quad p_1^{15} p_2^{15} p_3^{15} p_4^{15} p_5^{20} p_6^{20} \end{aligned}$$

Lösen $p_1, \dots, p_6$ unter Nebenbedingung x ?

maximaler Gewinn $\overbrace{p_1^{15} p_2^{15} p_3^{15} p_4^{15} p_5^{20} p_6^{20}}^{R(x)} = f(p_1, \dots, p_6) = x$

pl: $\frac{\partial f}{\partial p_1} = 0$
 $\frac{\partial f}{\partial p_6} = 0$

$p_1 + \dots + p_6 = 1$
 $p_1, \dots, p_6 \geq 0$

bedingt: $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = x$
 $p_5 = p_6 = \frac{1-4x}{2}$

Max: $x^{60} \cdot \left(\frac{1-4x}{2}\right)^{40}$
 $x \in [0, 1]$

$\frac{d}{dx} x^{60} \left(\frac{1-4x}{2}\right)^{40} = 0$

$60 \cdot x^{59} \cdot \left(\frac{1-4x}{2}\right)^{40} + 40 \cdot \left(\frac{1-4x}{2}\right)^{39} \cdot (-4) \cdot x^{60} = 0$

$\frac{1-4x}{2} < 1$

$1-4x < 2$

$x < \frac{1}{4}$

$7 \cdot \left(\frac{1-4x}{2}\right) - 4x = 0$

$\frac{4-12x}{2} = 4x$

$x = \frac{2}{20} = p_1 = p_2 = p_3 = p_4$

$p_5 = p_6 = \frac{1}{20}$

$2 + 6x = 4x$
 $2 = -4x$
 $x = \frac{2}{-4} = -0,5$

4. Teiler (3. ZH)

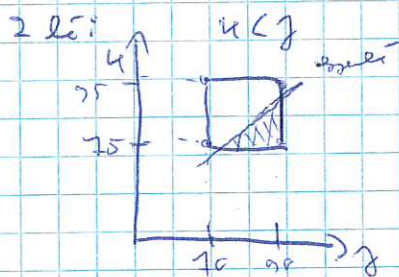
$$V = \{(R, k, j) \mid R < k < j, \\ R \in [80, 100] \\ k \in [75, 95] \\ j \in [70, 90]\}$$

$$\Omega = \{(t_1, t_2, t_3) \mid$$

$$\Omega = \{(R, k, j) \mid j \in [70, 90], k \in [75, 95], R \in [80, 100]\}$$

$$P(R < k < j) = \frac{|\Omega_{R < k < j}|}{|\Omega|}$$

Geometrisches Bild von V ?
↳ Tetraeder



Handelt es sich um einen Tetraeder?

Feld des Wahrscheinlichkeits

Für $j = t_1$, $k = t_2$, $t_1 > t_2$, t_1, t_2 absteigend

(Es gibt eine Wahrscheinlichkeit dass $t_1 > t_2 > t_3 = k > R$)

pl: tth:

$$j = t_1 = 85$$

$$k = t_2 = 80$$

Mi lebel eller R i n t h e !

$$R \in [80, 100], R < 80 \Rightarrow \&$$

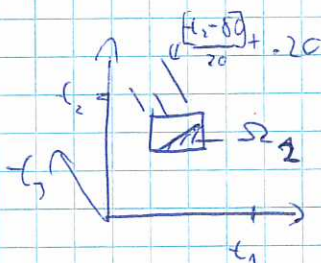
$$j = 85, k = 84$$

$$R \in [80, 100], R < 84 \Rightarrow R \in [80, 84]$$

$$P = 4/20$$

Alternativ:

$$P = \frac{\frac{k}{20} - 80}{20} = \frac{[80, k]}{20}$$



$$\frac{1}{20} \int_{(t_1, t_2) \in \Omega_2} \frac{[t_2 - 80]_+}{20} dt_1 dt_2 =$$

$$= \frac{1}{20} \int_{t_1=85}^{90} \left[\int_{t_2=80}^{t_1} [t_2 - 80]_+ dt_2 \right] dt_1$$

Vol₂ Ω

$$[t_2 - 80]_+ = \max(0, t_2 - 80) = \frac{1}{2} [(t_2 - 80) + |t_2 - 80|]$$

$$\int_{t_2=80}^{t_1} [t_2 - 80]_+ dt_2 = \int_{t_2=80}^{t_1} \frac{1}{2} [(t_2 - 80) + |t_2 - 80|] dt_2$$

$$= \left[\frac{t_2^2}{2} - 80 t_2 \right]_{80}^{t_1}$$

$$\frac{1}{20} \int_{80}^{90} \frac{1}{2} (t_1 - 80)^2 dt_1 = \frac{1}{6} \cdot \left[(t_1 - 80)^3 \right]_{80}^{90} \cdot \frac{1}{8000} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1000}{8000} = \frac{1}{48}$$

$$P = \frac{1}{20^3} \cdot \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} (t_2 - 80)_+ d\mu_2 dt_1 = \frac{1}{48}$$

S. 1. oldal

$$P(x < \text{median}) = P(x > \text{median})$$

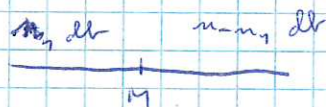
median: középső és, vagy
a középső két elem átlaga

$x_1, x_2, \dots, x_n$ i.i.d., p_i i.i.d.

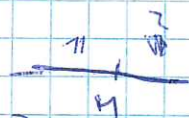
keressük: elvett n elem medianja?

Ha n páros: medianja?

$$P(x_1 > M) = \frac{1}{2}, \quad P(x_2 > M) = \frac{1}{2}, \dots$$



$$n = 47$$



$$n = 7$$



$$P(n_1 \text{ db } x_i < M) = ?$$

76 db lehetőségek

$$P(x_1 < M) = \frac{1}{2}, \quad P(x_2 < M) = \frac{1}{2}, \quad P(x_3 < M) = \frac{1}{2}$$

$$P = \frac{1}{8}$$

$$P(1 \text{ db } x_i < M, 2 \text{ db } x_i > M) = \frac{1}{8} = 0.125$$

Előfordulási? 95%

Ha előfordul, akkor $P = \frac{1}{8}$