

TOPOLÓGIA

A *topológia* szó a görög "toposz" és "logosz" szavakból alkotott szakkifejezés. Jelentése: *helytan*. Valójában inkább a folytonossági tulajdonságokat leíró struktúrák elméletét értjük alatta.

Emlékeztető. A valós számok $\mathbb{R}$ halmazán a folytonosságot *környezetek* segítségével a következő módon definiálhatjuk. Egy $x \in \mathbb{R}$ pont környezetei azok az $U \subset \mathbb{R}$ halmazok, amelyek tartalmaznak $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ alakú intervallumot valamilyen $\varepsilon > 0$ -ra. Egy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény folytonos az $a \in \mathbb{R}$ pontban, ha

$$\forall V \in \mathcal{U}_{f(a)} \quad \exists U \in \mathcal{U}_a \quad f(U) \subset V,$$

ahol $\mathcal{U}_x := \{x \text{ környezetei}\}$.

Környezetrendszerek

Az egész fejezeten át legyen X egy tetszőlegesen rögzített nem-üres halmaz, és $\mathcal{U}$ egy

$$\mathcal{U} : x \mapsto \mathcal{U}_x \text{ nem-üres } \subset \{X \text{ részhalmazai}\} \quad (x \in X)$$

leképezés.

Definíció. Az $X, \mathcal{U}$ pár *környezetrendszer*, ha teljesíti a következő axiómákat:

$$K1) \quad x \in U \quad (U \in \mathcal{U}_x, x \in X)$$

$$K2) \quad V \supset U \in \mathcal{U}_x \Rightarrow V \in \mathcal{U}_x \quad (x \in X)$$

$$K3) \quad U \cap V \in \mathcal{U}_x \quad (U, V \in \mathcal{U}_x, x \in X)$$

Megjegyzés. Az $X, \mathcal{U}$ környezetrendszerben az $\mathcal{U}_x$ halmazcsalád elemeit az x pont ($\mathcal{U}$ -szerinti) környezeteinek fogjuk mondani. A K1, K2, K3 környezet-axiómák így a következőképpen interpretálhatók.

K1) Egy pont környezetei tartalmazzák az adott pontot.

K2) Környezetnél nagyobb halmaz is környezet.

K3) Környezetek metszete környezet.

Definíció. Legyenek $X, \mathcal{U}$, $Y, \mathcal{V}$ környezetrendszerek, $f : X \rightarrow Y$. Az f függvény $(\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V})$ -folytonos az $x \in X$ pontnál, ha

$$\forall V \in \mathcal{V}_{f(x)} \quad \exists U \in \mathcal{U}_x \quad f(U) \subset V.$$

Az f függvény $(\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V})$ -folytonos (a teljes X téren), ha minden $x \in X$ pontnál $(\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V})$ -folytonos.

Ha a kontextusból egyértelműen kiderül, hogy mely környezetrendszerek közötti folytonosságot tekintjük, egyszerűen *folytonosat* mondunk $(\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V})$ -folytonos helyett.

Megjegyzés. K2 alapján f folytonos x -nél $\Leftrightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{U}_x \quad (V \in \mathcal{V}_{f(x)})$.

Tétel. Legyenek $X, \mathcal{U}$, $Y, \mathcal{V}$ ill. $Z, \mathcal{Z}$ környezetrendszerek, és $f : X \rightarrow Y$ ill. $g : Y \rightarrow Z$ függvények. Tegyük fel, hogy f folytonos x -nél és g folytonos $f(x)$ -nél. Ekkor $g \circ f$ folytonos x -nél.

Bizonyítás. Legyen $Z \in \mathcal{Z}_{g(f(x))}$ egy tetszőlegesen adott $g(f(x))$ -környezet. Mivel $(g \circ f)^{-1}(Z) = f^{-1}(g^{-1}(Z))$ és g folytonos $f(x)$ -nél, $g^{-1}(Z) \in \mathcal{V}_{f(x)}$. Másrészt f folytonos x -nél, és így $f^{-1}(g^{-1}(Z)) \in \mathcal{U}_x$.

Definíció. Legyen $X, \mathcal{U}$ egy környezetrendszer és $A \subset X$. Definíció szerint egy $a \in A$ pont az A halmaznak *belső* pontja ($\mathcal{U}$ szerint), ha $A \in \mathcal{U}_a$.

A belseje $A^\circ := \{A \text{ belső pontjai}\},$

A külseje $:= (X \setminus A)^\circ,$

A határa $\partial A := \{x \in X : \forall U \in \mathcal{U}_x \quad U \cap A, U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset\}.$

Tétel. $A^\circ, \partial A, (X \setminus A)^\circ$ diszjunktak és $A^\circ \cup \partial A \cup (X \setminus A)^\circ = X$.

Bizonyítás. 1) $A^\circ \subset A$ és $(X \setminus A)^\circ \subset X \setminus A$. Innen $A^\circ \cap (X \setminus A)^\circ = \emptyset$

2) Megmutatjuk, hogy $A^\circ \cap \partial A = \emptyset$. Tegyük fel, hogy $x \in A^\circ \cap \partial A$. Most $x \in A^\circ$, ahonnan $A \in \mathcal{U}_x$. Minthogy $x \in \partial A$, innen $A^\circ \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$, ami ellentmond $A^\circ \cap (X \setminus A) \subset A \cap (X \setminus A) = \emptyset$ -nak.

3) Hasonlóképpen fennáll $(X \setminus A)^\circ \cap \partial A = \emptyset$. Ez rögtön következik 2)-ből és abból az észrevételből, hogy $\partial A = \partial(X \setminus A)$ a határ definíciójának szimmetriája miatt.

Definíció. Az $X, \mathcal{U}$ környezetrendszerben a $G \subset X$ halmaz *nyitott*, ha $G = G^\circ$. Az $F(\subset X)$ alakzat *zárt*, ha $X \setminus F$ nyitott.

Tétel. 1) Ha $\mathcal{G}$ nyitott halmazok egy családja (az $X, \mathcal{U}$ környezetrendszerben), akkor $\bigcup \mathcal{G}$ nyitott,

2) G_1, G_2 nyitott, $\Rightarrow G_1 \cap G_2$ nyitott,

3) $X, \emptyset$ mindig nyitott.

Bizonyítás. 1) Legyen $U := \bigcup \mathcal{G}$ és tekintsünk egy tetszőleges $x \in U$ pontot. Ekkor valamely $G \in \mathcal{G}$ -re $x \in G$. Mivel G nyitott, $G \in \mathcal{U}_x$. Minthogy $U \supset G$, a K2) axióma szerint $U \in \mathcal{U}_x$, ahonnan $x \in U^\circ$.

2) Legyen $x \in G_1 \cap G_2$ tetszőleges. Mivel G_1, G_2 nyitott, $G_k = G_k^\circ$ ($k = 1, 2$). Így $x \in G_1^\circ, G_2^\circ$, ahonnan $G_1, G_2 \in \mathcal{U}_x$. A K3 axióma alapján $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{U}_x$, amiből $x \in (G_1 \cap G_2)^\circ$.

3) Triviális.

Következmény. 1) $\mathcal{F} \subset \{X, \mathcal{U} - \text{beli zártak}\} \Rightarrow \bigcap \mathcal{F}$ zárt. 2) F_1, F_2 zárt $\Rightarrow F_1 \cup F_2$ zárt, 3) $X, \emptyset$ zártak.

Bizonyítás. Nyitott és zárt halmazok egymás komplementerei.

Topologikus terek

Definíció. Egy $X, \mathcal{U}$ környezetrendszer *topologikus tér* (vagy röviden *topológia*), ha teljesül a következő axióma:

K4) $U^\circ \in \mathcal{U}_x \quad (x \in X, U \in \mathcal{U}_x).$

Azaz környezet belseje is környezet topologikus térben.

Megjegyzés. A környezetrendszerek definíciója még nem létesít kapcsolatot különböző pontok környezetei között. A K4 axióma már nem ilyen. Jelentése az alapfogalmakra lefordítva

K4) $\forall U \in \mathcal{U}_a \quad \exists V \in \mathcal{U}_a \quad \forall x \in V \quad U \in \mathcal{U}_x \quad (a \in X).$

Tétel. Legyen $X, \mathcal{U}$ topologikus tér és $A \subset X$. Ekkor

1) A° nyitott, sőt $\forall G$ nyitott $\subset A \quad G \subset A^\circ$,

2) $A \cup \partial A$ zárt, sőt $\forall F$ zárt $\supset A \quad F \supset A \cup \partial A$.

Azaz topologikus térben egy halmaz belseje a benne foglalt legnagyobb nyitott halmaz, a halmaz belsejének és határának egyesítése a halmazt tartalmazó legkisebb zárt halmaz.

Bizonyítás. 1) Elegendő látni, hogy $(A^\circ)^\circ = A^\circ$. Az $(A^\circ)^\circ \subset A^\circ$ tartalmazás triviális. Legyen $x \in A^\circ$ tetszőleges. Ekkor $A \in \mathcal{U}_x$, ami a K4 axióma alapján azt jelenti, hogy $A^\circ \in \mathcal{U}_x$, azaz $x \in (A^\circ)^\circ$.

Ha G nyitott $\subset A$ és $x \in G$ tetszőlegesen adott, akkor $G \in \mathcal{U}_x$, és a K2 axióma szerint $A \in \mathcal{U}_x$, azaz $x \in A^\circ$.

2) A helyett $(X \setminus A)$ -val az előző gondolatmenet.

Definíció. Az $X, \mathcal{U}$ környezetrendszerben az $A \subset X$ alakzat lezártja $\bar{A} := A^\circ \cup \partial A$.

Észrevétel: $\bar{A} = \{x \in X : \forall U \in \mathcal{U}_x \quad U \cap A \neq \emptyset\}$.

Topologikus térben $\bar{A}$ a legkisebb A -t tartalmazó zárt halmaz.

Tétel. Legyenek $X, \mathcal{U}$, $Y, \mathcal{V}$ topologikus terek. Egy $f : X \rightarrow Y$ leképezés pontosan akkor folytonos, ha $f^{-1}(V)$ nyitott (V nyitott $\subset Y$).

Bizonyítás. $\Rightarrow$: Legyen V nyitott $\subset Y$ és $x \in f^{-1}(V)$ tetszőlegesen adott. Ekkor $f(x) \in V$ és így $V \in \mathcal{V}_{f(x)}$. Mivel f folytonos, $f^{-1}(V) \in \mathcal{U}_x$, ahonnan $x \in f^{-1}(V)^\circ$.

$\Leftarrow$: Legyen $x \in X$ és $V \in \mathcal{V}_{f(x)}$ adott. Belátandó, hogy $f^{-1}(V) \in \mathcal{U}_x$. Mivel $Y, \mathcal{V}$ topológia, V° nyitott $\in \mathcal{V}_{f(x)}$. Feltevés szerint az $f^{-1}(V^\circ)$ halmaz nyitott X -ben. Másrészt $f(x) \in V^\circ$, ahonnan $x \in f^{-1}(V^\circ)$, és így $f^{-1}(V^\circ) \in \mathcal{U}_x$, és K2-ből $f^{-1}(V) \in \mathcal{U}_x$.

Következmény. f folytonos pontosan akkor, ha zárt halmazok teljes inverz képe zárt f -nél.

Részhalmaz topológiája

Definíció. Legyen $X, \mathcal{U}$ egy környezetrendszer és $S \subset X$. Az

$$\mathcal{U}_x|S := \{U \cap S : U \in \mathcal{U}_x\} \quad (x \in X)$$

rendszert az $\mathcal{U}$ környezetrendszer S -re való megszorítottjának nevezzük.

Tétel. Legyen $X, \mathcal{U}$ egy környezetrendszer és $S \subset X$. Ekkor

- 1) $S, \mathcal{U}|S$ környezetrendszer,
- 2) ha $X, \mathcal{U}$ topológia, akkor $S, \mathcal{U}|S$ szintén topológia.

Bizonyítás. 1) Tekintsünk egy tetszőleges $x \in S$ pontot. Verifikáljuk a környezet-axiómákat az $S, \mathcal{U}|S$ rendszerénél.

K1) Mivel $x \in U$ ($U \in \mathcal{U}_x$), fennáll $x \in U \cap S$ ($U \in \mathcal{U}_x$).

K2) Legyen $U \in \mathcal{U}_x|S$. Ekkor vehető $U' \in \mathcal{U}_x$, melyre $U = U' \cap S$. Tegyük fel, hogy $V \supset U$, $V \subset S$. Most a $V' := U' \cup V$ alakzat az $X, \mathcal{U}$ -ra érvényes K2 axióma szerint x -környezet $\mathcal{U}$ -ban. Így $V = V' \cap S \in \mathcal{U}_x|S$.

K3) Tegyük fel, hogy $U_1, U_2 \in \mathcal{U}_x|S$. Ekkor létezik $U'_1, U'_2 \in \mathcal{U}_x$, hogy $U_k = U'_k \cap S$ ($k = 1, 2$). Ezzel $U_1 \cap U_2 = U'_1 \cap U'_2 \cap S$, ahol (az $X, \mathcal{U}$ -ra érvényes) K3 alapján $U'_1 \cap U'_2 \in \mathcal{U}_x$.

2) Legyen $x \in S$ és $U \in \mathcal{U}_x | S$ adott. Belátandó: $U^{\circ|S} := \{y \in U : U \in \mathcal{U}_y | S\}$ is x -környezet $\mathcal{U} | S$ szerint. Itt

$$U^{\circ|S} = \{y \in U : \exists U^{(y)} \in \mathcal{U}_y \quad U^{(y)} \cap S \subset U\}.$$

Vehető mindegyik $U^{(y)}$ halmaz $(y \in U^{\circ|S})$ nyitottnak a fenti formulában $[U^{(y)}]$ helyett U° -ra áttérve]. Most az

$$U' := \bigcup_{y \in U^{\circ|S}} U^{(y)}$$

halmaz nyitott és

$$(*) \quad U' \cap S = U^{\circ|S}.$$

Tegyük fel, hogy $y \in U^{\circ|S}$. Ekkor $y \in U'$ nyitott $\subset X$, ahonnan $y \in U'^{\circ}$, azaz $U' \in \mathcal{U}_y$, és így $U' \cap S \in \mathcal{U}_y | S$

Következmény. $(*)$ szerint $\{S, \mathcal{U} | S \text{ nyitott halmazai}\} = \{G \cap S : G \text{ nyitott} \subset X\}$.

Megjegyzés. Ha $\mathcal{U}$ topológia, $\mathcal{U} | S$ elnevezése, X relatív topológiája S -en. Általában, ha topologikus tér részhalmazaira mondunk ki egy tulajdonságot a topológiák nyelvén, akkor alatta a részhalmaz relatív topológiája megfelelő tulajdonságot szokás érteni.

Példa. Ha $X, \mathcal{U}$ topologikus tér és $S \subset X$, akkor az $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt folytonosnak nevezzük az S halmazon, ha $f|S$ folytonos az $S, \mathcal{U} | S$ topológiára nézve.

Az előző következmény szerint a részhalmazokra megszorított topológiákban megfogalmazott tulajdonságok vizsgálata mindig visszavezethető topologikus terek vizsgálatára. (Tipikus példája ennek a következő alfejezet tételének a bizonyítása).

Összefüggőség

Definíció. Az $X, \mathcal{U}$ topologikus tér *széteső*, ha létezik $G_1, G_2 \neq \emptyset$ nyitott halmazpár X -ben, melyre $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ és $G_1 \cup G_2 = X$.

$S \subset X$ *széteső* : S széteső $\mathcal{U} | S$ szerint,

S *összefüggő* $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} S$ nem széteső.

Tétel. Folytonos leképezés összefüggő halmazt összefüggőbe visz. Azaz, ha $X, \mathcal{U}, Y, \mathcal{V}$ topologikus terek, S összefüggő $\subset X$ és $f : X \rightarrow Y$ folytonos, akkor $f(S)$ összefüggő $\subset Y$.

Bizonyítás. A Részhalmaz topológiája c. alfejezet alapján vehető (az általánosság megszorítása nélkül) $S = X$ és $f(S) = Y$.

Tegyük fel, hogy Y széteső. Ekkor található lenne $\emptyset \neq G_1, G_2$ nyitott $\subset Y$, melyre $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ és $G_1 \cup G_2 = Y$. Mivel folytonos függvénynél nyitott halmaz inverz képe nyitott, $\emptyset \neq f^{-1}(G_1), f^{-1}(G_2)$ nyitott $\subset X$ és $f^{-1}(G_1) \cup f^{-1}(G_2) = X$, ami ellentmond X összefüggőségének.

Kompaktság

Definíció. Egy $X, \mathcal{U}$ topologikus tér *kompakt*, ha minden nyitott halmazokkal való lefedéséből kiválasztható egy véges lefedés, azaz ha

$$\forall \mathcal{G} \subset \{X\text{-beli nyitottak}\} \quad \bigcup \mathcal{G} = X \Rightarrow \exists \mathcal{F} \text{ véges } \subset \mathcal{G} \quad \bigcup \mathcal{F} = X.$$

Ennek megfelelően

S kompakt $\subset X$: S kompakt $\mathcal{U}|_S$ szerint.

Mivel az S -beli nyitott halmazok X -beli nyitott halmazok S -sel való metszetei, S kompakt $\subset X \Leftrightarrow \forall \mathcal{G} \subset \{X\text{-beli nyitottak}\} \quad \bigcup \mathcal{G} \supset S \Rightarrow \exists \mathcal{F} \text{ véges } \subset \mathcal{G} \quad \bigcup \mathcal{F} \supset S$.

Tétel. *Kompakt halmaz folytonos képe kompakt. Azaz*

$f : (X, \mathcal{U}) \rightarrow (Y, \mathcal{V})$ *folytonos és* S *kompakt* $\subset X$, $\Rightarrow f(S)$ *kompakt* $\subset Y$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\mathcal{H} \subset \{Y\text{-beli nyitottak}\}$ és $\bigcup \mathcal{H} \supset f(S)$. Legyen

$$G_H := f^{-1}(H) \quad (H \in \mathcal{H})$$

$$\mathcal{G} := \{G_H : H \in \mathcal{H}\}.$$

Mivel f folytonos, $\mathcal{G} \subset \{X\text{-beli nyitottak}\}$. Másrészt

$$\begin{aligned} f(\bigcup \mathcal{G}) &= \bigcup \{f(G_H) : H \in \mathcal{H}\} = \bigcup \{H : H \in \mathcal{H}\} = \bigcup \mathcal{H} \supset f(S), \\ \bigcup \mathcal{G} &\supset f^{-1}(f(S)) \supset S. \end{aligned}$$

Mivel S kompakt $\subset X$, választható $\mathcal{F}$ véges $\subset \mathcal{G}$, melyre $\bigcup \mathcal{F} \supset S$. Szükségképpen $\mathcal{F} = \{G_{H_1}, \dots, G_{H_n}\}$ alakú, ahonnan $\bigcup \{H_1, \dots, H_n\} \supset f(S)$.

Hausdorff-tulajdonság

Definíció. Egy $X, \mathcal{U}$ környezetrendszer *Hausdorff-féle*, ha különböző pontoknak vannak diszjunkt környezetei, azaz ha

$$\forall x, y \in X \quad x \neq y \Rightarrow \exists U \in \mathcal{U}_x, V \in \mathcal{U}_y \quad U \cap V = \emptyset.$$

A Hausdorff-féle topologikus tereket röviden *Hausdorff tereknek* szokás nevezni.

Tétel. *Ha $X, \mathcal{U}$ Hausdorff tér és K kompakt $\subset X$, akkor K zárt $\subset X$.*

Bizonyítás. Állítás: $X \setminus K$ nyitott. Bizonyítás: Legyen $y \in X \setminus K$ tetszőlegesen rögzítve. Ekkor minden $x \in K$ ponthoz választható olyan $U^{(x)}, V^{(x)}$ nyitott halmazpár, hogy

$$U^{(x)} \cap V^{(x)} = \emptyset, \quad U^{(x)} \in \mathcal{U}_x, \quad V^{(x)} \in \mathcal{U}_y.$$

Tekintsük a

$$\mathcal{G} := \{U^{(x)} : x \in K\}$$

halmazcsaládot. Mivel $\bigcup \mathcal{G} \supset K$, létezik $x_1, \dots, x_n \in K$, melyre

$$U^{(x_1)} \cup \dots \cup U^{(x_n)} \supset K.$$

Most véges sok y -környezet metszete a

$$V := V^{(x_1)} \cap \dots \cap V^{(x_n)} \in \mathcal{U}_y$$

halmaz. Vegyük észre, hogy

$$V \cap (U^{(x_1)} \cup \dots \cup U^{(x_n)}) = \emptyset,$$

ahonnan $V \cap K = \emptyset$, azaz $V \subset X \setminus K$.

Lemma. Ha $X, \mathcal{U}$ kompakt Hausdorff tér, és F zárt $\subset X$, akkor F kompakt $\subset X$.

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{G}$ egy nyitott lefedése F -nek, azaz

$$\mathcal{G} \subset \{\text{nyitottak}\} \quad \bigcup \mathcal{G} \supset F.$$

Mivel F zárt, a $\mathcal{G}^* := \mathcal{G} \cup \{X \setminus F\}$ halmazrendszer egy nyitott lefedése az egész X térnek. Így $\exists G_1, \dots, G_n \in \mathcal{G} \quad G_1 \cup \dots \cup G_n \cup (X \setminus F) = X$. Csakhogy ekkor $G_1 \cup \dots \cup G_n \supset F$.

Tétel. Ha $X, \mathcal{U}$ ill. $Y, \mathcal{V}$ kompakt Hausdorff terek és $f : X \leftrightarrow Y$ folytonos*, akkor az inverz f^{-1} függvény is folytonos.

Bizonyítás. Belátjuk, hogy $g := f^{-1}$ -re $g^{-1}(F)$ zárt valahányszor F zárt $\subset X$. Legyen F zárt $\subset X$ tetszőleges. Ekkor az előző lemma szerint F kompakt $\subset X$. Így $f(F)$ kompakt $\subset Y$, ahonnan a tétel alapján $g^{-1}(F) = f(F)$ zárt.

Szorzattér

Definíció. Legyenek $X_k, \mathcal{U}^{(k)} \quad (k = 1, \dots, n)$ környezetrendszerek.

Az $x := (x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ ponthoz legyen

$$\mathcal{U}_x := \{U \subset X_1 \times \dots \times X_n : \exists U_1 \in \mathcal{U}_{x_1}^{(1)}, \dots, U_n \in \mathcal{U}_{x_n}^{(n)} \quad U_1 \times \dots \times U_n \subset U\}.$$

Az $X_1 \times \dots \times X_n, \mathcal{U}$ rendszer triviálisan teljesíti a K1, K2, K3 környezet-axiómákat, azaz környezetrendszer. Elnevezése: Az $X_k, \mathcal{U}^{(k)} \quad (k = 1, \dots, n)$ terek szorzattere.

Lemma. Ha G_k nyitott $\subset X_k \quad (k = 1, \dots, n)$, akkor $G_1 \times \dots \times G_n$ nyitott $\subset X_1 \times \dots \times X_n$.

Bizonyítás. Legyen $(x_1, \dots, x_n) \in G_1 \times \dots \times G_n$ adott tetszőlegesen. Mivel G_k nyitott, $G_k \in \mathcal{U}_{x_k}^{(k)} \quad (k = 1, \dots, n)$. Innen $G_1 \times \dots \times G_n \in \mathcal{U}_{(x_1, \dots, x_n)}$.

Propozíció. Ha $X_k, \mathcal{U}^{(k)} \quad (k = 1, \dots, n)$ topológiák, akkor a $X_1 \times \dots \times X_n, \mathcal{U}$ szorzattér is topológia.

Bizonyítás. A K4 axiómát kell verifikálnunk. Legyen $x = (x_1, \dots, x_n) \quad U \in \mathcal{U}_x$. Vagyis $U_1 \times \dots \times U_n \subset U$ valamely $U_1 \in \mathcal{U}_{x_1}^{(1)}, \dots, U_n \in \mathcal{U}_{x_n}^{(n)}$ -re. Mivel mindegyik $\mathcal{U}^{(k)}$ topológia,

$$U_k^\circ \text{ nyitott } \subset X_k \quad (k = 1, \dots, n).$$

A lemma alapján, $x \in U_1^\circ \times \dots \times U_n^\circ$ nyitott $\subset X_1 \times \dots \times X_n$.

Lemma. A $P_k : (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_k$ koordináta-projekciók folytonos $X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow X_k$ leképezések.

Bizonyítás. Ha $x = (x_1, \dots, x_n)$ és H egy x_k -környezet az X_k térben, akkor $P_k^{-1}(H) = X_1 \times \dots \times X_{k-1} \times H \times X_{k+1} \times \dots \times X_n$ környezetek szorzata, ami x -környezet $X_1 \times \dots \times X_n$ -ben.

* Azaz f kölcsönösen egyértelmű $(\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V})$ -folytonos leképezése X -nek Y -ra.

Propozíció. Legyen $Y, \mathcal{V}$ topologikus tér és $f : Y \rightarrow X_1 \times \cdots \times X_n$ leképezés környezetrendszer egy szorzatterébe. Ekkor f folytonos $\Leftrightarrow f_k := P_k \circ f$ folytonos mindegyik P_k koordináta-projekcióra.

Bizonyítás. $\Rightarrow$: f_k folytonos leképezések kompozíciója az előző lemma szerint.
 $\Leftarrow$: Legyen $y \in Y$ és $U \in \mathcal{U}_{f(y)}$ tetszőlegesen rögzítve. Megmutatjuk, hogy létezik $V \in \mathcal{V}_y$ melyre $f(V) \subset U$. Bizonyítás: Találhatók $U_1 \in \mathcal{U}_{f_1(y)}^{(1)}, \dots, U_n \in \mathcal{U}_{f_n(y)}^{(n)}$ úgy, hogy $U_1 \times \cdots \times U_n \subset U$. Feltevés szerint az f_k komponensfüggvények folytonosak, így

$$\exists V_k \in \mathcal{U}_y \quad f_k(V_k) \subset U_k \quad (k = 1, \dots, n).$$

Vagyis a $V := \bigcap_{k=1}^n V_k$ választás megfelel.

Tétel. Kompakt topologikus terek szorzata kompakt. Azaz

$$X_k, \mathcal{U}^{(k)} \text{ kompakt } (k = 1, \dots, n), \Rightarrow X_1 \times \cdots \times X_n, \mathcal{U} \text{ kompakt}$$

Bizonyítás. Elég a tétel állítását csak $n = 2$ -re igazolni. (Innen az általános eset azonnal adódik n -re való indukcióval.)

Legyenek tehát $X, \mathcal{U}$, $Y, \mathcal{V}$ kompakt terek és $\mathcal{G}$ egy nyitott halmazokból álló lefedése az $X \times Y$ szorzattérnek.

Állítás: $\exists \mathcal{F}$ véges $\subset \mathcal{G}$ $\bigcup \mathcal{F} = X \times Y$.

Bizonyítás: Vegyük észre, hogy vége a

$$\mathcal{G}' := \{U \times V : U \text{ nyitott } \subset X, V \text{ nyitott } \subset Y, \exists G \in \mathcal{G} \quad U \times V \subset G\}$$

nyitott halmazcsaládot, $\mathcal{G}'$ lefedése $X \times Y$ -nak. Így elég látni, hogy

$$\exists \mathcal{F}' \text{ véges } \subset \mathcal{G}' \quad \bigcup \mathcal{F}' = X_1 \times X_2.$$

Mindegyik $(x, y) \in X \times Y$ ponthoz válasszunk egy $U^{(x,y)} \in \mathcal{U}_x$, $V^{(x,y)} \in \mathcal{V}_y$ nyitott halmazpárt, melyre $U \times V \in \mathcal{G}'$. Tekintsünk egy tetszőleges $y \in Y$ pontot. Mivel az X tér kompakt, létezik véges sok $x_1, \dots, x_M \in X$ pont, melyre

$$\bigcup_{i=1}^M U^{(x_i, y)} = X.$$

Most a

$$V^y := \bigcap_{i=1}^M V^{(x_i, y)}$$

alakzat olyan nyitott y -környezet, melyre $X \times V^y \subset \bigcup_{i=1}^M U^{(x_i, y)} \times V^{(x_i, y)}$. Vagyis minden $y \in Y$ -hoz megadható olyan V^y nyitott y -környezet, amelyre $X \times V^y$ lefedhető véges sok $\mathcal{G}$ -beli halmazzal.

Tekintve, hogy az Y tér is kompakt, kiválasztható véges sok $y_1, \dots, y_N \in Y$, hogy $\bigcup_{j=1}^N V^{y_j} = Y$. Ekkor $X \times Y = \bigcup_{j=1}^N X \times V^{y_j}$. Tehát lefedtük $X \times Y$ -t véges sok olyan sávval, amelyek mindegyike lefedhető véges sok $\mathcal{G}$ -be tartozó halmazzal.

$\mathbb{R}^N$ természetes (Archimédési) topológiája

Definíció. Legyen $N \in \mathbb{N} (= \{1, 2, \dots\})$. $\mathbb{R}^N$ természetes topológiáját a rajta levő $<$ rendezés adja meg:

$$U \subset \mathbb{R}^N \quad x\text{-környezet} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists a, b \in \mathbb{R}^N \quad a < x < b \text{ és } (a, b) \subset U.$$

Emlékeztető. Az N -dimenziós $<$ ill. $\leq$ relációk a megfelelő 1-dimenziós rendezések hatványai. Tehát pl.

$$(a_1, \dots, a_N) < (b_1, \dots, b_N) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} a_i < b_i \quad (i = 1, \dots, N),$$

és $(a, b) := \{z : a < z < b\}$, $[a, b] := \{z : a \leq z \leq b\}$ a nyitott ill. zárt intervallumok $\mathbb{R}^N$ -ben. Általában, az $I \subset \mathbb{R}^N$ alakzatot N -dimenziós *intervallumnak* nevezzük, ha

$$[(\min\{a_i, b_i\} : i = 1, \dots, N), (\max\{a_i, b_i\} : i = 1, \dots, N)] \subset I \quad \forall a, b \in I.$$

Verifikáljuk, hogy ez a környezetfogalom valóban topológiához vezet.

Tétel. $\mathbb{R}^N$ Hausdorff tér, topológiája megegyezik az $\mathbb{R}$ topológiájának N -ik hatványával.

Bizonyítás. Az 1-dimenziós $\mathbb{R}$ térre a K1, K2 axiómák triviálisan teljesülnek. K3 áll, mivel $x \in (a_i, b_i)$ ($i = 1, \dots, n$) esetén $x \in (\max_i a_i, \min_i b_i)$. K4 pedig abból az egyszerű megfigyelésből adódik, hogy a nyitott intervallumok $\mathbb{R}$ -ben valóban az (a, b) alakúak. Mivel különböző pontok körülvehetők diszjunkt nyitott intervallumokkal, $\mathbb{R}$ topológiája Hausdorff.

Ha $a := (a_i : i = 1, \dots, N)$, $b := (b_i : i = 1, \dots, N)$ és $a < b$, akkor $(a, b) = (a_1, b_1) \times \dots \times (a_N, b_N)$. Ezért a rendezéssel definiált $\mathbb{R}^N$ -beli környezetek egybeesnek az $\mathbb{R}$ topologikus terének N -ik hatványa szerinti környezetekkel. Másrészt, általában is, Hausdorff terek szorzatai Hausdorff terek.

Lemma. Az alpműveletek $(+, \cdot)$ folytonosak mint 2-változós $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvények.

Bizonyítás. Észrevétel: az N -dimenziós (a, b) ill. (c, d) intervallumok

$$(a, b) + (c, d) := \{x + y : x \in (a, b), y \in (c, d)\} \text{ összege}$$

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d).$$

Ha $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ és $V \subset \mathbb{R}$ egy környezete $x_1 + x_2$ -nek, akkor valamilyen $\varepsilon > 0$ mellett $(x_1 + x_2 - \varepsilon, x_1 + x_2 + \varepsilon) \subset V$. Ekkor tehát az $U_k := (x_k - \varepsilon/2, x_k + \varepsilon/2)$ ($k = 1, 2$) környezeteire x_1 -nek ill. x_2 -nek $U_1 + U_2 \subset V$. Ez mutatja, hogy az összeadás mint $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ leképezés folytonos.

Az $M_c : x \mapsto cx$ és $Q : x \mapsto x^2$ függvények folytonosak $\mathbb{R}$ -en. Bevezetve az $A(x, y) := x + y$ jelölést, mivel

$$x_1 x_2 = \frac{1}{4}((x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2),$$

a szorzás a folytonos $x \mapsto x/4$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto -x$ és $(x, y) \mapsto x + y$ műveletek véges összetétele.

Következmény. 1) A vektori összeadás és konstanssal való szorzások folytonos $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ ill. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ műveletek.

2) Az 1-változós elemi függvények és 2-változós alpműveletek összetételeiből képzett többváltozós elemi függvények az értelmezési tartományukon folytonosak.

Tétel. 1) $\mathbb{R}$ Hausdorff tér.

2) $\mathbb{R}$ nyitott részhalmazai megszámlálható sok páronként diszjunkt nyitott intervallum egyesítéséből adódnak.

3) $\mathbb{R}$ összefüggő részei az intervallumok.

Bizonyítás. 2) Legyen G nyitott $\subset \mathbb{R}$. Mindegyik $x \in G$ -re legyen

$$a_x := \inf\{a : (a, x] \subset G\}, \quad b_x := \sup\{b : [x, b) \subset G\}.$$

Észrevétel: $(a_x, b_x) \subset G$ ($x \in G$), másrészt $(a_x, b_x) \cap (a_y, b_y) \neq \emptyset$ csak úgy lehet, ha $(a_x, b_x) = (a_y, b_y)$. Mivel bármelyik intervallumban van racionális szám, és

mert a racionális számok $\mathbb{Q}$ halmaza megszámlálható, csak megszámlálható sok különböző (a_x, b_x) alakú intervallum lehet.

3) Tegyük fel, hogy S összefüggő $\subset \mathbb{R}$ és $a, b \in S$, $a < b$.

Állítás: $[a, b] \subset S$. (Innen S intervallum.)

Bizonyítás: Ha volna $x \in [a, b]$, melyre $x \notin S$, akkor $(-\infty, x)$ ill. (x, ∞) diszjunkt nyitott lefedését adnák S -nek. Ekkor $G := (-\infty, x) \cap S$ ill. $H := (x, \infty) \cap S$ diszjunkt nyitottak S -ben, $a \in G$, $b \in H$ és $G \cup H = S$ lenne.

Legyen most S egy intervallum. Tegyük fel, hogy $G, H \neq \emptyset$ nyitottak S -ben, és $G \cap H = \emptyset$. Tekintsünk egy $a \in G$, $b \in H$ pontpárt. Vezető $a < b$. Jegyezzük meg, hogy $[a, b] \subset S$. Legyen $x := \sup[G \cap (a, b)]$. Mivel G nyitott az S intervallumban, $x \notin G$. Ugyanakkor az $x \in H$ feltevés is ellentmond H S -beli nyitottságának. Tehát $G \cup H \not\subset S$, azaz S összefüggő.

Következmény. (Bolzano tétele). *Folytonos valós függvény intervallumot intervallumba visz. Speciálisan, ha $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos és $f(a) < 0 < f(b)$, akkor valamely $x \in (a, b)$ -re $f(x) = 0$.*

Bizonyítás. Folytonos függvény összefüggő halmazt összefüggőbe visz.

Borel tétele

Kérdés: Melyek $\mathbb{R}^N$ kompakt részhalmazai?

Definíció. $\mathbb{R}$ -beli intervallumok egy $(a_1, b_1), \dots, (a_m, b_m)$ sorozatát véges intervallumláncnak nevezzük, ha

$$a_i < a_{i+1} < b_i \quad (i = 1, \dots, m-1).$$

Tétel. (Borel) *Legyen $[a, b]$ egy korlátos zárt intervallum $\mathbb{R}$ -ben, amelyet lefedő nyitott intervallumok egy $\mathcal{I}$ családja. Ekkor kiválasztható $\mathcal{I}$ -ből egy $[a, b]$ -t lefedő véges intervallumlánc.*

Bizonyítás. Észrevétel: Ha $(a_1, b_1), \dots, (a_m, b_m)$ véges intervallumlánc, akkor $\bigcup_{i=1}^m (a_i, b_i) = (a_1, b_m)$ Így a

$$J := \{x \geq a : \exists \mathcal{L} \text{ véges intv.lánc } \subset \mathcal{I} \quad \bigcup \mathcal{L} \supset [a, x]\}$$

halmaz a

$$J = [a, x^*) \quad \text{ahol} \quad x := \sup J.$$

intervallum. ($J \neq \emptyset$, mivel $\{a\}$ lefedhető egy $\mathcal{I}$ -beli intervallummal. Másrészt J az észrevétel alapján $\{a\}$ -t tartalmazó nyitott intervallumok uniójának metszete $[a, \infty)$ -nel.)

Belátandó: $x^* > b$. Tegyük fel, hogy $x^* \leq b$, azaz $x^* \in [a, b]$. Mivel $\bigcup \mathcal{I} \supset [a, b]$, létezik $(c, d) \in \mathcal{I}$, amelyre $x^* \in (c, d)$. Csak $c \geq a$ lehet, hiszen $c < a$ esetén $(c, d) \supset [a, x^*]$ volna, amiből a $d \leq x^*$ ellentmondás következne. Így $c \in J$. Vezető tehát egy olyan $(a_1, b_1), \dots, (a_m, b_m)$ lánc $\mathcal{I}$ -ből, hogy $a_1 < a$ és $b_m > c$. Legyen $k := \min\{i : b_i > c\}$. Ekkor $(a_1, b_1), \dots, (a_k, b_k), (c, d)$ véges intervallumlánc, ahonnan megint a $d \leq x^*$ ellentmondás következne.

Következmény. Az $[a, b]$ intervallum kompakt $\mathbb{R}$ -ben.

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{G}$ egy nyitott lefedése $[a, b]$ -nek. Az előző tétel 2) állítása szerint az

$$\mathcal{I} := \{(x, y) : \exists G \in \mathcal{G} \quad (x, y) \subset G\}$$

intervallumcsalád szintén lefedi G -t. $\mathcal{I}$ -ből egy véges $I_1, \dots, I_m$ lánc lefedi $[a, b]$ -t. Mindegyik I_i intervallumhoz választható $G_i \in \mathcal{G}$ úgy, hogy $I_i \subset G_i$ ($i = 1, \dots, m$). Most $\bigcup_{i=1}^m G_i \supset [a, b]$.

Tétel. $\mathbb{R}^N$ kompakt részhalmazai a korlátos zártak.

Bizonyítás. Legyen K kompakt $\subset \mathbb{R}^N$. Mivel $\mathbb{R}^N$ Hausdorff tér, K szükségképpen zárt. A $\{(-n, n)^N : n = 1, 2, \dots\}$ nyitott intervallumcsalád lefedi a teljes $\mathbb{R}^N$ teret, így a K kompakt halmazt is. Ezért kiválasztható $n_1, \dots, n_k$, úgy hogy $K \subset \bigcup_{i=1}^k (-n_i, n_i)^N = (-\max_i n_i, \max_i n_i)^N$. Azaz K korlátos is.

Legyen S korlátos zárt $\subset \mathbb{R}^N$. Ekkor S zárt $\subset [-M, M]^N$ valamely $M > 0$ -ra. Borel tétele alapján a $[-M, M]$ intervallum kompakt, és így $[-M, M]^N$ kompakt $\subset \mathbb{R}^N$. Másrészt Hausdorff térben kompakt halmaz zárt részhalmaza kompakt.

Következmény. (Weierstrass). *Kompakt téren (speciálisan korlátos zárt intervallumon) folytonos valós függvény felveszi minimumát.*

Bizonyítás. Ha $K, \mathcal{U}$ kompakt tér és $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ egy folytonos függvény, akkor $f(K)$ kompakt $\subset \mathbb{R}$. Azaz $f(K)$ korlátos zárt része $\mathbb{R}$ -nek. Emiatt $s := \inf f(K) > -\infty$. Mivel a $(-\infty, s)$ intervallum metszi az s szám minden környezetét, $s \in \partial f(K)$. Mivel pedig $f(K)$ zárt, $s \in f(K)$.

METRIKUS TEREK

Definíció. Legyen X egy halmaz. A $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ függvény *félmetrika* X -en, ha

$$\begin{aligned} \text{D1)} \quad & d(x, y) = d(x, y) \geq 0 = d(x, x) & (x, y \in X) \\ \text{D2)} \quad & d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z) & (x, y, z \in X). \end{aligned}$$

A D1, D2 távolság-axiómákat teljesítő X, d pár *félmetrikus tér*.

Megjegyzés. Célszerű, bár az irodalomban kevésbé szokásos, olyan d függvényekkel is dolgozni, amelyek teljesítik a D1, D2 távolság-axiómákat, de a $+\infty$ értéket is felvehetik. Ezeket *kiterjesztett értékű félmetrikának* nevezzük.

Megjegyzés. D1-et *szimmetria*-axiómának, D2-t pedig *háromszög-egyenlőtlenség*-nek (rövidítve $\triangle$ -*egyenlőtlenség*) nevezzük.

A $\triangle$ -egyenlőtlenség iterálásával kapjuk a *legrövidebb út elvét*:

Lemma. Ha $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$, akkor $d(x_1, x_n) \leq \sum_{i=1}^{n-1} d(x_i, x_{i+1})$.

Definíció. Az X, d félmetrikus tér *metrikus tér* (és ilyenkor d elnevezése *metrika* vagy *távolság* X -en), ha teljesül a

$$\text{D3)} \quad d(x, y) > 0 \quad (x \neq y \quad x, y \in X)$$

szeparáltság-axióma.

Topológia metrikus téren

Legyen X, d egy (tetszőlegesen rögzített) félmetrikus tér ebben az alfejezetben.

Definíció. $S^{(d)}(x, \rho) := \{y \in X : d(x, y) < \rho\}$ az x körüli ρ sugarú *gömb*,

$$\mathcal{U}_x^{(d)} := \{U \subset X : \exists \varepsilon > 0 \quad S^{(d)}(x, \varepsilon) \subset U\} \quad (x \in X).$$

Megjegyzés. $S^{(d)}(x, \rho_1) \cap S^{(d)}(x, \rho_2) = S^{(d)}(x, \min\{\rho_1, \rho_2\})$, ahonnan rögtön következik, hogy $X, \mathcal{U}^{(d)}$ környezetrendszer.

Lemma. Az $S^{(d)}(x, \rho)$ gömb nyitott ($\mathcal{U}^{(d)}$ szerint).

Bizonyítás. Legyen $y \in S^{(d)}(x, \rho)$ tetszőleges. Jelöljük $\delta := d(x, y)$ -val az y pont távolságát x -től. Ekkor $\delta < \rho$, és a $\triangle$ -egyenlőtlenség szerint

$$S^{(d)}(y, \rho - \delta) \subset S^{(d)}(x, \rho).$$

Következmény. $X, \mathcal{U}^{(d)}$ topológia.

Tétel. Ha X, d metrikus tér, akkor $\mathcal{U}^{(d)}$ Hausdorff topológia.

Bizonyítás. Legyen $x, y \in X$ két különböző pont, és legyen $\delta := d(x, y)$. Mivel d metrika, $\delta > 0$. Így a $\triangle$ -egyenlőtlenség szerint $S^{(d)}(x, \delta/2) \cap S^{(d)}(y, \delta/2) = \emptyset$.

Lemma. A d távolságfüggvény folytonos.

Bizonyítás. Legyen $x, y \in X$ és $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen adott. Bizonyítandó: $U := \{(x', y') : |d(x', y') - d(x, y)| < \varepsilon\}$ egy (x, y) -környezet $X \times X$ -ben (a szorzattopológiában). Elegendő látni: $\exists \delta > 0 \quad S^{(d)}(x, \delta) \times S^{(d)}(y, \delta) \subset U$ azaz

$$|d(x', y') - d(x, y)| < \varepsilon \quad \text{ha} \quad d(x, x'), d(y, y') < \delta.$$

Ha $x, x', y, y' \in X$, az x', x, y, y' ill. x, x', y', y utakra a legrövidebb út elve szerint

$$\begin{aligned} d(x', y') &\leq d(x, x') + d(x, y) + d(y, y') \\ d(x, y) &\leq d(x, x') + d(x', y') + d(y, y') , \Rightarrow \\ |d(x', y') - d(x, y)| &\leq d(x, x') + d(y, y') . \end{aligned}$$

Így a $\delta := \varepsilon/2$ választás megfelel.

Sorozatok

X, d egy tetszőlegesen rögzített metrikus tér a fejezet végéig, és az $\mathcal{U}^{(d)}$ topológiában vett határt, lezárást ill. belsőt ∂ , $-$ ill. $^\circ$ jelöli.

Definíció. Legyen $\mathcal{N}$ végtelen $\subset \mathbb{N}$ és $(x_n : n \in \mathcal{N})$ egy sorozat X -ben^{*}, továbbá $x \in X$. Az $(x_n : n \in \mathcal{N})$ sorozat *konvergál* az x ponthoz, azaz

$$x_n \rightarrow x \quad (\mathcal{N} \ni n \rightarrow \infty) \quad \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad d(x_n, x) \rightarrow 0 \quad (\mathcal{N} \ni n \rightarrow \infty) .$$

Ha nem félrevezető, röviden " $x_n \rightarrow x$ "-et írunk.

Lemma. Metrikus térben a határérték egyértelmű. Azaz $x_n \rightarrow x, y \quad (\mathcal{N} \ni n \rightarrow \infty)$ esetén $x = y$.

Bizonyítás. Az x, x_n, y utakat becslve,

$$0 \leq d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) \rightarrow 0 \quad (\mathcal{N} \ni n \rightarrow \infty) .$$

Definíció. Metrikus térben a határérték jelölése

$$\lim_{n \in \mathcal{N}} x_n := [x \in X : \lim_{n \in \mathcal{N}} d(x_n, x) = 0] .$$

Tétel. Ha X, d és X', d' metrikus terek, akkor az $f : X \rightarrow Y$ leképezés pontosan akkor folytonos, ha konvergens sorozatot konvergensbe visz, azaz ha

$$\forall x, x_1, x_2, \dots \in X \quad x_n \rightarrow x \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x) .$$

Bizonyítás. Úgy, mint $\mathbb{R}$ -ben a folytonosság Cauchy- és Heine-féle definícióinak ekvivalenciája.

Tétel. Ha $A \subset X$, akkor $\overline{A} = \{x \in X : \exists (a_1, a_2, \dots) A\text{-ban } a_n \rightarrow x\}$.

Bizonyítás. Tudjuk: $\overline{A} = A \cup \partial A = \{x \in X : \forall U \in \mathcal{U}_x^{(d)} \quad U \cap A \neq \emptyset\}$.

Tegyük fel, hogy $x \in \overline{A}$. Tekintsük az

$$U_n := S^{(d)}(x, 1/n) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

gömbi környezeteit x -nek. Mivel $A \cap U_n \neq \emptyset$ minden n -re, választható olyan $(a_1, a_2, \dots)$ sorozat, hogy $a_n \in A \cap U_n \quad (n = 1, 2, \dots)$. Most $a_n \rightarrow x$, mivel

$$d(a_n, x) < 1/n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) .$$

Tegyük fel ezután, hogy $x \notin \overline{A}$. Mivel $X \setminus \overline{A} = X \setminus (A \cup \partial A) = (X \setminus A)^\circ$, fennáll $X \setminus A \in \mathcal{U}_x^{(d)}$. Tehát $\exists \varepsilon > 0 \quad S^{(d)}(x, \varepsilon) \subset X \setminus A$.

^{*} Sorozat alatt a természetes számok $\mathbb{N}$ halmazának egy végtelen részhalmazán értelmezett függvényt értünk. A tradicionális jelölés azonban eltér a szokásostól. Szigorúan véve, x_n jelentése $x(n) \quad (n \in \mathcal{N})$, ill. $(x_n : n \in \mathcal{N})$ jelöli azt, hogy a sorozat egy $x : \mathcal{N} \rightarrow X$ típusú függvény.

Ha $(a_1, a_2, \dots)$ egy sorozat A -ban, akkor $d(x, a_n) \geq \varepsilon \forall n$, ahonnan $d(x, a_n) \not\rightarrow 0$.

Tétel. (Bolzano–Weierstrass). *Metrikus térbeli kompakt halmazban minden sorozatnak van konvergens részsorozata. Azaz ha A kompakt $\subset X$ és $(a_1, a_2, \dots)$ egy sorozat A -ban, akkor $\exists a \in A \exists \mathcal{N} \subset \mathbb{N} \ a_n \rightarrow a \ (\mathcal{N} \ni n \rightarrow \infty)$.*

Bizonyítás. Észrevétel: Egy $a \in X$ ponthoz pontosan akkor $\exists \mathcal{N}$ végtelen $\subset \mathbb{N}$ $a_n \rightarrow a \ (\mathcal{N} \ni n \rightarrow \infty)$, ha bármely n -re az $S^{(d)}(a, 1/n)$ gömbi környezetébe a -nak végtelen sok tagja esik az $(a_1, a_2, \dots)$ sorozatnak, azaz ha minden U a -környezetre az $\{n \in \mathbb{N} : a_n \in U\}$ halmaz végtelen.

Tegyük fel, hogy a tétel állítása nem teljesül. Az észrevételből következik ekkor, hogy mindegyik $a \in A$ ponthoz választható lenne U_a a -környezet, melyre $\{n : a_n \in U_a\}$ véges. Tekintsük most a

$$\mathcal{G} := \{U_a^o : a \in A\}$$

nyitott lefedését A -nak. Mivel A kompakt, létezik $a_1, \dots, a_m \in A$ úgy, hogy

$$U_{a_1}^o \cup \dots \cup U_{a_m}^o \supset A.$$

De így az

$$\mathbb{N} = \{n : a_n \in A\} = \bigcup_{i=1}^m \{n : a_n \in U_{a_i}^o\} = \bigcup_{i=1}^m (\text{VÉGES}) = (\text{VÉGES})$$

ellentmondásra jutunk.

Szeperabilitás

Definíció. Az X, d metrikus tér *szeperábilis*, ha

$$\exists \{x_1, x_2, \dots\} \text{ megszámlálható } \subset X \quad \{x_1, x_2, \dots\}^- = X$$

(itt $-$ az $\mathcal{U}^{(d)}$ -szerinti lezárás). Standard jelölés: $\mathbb{Q} := \{\text{racionális számok}\}$.

Lemma. *Ha X, d szeperábilis és $\{x_1, x_2, \dots\}^- = X$, akkor az $x \in X$ körüli $\rho > 0$ sugarú gömbre*

$$S^{(d)}(x, \rho) = \bigcup \{S^{(d)}(x_n, \delta) : d(x_n, x) + \delta < \rho, \delta \in \mathbb{Q}\}.$$

Bizonyítás. Legyen $y \in S^{(d)}(x, \rho)$ tetszőleges. Mivel $d(x, y) < \rho$, létezik olyan *racionális* δ is, melyre $0 < \delta < \frac{1}{2}[\rho - d(x, y)]$. Mivel $\{x_1, x_2, \dots\}^- = X$, valamely n indexre $d(x_n, y) < \delta$. Ezzel az n indexszel $y \in S^{(d)}(x_n, \delta)$, és

$$\begin{aligned} d(x, z) &\leq d(x, y) + d(y, x_n) + d(x_n, z) \\ &\leq d(x, y) + \delta + \delta < \rho \quad (z \in S^{(d)}(x_n, \delta)). \end{aligned}$$

Tétel. (Lindelöf). *Szeperábilis metrikus térben kiválasztható olyan megszámlálható nyitott gömbcsalád, amely tagjaiból az összes nyitott halmaz kirakható.*

Sőt, pontosabban, ha X, d szeperábilis, $\{x_1, x_2, \dots\}^- = X$ és

$$\mathcal{T} := \{S^{(d)}(x_n, \delta) : \delta \in \mathbb{Q}, n = 1, 2, 3, \dots\},$$

akkor

- 1) $\forall G$ nyitott $\subset X \quad \exists T_1, T_2, \dots \in \mathcal{T} \quad G = \bigcup_{i=1}^{\infty} T_i$,
- 2) $\forall \mathcal{G} \subset \{\text{nyitottak}\} \quad \exists \mathcal{H}$ megszámlálható $\subset \mathcal{G} \quad G = \bigcup \mathcal{H}$.

Bizonyítás. 1) Ha G nyitott, akkor minden $x \in G$ -hez választható $\rho_x > 0$ úgy, hogy $S^{(d)}(x, \rho_x) \subset G$. Így a lemma alapján

$$\begin{aligned} S^{(d)}(x, \rho_x) &= \bigcup \{T \in \mathcal{T} : T \subset S^{(d)}(x, \rho_x)\} \quad (x \in G), \\ G &= \bigcup \{T \in \mathcal{T} : T \subset G\}. \end{aligned}$$

De a $\mathcal{T}$ gömbcsalád megszámlálható, és ezért $\{T \in \mathcal{T} : T \subset G\} = \{T_1, T_2, \dots\}$ alakú.

2) Az előzőek szerint általában is

$$G = \bigcup \{T \in \mathcal{T} : T \subset G\} \quad (G \in \mathcal{G}).$$

Ha tehát $\mathcal{G}$ egy nyitott halmazcsalád, akkor

$$\bigcup \mathcal{G} = \bigcup \{T \in \mathcal{T} : \exists G \in \mathcal{G} \quad T \subset G\}.$$

Mivel $\mathcal{T}$ megszámlálható, megint vehető

$$\{T \in \mathcal{T} : \exists G \in \mathcal{G} \quad T \subset G\} = \{T_1, T_2, \dots\}.$$

Tekintve, hogy minden $i \in \mathbb{N}$ indexre választható $G_i \in \mathcal{G}$ úgy, hogy $T_i \subset G_i$,

$$\begin{aligned} \bigcup \mathcal{G} &= \bigcup \{T \in \mathcal{T} : \exists G \in \mathcal{G} \quad T \subset G\} \\ &= T_1 \cup T_2 \cup \dots \subset G_1 \cup G_2 \cup \dots \subset \bigcup \mathcal{G}. \end{aligned}$$

Kompaktság és Bolzano–Weierstrass tulajdonság

Definíció. Az X, d metrikus tér *Bolzano–Weierstrass* (röviden *B–W*) *tulajdonságú*, ha minden X -beli sorozatból kiválasztható konvergens részsorozat (d szerint), azaz ha

$$\forall (x_1, x_2, \dots) \quad \exists x \in X, \mathcal{N} \subset \mathbb{N} \quad x_n \rightarrow x \quad (\mathcal{N} \ni n \rightarrow \infty).$$

Definíció. Az $Y \subset X$ halmaz az X, d tér egy ε -hálója (a d metrika szerint), ha

$$d(x, y) \geq \varepsilon > 0 \quad (x \neq y \quad x, y \in Y).$$

Lemma. *B–W tulajdonságú metrikus térben minden ε -háló véges.*

Bizonyítás. Legyen X, d egy B–W tulajdonságú metrikus tér. Tegyük fel, hogy Y ε -háló X, d -ben, és

$$y_1, y_2, \dots \in Y, \quad y_i \neq y_k \quad (i \neq k).$$

A tér B–W tulajdonsága miatt létezik olyan $\mathcal{N} \subset \mathbb{N}$ és $y \in X$, hogy

$$y_n \rightarrow y \quad (\mathcal{N} \ni n \rightarrow \infty).$$

Speciálisan, létezik n_0 , hogy $d(y_n, y) < \varepsilon/2$ valahányszor $n_0 \leq n \in \mathcal{N}$. Ez a tény az

$$\varepsilon \leq d(y_n, y_m) \leq d(y_n, y) + d(y, y_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad (n, m \in \mathcal{N} \quad n > m \geq n_0)$$

ellentmondásra vezet.

Propozíció. *A B–W tulajdonságú metrikus terek szeparábilisak.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy X, d B–W tulajdonságú. Legyen $n = 1, 2, \dots$ -re Y_n maximális $1/n$ -háló X, d -ben. A lemma alapján ilyenek léteznek és végesek. Így az $Y := \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$ halmaz megszámlálható.

Állítás: $\bar{Y} = X$. Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $x \in X \setminus \bar{Y}$. Mivel $X \setminus \bar{Y}$ nyitott X -ben, választható $\varepsilon > 0$ úgy, hogy $S^{(d)}(x, \varepsilon) \subset X \setminus \bar{Y}$. Tekintsünk egy olyan n indexet, amelyre $1/n < \varepsilon$. Az Y_n $1/n$ -háló maximalitása miatt valamelyik $y \in Y_n$ pontra $d(x, y) < 1/n < \varepsilon$, ami ellentmond ε választásának.

Tétel. *Metrikus térben a kompaktság ekvivalens a B–W tulajdonsággal.*

Bizonyítás. A már bizonyított Bolzano–Weierstrass tétel szerint a kompakt metrikus terek B–W tulajdonságúak.

Tegyük fel, hogy X, d B-W tulajdonságú, és legyen $\mathcal{G}$ egy nyitott lefedése X -nek (azaz $\mathcal{G} \subset \{X\text{-beli nyitottak}\}$ és $\bigcup \mathcal{G} = X$). Belátandó: $\exists \mathcal{F}$ véges $\mathcal{G} \supset \bigcup \mathcal{F} = X$.

Mivel X, d B-W tulajdonságú, szeparábilis is. Lindelöf tétele szerint kiválasztható $G_1, G_2, \dots \in \mathcal{G}$ úgy, hogy $\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i = X$. Állítás: Valamelyik N -re $X = G_1 \cup \dots \cup G_N$. (Vagyis $\mathcal{F} := \{G_1, \dots, G_N\}$ vétele megfelel.) Bizonyítás: Tegyük fel az ellenkezőjét. Ekkor

$$\forall n \exists x_n \in X \quad x_n \notin G_1 \cup \dots \cup G_n.$$

A tér B-W tulajdonsága alapján

$$\exists \mathcal{N} \text{ végtelen } \subset \mathbb{N} \exists x \in X \quad \lim_{n \in \mathcal{N}} x_n = x.$$

Ekkor

$$x = \lim_{i \in \mathcal{N}} x_i \in X \setminus (G_1 \cup \dots \cup G_n) \quad (n = 1, 2, \dots),$$

mivel bármely rögzített n indexre $x_i \in X \setminus (G_1 \cup \dots \cup G_n)$ ($i \geq n$) és mivel az $X \setminus (G_1 \cup \dots \cup G_n)$ halmazok zártak. Csakhogy így az

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [X \setminus (G_1 \cup \dots \cup G_n)] = \emptyset$$

ellentmondásra jutunk.

Következmény. *Kompakt metrikus tér szeparábilis.*

Teljesség

Definíció. Az $(x_1, x_2, \dots)$ sorozat X, d -ben *Cauchy sorozat*, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, m \geq N \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon,$$

azaz ha $d(x_n, x_m) \rightarrow 0$ ($m, n \rightarrow \infty$).

Az $(x_1, x_2, \dots)$ sorozat X, d -ben *véges út*, ha $\sum_{i=1}^{\infty} d(x_i, x_{i+1}) < \infty$.

Definíció. Az X, d metrikus tér *teljes*, ha benne a Cauchy sorozatok konvergenssek, azaz ha

$$\forall (x_1, x_2, \dots) \quad \lim_{m, n} d(x_n, x_m) = 0 \Rightarrow \exists x \in X \quad \lim_n x_n = x.$$

Példa. A Cauchy-féle konvergenciai kritérium szerint $\mathbb{R}$ ellátva a $d(x, y) := |x - y|$ metrikával teljes. Mivel félmetrikák maximuma ill. összege (ugyanazon a halmazon) triviálisan félmetrika, innen következik, hogy $\mathbb{R}^N$ a

$$\begin{aligned} d_{\infty}(x, y) &:= \max_{i=1}^N |x_i - y_i| & (x = (x_1, \dots, x_N), \\ d_1(x, y) &:= \sum_{i=1}^N |x_i - y_i| & y = (y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N) \end{aligned}$$

metrikákkal teljes.

Propozíció. (A véges utak elve). X, d pontosan akkor teljes, ha benne a véges utak konvergenssek.

Bizonyítás. $\Rightarrow$: Tegyük fel, hogy X, d teljes, és $\sum_{i=n}^{\infty} d(x_i, x_{i+1}) < \infty$. Ekkor

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{i=n}^{m-1} d(x_i, x_{i+1}) \rightarrow 0 \quad (m > n \rightarrow \infty).$$

Vagyis az $(x_1, x_2, \dots)$ sorozat Cauchy, következésképpen konvergens.

$\Leftarrow$: Tegyük fel, hogy a véges utak konvergensnek X, d -ben, és legyen $(x_1, x_2, \dots)$ egy Cauchy sorozat. Most találhatunk egy olyan növekvő $N_1 \leq N_2 \leq \dots$ indexsorozatot, amelyre

$$d(x_n, x_m) < \frac{1}{2^k} \quad (m, n \geq N_k \quad k = 1, 2, \dots).$$

Mivel $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1 < \infty$, az $(x_{N_1}, x_{N_2}, \dots)$ út véges X, d -ben. Tehát feltevés szerint létezik $x \in X$, melyre $x_{N_k} \rightarrow x$ ($k \rightarrow \infty$).

Állítás: $x_n \rightarrow x$ ($n \rightarrow \infty$). Bizonyítás: Legyen $\varepsilon > 0$ adott. Belátandó: $\exists N \forall n \geq N \quad d(x_n, x) < \varepsilon$. Mivel az $(x_1, x_2, \dots)$ sorozat Cauchy, rögzíthetők olyan L , hogy

$$d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} \quad (m, n \geq L).$$

Mivel $\lim_k x_{N_k} = x$, választható olyan K , hogy

$$d(x_{N_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2} \quad (k \geq K).$$

Legyen $N := \max\{N_k, L\}$. Ha $n \geq N$, akkor

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{N_k}) + d(x_{N_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Tétel. Ha X, d egy metrikus tér és S teljes X^* , akkor S zárt $\subset X$.

Bizonyítás. Legyen $x \in \overline{S}$ tetszőleges. Belátandó: $x \in S$. Mivel $x \in \overline{S}$, létezik $x_1, x_2, \dots \in S$ úgy, hogy $x_n \rightarrow x$ ($n \rightarrow \infty$). Mivel a konvergens sorozatok triviálisan Cauchy sorozatok, az $S, d|S \times S$ tér teljessége miatt $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in S$.

Megjegyzés. A teljes metrikus tereknek az előbbi tételben bemutatott tulajdonságát *abszolút zártságnak* szokás nevezni.

Kontrakciós fixpont tétel

Definíció. Legyenek X, d, X', d' metrikus terek, $\alpha \geq 0$. Az $f : X \rightarrow X'$ leképezés α -kontrakció, ha

$$d'(f(x), f(y)) \leq \alpha \cdot d(x, y) \quad (x, y \in X).$$

Lemma. Kontrakció folytonos.

Bizonyítás. Ha $f : X \rightarrow X'$ egy α -kontrakció, és X -ben $x_n \rightarrow x$, akkor

$$0 \leq d'(f(x_n), f(x)) \leq \alpha \cdot d(x_n, x) \rightarrow 0.$$

Tétel. Legyen X, d teljes metrikus tér és valamely $\alpha < 1$ -re a $T : X \rightarrow X$ leképezés α -kontrakció. Ekkor

- 1) pontosan egy fixpontja van T -nek, azaz $\exists! x \in X \quad T(x) = x$,
- 2) akármelyik $x_0 \in X$ pontból kiindulva, a

$$T^n(x_0) := \underbrace{T \circ \dots \circ T}_n(x_0) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

sorozat T fixpontjához konvergál.

* Vagyis az $S, d|S \times S$ metrikus tér teljes. (V.ö. Részhalmaz topológiája alfej.)

Bizonyítás. Legyen $x_0 \in X$ tetszőlegesen adott, és vezessük be az

$$x_n := T^n(x_0) \quad (n = 1, 2, \dots), \quad \delta := d(x_0, x_1)$$

jelöléseket. Ekkor n -szerinti indukcióval

$$\begin{aligned} d(x_1, x_2) &= d(T(x_0), T(x_1)) \leq \alpha \cdot d(x_0, x_1) = \alpha\delta \\ &\vdots \\ d(x_n, x_{n+1}) &= d(T(x_{n-1}), T(x_n)) \leq \alpha \cdot d(x_{n-1}, x_n) \leq \alpha^n \delta \end{aligned}$$

látható $n = 2, 3, \dots$ -ra. Vagyis

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(x_{n-1}, x_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n-1} \delta = \frac{\delta}{1-\alpha} < \infty.$$

Tehát az $x_1, x_2, \dots$ sorozat egy véges út X, d -ben, és így konvergens, mondjuk $x_n \rightarrow x$ ($n \rightarrow \infty$). Mivel a T kontrakció folytonos,

$$\begin{array}{ccc} x_{n+1} = T(x_n) & & \\ \downarrow & \downarrow & \\ x = T(x) & & (n \rightarrow \infty) \end{array}$$

Azt kell még belátnunk, hogy T -nek nem lehet két különböző fixpontja. Tegyük fel, hogy $T(x) = x$ és $T(y) = y$. Ekkor

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y),$$

azaz $(1 - \alpha)d(x, y) \leq 0$. Innen $\alpha < 1$ miatt $d(x, y) \leq 0$, és így $x = y$ következik.

Átmérő, korlátosság

Definíció. Egy X, d metrikus térbeli $A \subset X$ halmaz *átmérője*

$$\text{diam}(A) := \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$$

ha $A \neq \emptyset$, és $\text{diam}(\emptyset) := 0$. Az $A \subset X$ halmaz *korlátos* (a d metrikában), ha belefoglalható egy d -gömbbe, azaz ha $\exists x \in X, \rho \in \mathbb{R}_+ \quad A \subset S^{(d)}(x, \rho)$.

Lemma. *A korlátos halmazok a véges átmérőjűek.*

Bizonyítás. Ha $A \subset S^{(d)}(x, \rho)$, akkor $\text{diam}(A) \leq \text{diam}(S^{(d)}(x, \rho)) \leq 2\rho$. Ha pedig $\text{diam}(A) < \infty$ és $A \neq \emptyset$, akkor véve egy tetszőleges $x \in A$ pontot, $A \subset S^{(d)}(x, \text{diam}(A))$.

Tétel. *A kompakt halmazok (metrikus térben) korlátosak, sőt van bennük legtávolabbi pontpár is.*

Bizonyítás. Legyen K egy kompakt halmaz az X, d metrikus térben. Tudjuk, hogy az $(x, y) \mapsto d(x, y)$ folytonos $K \times K \rightarrow \mathbb{R}$ leképezés. Másrészt most a $K \times K$ tér (az $\mathcal{U}^{(d)} \times \mathcal{U}^{(d)}$ topológiával) szintén kompakt. Ezért található $(x_0, y_0) \in K \times K$, melyre

$$d(x_0, y_0) = \max\{d(x, y) : (x, y) \in K \times K\} = \text{diam}(K).$$

Definíció. Egy metrikus térbe képező f függvény *korlátos*, ha $\text{ran}(f)$ (az értékkészlete) korlátos.

Következmény. *Kompakt topológiát metrikus térbe folytonosan leképező függvény korlátos. Sőt, ha $K, \mathcal{U}$ kompakt topológia, X, d metrikus tér és $f, g : K \rightarrow X$ folytonos függvények, akkor*

$$\exists x_0 \in K \quad d(f(x_0), g(x_0)) = \max\{d(f(x), g(x)) : x \in K\}.$$

Egyenletes folytonosság

Emlékeztető. Az X, d és X', d' metrikus terek közt ható f függvény folytonos, ha minden $x \in X$ pontban folytonos, azaz ha

$$\forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon, x) > 0 \quad \forall y \in X \quad d(x, y) \leq \delta(\varepsilon, x) \Rightarrow d'(f(x), f(y)) \leq \varepsilon.$$

Definíció. Az X, d és X', d' metrikus terek közt ható f függvény *egyenletesen folytonos*, ha az előbbinél a $\delta(\varepsilon, x)$ határ az x pontoktól függetlenül is választható, azaz ha

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x, y \in X \quad d(x, y) \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow d'(f(x), f(y)) \leq \varepsilon.$$

Lemma. *Az f függvény egyenletesen folytonos pontosan akkor, ha*

$$\lim_{\text{diam}(A) \rightarrow 0} \text{diam}(f(A)) = 0,$$

azaz ha $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall A \subset X \quad \text{diam}(A) \leq \delta \Rightarrow \text{diam}(f(A)) \leq \varepsilon$.

Bizonyítás. Definíció szerint az f függvény pontosan akkor egyenletesen folytonos, ha $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x, y \in X \quad d(x, y) \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow d'(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$. Most $\text{diam}(f(A)) \leq \varepsilon$ valahányszor $\text{diam}(A) \leq \delta(\varepsilon)$.

Tétel. *Kompakt metrikus tér folytonos leképezése metrikus térbe egyenletesen folytonos.*

Bizonyítás. Legyenek X, d ill. X', d' metrikus terek, $f : X \rightarrow X'$. Tegyük fel, hogy X, d kompakt és f folytonos. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen adott. Mivel a d' távolságfüggvény folytonos,

$$F_\varepsilon := \{(x, y) : d'(f(x), f(y)) \geq \varepsilon\} \text{ zárt } \subset X \times X$$

a kompakt $(\mathcal{U}^{(d)})^2$ topológiában. Így F_ε kompakt $\subset X \times X$. A folytonos d függvény felveszi a $\delta(\varepsilon)$ minimumát F_ε -on. Mondjuk legyen $d(x_\varepsilon, y_\varepsilon) = \delta(\varepsilon)$. Mivel $d(F_\varepsilon) \geq \varepsilon > 0$, csak $x_\varepsilon \neq y_\varepsilon$ és így $\delta(\varepsilon) > 0$ lehet. Ha $x, y \in X$ és $d(x, y) < \delta(\varepsilon)$, akkor a $\delta(\varepsilon) = \min d(F_\varepsilon)$ reláció szerint $(x, y) \notin F_\varepsilon$. Vagyis az F_ε alakzat definíciója alapján $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$ valahányszor $d(x, y) < \delta(\varepsilon)$.

Egyenletes konvergencia

Emlékeztető. Ha S egy halmaz és X, d metrikus tér, akkor az $f_1, f_2, \dots : S \rightarrow X$ függvények pontonként konvergálnak az $f : S \rightarrow X$ függvényhez (jelölésben $f_n \rightarrow f$), ha

$$\forall s \in S \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon, s) \quad \forall n \geq N(\varepsilon, s) \quad d(f_n(s), f(s)) < \varepsilon.$$

Definíció. Legyenek S egy halmaz, X, d egy metrikus tér és $f, f_1, f_2, \dots : S \rightarrow X$ függvények. Az $(f_n : n = 1, 2, \dots)$ függvénysorozat *egyenletesen konvergál* az f függvényhez, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \quad \forall n \geq N(\varepsilon) \quad \forall s \in S \quad d(f_n(s), f(s)) < \varepsilon.$$

Jelölés: $f_n \rightrightarrows f$ ($n \rightarrow \infty$), vagy csak röviden $f_n \rightrightarrows f$. (Annak, hogy milyen metrika szerint, a kontextusból kell kiderülnie. Természetes módon kiterjeszthetjük a definíciót részsorozatokra is. Ilyenkor $f_n \rightrightarrows f$ ($\mathcal{N} \ni n \rightarrow \infty$) típusú a célszerű jelölés.) Bevezetjük a

$d^S(f, g) := \sup\{d(f(s), g(s)) : s \in S\}$, $d_*^S(f, g) := \min\{d(f, g), 1\}$
távolságokat az $f, g : S \rightarrow X$ függvények között.

Tétel. *Az egyenletes konvergencia metrízálható. Nevezetesen, ha S egy halmaz és X, d egy metrikus tér, akkor az $\mathcal{F} := \{S \rightarrow X \text{ függvények}\}$ téren d^S ill. d_*^S kiterjesztett értékű ill. valódi metrikák, és $\mathcal{F}$ -ben a d távolság szerint*

$$f_n \rightrightarrows f \Leftrightarrow d^S(f_n, f) \rightarrow 0 \Leftrightarrow d_*^S(f_n, f) \rightarrow 0 .$$

Bizonyítás. A d távolságfüggvény szimmetriájából azonnal következik d^S ill. d_*^S szimmetriája. Ha $f \neq g$ $\mathcal{F}$ -ben, akkor valamely $s \in S$ pontnál $f(s) \neq g(s)$, ahonnan $d^S(f, g) \geq d_*^S(f, g) \geq \min\{1, d(f(s), g(s))\} > 0$. A $\triangle$ -egyenlőtlenség d^S -ill. d_*^S -re a következőképpen bizonyítható: Legyenek $f, g, h \in \mathcal{F}$. Most tetszőleges $s \in S$ -re a $d_* := \min\{1, d\}$ jelöléssel

$$\begin{aligned} d(f(s), h(s)) &\leq d(f(s), g(s)) + d(g(s), h(s)) \leq d^S(f, g) + d^S(g, h) , \\ d_*(f(s), h(s)) &\leq d_*(f(s), g(s)) + d_*(g(s), h(s)) \leq d_*^S(f, g) + d_*^S(g, h) , \end{aligned}$$

és itt a bal oldalak $\sup_{s \in S}$ -e $d^S(f, h)$ ill. $d_*^S(f, h)$. Tehát a d^S és d_*^S függvények metrikák. Az $f_n \rightrightarrows f$ reláció ekvivalenciája $\sup_{s \in S} d(f_n(s), f(s)) \rightarrow 0$ -val azonnal adódik. Másrészt $d^S(f_n, f) \rightarrow 0 \Leftrightarrow d_*^S(f_n, f) = \min\{1, d^S(f_n, f)\} \rightarrow 0$.

Teljesség és egyenletes konvergencia

Tétel. *Ha X, d teljes metrikus tér és S egy halmaz, akkor az $\mathcal{F} := \{S \rightarrow X \text{ függvények}\}$ tér ellátva a d_*^S (vagy a kiterjesztett értékű d^S) metrikával teljes metrikus tér.*

Bizonyítás. Legyen $f_1, f_2, \dots$ egy véges út $\mathcal{F}$ -ben. Azaz $\sum_{n=1}^{\infty} d^S(f_n, f_{n+1}) < \infty$. Ekkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} d^S(f_n(s), f_{n+1}(s)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} d^S(f_n, f_{n+1}) < \infty \quad (s \in S) .$$

Vagyis minden $s \in S$ mellett az $f_1(s), f_2(s), \dots$ út X -ben véges (a d metrika szerint). Így az

$$f(s) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(s) \quad (s \in S)$$

függvény jól-definiált az X, d tér teljessége miatt. A távolságfüggvény folytonossága következtében

$$\begin{aligned} d(f_N(s), f(s)) &= \lim_{M \rightarrow \infty} d(f_N(s), f_M(s)) \\ &\leq \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=N}^{M-1} d(f_n(s), f_{n+1}(s)) = \sum_{n=N}^{\infty} d(f_n(s), f_{n+1}(s)) \\ &\leq \sum_{N=1}^{\infty} d^S(f_n, f_{n+1}) \quad (s \in S \quad N=1, 2, \dots) . \end{aligned}$$

Véve a bal oldal sup-át S -en,

$$d^S(f_N, f) \leq \sum_N^\infty d^S(f_n, f_{n+1}) \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty),$$

azaz $f_N \rightrightarrows f$ ($N \rightarrow \infty$).

Folytonosság és egyenletes konvergencia

Definíció. Legyen $S, \mathcal{U}$ topologikus tér, X, d metrikus tér. Standard jelölés:

$$\mathcal{C}(S, X) := \{S \rightarrow X \text{ folytonos függvények}\}.$$

A $\mathcal{C}(S, X)$ függvénytér *természetes metrikája* az egyenletes konvergenciát leíró d^S kiterjesztett értékű távolság. Az $X = \mathbb{R}$ speciális esetben (a $d(x, y) := |x - y|$ metrikával) szokásos csak $\mathcal{C}(S)$ -et írni $\mathcal{C}(S, \mathbb{R})$ helyett.

Tétel. *Folytonos függvények egyenletes limese folytonos. Ha $S, \mathcal{U}$ topológia, X, d metrikus tér, az $f_1, f_2, \dots : S \rightarrow X$ függvények folytonosak egy $s \in S$ pontban és $f_n \rightrightarrows f$ (azaz $d^S(f_n, f) \rightarrow 0$), akkor az f limesfüggvény is folytonos s -nél.*

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen adott. Ekkor található N index, melyre

$$d^S(f_N, f) = \sup_{t \in S} d(f_N(t), f(t)) \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Az f_N függvény s -beli folytonossága miatt létezik $U \in \mathcal{U}_s$ környezet úgy, hogy

$$\text{diam}(f_N(U)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Most $t \in U$ esetén

$$\begin{aligned} d(f(t), f(s)) &\leq d(f(t), f_N(t)) + d(f_N(t), f_N(s)) + d(f_N(s), f(s)) \\ &\leq d^S(f_N, f) + \text{diam}(f_N(U)) + d^S(f_N, f) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Következmény. *Ha X, d teljes metrikus tér és $K, \mathcal{U}$ kompakt topológia, akkor $\mathcal{C}(K, X), d^K$ teljes metrikus tér.*

TOPOLOGIKUS ÉS NORMÁLT VEKTORTEREK

Általában is, egy algebrai struktúrát topologikusnak nevezzük, ha el van látva egy olyan topológiával, amelyre nézve a műveletei folytonosak.

Lineáris topológiák

Definíció. Legyen V egy (valós) vektortér és $\mathcal{V}$ egy topológia V -n. $\mathcal{V}$ *lineáris* topológia (V felett), ha a

$$\begin{aligned} (v_1, v_2) &\mapsto v_1 + v_2 \\ (\lambda, v) &\mapsto \lambda v \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

műveletek folytonos $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ ill. $\mathbb{R} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ leképezések. Tehát a *topologikus vektorterek* a lineáris topológiával ellátott vektorterek.

Tétel. A lineáris topológiát meghatározzák a 0-környezetei. Ha $V, \mathcal{V}$ topologikus vektortér, akkor

- 1) $\mathcal{V}_a = a + \mathcal{V}_0 = \{a + U : U \in \mathcal{V}_0\} \quad (a \in V),$
- 2) $\overline{A} = \bigcap_{U \in \mathcal{V}} (A + U)$ az $A \subset V$ alakzatok $\mathcal{V}$ -lezárására.

Bizonyítás. 1) Legyen $a \in V$. A $T_a : x \mapsto x + a$ eltolás folytonosan invertálható leképezése V -nek önmagára ($T_a^{-1} = T_{-a}$). Így környezetet környezetbe visz, azaz $U \in \mathcal{V}_0 \Leftrightarrow T_a(U) \in \mathcal{V}_a$.

2) Definíció szerint $a \in \overline{A}$ akkor és csak akkor, ha $\forall U \in \mathcal{V}_a \quad U \cap A \neq \emptyset$, ami 1) alapján azt jelenti, hogy minden $U \in \mathcal{V}_0$ környezetre $(a + U) \cap A \neq \emptyset$, azaz $a \in A + U$. Tehát $\overline{A} = \bigcap_{U \in \mathcal{V}_0} (A + U)$. Mivel az $M_{-1} : x \mapsto -x$ szorzás folytonos és idempotens, $-U \in \mathcal{V}_0 \Leftrightarrow U \in \mathcal{V}_0$.

Lemma. Topologikus vektortérben az origó lezártja egy altér, és minden 0-környezet tartalmaz $W + \{0\}$ alakú 0-környezetet.

Bizonyítás. Legyen $V, \mathcal{V}$ topologikus vektortér és

$$L := \overline{\{0\}} = \bigcap_{U \in \mathcal{V}_0} U.$$

Lévéen folytonos műveletek, az összeadás és a konstanssal való szorzások nem vezetnek ki a $\{0\}$ halmaz lezártjából, L -ből (hiszen $0+0=0$ és $\mathbb{R} \cdot 0=0$). Vagyis L altere a V vektortérnek. Másrészt az összeadás folytonossága alapján $\forall U \in \mathcal{V}_0 \exists Z, W \in \mathcal{V}_0 \quad Z+W \subset U$, és így $\forall U \in \mathcal{V}_0 \exists W \in \mathcal{V}_0 \quad L+W \subset U$.

Következmény. Ha a $V, \mathcal{V}$ topologikus vektortér pontjai topológiailag megkülönböztethetők, akkor a tér Hausdorff. Azaz, ha $\mathcal{V}_a \neq \mathcal{V}_b \quad (a \neq b, a, b \in V)$, akkor $V, \mathcal{V}$ Hausdorff tér.

Bizonyítás. Ha az $L := \overline{\{0\}}$ altér nem-triviális (azaz $L \neq \{0\}$), akkor

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_x &= \{U \subset V : \exists W \in \mathcal{V}_0 \quad x + W + L \subset U\} \\ &= \{U \subset V : \exists W \in \mathcal{V}_0 \quad W + L \subset U\} = \mathcal{V}_0 \quad (x \in L). \end{aligned}$$

Tehát az L -beli pontok topológiailag megkülönböztetlenek.

Ha $L = \{0\}$ és $a \neq b$ V -ben, akkor $a - b \notin L$, és így valamely $U \in \mathcal{V}_0$ környezetre $a - b \notin U$. Mivel a kivonás is folytonos $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ operáció, található

$W, Z \in \mathcal{V}_0$, hogy $W - Z \subset U$. Most $a - b \notin W - Z$, ahonnan $(a + Z) \cap (b + W) = \emptyset$. Tehát a -nak és b -nek vannak diszjunkt környezetei. Azaz ilyenkor a $V, \mathcal{V}$ tér Hausdorff.

Véges dimenziós vektortér topológiája

Tétel. Legyen V egy véges dimenziós vektortér. Ekkor

- 1) pontosan egy lineáris Hausdorff topológia létezik V -n,
- 2) ha $\{e_1, \dots, e_N\}$ bázis $\subset V$ és $\mathcal{V}$ lineáris Hausdorff topológia V -n, akkor

$$\mathcal{V}_a = \left\{ U \subset V : \exists \varepsilon > 0 \quad \left\{ a + \sum_{i=1}^N \xi_i e_i : |\xi_1|, \dots, |\xi_n| < \varepsilon \right\} \subset U \right\} \quad (a \in V).$$

Bizonyítás. Észrevétel: 2) $\Rightarrow$ 1) [mert ilyen $\mathcal{V}$ topológia megfelelő is].

2) Legyen $\mathcal{V}$ egy lineáris Hausdorff topológia V -n. Legyenek $a \in V$ és $U \in \mathcal{V}_a$ tetszőlegesen adottak. Tekintsük a

$$T : (\xi_1, \dots, \xi_n) \rightarrow a + \sum_{i=1}^N \xi_i e_i$$

leképezést. Mivel $\mathcal{V}$ lineáris, $T : (\mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{V})$ -folytonos. Ezért, minthogy $a = T(0)$, $T^{-1}(U)$ 0-körny $\mathbb{R}^n$ -ben. Vagyis található $\varepsilon > 0$, melyre

$$\{(\xi_1, \dots, \xi_n) : |\xi_1|, \dots, |\xi_n| < \varepsilon\} \subset T^{-1}(U).$$

Innen

$$(*) \quad \{T(\xi_1, \dots, \xi_n) : |\xi_1|, \dots, |\xi_n| < \varepsilon\} \subset U.$$

Fordítva: Tegyük fel, hogy $a \in V$, $U \subset V$ és az imént használt T leképezéssel $(*)$ teljesül. Belátandó: $U \in \mathcal{V}_a$.

Mivel $K := \{(\xi_1, \dots, \xi_n) : \max_{i=1}^n |\xi_i| = \varepsilon\}$ kompakt $\subset \mathbb{R}^n$, ennek a folytonos $T(K)$ képe kompakt V -ben (a $\mathcal{V}$ topológia szerint). Feltevés szerint $\mathcal{V}$ Hausdorff-féle, így $T(K)$ zárt, azaz a $V \setminus T(K)$ alakzat nyitott. Mivel $a \in V \setminus T(K)$, fennáll $V \setminus T(K) \in \mathcal{V}_a$. A $(\lambda, v) \mapsto a + \lambda v$ leképezés folytonossága miatt található $\delta > 0$ és $Z \in \mathcal{V}_0$, úgy hogy

$$a + (-\delta, \delta)Z \subset V \setminus T(K).$$

Észrevétel: összefüggőségi okokból

$$a + (-\delta, \delta)Z \subset \{T(\xi_1, \dots, \xi_n) : |\xi_1|, \dots, |\xi_n| < \varepsilon\}.$$

[Bizonyítás: Ha az ellenkezője, azaz

$$\exists z \in Z, \delta' \in (-\delta, \delta) \quad a + \delta' z \notin \{T(\xi_1, \dots, \xi_n) : |\xi_1|, \dots, |\xi_n| < \varepsilon\}$$

volna, akkor valamely $(\xi'_1, \dots, \xi'_i) \in \mathbb{R}^n$ -re

$$a + \delta' z = T(\xi'_1, \dots, \xi'_n) \quad \max_{i=1}^n |\xi'_i| \geq \varepsilon$$

lenne, és az

$$a + \frac{\varepsilon \delta'}{\max_i |\xi'_i|} z \in T(K), \quad a + (-\delta, \delta)z$$

ellentmondásra jutnánk.] Mivel a $\mathcal{V}$ topológia lineáris, $a + (-\delta, \delta)Z \in \mathcal{V}_a$, ahonnan $\{T(\xi_1, \dots, \xi_n) : |\xi_1|, \dots, |\xi_n| < 1\} \in \mathcal{V}_a$, és így $U \in \mathcal{V}_a$.

Következmény. Ha $V, \mathcal{V}$ Hausdorff topologikus vektortér, $\{e_1, \dots, e_N\}$ egy bázis V -ben, akkor a $(\xi_1, \dots, \xi_N) \mapsto \sum_{k=1}^N \xi_k e_k$ folytonos és folytonosan invertálható $\mathbb{R}^N \leftrightarrow V$ leképezés.

Következmény. Véges dimenziós Hausdorff topologikus vektortér lineáris leképezései topologikus vektorterekbe folytonosak.

Bizonyítás. Legyen $V_1, \mathcal{V}_1$ Hausdorff topologikus vektortér, $N := \dim(V_1) < \infty$ és $f : V_1 \rightarrow V_2$ egy lineáris leképezés egy $V_2, \mathcal{V}_2$ topologikus vektortérbe. Az előző következmény szerint az általánosság megszorítása nélkül vehető $V_1 = \mathbb{R}^N$ (a természetes topológiájával). Ugyanakkor

$$f(\xi_1, \dots, \xi_N) = \sum_{k=1}^N \xi_k v_k \quad \text{ahol} \quad v_k := f(0, \dots, 0, \underset{k}{1}, 0, \dots, 0) \quad (k = 1, \dots, N),$$

ami az összeadások és szorzások folytonossága következtében folytonos.

Definíció. Egy véges dimenziós vektortéren értelmezhető egyedüli lineáris Hausdorff topológiát a tér *természetes topológiájának* nevezzük. A következőkben a véges dimenziós vektortereket (hacsak kimondottan másképpen nem rendelkezünk) automatikusan a természetes topológiájukkal ellátott topologikus vektortereknek tekintjük.

Norma, félnorma

Kérdés: Melyek a vektortérbeli műveletekkel *kompatibilis* metrikák?

Definíció. Legyen V egy vektortér. A $\nu : V \rightarrow \mathbb{R}$ függvény *félnorma* V -n, ha

$$N1) \quad \nu(\lambda v) = |\lambda| \cdot \nu(v) \geq 0 \quad (\lambda \in \mathbb{R}, v \in V)$$

$$N2) \quad \nu(v_1 + v_2) \leq \nu(v_1) + \nu(v_2) \quad (v_1 + v_2 \in V)$$

A ν félnorma *norma*, ha

$$N3) \quad \nu(v) \neq 0 \quad (v \neq 0).$$

Az N1 norma-axiómában megadott tulajdonságot a ν függvény *homogenitásának*, az N2 axióma tartalmát Δ -*egyenlőtlenségnek* nevezzük, N3 a norma *definitása*.

Propozíció. Legyen V egy vektortér. Egy d metrika V -n *kompatibilis* a vektortér-műveletekkel, azaz

$$d(x+a, y+a) = d(x, y), \quad d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \cdot d(x, y) \quad (x, y, a \in V, \lambda \in \mathbb{R}),$$

ha létezik ν norma, melyre

$$d(x, y) = \nu(x - y) \quad (x, y \in V).$$

Bizonyítás. Ha ν norma és $d(x, y) := \nu(x - y)$ ($x, y \in V$), akkor

$$d(x+a, y+a) = \nu((x+a) - (y+a)) = \nu(x - y) = d(x, y),$$

$$d(\lambda x, \lambda y) = \nu(\lambda x - \lambda y) = \nu(\lambda(x - y)) = |\lambda| \cdot \nu(x - y) = |\lambda| \cdot d(x, y).$$

Verifikáljuk a távolság-axiómákat:

$$D1) \quad d(y, x) = \nu(y - x) = \nu((-1)(x - y)) \stackrel{N1}{=} |-1| \nu(x - y) = \nu(x - y) = d(x, y) \geq 0.$$

$$D2) \quad d(x, y) + d(y, z) = \nu(x - y) + \nu(y - z) \stackrel{N2}{\geq} \nu((x - y) + (y - z)) = \nu(x - z) = d(x, z).$$

$$D3) \quad x \neq y \Rightarrow d(x, y) = \nu(x - y) \stackrel{N3}{\neq} 0.$$

Fordítva: Ha d kompatibilis a vektortér-műveletekkel, akkor a $\nu(z) := d(z, 0)$ funkcionál norma a V vektortéren, amint az közvetlenül adódik a távolság-axiómákból.

Definíció. Egy V, ν normált térhez (azaz normával ellátott vektortérhez) mindig társítjuk a $d(x, y) := \nu(x - y)$ ($x, y \in V$) ν -távolságot és az eszerinti ν -topológiát.

A távolságfüggvény folytonosságából azonnal adódik az alábbi.

Következmény. A norma a természetes topológiájában folytonos.

Megjegyzés. Szemléletesen, a norma a vektorok hosszát jelenti. Másrészt a norma az $\mathbb{R}$ -beli abszolút értékkel analóg szerepet játszik. Szokásos jelölése ezért az $|\cdot|$ -hez hasonló $\|\cdot\|$ zárójelzés (különböző indexekkel; pl. $\nu_1(v)$ helyett $\|v\|_1$).

Lemma. Norma szerinti topológia lineáris.

Bizonyítás. Mivel a normából származtatott metrika eltolás-invariáns és homogén, az összes $T_a : x \mapsto x + a$, $M_\lambda : x \mapsto \lambda x$ eltolások ill. szorzások folytonosak a norma topológiájában. A Δ -egyenlőtlenség szerint az összeadás folytonos a 0-nál. Innen az eltolások folytonossága miatt az összeadás mindenütt való folytonossága is következik.

Folytonos lineáris leképezés normája

Tétel. Legyenek V_1, ν_1 ill. V_2, ν_2 normált vektorterek és $A : V_1 \rightarrow V_2$ egy lineáris leképezés. Ekkor a következő állítások ekvivalensek.

- 1) A folytonos (a ν_1 - ill. ν_2 -szerinti topológiák között),
- 2) $\exists \alpha \geq 0 \quad \nu_2(Ax) \leq \alpha \cdot \nu_1(x) \quad (x \in V_1)$
- 3) $\exists \alpha \geq 0 \quad A$ α -kontrakció.

Bizonyítás. Jelölje d_k a ν_k -szerinti távolságot ($k = 1, 2$).

1) $\Rightarrow$ 2): Tegyük fel, hogy 2) nem áll. Ekkor

$$\forall n \exists x_n \in V_1 \quad \nu_2(Ax_n) > n \cdot \nu_1(x_n) .$$

Tekintsük az

$$y_n := \frac{1}{\sqrt{n} \nu_1(x_n)} \cdot x_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

sorozatot. Vegyük észre, hogy

$$\nu_1(y_n) = \frac{1}{\sqrt{n} \nu_1(x_n)} \nu_1(x_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) .$$

Vagyis $d_1(y_n, 0) \rightarrow 0$. Ugyanakkor

$$\begin{aligned} \nu_2(Ay_n) &= \nu_2\left(\frac{1}{\sqrt{n} \nu_1(x_n)} Ax_n\right) = \frac{1}{\sqrt{n} \nu_1(x_n)} \nu_2(Ax_n) \\ &> \frac{n}{\sqrt{n}} \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty) , \end{aligned}$$

azaz $d_2(y_n, 0) \not\rightarrow 0$. Tehát ilyenkor A nem lehet folytonos 0-nál.

2) $\Rightarrow$ 3): Feltevés szerint minden $x, y \in V_1$ -re

$$d_2(Ax, Ay) = \nu_2(Ax - Ay) = \nu_2(A(x - y)) \stackrel{2)}{\leq} \alpha \cdot \nu_1(x - y) = \alpha \cdot d_1(x, y) .$$

3) $\Rightarrow$ 1) Triviális (kontrakció mindig egyenletesen folytonos).

Definíció. A $V_1, \mathcal{V}_1$ ill. $V_2, \mathcal{V}_2$ topologikus vektorterekénél

$$\mathcal{L}(V_1, V_2) := \{ \text{folyt. lin. } V_1 \rightarrow V_2 \text{ leképezések} \} .$$

Szokásos rövidítés: $\mathcal{L}(V_1) := \mathcal{L}(V_1, V_1)$. A konvencionális jelölés nem utal a vett topológiákra – ezeknek a kontextusból egyértelműen ki kell derülniök.

Ha V_1, ν_1 ill. V_2, ν_2 normált vektorterek, a folytonos lineáris operátorokra a következő $(\nu_1 \rightarrow \nu_2)$ -normát alkalmazzuk

$$\nu(A) := \inf \{ \alpha \geq 0 : \nu_2(Ax) \leq \alpha \cdot \nu_1(x) \quad (x \in V_1) \} \quad (A \in \mathcal{L}(V_1, V_2)) .$$

Tétel. 1) Az imént definiált ν funkcionál norma $\mathcal{L}(V_1, V_2)$ fölött.

$$2) \quad \nu(A) = \sup_{\nu_1(x)=1} \nu_2(Ax) \quad (A \in \mathcal{L}(V_1, V_2)) .$$

Bizonyítás. Észrevétel: $\nu(A) = \min \{ \alpha \geq 0 : \nu_2(Ax) \leq \alpha \cdot \nu_1(x) \quad (x \in V_1) \}$.

Bizonyítás: Ha $\nu_2(Ax) \leq \alpha \cdot \nu_1(x) \quad (x \in V_1)$ és $\beta \geq \alpha$, akkor $\nu_2(Ax) \leq \beta \cdot \nu_1(x) \quad (x \in V_1)$.

Innen

$$\{ \alpha \geq 0 : \nu_2(Ax) \leq \alpha \cdot \nu_1(x) \quad (x \in V_1) \} = [(\nu(A), \infty) \text{ vagy } [\nu(A), \infty)] .$$

Speciálisan

$$\nu_2(Ax) \leq \nu(A) \nu_1(x) \quad (x \in V_1) .$$

2) bizonyítása:

$$\begin{aligned} \nu(A) &= \min \{ \alpha \geq 0 : \nu_2(Ax) \leq \alpha \cdot \nu_1(x) \quad (x \in V_1) \} = \\ &= \min \{ \alpha \geq 0 : \nu_2(A(\frac{1}{\nu_1(x)}x)) \leq \alpha \cdot \underbrace{\nu_1(\frac{1}{\nu_1(x)}x)}_y \quad (x \in V_1) \} = \\ &= \min \{ \alpha \geq 0 : \nu_2(Ay) \leq \alpha \quad (y \in V_1, \nu_1(y)=1) \} \stackrel{\text{sup def}}{=} \\ &= \sup \{ \nu_2(Ay) : y \in V_1, \nu_1(y)=1 \} . \end{aligned}$$

1) bizonyítása:

$$\begin{aligned} \nu(\lambda A) &= \sup_{\nu_1(y)=1} \nu_2(\lambda Ay) = \sup_{\nu_1(y)=1} |\lambda| \nu_2(Ay) = |\lambda| \nu(A) \\ \nu(A+B) &= \sup_{\nu_1(y)=1} \nu_2(\underbrace{(A+B)y}_{Ay+By}) \stackrel{\Delta\text{-egyenl.}}{\leq} \sup_{\nu_1(y)=1} [\nu_2(Ay) + \nu_2(By)] \leq \\ &\leq \sup_{\nu_1(y)=1} \nu_2(Ay) + \sup_{\nu_1(y)=1} \nu_2(By) = \nu(A) + \nu(B) . \end{aligned}$$

Normák ekvivalenciája

Definíció. Egy V vektortéren két norma *ekvivalens*, ha ugyanazt a topológiát definiálják.

Tétel. Legyenek ν_1 és ν_2 normák ugyanazon a V vektortéren. Ekkor

$$1) \quad \nu_1 \text{ ekvivalens } \nu_2\text{-vel} \Leftrightarrow 2) \quad \exists m, M > 0 \quad m\nu_1 \leq \nu_2 \leq M\nu_1 .$$

Bizonyítás. 1) $\Rightarrow$ 2): Az $S := \{x : \nu_2(x) \leq 1\}$ gömb 0-környezet ν_2 topológiájában. Az 1) feltevés szerint S 0-környezet ν_1 topológiájában is. Ezért

létezik $\varepsilon_1 > 0$, melyre $\{x : \nu_1(x) \leq \varepsilon_1\} \subset S$. Ha $v \in V$, akkor az $u := \nu_1(x)^{-1} \varepsilon_1 v$ vektor ν_1 -normája $= \varepsilon_1$, és így $u \in S$ azaz $\nu_2(u) \leq 1$. Tehát

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_1}{\nu_1(v)} \nu_2(v) &= \nu_2\left(\frac{\varepsilon_1}{\nu_1(v)} v\right) \leq 1 \quad (v \in V) \\ \nu_2 &\leq \frac{1}{\varepsilon_1} \nu_1 . \end{aligned}$$

Ugyanígy $\nu_1 \leq (1/\varepsilon_2) \nu_2$ valamely $\varepsilon_2 > 0$ -val. Most az $m := \varepsilon_2$, $M := \varepsilon_1^{-1}$ választás megfelel.

2) $\Rightarrow$ 1): Jelölje d_k a ν_k -szerinti távolságot ($k = 1, 2$). Ha 2) áll, akkor

$$d_1(x_n, x) \rightarrow 0 \Rightarrow d_2(x_n, x) \rightarrow 0$$

minden $x, x_1, x_2, \dots$ sorozatra V -ben. Ez azt jelenti, hogy az $\text{id}_V : v \mapsto v$ leképezés folytonos a ν_1 topológiájából a ν_2 -ébe és viszont. Vagyis a két topológia egybeesik.

Következmény. *Véges dimenziós vektortéren bármely két ν_1, ν_2 norma esetén $m\nu_1 \leq \nu_2 \leq M\nu_1$ valamilyen (ν_1, ν_2 -től függő) $m, M > 0$ konstanspárral.*

Bizonyítás. A normák topológiája lineáris Hausdorff topológia. Ilyen azonban pontosan csak egyféle van véges dimenziós vektortéren. Így véges dimenziós vektortéren bármely két norma ekvivalens.

Megjegyzés. $\mathbb{R}^N$ -en a leggyakrabban használt normák

$$\begin{aligned} \|x\|_\infty &:= \max_{k=1}^N |x_k| \\ \|x\|_2 &:= \sqrt{\sum_{k=1}^N x_k^2} \quad (x := (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N) . \\ \|x\|_1 &:= \sum_{k=1}^N |x_k| \end{aligned}$$

Kérdés: Mi emeli ki a többi közül a $\|\cdot\|_2$ euklideszi normát (vagy inkább a *skalárszorzatból* származó normákat) a többiek közül? Bizonyítás nélkül egy mélyebb ok: *a maximális szimmetriájuk*. Nevezetesen, ha ν egy norma $\mathbb{R}^N$ -en és nincs olyan ν' norma, amelyikre $\{L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N) : \nu \circ L = \nu\} \subsetneq \{L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N) : \nu' \circ L = \nu'\}$, akkor ν egy skalárszorzatból származó ($\nu(x) = \langle x, x \rangle^{1/2}$ alakú) norma.

Konvexitás, Hahn–Banach tétel

Definíció. Egy V vektortérben egy K alakzat *konvex*, ha

$$\alpha x + \beta y \in K \quad (\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1, x, y \in K).$$

Egy $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ függvény *konvex*, ha a K értelmezési tartománya egy vektortér konvex részhalmaza és

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y) \quad (\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1, x, y \in K).$$

Lemma. Legyen V vektortér, $p : V \rightarrow \mathbb{R}$ egy konvex függvény, L pedig V -nek egy altere. Tegyük fel, hogy $\phi : L \rightarrow \mathbb{R}$ egy lineáris funkcionál, amelyre $\phi \leq p|_L$, és e egy L -en kívüli vektor V -ben. Ekkor létezik ϕ -nek olyan $\tilde{\phi}$ kiterjesztése az $\tilde{L} := L + \mathbb{R} \cdot e$ altérre, amelyre továbbra is $\tilde{\phi} \leq p|_{\tilde{L}}$.

Bizonyítás. Mivel az $\tilde{L}$ altér elemei egyértelműen írhatók $\alpha e + v$ ($\alpha \in \mathbb{R}$, $v \in L$) alakba, mindegyik $\lambda \in \mathbb{R}$ számhoz van pontosan egy olyan $\phi_\lambda : \tilde{L} \rightarrow \mathbb{R}$ lineáris kiterjesztése ϕ -nek, amelyikre $\phi_\lambda(e) = \lambda$. Nevezetesen

$$\phi_\lambda : \alpha e + v \mapsto \alpha \lambda + \phi(v) \quad (\alpha \in \mathbb{R}, v \in V) .$$

Kérdés: $\exists? \lambda \quad \phi_\lambda \leq p$. Vegyük észre, hogy $\phi_\lambda \leq p$ jelentése

$$\begin{aligned} \alpha \lambda + \phi(v) &\leq p(\alpha e + v) \quad (\alpha \in \mathbb{R}, v \in L) \\ \begin{cases} \lambda \leq \alpha^{-1} [p(\alpha e + v) - \phi(v)] & (\alpha > 0) \\ -\lambda \leq |\alpha|^{-1} [p(-|\alpha|e + v) - \phi(v)] & (\alpha < 0) \end{cases} \\ \sup_{\substack{\alpha_1 > 0 \\ v_1 \in L}} \frac{1}{\alpha_1} [\phi(v_1) - p(-\alpha_1 e + v_1)] &\leq \lambda \leq \inf_{\substack{\alpha_2 > 0 \\ v_2 \in L}} \frac{1}{\alpha_2} [p(\alpha_2 e + v_2) - \phi(v_2)] . \end{aligned}$$

A valós számok Dedekind axiómája szerint ilyen $\lambda \in \mathbb{R}$ pontosan akkor létezik, ha minden $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ és $v_1, v_2 \in L$ -re

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha_1} [\phi(v_1) - p(-\alpha_1 e + v_1)] &\leq \frac{1}{\alpha_2} [p(\alpha_2 e + v_2) - \phi(v_2)] \\ \frac{1}{\alpha_1} \phi(v_1) + \frac{1}{\alpha_2} \phi(v_2) &\leq \frac{1}{\alpha_1} p(v_1 - \alpha_1 e) + \frac{1}{\alpha_2} p(v_2 + \alpha_2 e) \quad \left| : \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}} \right. \\ \phi(\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2) &\leq \beta_1 p(v_1 - \alpha_1 e) + \beta_2 p(v_2 + \alpha_2 e) \quad \text{ahol } \beta_k := \frac{1/\alpha_k}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}} . \end{aligned}$$

Az utolsó állítás azonban következik a p függvény konvexitásából: Mivel $\beta_1 + \beta_2 = 1$ és $\alpha_k \beta_k = (1/\alpha_1 + 1/\alpha_2)^{-1}$,

$$\begin{aligned} \phi(\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2) &\leq p(\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2) = p(\beta_1(v_1 - \alpha_1 e) + \beta_2(v_2 + \alpha_2 e)) \\ &\leq \beta_1 p(v_1 - \alpha_1 e) + \beta_2 p(v_2 + \alpha_2 e) , \end{aligned}$$

ami bizonyítja a lemmát.

Tétel. (Hahn–Banach). Ha V egy vektortér, $p : V \rightarrow \mathbb{R}$ egy konvex függvény, V_0 altere V -nek és $\phi_0 : V_0 \rightarrow \mathbb{R}$ egy lineáris funkcionál, melyre $\phi_0 \leq p$, akkor ϕ_0 -nak létezik lineáris p alatt maradó kiterjesztése az egész V -re.

Bizonyítás. Csak a véges dimenziós esetre végezzük el. (Az általános bizonyítás ennek egy transzfinit változata).

Legyen $\dim(V) = \dim(V_0) + N < \infty$. Ekkor található olyan $\{e_1, \dots, e_N\}$ lineárisan független vektorrendszer, amellyel

$$V = V_0 + \mathbb{R}e_1 + \dots + \mathbb{R}e_N .$$

Legyen

$$L_k := V_0 + \sum_{i \leq k} \mathbb{R}e_i \quad (k = 0, \dots, N) .$$

Mivel $L_{k+1} = L_k + \mathbb{R}e_{k+1} = \widetilde{L_k}$ ($k = 0, \dots, N-1$), a lemma segítségével egymás után konstruálhatunk $\phi_1 := \widetilde{\phi_0}, \dots, \phi_N := \widetilde{\phi_{N-1}}$ lineáris kiterjesztéseit a ϕ_0 funkcionálnak az $L_1, \dots, L_N$ alterekre, amelyek p alatt maradnak. Most a $\phi := \phi_N$ választás megfelel.

Következmény. Ha $V, \| \cdot \|$ normált vektortér és $v \in V$, akkor olyan $\phi \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ lineáris funkcionál, amelyre $\|\phi\| = 1$ és $\phi(v) = \|v\|$.

Bizonyítás. A norma konvex függvény. Így a $V_0 := \mathbb{R}v$ altéren a

$$\phi_0 : \lambda v \mapsto \lambda \|v\|$$

lineáris funkcionálra és a $p := \| \cdot \|$ függvényre alkalmazható a Hahn–Banach tétel. A kapott ϕ kiterjesztés megfelel.

TÖBBVÁLTOZÓS DIFFERENCIÁLÁS

Emlékeztető. Egy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény az $x \in \mathbb{R}$ helyen differenciálható és deriváltja itt $f'(x) = a$, ha létezik olyan $\omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, amely a 0-nál folytonos és

$$f(x+h) = f(x) + ah + \omega(h)|h|, \quad \omega(0) = 0 \quad (h \in \mathbb{R}).$$

Differenciálhatóság

Propozíció. Tegyük fel, hogy V_1, V_2 vektorterek, $\dim V_k < \infty$ és $\nu_k, \tilde{\nu}_k$ normák V_k -n ($k = 1, 2$). Ekkor a $\mathcal{C}_{(0)}(V_1) := \{\omega : V_1 \rightarrow \mathbb{R} : \omega \text{ folyt. } 0\text{-nál}, \omega(0) = 0\}$ jelöléssel

$$\begin{aligned} & \{g : V_1 \rightarrow V_2 : \exists \omega \in \mathcal{C}_{(0)}(V_1) \quad \nu_2(g(h)) \leq \nu_1(h) \cdot \omega(h) \quad (h \in V_1)\} \\ &= \{g : V_1 \rightarrow V_2 : \exists \tilde{\omega} \in \mathcal{C}_{(0)}(V_1) \quad \tilde{\nu}_2(g(h)) \leq \tilde{\nu}_1(h) \cdot \tilde{\omega}(h) \quad (h \in V_1)\}. \end{aligned}$$

Bizonyítás. $\subset$: Tegyük fel, hogy g az első függvénycsaládba tartozik, azaz $\nu_2(g) \leq \nu_1 \cdot \omega$. Mivel a V_1, V_2 terek véges dimenziósak,

$$\begin{aligned} \exists m, M > 0 \quad m\nu_1 \leq \tilde{\nu}_1 \leq M\nu_1, \quad m\nu_2 \leq \tilde{\nu}_2 \leq M\nu_2 \\ \tilde{\nu}_2(g) \leq M\nu_2(g) \leq M \cdot \nu_1 \cdot \omega \leq M \cdot \frac{1}{m} \tilde{\nu}_1 \cdot \omega. \end{aligned}$$

Vagyis az $\tilde{\omega} := (M/m)\omega$ válsztásnál $\tilde{\nu}_2(g) \leq \tilde{\nu}_1 \cdot \tilde{\omega}$. Tehát g a második függvénycsaládba is beletartozik.

A fordított $\supset$ tartalmazás bizonyítása analóg módon történik.

Definíció. Legyenek V_1, V_2 vektorterek, $\dim V_k < \infty$ ($k = 1, 2$). A 0-nál *első* *rendben eltűnő* $V_1 \rightarrow V_2$ függvények osztálya

$$\begin{aligned} o(V_1, V_2) := \left\{ g : V_1 \rightarrow V_2 : \forall \nu_1 \text{ } V_1\text{-norma}, \nu_2 \text{ } V_2\text{-norma} \quad \exists \omega : V_1 \rightarrow \mathbb{R} \right. \\ \left. \omega \text{ folytonos } 0\text{-nál}, \omega(0) = 0, \nu_2(g) \leq \omega\nu_1 \right\}. \end{aligned}$$

A Propozíció szerint itt az első $\forall$ kvantor helyett $\exists$ is vehető.

Elnevezés: $o(V_1, V_2)$ neve *kis ordó* $V_1 \rightarrow V_2$. Tagjait röviden *0-sima* függvényeknek is mondjuk.

Megjegyzés. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható x -nél $\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R} \quad [h \mapsto f(x+h) - (f(x) + ah)] \in o(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Észrevétel: A $h \mapsto a \cdot h$ leképezés *lineáris* $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Definíció. Legyenek V_1, V_2 véges dimenziós vektorterek. Az $f : V_1 \rightarrow V_2$ függvény *differenciálható* x -nél, ha

$$\exists A \in \mathcal{L}(V_1, V_2) \quad [h \mapsto f(x+h) - (f(x) + Ah)] \in o(V_1, V_2).$$

Megjegyzés. A jelölések egyszerűsítése végett ebben a fejezetben az egész téren értelmezett függvényekről fogunk beszélni. Ha egy függvény csak a tér egy részhalmazán van értelmezve, tekintsük helyette pl. a többi helyeken 0-val való kiterjesztettjét. Ha az eredetileg vett függvény egy pont egy egész környezetében

definiálva volt, a kiterjesztés nem befolyásolja az ottani differenciálhatósági tulajdonságait. Azaz a differenciálhatóság *lokális* tulajdonság (akár a folytonosság).

A továbbiakban V, V_1, V_2 tetszőlegesen rögzített véges dimenziós vektorterek. Rajtuk a félreértés veszélye nélkül $\| \cdot \|$ -val jelölünk egy-egy (tetszőlegesen rögzített) normát.

Tétel. *A differenciálhatóság maga után vonja a folytonosságot.*

Bizonyítás. Ha $f : V_1 \rightarrow V_2$ differenciálható x -nél, akkor alkalmas $f_1 \in o(V_1, V_2)$ függvény és $A \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ mellett

$$f(z) = f(x) + A(z - x) + \|z - x\| \cdot f_1(z - x) \quad (z \in V_1).$$

Tudjuk: a norma folytonos, a 0-sima függvények a 0 helyen triviálisan folytonosak és a lineáris leképezések véges dimenziós vektorterek közt mind folytonosak. Így a fenti előállítás szerint f folytonos a z helyen.

Propozíció. *Ha $f : V_1 \rightarrow V_2$, $A_1, A_2 \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ és*

$$[h \mapsto f(x + h) - (f(x) + A_i h)] \in o(V_1, V_2) \quad (i = 1, 2),$$

akkor $A_1 = A_2$.

Bizonyítás. Észrevétel: Ha $g_1, g_2 \in o(V_1, V_2)$ és $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, akkor $\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 \in o(V_1, V_2)$. Ha tehát $g_i : h \mapsto f(x + h) - (f(x) + A_i h)$ ($i = 1, 2$), akkor

$$A_1 - A_2 = g_1 - g_2 \in o(V_1, V_2).$$

Vagyis véve egy tetszőleges $\| \cdot \|$ normákat V_1 -en ill. V_2 -n, található olyan a 0-nál folytonos ω függvény, melyre $\omega(0) = 0$ és

$$\|(A_1 - A_2)h\| \leq \omega(h)\|h\| \quad (h \in V_1).$$

Legyen $h \neq 0$ rögzített tetszőlegesen. Ekkor

$$\begin{aligned} \|(A_1 - A_2)(\lambda h)\| &\leq \omega(\lambda h)\|\lambda h\| & \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ |\lambda| \cdot \|(A_1 - A_2)h\| &\leq \omega(\lambda h)|\lambda| \cdot \|h\| \\ \|(A_1 - A_2)h\| &\leq \omega(\lambda h)\|h\| \rightarrow 0 & (\lambda \downarrow 0) \\ \|(A_1 - A_2)h\| &= 0 \quad (h \in V_1), \Rightarrow A_1 - A_2 = 0. \end{aligned}$$

Definíció. $f : V_1 \rightarrow V_2$ *deriváltja* x -nél

$$f'(x) := \left[A \in \mathcal{L}(V_1, V_2) : [h \mapsto f(x + h) - f(x) - Ah] \in o(V_1, V_2) \right].$$

Az előző propozíció biztosítja a derivált unicitását.

Tétel. 1) *Ha f_k differenciálható x -nél ($k = 1, 2$), akkor*

$$(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)'(x) = \alpha_1 f_1'(x) + \alpha_2 f_2'(x) \quad (\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}).$$

2) *Ha g differenciálható x -nél és f differenciálható $g(x)$ -nél, akkor*

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Bizonyítás. 1) Triviális. 2) Legyen

$$B := g'(x), \quad A := f'(g(x)) \quad \text{ahol} \quad g : V_1 \rightarrow V_2, \quad f : V_2 \rightarrow V_3$$

(véges dimenziós vektorterek között). Ekkor találhatók $g_1 : V_1 \rightarrow V_2$, $f_1 : V_2 \rightarrow V_3$ függvények, amelyekkel

$$\begin{aligned} g(x + h) &= g(x) + Bh + \|h\| \cdot g_1(h) & g_1(h) &\rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0) \\ f(g(x) + k) &= f(x) + Ak + \|k\| \cdot f_1(k) & f_1(k) &\rightarrow 0 \quad (k \rightarrow 0). \end{aligned}$$

Most a $k(h) := g(x+h) - g(x) = Bh + \|h\|g_1(h)$ helyettesítéssel

$$\begin{aligned}
f(g(x+h)) &= f(g(x) + k(h)) = f(g(x)) + Ak(h) + \|k(h)\| \cdot f_1(k(h)) \\
&= f(g(x)) + A[Bh + \|h\| \cdot g_1(h)] + \|Bh + \|h\|g_1(h)\| \cdot f_1(k(h)) \\
&= f(g(x)) + ABh + \|h\| \cdot [g_1(h) + \| \underbrace{B \frac{h}{\|h\|}}_{\substack{\leq \|B\| \\ \text{KORL}}} + g_1(h)\| \cdot f_1(k(h))] \\
&\quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\
&\quad \quad \quad 0 \quad \quad \quad 0 \quad \quad \quad 0
\end{aligned}$$

mivel a g függvény x -beli folytonossága miatt $k(h) \rightarrow 0$ ($h \rightarrow 0$).

Irány szerinti derivált

Definíció. Legyen $f : V_1 \rightarrow V_2$ (két véges dimenziós vektortér között), és $x, v \in V_1$. Az f függvény *deriváltja v irányában x -nél*

$$f'_v(x) := \lim_{\substack{\tau \rightarrow 0 \\ \tau \neq 0}} \frac{1}{\tau} [f(x + \tau v) - f(x)] .$$

Lemma. $f'_{\lambda v} = \lambda f'_v$ ($\lambda \in \mathbb{R}$).

Bizonyítás. A $\lambda = 0$ eset triviális. Ha $\lambda \neq 0$, akkor

$$\begin{aligned}
\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} [f(x + \lambda \tau v) - f(x)] &= \lambda \lim_{\lambda \tau \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda \tau} [f(x + \lambda \tau v) - f(x)] \\
&= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\theta} [f(x + \theta v) - f(x)]
\end{aligned}$$

abban az értelemben, hogy az összes limesek *egyszerre* léteznek.

Megjegyzés. Az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ esetben f hagyományos deriváltja $f'_{(1)}$.

Vektortérben nincs olyan kitüntetett elem, mint az 1.

Az f'_v derivált független a normák választásától.

Propozíció. Ha $f : V_1 \rightarrow V_1$ differenciálható x -nél, akkor

$$f'_v(x) = f'(x)v \quad (v \in V_1).$$

Bizonyítás. $f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \|h\|\omega(h)$ írható ahol $\omega(h) \rightarrow 0 = \omega(0)$ ($h \rightarrow 0$).

Innen

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\tau} [f(x) + \tau v - f(x)] &= \frac{1}{\tau} f'(x)(\tau v) + \frac{1}{\tau} \|\tau v\| \cdot \omega(\tau v) \\
&= f'(x)v + \underbrace{\text{sgn} \tau}_{\text{KORL}} \cdot \|v\| \cdot \omega(\tau v) \rightarrow f'(x)v + 0 \quad (\tau \rightarrow 0) . \\
&\quad \quad \quad \downarrow \\
&\quad \quad \quad 0
\end{aligned}$$

Következmény. Ha f' folytonos egy G halmazon, akkor $f'v$ is folytonos G -n minden rögzített $v \in V_1$ -re, sőt $(x, v) \mapsto f'(x)v$ is folytonos $G \times V_1$ -en.

Lagrange középérték skalár függvényre

Tétel. Ha $f : V \rightarrow \mathbb{R}$, továbbá $x, v \in V$ és f'_v létezik az $x + [0, \tau]v$ szakasz fölött, akkor

$$\exists \vartheta \in (0, \tau) \quad (f(x + \tau v) - f(x) = f'_v(x + \vartheta v) \cdot \tau).$$

Bizonyítás. A $\varphi : \xi \mapsto f(x + \xi v)$ metszete az f függvénynek $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ típusú. Mivel $\varphi(0) = f(x)$ és $\varphi(\tau) = f(x + \tau v)$, a Lagrange középérték tétel szerint

$$\begin{aligned} f(x + \tau v) - f(x) &= \varphi(\tau) - \varphi(0) = \varphi'_{(1)}(\vartheta)\tau = \\ &\quad \nwarrow \text{hagyományos derivált} \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} [\varphi(\vartheta + \delta) - \varphi(\vartheta)] = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} [f(x + (\vartheta + \delta)v) - f(x + \vartheta v)]\tau \\ &= f'_v(x + \vartheta v)\tau. \end{aligned}$$

Következmény. Ha az $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ függvény differenciálható az $[a, b] := a + [0, 1](b - a)$ szakasz* minden pontjánál, akkor

$$f(b) - f(a) = f'(z)(b - a) \quad \exists z \in [a, b].$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a tételt $x := a$, $v := b - a$ és $\tau := 1$ mellett. Erre

$$f(b) - f(a) = f'_{b-a}(\underbrace{x + \vartheta v}_{z \in [a, b]}) \cdot 1 = f'(z)v = f'(z)(b - a).$$

Tétel. (Lagrange). Legyen $f : V \rightarrow \mathbb{R}$, továbbá $\{e_1, \dots, e_n\}$ bázis $\subset V$ és $a \in V$. Tegyük fel, hogy $f'_{e_1}, \dots, f'_{e_n}$ folytonosak a körül (egy a -környezeten). Ekkor f differenciálható a -nál és

$$f'(a)e_k = f'_{e_k}(a) \quad (k = 1, \dots, n).$$

Bizonyítás. Legyen a $h \in V$ vektorok bázis-felbontása

$$h = \tau_1(h) \cdot e_1 + \dots + \tau_n(h)e_n$$

(azaz $\tau_k(h) := e_k^*(h)$ a duális bázissal), és vezessük be az

$$a_k(h) := a + \tau_1(h)e_1 + \dots + \tau_k(h)e_k \quad (k = 0, \dots, n)$$

jelöléseket. Most

$$\begin{aligned} f(a + h) - f(a) &= \sum_{k=1}^n [f(a_k(h)) - f(a_{k-1}(h))] \\ &= \sum_{k=1}^n f'_{e_k}(z_k(h))\tau_k(h) \\ &= \sum_{k=1}^n f'_{e_k}(a)\tau_k(h) + \sum_{k=1}^n [f'_{e_k}(\underbrace{z_k(h)}_{\downarrow a}) - f'_{e_k}(a)] \underbrace{\tau_k(h)}_{| \leq M \cdot \|h\|}. \end{aligned}$$

* Nem tévesztendő össze az $\mathbb{R}^n$ természetes topológiája c. alfejezetben hasonlóan jelölt téglaintervallummal.

Mivel $\{e_1, \dots, e_n\}$ bázis $\subset V$, az

$$A : \delta_1 e_1 + \dots + \delta_n e_n \mapsto \sum_{k=1}^n f'_{e_k}(a) \cdot \delta_k$$

lineáris operátor jól-definiált, és

$$Ah = A(\tau_1(h)e_1 + \dots + \tau_n(h)e_n) = \sum_{k=1}^n f'_{e_k}(a)\tau_k(h) \quad (h \in V) .$$

A $h \mapsto \tau_k(h)$ ($k = 1, \dots, n$) funkcionálok mind lineárisak a véges dimenziós V fölött, és így található $M > 0$ úgy, hogy

$$|\tau_k(h)| \leq M \cdot \|h\| \quad (k = 1, \dots, n \quad h \in V) .$$

Vagyis

$$f(a+h) = f(a) + Ah + \sum_{k=1}^n [f'_{e_k}(z_k(h)) - f'_{e_k}(a)]\tau_k(h)$$

írható, ahol a maradéktag $o(V, \mathbb{R})$ -be tartozik, mert

$$\left\| \sum_{k=1}^n [f'_{e_k}(z_k(h)) - f'_{e_k}(a)]\tau_k(h) \right\| \leq \sum_{k=1}^n \underbrace{|f'_e(z_k(h)) - f'_{e_k}(a)|}_{\downarrow a \quad (h \rightarrow 0)} \cdot M \cdot \|h\| \quad (v \in V) .$$

Többdimenziós következmények

Következmény. Ha $f : V_1 \rightarrow V_2$, $a \in V_1$ és $\{e_1, \dots, e_n\}$ bázis $\subset V_1$, az f'_{e_k} deriváltak pedig folytonosak a -nál ($k = 1, \dots, n$), akkor f differenciálható a -nál és $f'(a)e_k = f'_{e_k}(a)$ ($k = 1, \dots, n$).

Bizonnyítás. Vegyünk fel egy $\{u_1, \dots, u_m\}$ bázist V_2 -ben. Ezzel komponensekre bonthatjuk az f függvényt

$$f = f_1 \cdot u_1 + \dots + f_m \cdot u_m \quad f_i : V_1 \rightarrow \mathbb{R} \quad (i = 1, \dots, m) .$$

Észrevétel: $f'_{e_k} = (f_1)'_{e_k} \cdot u_1 + \dots + (f_m)'_{e_k} \cdot u_m$. Lagrange tétele alapján

$$f(a+h) = \sum_{i=1}^m [f_i(a) + A_i h + \|h\| \cdot \omega_i(h)] u_i = f(a) + Ah + \|h\| \omega(h)$$

írható valamely $\omega_1, \dots, \omega_n \in o(V_1, \mathbb{R})$ és az $\omega := \sum_{i=1}^m \omega_i \cdot u_i \in o(V_1, V_2)$ függvényekkel.

Következmény. Ha $f : V_1 \rightarrow V_2$ és G nyitott $\subset V_1$, akkor ekvivalensek:

- 1) f' folytonos G -n
- 2) f'_v folytonos G -n minden $v \in V_1$ irányban
- 3) $\exists \{e_1, \dots, e_n\}$ bázis $\subset V_1$ $f'_{e_1}, \dots, f'_{e_n}$ folytonosak G -n.

Lemma. Legyen $f_1, f_2, \dots : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvények egy sorozata. Tegyük fel, hogy egy $f, g : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ függvénpárral

$$f_n \rightrightarrows f \quad \text{és} \quad f'_n \rightrightarrows g \quad (n \rightarrow \infty) .$$

Ekkor az f limesfüggvény folytonosan differenciálható és $f' = g$.

Bizonyítás. Legyen $\gamma \in (\alpha, \beta)$ tetszőlegesen rögzítve. Tudjuk: folytonos függvények egyenletes limezése folytonos. Vagyis az f, g függvények folytonosak. Másrészt korlátos zárt intervallumon az integrálás és az egyenletes limes felcserélhető. A Newton–Leibniz formula szerint így

$$\begin{array}{ccc} f_n(x) - f_n(\gamma) = \int_{\gamma}^x f'_n & & (n \rightarrow \infty) \\ \downarrow & & \downarrow \\ f(x) - f(\gamma) & & \int_{\gamma}^x g \end{array}$$

A Newton-Leibniz tétel azt is mutatja itt, hogy az $x \mapsto \int_{\gamma}^x g$ függvény differenciálható és $d/dx \int_{\gamma}^x g = g(x)$. Vagyis $x \mapsto f(x) - f(\gamma)$ differenciálható (α, β) fölött és $f' = [f - f(\gamma)]' = g$.

Tétel. Tegyük fel, hogy V_1, V_2 véges dimenziós vektorterek, G nyitott $\subset V_1$ és $f, f_1, f_2, \dots : G \rightarrow V_2$ folytonosan differenciálhatók, továbbá

$$f_1, f_2, \dots \rightrightarrows f, \quad f'_1, f'_2, \dots \rightrightarrows A \left(: G \ni x \mapsto A(x) \in \mathcal{L}(V_1, V_2) \right).$$

Ekkor az f limesfüggvény folytonosan differenciálható és $f' = A$.

Bizonyítás. Írjunk $A_n := f'_n(: G \rightarrow \mathcal{L}(V_1, V_2))$ -t. Mivel $A_1, A_2, \dots$ folyt. $\rightrightarrows A$, az A limesfüggvény folytonos $G \rightarrow \mathcal{L}(V_1, V_2)$. Másrészt

$$f'_v(x) = A_n(x)v \quad (x \in G, v \in V_1).$$

Tehát mivel minden rögzített $v \in V_1$ mellett az $x \mapsto A(x)v$ függvény folytonos, elég belátni, hogy f'_v létezik és $f'_v(x) = A(x)v$ ($x \in G, v \in V_1$).

Legyenek $x \in G, v \in V_1$ tetszőlegesen rögzítve. Tekinsük a

$$\varphi_n : \tau \mapsto f_n(x + \tau v), \quad \varphi : \tau \mapsto f(x + \tau v)$$

metszet-függvényeket. Mivel $f_n \rightrightarrows f$, fennáll $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ ($n \rightarrow \infty$). Feltevés szerint az f_n függvények differenciálhatók, innen az összetett függvény deriválási szabálya szerint

$$\varphi'_n(\tau) = f'_n(x + \tau v)v = A_n(x + \tau v)v \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Tekintve, hogy $A_n \rightrightarrows A$, a $\psi : \tau \mapsto A(x + \tau v)v$ függvényre $\varphi_n \rightrightarrows \psi$ ($n \rightarrow \infty$). A lemma alapján a φ limesfüggvény differenciálható és $\varphi' = \psi$. Tehát

$$A(x)v = \psi(0) = \varphi'(0) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} [f(x + \tau v) - f(x)] = f'_v(x)$$

jól-definiált.

Kontrakciós lemma

Lemma. Legyen $f : V_1 \rightarrow V_2$ és K konvex $\subset V_1$. Tegyük fel, hogy az f függvény differenciálható a K halmaz összes pontjánál és $\|f'\| \Big|_K \leq \alpha$. Ekkor az f leképezés a K halmazon α -kontrakció.*

* Itt $\|f'\| \Big|_K := \sup_{x \in K} \|f'(x)\| = \sup_{x \in K} \sup_{v \in V_1} \|f'(x)v\|/\|v\|$ és a távolságokat a V_1 ill. V_2 tereken a vett $\|\cdot\|$ normák szerint kell venni.

Bizonyítás. Legyen $x, y \in K$ tetszőleges. A Hahn–Banach tétel szerint vehetünk egy olyan $\phi \in V_2^* (:= \mathcal{L}(V_2, \mathbb{R}))$ lineáris funkcionált, amelyre

$$\|\phi\| = 1 \quad \text{és} \quad \|f(x) - f(y)\| = \phi(f(x) - f(y)) .$$

Most a

$$\varphi : v \mapsto \phi(f(v)) , \quad V_1 \rightarrow \mathbb{R}$$

függvényre az összetett függvények differenciálási szabálya szerint

$$\varphi'(v) = \psi(f'(v)) \quad (v \in K) .$$

Láttuk: $\exists z \in [x, y] \quad \varphi(x) - \varphi(y) = \varphi'(z)(x - y)$. Ezzel a $z \in K$ ponttal

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\| &= \phi(f(x) - f(y)) = \varphi'(z)(x - y) \\ &= \phi(f'(z))(x - y) \\ &\leq \|\phi(f'(z))\| \cdot \|x - y\| \leq \alpha \|x - y\| . \end{aligned}$$

Megjegyzés. Ha speciális normákat használunk csak, akkor a Hahn–Banach tétel alkalmazása kikerülhet. Ha pl. $V_2 := \mathbb{R}^M$ az euklideszi $\|\cdot\|_2$ normával, akkor a $\phi(v) := [\sum_{k=1}^M (f(x_k) - f(y_k))^2]^{-1/2} \sum_{k=1}^M (f(x_k) - f(y_k))v_k$ funkcionál (és valójában csak ez) megfelelő.

Egy másik lehetőség a Hahn–Banach tétel megkerülésére a legrövidebb út elvének azon általánosítása, hogy

$$\|c(\beta) - c(\alpha)\| \leq \int_{\alpha}^{\beta} \|c'(\tau)\| d\tau$$

valahányszor $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ és $c : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathcal{V}_2$ egy folytonosan differenciálható görbe.

Implicit függvény tétel

Tétel. Legyenek X, Y, Z véges dimenziós vektorterek, $F : X \times Y \rightarrow Z$ és $(a, b) \in X \times Y$. Tegyük fel, hogy F' folyt (a, b) körül, $F(a, b) = 0$ és

$$F'(a, b) : (x, y) \mapsto Ax + By \quad B : Y \leftrightarrow Z$$

az $F'(a, b) \in \mathcal{L}(X \times Y, Z)$ operátor $A \in \mathcal{L}(X, Z)$, $B \in \mathcal{L}(Y, Z)$ komponenseire (azaz B 1-1-leképezés és $B(Y) = Z$). Ekkor

$$\exists U \text{ } a\text{-környezet} \subset X, \text{ } V \text{ } b\text{-környezet} \subset Y \quad \exists g \in \mathcal{C}(U, Z)$$

$$\{(x, y) \in U \times V : F(x, y) = 0\} = \{(x, g(x)) : x \in U\} .$$

Bizonyítás. Vehető $a = 0, b = 0$ [F helyett $(x, y) \mapsto F(x + a, y + b)$ -re áttérve]. Most

$$F(x, y) = Ax + By + H(x, y) \quad H'(x, y) \rightarrow 0 \quad ((x, y) \rightarrow (0, 0))$$

írható a $H(x, y) := F(x, y) - [Ax + By]$ perturbációval. Tehát

$$(*) \quad F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = -B^{-1}Ax - B^{-1}H(x, y) \quad \text{FIXPONT EGYENLET.}$$

Rögzítsünk az X, Y, Z tereken egy-egy egyszerűen $\|\cdot\|$ -val jelölt normát. Válasszunk egy $\varepsilon > 0$ értéket úgy, hogy

$$\|B^{-1}H'(x, y)\| \leq \frac{1}{2} \quad (\|x\|, \|y\| \leq \varepsilon)$$

legyen. Ez megtehető, mivel $\lim_{(x,y) \rightarrow 0} H'(x, y) = 0$ és mivel B^{-1} mint lineáris operátor véges dimenziós téren automatikusan folytonos. Tudjuk, hogy a

$$K := \{(x, y) \in X \times Y : \|x\|, \|y\| \leq \varepsilon\}$$

zárt gömb $X \times Y$ -ban (a $\|(x, y)\| := \max\{\|x\|, \|y\|\}$ norma szerint) konvex (sőt kompakt is, de ezt nem kell kihasználnunk). A kontrakciós lemma alapján

$$\|B^{-1}H(x_1, y_1) - B^{-1}H(x_2, y_2)\| \leq \frac{1}{2} \max\{\|x_1 - x_2\|, \|y_1 - y_2\|\}$$

valahányszor $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in K$. Válasszunk egy $\delta > 0$ értéket úgy, hogy

$$\|B^{-1}Ax\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (\|x\| \leq \delta), \quad \delta \leq \varepsilon$$

legyen. A lineáris leképezések folytonossága miatt ez is megtehető. Legyen

$$U := \{x \in X : \|x\| < \delta\}, \quad V := \{y \in Y : \|y\| \leq \varepsilon\}.$$

Tekintsük a

$$\begin{aligned} T_x : V \ni y &\mapsto -B^{-1}Ax - B^{-1}H(x, y) \quad (x \in U) \\ T : \mathcal{C}(U, Z) \ni g &\mapsto [x \mapsto -B^{-1}Ax - B^{-1}H(x, g(x))] \end{aligned}$$

leképezéseket. Állítás:

$$T_x : V \rightarrow V \quad \frac{1}{2}\text{-kontrakció} \quad (x \in U).$$

Bizonyítás: Legyen $x \in U$ tetszőlegesen rögzítve. Ha $y \in V$,

$$\|T_x(y)\| \leq \|B^{-1}Ax\| + \|B^{-1}H(x, y)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \|B^{-1}H(x, y)\|.$$

Mivel $H(0, 0) = 0$,

$$\|B^{-1}H(x, y)\| = \|B^{-1}H(x, y) - B^{-1}H(0, 0)\| \leq \frac{1}{2} \max\{\|x\|, \|y\|\} \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

ahonnan

$$\|T_x(y)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \Rightarrow T_x(y) \in V.$$

Ha pedig $y_1, y_2 \in V$, akkor

$$\|T_x(y_1) - T_x(y_2)\| = \|B^{-1}H(x, y_2) - B^{-1}H(x, y_1)\| \leq \frac{1}{2} \|y_1 - y_2\|.$$

Az imént bizonyított állításból azonnal következik, hogy

$$T : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K} \quad \frac{1}{2}\text{-kontrakció} \quad \text{ahol} \quad \mathcal{K} := \{g \in \mathcal{C}(U, Z) : \sup \|g\| \leq \varepsilon\}$$

és a távolság $\mathcal{K}$ -n a Z -beli norma szerinti egyenletes konvergencia d_Z^U metrikája.*

A $\mathcal{K}$ alázat a $\mathcal{C}(U, Z)$, d_Z^U teljes metrikus tér egy zárt gömbje. Így a $\mathcal{K}$, $d_Z^U|_{\mathcal{K} \times \mathcal{K}}$ metrikus tér teljes. Tehát alkalmazható a kontrakciós fixpont tétel a $T|_{\mathcal{K}}$ 1/2-kontrakcióra. Innen

- 1) $\exists! y \in V \quad T_x(y) = y \quad (x \in V),$
- 2) $\exists! g \in \mathcal{K} \quad T(g) = g.$

A (*) fixpont egyenlet alapján $(x, y) \in U \times V$ -re

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow T_x(y) \stackrel{2)}{=} y = g(x).$$

* Azaz $d_Z^U(f, g) := \sup \|f - g\| = \sup_{x \in U} \|f(x) - g(x)\|.$

Következmény. 1) A tételbeli $g : U \rightarrow V$ függvény folytonosan differenciálható,
2) $g'(a) = -B^{-1}A$ áll a deriváltjára.

Bizonyítás. 2) Vethető $a = 0$, $b = 0$, mint a tétel bizonyítása során. Most $g(0) = g(a) = b = 0$, és a bizonyítás jelöléseivel

$$\begin{aligned} g(x) &= T_x(g(x)) = -B^{-1}Ax - B^{-1}H(x, g(x)) \\ g(x) - [g(0) + B^{-1}Ax] &= -B^{-1}H(x, g(x)) . \end{aligned}$$

Belátandó: $\{ \text{Az utóbbi egyenlet bal oldala} \} / \|x\| \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 0)$.

Tudjuk: $B^{-1}H'(x, y) \rightarrow 0 \quad ((x, y) \rightarrow (0, 0))$, azaz

$\exists \omega : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ 0-ban folytonos, $\omega(0) = 0$, $\|B^{-1}H'(x, y)\| \leq \omega(\varepsilon) \quad (\|x\|, \|y\| \leq \varepsilon)$.

A kontrakciós lemmát a $K_\varepsilon := \{(x, y) \in X \times Y : \|x\|, \|y\| \leq \varepsilon\} \quad (\varepsilon > 0)$ gömbökre alkalmazva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \|B^{-1}H(x, g(x))\| &= \|B^{-1}H(x, g(x)) - B^{-1}H(0, 0)\| \\ &\leq \omega(\varepsilon) \cdot \varepsilon \quad ((x, g(x)) \in K_\varepsilon) . \end{aligned}$$

Vagyis, ha $x \in U$, akkor $(\varepsilon := \max\{\|x\|, \|g(x)\|\})$ -val

$$\begin{aligned} \|B^{-1}H(x, g(x))\| / \|x\| &= \|B^{-1}H(x, g(x)) - B^{-1}H(0, 0)\| / \|x\| \\ &\leq \omega(\max\{\|x\|, \|g(x)\|\}) \cdot \max\{1, \|2B^{-1}A\|\} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 0), \end{aligned}$$

mivel $\|g(x)\| \leq 2\|B^{-1}Ax\|$ (uis itt $\|g(x) + B^{-1}Ax\| = \|T_x(g(x)) - T_x(0)\| \leq \frac{1}{2}\|g(x) - 0\|$).

1) Alkalmazzuk a 2)-beli formulát az (a, b) hely helyett az $U \times V$ -be eső $F(x, y) = 0$ -t teljesítő pontokra. Írható

$$F'(x, y) : (u, v) \mapsto A(x, y)u + B(x, y)v ,$$

ahol az $A : U \times V \rightarrow \mathcal{L}(X, Z)$ ill. $B : U \times V \rightarrow \mathcal{L}(Y, Z)$ leképezések folytonosak. Tehát 2)-be (a, b) helyett $(x, g(x))$ -et téve

$$g'(x) = -B^{-1}(x, g(x))A(x, g(x)) \quad (x \in U) ,$$

ami x -ben folytonos.

Tétel. (Inverz függvény tétel). Ha $f : Y \rightarrow X$, f' folytonos $a \in Y$ körül és $f'(a) : Y \leftrightarrow X$, akkor

$$\exists G \text{ } f(a)\text{-környezet } \exists g \in \mathcal{C}(G, Y) \quad f(g) = \text{id}_G .$$

Bizonyítás. Az $F(x, y) := x - f(y)$ leképezésre kell csak alkalmaznunk az implicit függvény tételt.

Magasabb rendű deriváltak

Megjegyzés. Tekintsünk egy $f : V \rightarrow Z$ ∞ -szer differenciálható függvényt (továbbra is, V, Z véges dimenziós vektorterek). Ekkor

$$\begin{aligned} f' : V &\rightarrow \mathcal{L}(V, Z) , \quad f'' : V \rightarrow \mathcal{L}(V, \mathcal{L}(V, Z)) , \quad f^{(3)} : V \rightarrow \mathcal{L}(V, \mathcal{L}(V, \mathcal{L}(V, Z))) , \dots \\ f^{(n)} : V &\rightarrow \underbrace{\mathcal{L}(V, \mathcal{L}(V, \dots, \mathcal{L}(V, Z) \dots))}_{n\text{-szer}} , \dots . \end{aligned}$$

Mint várható, valójában ennél sokkal szimmetrikusabb leírás is adható a magasabb rendű deriváltakra.

Lemma. Ha $f : V \rightarrow Z$ és f' differenciálható a -nál, akkor

$$\underbrace{f''(a)(v_1)(v_2)}_{\in \mathcal{L}(V, Z)} = f'_{v_2 v_1}(a) \quad (v_1, v_2 \in V) .$$

Bizonyítás. Tetszőlegesen rögzített $v_1, v_2 \in V$ -re

$$\begin{aligned} f''(a)v_1 &= [f']'_{v_1}(a) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} [f'(a + \tau v_1) - f'(a)] , \\ f''(a)(v_1)v_2 &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} [f'(a + \tau v_1) - f'(a)]v_2 = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} [f'_{v_2}(a + \tau v_1) - f'_{v_2}(a)] = \\ &= [f'_{v_2}]'_{v_1}(a) . \end{aligned}$$

Következmény. $f^{(n)}(a)(v_1) \cdots (v_n) = f'_{v_n v_{n-1} \cdots v_1}(a)$, ha az f függvény n -szer differenciálható a -nál.

A $\mathcal{C}^n(G, Z)$ függvényosztályok

Definíció. Ha V, Z véges dimenziós vektorterek és G nyitott $\subset V$, akkor

$$\mathcal{C}^n(G, Z) := \{f : G \rightarrow Z : f^{(n)} \exists \text{ és folyt. } G \text{ fölött}\}$$

az n -szer folytonosan differenciálható függvények osztálya.

Propozíció. Ha G nyitott $\subset V$, $f : G \rightarrow Z$ és $\{e_1, \dots, e_N\}$ bázis $\subset V$, akkor ekvivalensek:

- 1) $f \in \mathcal{C}^n(G, Z)$,
- 2) $f'_{v_1 \cdots v_n} \in \mathcal{C}(G, Z) \quad \forall v_1, \dots, v_n \in V$,
- 3) $f'_{e_{i_1} \cdots e_{i_n}} \in \mathcal{C}(G, Z) \quad \forall (i_1, \dots, i_n) \in \{1, \dots, N\}^n$.

Bizonyítás. 1) $\Rightarrow$ 2): Legyen $v_1, \dots, v_n$ tetszőlegesen rögzítve. Mivel $f \in \mathcal{C}(G, Z)$, az $x \mapsto f^{(n)}(x)(v_n) \cdots (v_1) = f'_{v_1 \cdots v_n}$ függvény folytonos $G \rightarrow Z$.

2) $\Rightarrow$ 3) triviális.

3) $\Rightarrow$ 1) közvetlenül következik Lagrange tételéből n szerinti indukcióval.

Schwarz tétele

Definíció. Legyenek V, Z vektorterek (itt nem is szükséges véges dimenziósnak lenniük), $v \in V$ és $f : V \rightarrow Z$. Az f függvény v -differenciája a

$$\Delta_v f : x \mapsto f(x + v) - f(x)$$

függvény. A Δ_v függvénytranszformáció neve: v -differenciaoperátor.

Megjegyzés. $f'_v = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \Delta_{\tau v} f$.

Alapvető jelentőségű a differenciaoperátorok felcserélhetősége:

Lemma. Ha $f : V \rightarrow Z$ és $u, v \in V$, akkor $\Delta_u \Delta_v f = \Delta_v \Delta_u f$.

Bizonyítás. A $g := \Delta_v f$ függvénnyel $g(y) = f(y + v) - f(y)$ és

$$\Delta_u \Delta_v f(x) = \Delta_u g(x) = g(x+u) - g(x) = f(x+u+v) - f(x+u) - f(x+v) + f(x).$$

Az $u \leftrightarrow v$ cserére itt a jobb oldal ugyanaz marad.

Következmény. Ha $x \in V$ és az $f'_v(x)$, $f'_v(x+u)$ deriváltak léteznek, akkor

$$\Delta_u(f'_v)(x) = (\Delta_u f)'_v(x)$$

$$\begin{aligned} \textbf{Bizonyítás. } \Delta_u(f'_v)(x) &= f'_v(x+u) - f'_v(x) \\ &= [y \mapsto f(y+u) - f(y)]'_v(x) = (\Delta_u f)'_v(x). \end{aligned}$$

Lemma. Legyen $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ egy skalár értékű függvény, $u, v \in V$ és G nyitott $\subset V$. Tegyük fel, hogy $x + [0, u] + [0, v] \subset G$ és $f \in \mathcal{C}^2(G, \mathbb{R})$. Ekkor

$$\exists z \in x + [0, u] + [0, v] \quad \Delta_u \Delta_v f(x) = f''_{uv}(z).$$

Bizonyítás. Legyen megint $g := \Delta_v f$. A Lagrange középérték tétel szerint

$$\begin{aligned} \Delta_u \Delta_v f(x) &= g(x+u) - g(x) \\ &= g'_u(y) \quad \exists y \in [x, x+u]. \end{aligned}$$

Ezzel az y ponttal

$$\begin{aligned} \Delta_u \Delta_v f(x) &= g'_u(y) = (\Delta_v f)'_u(y) = \Delta_v(f'_u)(y) \\ &= f'_u(y+v) - f'_u(y) = f''_{uv}(z) \quad \exists z \in [y, y+v]. \end{aligned}$$

Tétel. (Schwarz). Ha $f \in \mathcal{C}^2(G, Z)$, akkor $f''_{uv} = f''_{vu}$ ($u, v \in V$).

Bizonyítás. Előállítjuk a 2-szeres irány szerinti deriváltat második differenciák limeseként. Legyenek $x \in G$, $u, v \in V$ adottak, és legyen $\phi \in Z^*$ egy tetszőlegesen rögzített lineáris funkcionál a Z vektortéren. Most

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau^2} \Delta_{\tau u} \Delta_{\tau v} \phi f(x) &= \frac{1}{\tau^2} \phi f'_{\tau u \tau v}(x) \quad \exists z_{\tau u, \tau v} \in x + [0, \tau u] + [0, \tau v] \\ &= \phi f''_{uv}(\underbrace{z_{\tau u, \tau v}}_{\downarrow x}) \rightarrow \phi f''_{uv}(x) \quad (\tau \downarrow 0). \end{aligned}$$

Az $u \leftrightarrow v$ cserével ugyanígy $\phi f''_{vu}(x) = \lim_{\tau \downarrow 0} \frac{1}{\tau^2} \Delta_{\tau v} \Delta_{\tau u} \phi f(x)$. Mivel a $\Delta_{\tau u}$ és $\Delta_{\tau v}$ operátorok felcserélhetők, innen

$$\phi f''_{vu}(x) = \lim_{\tau \downarrow 0} \frac{1}{\tau^2} \Delta_{\tau v} \Delta_{\tau u} \phi f(x) = \lim_{\tau \downarrow 0} \frac{1}{\tau^2} \Delta_{\tau u} \Delta_{\tau v} \phi f(x) = \phi f''_{uv}(x).$$

A tétel állítása azonnal következik a $\psi \in Z^*$ funkcionál tetszőlegessége miatt.

Következmény. Ha $f \in \mathcal{C}^n(G, Z)$, $v_1, \dots, v_n \in V$ akkor az $\{1, \dots, n\}$ indexhal-
maz tetszőleges π permutációjára

$$f'_{v_{\pi(1)} \dots v_{\pi(n)}} \dots' = f'_{v_1 \dots v_n} \dots'.$$

Taylor formula

Lemma. Ha $f : V_1 \rightarrow V_2$ és $x, v \in V_1$, akkor a $\varphi : \tau \mapsto f(x + \tau v)$ egyváltozós függvényre (ha az n -szer deriválható) $\frac{d^n}{d\tau^n} \varphi(\tau) = f \underbrace{' \dots '}_{n\text{-szer}}(x + \tau v)$.

Bizonyítás. Triviális.

Definíció. Legyenek V_1, V_2 véges dimenziós vektorterek, G nyitott $\subset V_1$. Ekkor egy $f \in \mathcal{C}^n(G, V_2)$ függvény n -ik *derivált tenzora* az $x \in G$ pontnál az

$$f^{(n)}(x) : (v_1, \dots, v_n) \mapsto f'_{v_1 \dots v_n}(x)$$

n -lineáris leképezés.

Megjegyzés. Schwarz tételének a következménye szerint az $f^{(n)}(x)$ tenzor *szimmetrikus* n -lineáris leképezés $V_1^n \rightarrow V_2$.

Tétel. (Taylor formula). Legyen V egy véges dimenziós vektortér, G nyitott $\subset V$ és $f \in \mathcal{C}^n(G, \mathbb{R})$. Ha az $[x, x+h]$ szakasz teljes egészében G -ben fekszik, akkor

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x) \underbrace{(h, \dots, h)}_{k\text{-szor}} + \frac{1}{n!} f^{(n)}(z) (h, \dots, h) \quad \exists z \in [x, x+h] .$$

Bizonyítás. Vezessük be a $\varphi : \tau \mapsto f(x + \tau h)$ segédfüggvényt. Az 1-változós Taylor formulát alkalmazva rá,

$$\varphi(1) = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi^{(k)}(0) \cdot \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!} \varphi^{(n)}(\vartheta) \quad \exists \vartheta \in [0, 1] .$$

A lemma szerint, az imént talált $\vartheta \in [0, 1]$ paraméterrel

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^n f'_{\underbrace{h \dots h}_{k\text{-szor}}}(x) \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!} f'_{\underbrace{h \dots h}_{n\text{-szer}}}(x + \vartheta v) .$$

Definíció. Ha V_1, V_2 véges dimenziós vektorterek, akkor

$$o_n(V_1, V_2) := \{g : V_1 \rightarrow V_2 \text{ függvény, } \|g(x)\|/\|x\|^n \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 0)\}$$

az n -edrendben *eltűnő* $V_1 \rightarrow V_2$ függvények osztálya, ahol $\|\cdot\|$: tetszőleges normákat jelöl V_1 ill. V_2 fölött. A definíciónak a normáktól való függetlenségét ugyanúgy bizonyíthatjuk, mint a már a differenciálhatóság megalapozásához bevezetett $n = 1$ esetben.

Tétel. Ha G nyitott $\subset V_1$, x egy rögzített G -beli pont és $f \in \mathcal{C}^n(G, V_2)$, akkor a

$$P(h) := \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x) \underbrace{(h, \dots, h)}_{k\text{-szor}}$$

Taylor polinomra

$$[h \mapsto f(x+h) - P(h)] \in o_n(V_1, V_2) .$$

Bizonyítás. Jelöljön (a félreértés veszélye nélkül) $\|\cdot\|$ egy-egy tetszőlegesen rögzített normát V_1 -en ill. V_2 -n. Mindegyik $h \in G - x$ vektorhoz válasszunk egy olyan $\phi_h \in V_2^* := \{\text{lineáris } V_2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ leképezések}\}$ funkcionált, amelyre*

$$\|\phi_h\| = 1, \quad \langle \phi_h, f(x+h) - P(h) \rangle = \|f(x+h) - P(h)\| .$$

A Hahn–Banach tétel grantálja, hogy ez mindig megtehető. A Taylor formula szerint

$$\phi_h f(x+h) = \sum_{k=0}^{n-1} \phi_h f^{(k)}(x) (h, \dots, h) \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!} \phi_h f^{(n)}(z_h) (h, \dots, h) \quad \exists z_h \in [x, x+h] .$$

* Szokásosan $\langle \phi_h, z \rangle := \phi_h(z)$ és $\|\phi_h\| := \sup_{\|z\| \leq 1} |\langle \phi_h, z \rangle|$.

A kapott z_h pontokkal

$$\langle \phi_h, f(x+h) - P(h) \rangle = \frac{1}{n!} \langle \phi_h, f^{(n)}(z_h)(h, \dots, h) - f^{(n)}(x)(h, \dots, h) \rangle .$$

Mivel mindig $\langle \phi_h, z \rangle \leq \|\phi_h\| \cdot \|z\|$, innen

$$\|f(x+h) - P(h)\| \leq \frac{1}{n!} \| [f^{(n)}(x)](h, \dots, h) \| .$$

Vegyünk egy $\{e_1, \dots, e_N\}$ bázist V_1 -ben, és legyen ezzel a vektorok felbontása

$$h = \tau_1(h)e_1 + \dots + \tau_n(h)e_n \quad (h \in V_1) .$$

A derivált tenzor multilinearitása miatt

$$\begin{aligned} & [f^{(n)}(z_h) - f^{(n)}(x)](h, \dots, h) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^N [f'_{e_{i_1} \dots e_{i_n}}(z_h) - f'_{e_{i_1} \dots e_{i_n}}(x)] \tau_{i_1}(h) \dots \tau_{i_n}(h) \end{aligned}$$

valahányszor $[x, x+h] \subset G$. Tudjuk: a $\tau_1, \dots, \tau_N$ funkcionálok lineárisak, és így (mivel $\dim(V_1) < \infty$) folytonosak, azaz valamilyen M -re

$$\|\tau_i(h)\| \leq M \cdot \|h\| , \quad (i = 1, \dots, n \quad h \in V_1) .$$

Tehát

$$\|f(x+h) - P(h)\| \leq \frac{1}{n!} \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^N \underbrace{\|f'_{e_{i_1} \dots e_{i_n}}(z_h) - f'_{e_{i_1} \dots e_{i_n}}(x)\|}_{\downarrow 0 \quad (h \rightarrow 0)} \cdot M^n \|h\|^n$$

hiszen $z_h \rightarrow x \quad (h \rightarrow 0)$.

Szélsőérték

Definíció. Legyen $X, \mathcal{U}$ egy topologius tér. Az $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek *lokális minimuma* [*maximuma*] van az $x(\in X)$ pontnál, ha

$$\exists U \text{ } x\text{-környezet} \quad f(x) = \min f(U) \quad [= \max f(U)] .$$

Propozíció. Tegyük fel, hogy G nyitott halmaz egy V topologikus vektortérben, és az $f \in \mathcal{C}^1(G)$ függvénynek lokális minimuma van a -nál. Ekkor $f'(a) = 0$.

Bizonyítás. Vegyünk U a -környezetet, ahol $f(a) = \min f(U)$. Tekintsünk egy tetszőleges $v \in V$ vektort. Vegyük észre, hogy a

$$\varphi : \tau \mapsto f(a + \tau v)$$

valós változós függvényhez található olyan I 0 -környezet, amelyre

$$u + Iv \subset U \quad \text{és} \quad \varphi(0) = \min \varphi(I) .$$

Azt, hogy $\varphi'(0) = 0$ már tudjuk (differenciálható 1-változós függvény lokális minimumhelyénél a derivált eltűnik). Innen

$$f'(a)v = f'_v(a) = \varphi'(0) = 0 .$$

Tétel. Legyen G nyitott $\subset V$ egy véges dimenziós V vektortérben, és legyen $f \in \mathcal{C}^2(G)$, továbbá $a \in G$. Tegyük fel, hogy $f'(a) = 0$ és az $f^{(2)}(a)$ derivált tenzor pozitív definit (azaz $f^{(2)}(a)(v, v) = f''_{vv}(a) > 0 \quad \forall v \neq 0$). Ekkor az f függvénynek lokális minimumhelye az a pont.

Bizonyítás. Vegyünk egy tetszőleges $\|\cdot\|$ normát a V téren. Tudjuk, hogy $V, \|\cdot\|$ topologikusan izomorf $\mathbb{R}^{\dim(V)}$ -vel. A norma folytonossága miatt így az

$$S := \{v \in V : \|v\| = 1\}$$

gömbfelület korlátos és zárt, tehát kompakt. Feltevés szerint a $v \mapsto f^{(2)}(v, v)$ függvény folytonos. Mivel kompakt halmazon folytonos függvény felveszi a minimumát, létezik $w \in S$, ahol $\min_{v \in S} f^{(2)}(a)(v, v) = f^{(2)}(a)(w, w) > 0$. Tehát

$$\mu := \min_{\|v\|=1} f^{(2)}(a)(v, v) > 0 .$$

A Taylor formulát $n = 2$ rendben alkalmazva,

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f^{(2)}(a)(h, h) + g(h) \cdot \|h\|^2 \quad (h \in H)$$

írható, ahol H egy konvex 0-környezet a $G - a$ alakzaton belül, és g egy folytonos $H \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, amelyre $g(0) = 0$. Az $f^{(2)}(a)$ tenzor bilinearitása miatt mindig

$$f^{(2)}(a)(h, h) = f^{(2)}(a)(\underbrace{\|h\| \frac{h}{\|h\|}}_{1 \text{ normájú}} \cdot \|h\| \frac{h}{\|h\|}) = \|h\|^2 f^{(2)}(a)\left(\frac{h}{\|h\|}, \frac{h}{\|h\|}\right) \geq \mu \|h\|^2 .$$

Másrészt tudjuk, hogy $f'(a) = 0$. Ezért

$$f(a + h) \geq f(a) + \frac{1}{2}(\mu - |g(h)|) \cdot \|h\|^2 \quad (h \in H) .$$

Mivel $\lim_{h \rightarrow 0} g(h) = 0$, található olyan U 0-környezet $\subset H$, amelyre

$$|g(h)| < \mu \quad (h \in U) .$$

Vagyis $f(a + h) \geq f(a) \quad (h \in U)$.

Feltételes szélsőérték

Definíció. Legyen $X, \mathcal{U}$ egy topologikus tér, és legyenek $f, c_1, \dots, c_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ függvények. Egy olyan $x \in X$ pontnál, amelyre $c_1(x) = \dots = c_n(x) = 0$ az f függvénynek lokális minimuma [max-a] van a $c_1 = \dots = c_n = 0$ feltétellel, ha

$$\exists U \text{ } x\text{-környezet} \quad f(x) = \min_{[\max]} f(U \cap c_1^{-1}\{0\} \cap \dots \cap c_n^{-1}\{0\}) .$$

Tétel. (Lagrange multiplikátorok). Tegyük fel, hogy G nyitott $\subset V$ egy véges dimenziós V vektortérben, és $f, c_1, \dots, c_n \in \mathcal{C}^1(G)$, továbbá $a \in G$. Ha f -nek a -nál lokális minimuma van a $c_1 = \dots = c_n = 0$ feltételek mellett és $\{c'_1(a), \dots, c'_n(a)\}$ lineárisan független $\subset V^*$, akkor

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \quad f'(a) = \sum_{k=1}^n \lambda c'_k(a) .$$

Bizonyítás. Tudjuk lineáris algebrából: a V fölötti lineáris funkcionálok V^* terében a $c'_1(a), \dots, c'_n(a)$ elemek által kifeszített $\text{Span}\{c'_1(a), \dots, c'_n(a)\}$ altérre

$$\begin{aligned} f'(a) \in \text{Span}\{c'_1(a), \dots, c'_n(a)\} &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \{v \in V : f'(a)v = 0\} \supset \{v \in V : c'_1(a)v = \dots = c'_n(a)v = 0\} . \end{aligned}$$

(Ez a mátrixok rangszámtételének egyik –végtelen dimenzióban is alkalmazható– átfogalmazása). Mivel feltevés szerint $c'_1(a), \dots, c'_n(a)$ lineárisan függetlenek,

$$\exists \{e_1, \dots, e_n\} \text{ lin. független } \subset V \quad c'_k(a)e_i = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k \end{cases} \quad (i, j = 1, \dots, n) .$$

Legyen $X := \{v \in V : c'_1(a)v = \dots = c'_n(a)v = 0\}$ és $Y := \text{Span}\{e_1, \dots, e_n\}$.
Most

$$V = X + Y , \quad X \cap Y = \{0\} .$$

Tekintsük az

$$F : (x, y) \mapsto \sum_{k=1}^n c_k(a + x + y)e_k$$

függvényt ($F : \{(x, y) \in X \times Y : a + x + y \in G\} \rightarrow Y$). Vegyük észre, hogy

$$F'(0, 0) : (x, y) \mapsto \sum_{k=1}^n c'_k(a)(x + y) = \sum_{k=1}^n \underbrace{c'_k(a)}_0 x + \sum_{k=1}^n c'_k(a)y = 0 \cdot x + 1 \cdot y$$

mivel ha $y = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \in Y$, akkor mindig $\sum_{k=1}^n c'_k(a)y = \sum_{i,k=1}^n \lambda_i c'_k(a)e_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = y$. Tehát alkalmazhatjuk az implicit függvény tételt az F leképezésre a $(0, 0)$ pontnál. Ennek alapján

$$\begin{aligned} \exists U \text{ 0-környezet } \subset X \quad \exists W \text{ 0-körny } \subset Y \quad \exists g \in \mathcal{C}^1(U, V) \\ \{(x, g(x)) : x \in U\} = \{(x, y) \in U \times W : F(x, y) = 0\} = \\ = \{(x, y) \in U \times W : c_1(a+x+y) = \dots = c_n(a+x+y) = 0\} . \end{aligned}$$

Azaz a fenti $U \subset X$ ill. $W \subset Y$ 0-környezetekkel

$$\{v \in \underbrace{a + U + W}_{a\text{-körny} \subset V} : c_1(v) = \dots = c_n(v) = 0\} \{a + x + g(x) : x \in U\} .$$

Így a

$$\Phi : x \mapsto f(a + x + g(x))$$

függvénynek a $0(\in X)$ lokális minimumhelye. Következésképpen

$$0 = \phi'(0) : x \mapsto f'(a)[x + \underbrace{g'(0)}_0 x] ,$$

ahonnan

$$\begin{aligned} f'(a)X = 0 &\Leftrightarrow f'(a)x = 0 \quad (c'_1(a)x = \dots = c'_n(a)x = 0) \\ &\Leftrightarrow f'(a) \in \text{Span}\{c'_1(a), \dots, c'_n(a)\} . \end{aligned}$$

Kvadratúra probléma

Probléma. Tegyük fel, hogy V egy vektortér, $\{e_1, \dots, e_N\}$ bázis $\subset V$ és adott N függvény $P_1, \dots, P_N \in \mathcal{C}(V)$. Milyen lokális feltételek mellett

$$\exists f \in \mathcal{C}^1(V) \quad P_k = f'_{e_k} \quad (k = 1, \dots, N) ?$$

Propozíció. Ha G nyitott $\subset V$ és $f \in \mathcal{C}^1(G)$ egy olyan függvény, amelynél $P_k = f'_{e_k}$ ($k = 1, \dots, N$), akkor

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 \sum_{k=1}^N P_k(g(t)) g'_k(t) dt$$

valahányszor $g : [0, 1] \rightarrow G$ folytonos görbe, $g(0) = x$, $g(1) = y$, $g = \sum_{k=1}^n g_k \cdot e_k$, amelynek komponenseire $g_k \in \mathcal{C}^1((0, 1), V)$ ($k = 1, \dots, N$).

Bizonyítás. Tekintsük a $\varphi : t \mapsto f(g(t))$ függvényt. Ennek deriváltja

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= f'(g(t)) \cdot g'(t) = f'(g(t)) \sum_{k=1}^N g'_k(t) e_k \\ &= \sum_{k=1}^N f'_{e_k}(g(t)) \cdot g'_k(t) = \sum_{k=1}^N P_k(g(t)) g'_k(t). \end{aligned}$$

Másrészt a Newton–Leibniz formulából $f(y) - f(x) = \varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t) dt$.

Lemma. Tegyük fel, hogy $f \in \mathcal{C}^2(G)$ és $P_k = f'_{e_k}$ ($k = 1, \dots, N$). Ekkor $(P_k)'_{e_i} = (P_i)'_{e_k} \quad \forall i, k$.

Bizonyítás. Schwarz tétele alapján $f'_{e_k e_i} = f'_{e_i e_k}$ minden indexpárra.

Tétel. Legyen K egy konvex nyitott alakzat és legyen $\{e_1, \dots, e_N\}$ bázis egy V (véges dimenziós) vektortérben. Ha $P_1, \dots, P_N \in \mathcal{C}^1(K)$, akkor ekvivalensek:

- 1) $\exists f \in \mathcal{C}^2(K) \quad P_k = f'_{e_k} \quad (k = 1, \dots, N)$,
- 2) $P'_k e_i = P'_i e_k \quad (i, k = 1, \dots, N)$.

Bizonyítás. 1) $\Rightarrow$ 2): Láttuk.

2) $\Rightarrow$ 1): Tegyük fel, hogy 2) teljesül. Legyen egy $a \in K$ pont tetszőlegesen rögzítve, és tekintsük az

$$f(x) := \int_0^1 \sum_{i=1}^N P_i(a + \tau(x - a)) \cdot (x_i - a_i) d\tau \quad (x \in K)$$

függvényt, ahol x_i az $x \in V$ vektor i -ik komponensét jelöli az $\{e_1, \dots, e_N\}$ bázisban (azaz $x = \sum_{i=1}^N x_i e_i$ ($x \in V$)). A K alakzat konvexitása miatt az f függvény jól-definiált. [Heurisztika: ha van olyan f függvény, amely teljesíti 1)-et, akkor a propozíciót a $g_x : \tau \mapsto a + \tau(x - a)$ görbékre alkalmazva látjuk, hogy csak $f(x) = f(a) + \int_0^1 \sum_{i=1}^N P_i(a + \tau(x - a)) \cdot (x_i - a_i) d\tau$ lehet.] Legyen a j index és az $x \in K$ pont tetszőlegesen adott. Verifikáljuk, hogy $f'_{e_j}(x) = P_j(x)$.

Az általánosság megszorítása nélkül vehető $a = 0$. Ekkor

$$\begin{aligned}
f'_{e_j}(x) &= \lim_{s \downarrow 0} \frac{1}{s} [f(x + se_j) - f(x)] \\
&= \lim_{s \downarrow 0} \int_0^1 \frac{1}{s} \sum_{i=1}^N [P_i(\tau x + s\tau e_j) \cdot (x + se_j)_i - P_i(\tau x) \cdot x_i] d\tau \\
&= \int_0^1 \lim_{s \downarrow 0} \frac{1}{s} \sum_{i=1}^N [P_i(\tau x + s\tau e_j) \cdot (x + se_j)_i - P_i(\tau x) \cdot x_i] d\tau \\
&= \int_0^1 \left[\sum_{i=1}^N P'_{i e_j}(\tau x) \cdot \tau \cdot x_i + P_j(\tau x) \right] d\tau \stackrel{2)}{=} \\
&= \int_0^1 \left[\sum_{i=1}^N P'_{j e_i}(\tau x) \cdot \tau \cdot x_i + P_j(\tau x) \right] d\tau \\
&= \int_0^1 \left[\tau \cdot \frac{d}{d\tau} P_j(\tau x) \right] d\tau + \int_0^1 P_j(\tau x) d\tau \stackrel{\text{PARC INT}}{=} \\
&= \tau \cdot P_j(\tau x) \Big|_{\tau=0}^1 - \int_0^1 P_j(\tau x) d\tau + \int_0^1 P_j(\tau x) d\tau \\
&= P_j(x) .
\end{aligned}$$

Általánosítási lehetőségek végtelen dimenzióra

A véges dimenziós vektortereken való differenciálhatóság elmélete bemutatásakor abból a tényből indultunk ki, hogy ezeken csak egy természetes topológia van, amelyet tetszőleges normával definiálhattunk.

Kérdés: hogyan lehet tetszőleges topologikus vektortereken a differenciálhatóság elméletét kiépíteni? Ez sajnos már nem tehető meg maradéktalanul a becslésekre és numerikus manipulációkra oly alkalmas normák segítségével.

Definíció. Egy V vektortér $A, B \neq \emptyset$ részhalmazaira legyen (az $\inf \emptyset := \infty$ konvenció mellett)

$$B : A := \inf \{ \lambda > 0 : \lambda B \supset A \} .$$

Megjegyzés. A következő alapvető eredményeket csak bizonyítás nélkül közöljük, jóllehet a bizonyításuk nem okoz különös nehézséget, illetve a bemutatott véges dimenziós gondolatmenetek elemzésén alapszik. Az érdekelt olvasónak jó gyakorlat ezeknek a hiányoknak a kitöltése.

Lemma. Ha $\emptyset \neq A, B \subset V$ egy V vektortérben, akkor

- 1) $B' : A' \geq B : A \quad (B' \supset B, A' \subset A),$
- 2) $(\alpha B) : (\alpha A) = B : A \quad (\alpha \neq 0),$
- 3) $(\alpha B) : A = \alpha(B : A), B : (\alpha A) = (1/\alpha)(B : A) \quad (\alpha > 0),$
- 4) ha K konvex $\subset V$, akkor $(A + B) : K \leq (A : K) + (B : K).$

Definíció. Legyenek $V_i, \mathcal{V}^{(i)}$ ($i = 1, 2$) topologikus vektorterek. Egy V_1 -beli G 0-környezeten értelmezett $f : G \rightarrow V_2$ függvény *első rendben eltűnő*, ha

$$\forall U_2 \in \mathcal{V}_0^{(2)} \exists U_1 \in \mathcal{V}_0^{(1)} \quad \lim_{\delta \downarrow 0} f(\delta U_1) : (\delta U_2) = 0 .$$

A lemma segítségével látható, hogy ez a (normákkal megadott) véges dimenziós első rendben való eltűnőség kiterjesztése. Tehát jogos a

$$o(V_1, V_2) := \{\text{első rendben eltűnő } V_1, \mathcal{V}^{(1)} \rightarrow V_2, \mathcal{V}^{(2)} \text{ függvények}\}$$

jelölés használata.

Propozíció. Legyenek $V_i, \mathcal{V}^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$) topologikus vektorterek. Ekkor

- 1) $f_1 + f_2 \in o(V_1, V_2)$ ($f_1, f_2 \in o(V_1, V_2)$),
- 2) $Af \in o(V_1, V_3)$ valahányszor $f \in o(V_1, V_2)$ és $A \in \mathcal{L}(V_2, V_3) [= \{\text{folyt. lin. } V_2 \rightarrow V_3 \text{ leképezések}\}]$,
- 3) $g(B) \in o(V_1, V_3)$ $f \in o(V_2, V_3)$, $B \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$,
- 4) $f(g) \in o(V_1, V_3)$ ($f \in o(V_2, V_3)$, $g \in o(V_1, V_2)$).

Definíció. Legyenek $V_i, \mathcal{V}^{(i)}$ topologikus vektorterek. Az $f : V_1 \rightarrow V_2$ függvény differenciálható x -nél, ha

$$\exists A \in \mathcal{L}(V_1, V_2) \quad [h \mapsto f(x+h) - (f(x) + Ah)] \in o(V_1, V_2).$$

Az előző propozícióból azonnal következik, hogy a véges dimenziós differenciálhatósági alaptulajdonságok továbbra is állnak.

Tétel. Differenciálható leképezések folytonosak, ilyenek lineáris kombinációja és összetétele is differenciálható. Ha $f : V_1 \rightarrow V_2$ differenciálható az x pontnál, akkor egyértelműen írható

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f_1(h) \quad (f'(x) \in \mathcal{L}(V_1, V_2), f_1 \in o(V_1, V_2))$$

alakban. A differenciálhatóság maga után vonja a minden irányból való deriválhatóságot, és $f'(x)v = f'_v(x)$ minden v vektorra. Ha g differenciálható az x pontban és f differenciálható $g(x)$ -nél, akkor $f(g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$.

Megjegyzés. A mélyebb tételek már nem vihetők tovább változatlan formában. Az összes irány szerinti deriváltak folytonossága nem biztosítja a differenciálhatóságot, csak ha pl. az értelmezési tartomány véges dimenziós. (Ellenpélda: nem-folytonos lineáris funkcionál.) Ezzel szemben Schwarz tételét kevés többletfeltétellel lehet általánosítani: Ha $f \in \mathcal{C}^n(G, Z)$ és a Z vektortér topológiája szerinti folytonos lineáris funkcionálok elválasztják a pontokat (azaz $\forall z_1, z_2 \in Z \exists \phi \in Z^* \quad \phi(z_1) \neq \phi(z_2)$), akkor $f'_{v_{i_1} \dots v_{i_n}} = f'_{v_1 \dots v_n}$ minden $(i_1, \dots, i_n)$ indexpermutációra és $v_1, \dots, v_n$ vektorokra. Az implicit függvény tétel bizonyítása a teljes metrikus terekben érvényes kontrakciós fixpont tételre alapul. Egy normált vektorteret *Banach térnek* nevezünk, ha a norma metrikája teljes. Az alkalmazások szempontjából ez egy rendkívül fontos tért kategória. Az implicit- és inverz függvény tételek továbbá az ezen alapuló Lagrange multiplikátor tétel is állnak Banach terekben. A derivált eltűnése a lokális szélsőérték helyeken nem kíván topológiai feltételeket. Ez utóbbi ténynek a variációs problémák kezelésében van különös érdekessége.

DIFFERENCIÁLHATÓ SOKASÁGOK

Koordináták

Definíció. Legyen S egy halmaz. Az $x_1, \dots, x_n : S \rightarrow \mathbb{R}$ függvényrendszer n -dimenziós *koordinátarendszer* S -en, ha megkülönbözteti S pontjait, azaz ha

$$\forall s, t \in S \quad s \neq t \Rightarrow \exists k \quad x_k(s) \neq x_k(t).$$

Megjegyzés. Összefoglalva az $x_1, \dots, x_n : S \rightarrow \mathbb{R}$ függvényeket egy közös $X : s \mapsto (x_1(s), \dots, x_n(s))$ leképezésbe,

$$x_1, \dots, x_n \text{ koordinátarendszer} \Leftrightarrow X : S \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ injektív.}$$

Ilyenkor az X^{-1} inverz jól-definiált, nevezetesen

$$X^{-1}(\xi_1, \dots, \xi_n) = [\text{a } (\xi_1, \dots, \xi_n) \text{ koordinátájú pont } S\text{-ben}].$$

Példa. 1) $x_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad (\xi_1, \dots, \xi_n) \mapsto \xi_k \quad (k = 1, \dots, n)$ az alapkoordináták (Descartes-koordináták) $\mathbb{R}^n$ -en.

2) Cantor-koordináta az egységnégyzeten:

$$P : (0, 1)^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad (0.a_1a_2\dots, 0.b_1b_2\dots) \mapsto (0.a_1b_1a_2b_2\dots)$$

ahol $0.a_1a_2\dots$ ill. $0.b_1b_2\dots$ a $(0, 1)^2$ beli pont Descartes koordinátáinak *tizedestört-kifejtése* (amelyik nem tartalmaz egymás után végtelen sok 9-et). Figyelemre méltó, hogy egy "2-dimenziós"-nak tartott alakzatot "1-dimenziós"-nak koordinátázhattunk. Azonban ez a koordinátázás a természetes topológiák szerint nem is folytonos, sőt rendkívül "szétdobáló": a $P((0, 1)^2)$ koordinátahalmaz nem is összefüggő.

Definíció. Az $X = (x_1, \dots, x_n) : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ koordinátarendszer *nyitott*, ha $X(S)$ nyitott $\subset \mathbb{R}^n$.

Propozíció. Legyenek

$X = (x_1, \dots, x_m) : S \hookrightarrow G(\subset \mathbb{R}^n)$ ill. $Y = (y_1, \dots, y_m) : S \hookrightarrow H(\subset \mathbb{R}^m)$ nyitott koordinátázások. Ha $X \circ Y^{-1} \in C^1(H, \mathbb{R}^n)$ és $Y \circ X^{-1} \in C^1(G, \mathbb{R}^m)$, akkor szükségképpen $m = n$ (azaz ilyenkor a két koordinátarendszer már csak azonos dimenziójú lehet).

Bizonyítás. Írjunk $f := X \circ Y^{-1}$ -et ill. $g := Y \circ X^{-1}$ -et. Ekkor $f \circ g = \text{id}_G$ (a $\xi \mapsto \xi$ identitás leképezés G -n). Mivel mind f mind g differenciálható, tetszőleges $\xi \in G$ helyen

$$\underbrace{f'(g(\xi))}_{\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)} \underbrace{g'(\xi)}_{\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)} = (f \circ g)'(\xi) = (\text{id}_G)'(\xi) = \text{id}_{\mathbb{R}^n}.$$

Innen azonnal következik $m = n$ és $f'(g(\xi)) = g'(\xi)^{-1}$.

Megjegyzés. Sard híres tételével be lehet bizonyítani: az $X \circ Y^{-1} \in C^1(H, \mathbb{R}^n)$ feltevés magában is elég az $m = n$ konklúzióhoz az előbbi propozícióban.

Definíció. Az $X, Y : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ nyitott koordinátarendszerek C^k -kompatibilisek, ha az $X \circ Y^{-1}$ és $Y \circ X^{-1}$ koordinátaáttérések C^k -simák.

Parciális deriváltak

Definíció. Legyen $X = (x_1, \dots, x_n) : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ egy nyitott koordinátarendszer és $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ egy függvény. Az f függvény az X koordinátarendszer szerint differenciálható (röviden X -differenciálható), ha az $f \circ X^{-1}$ koordinátareprezentációja differenciálható (mint $\mathbb{R}^n$ nyitott részhalmazán értelmezett függvény). Ha $Y = (y_1, \dots, y_m) : T \rightarrow \mathbb{R}$ szintén egy nyitott koordinátarendszer, akkor az $F : S \rightarrow T$ leképezés $(X \rightarrow Y)$ -differenciálható, ha az $y_1(F), \dots, y_m(F)$ koordinátareprezentációi mind X -differenciálható függvények.

Az f függvénynek az x_k koordináta szerinti *parciális deriváltja* az S -en definiált

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} : s \mapsto \left(f \circ X^{-1} \right)'_{e_k} (X(s))$$

függvény, ahol $e_k := (0, \dots, 0, \underset{k}{1}, 0, \dots, 0)$ az $\mathbb{R}^n$ tér k -adik egységvektora.

Megjegyzés. $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ -nak csak egy koordinátarendszeren belül van értelme!

Tétel. Legyen $X = (x_1, \dots, x_n) : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ egy nyitott koordinátarendszer és $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ egy X -differenciálható függvény az S halmazon. Tegyük fel, hogy $Y = (y_1, \dots, y_m) : T \rightarrow \mathbb{R}^m$ nyitott koordinátarendszer a T halmazon és $F : T \rightarrow S$ egy $(Y \rightarrow X)$ -differenciálható leképezés. Ekkor az $f(F)$ összetett függvény Y -differenciálható és

$$\frac{\partial f(F)}{\partial y_i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(F) \cdot \frac{\partial x_k(F)}{\partial y_i} \quad (i = 1, \dots, m) .$$

Bizonyítás. Numerikus függvényekre faktorizálva

$$f(F) \circ Y^{-1} = f \circ F \circ Y^{-1} = (f \circ X^{-1}) \circ (X \circ F \circ Y^{-1}) .$$

Ha tehát $\eta \in Y(T)$, akkor

$$[f(F) \circ Y^{-1}]'(\eta) = [[f \circ X^{-1}]'(X \circ F \circ Y^{-1}(\eta))] \cdot [X \circ F \circ Y^{-1}]'(\eta) .$$

Speciálisan, ha $t \in T$ és $\eta := Y(t)$, akkor

$$\begin{aligned} [f(F) \circ Y^{-1}]'_{e_i}(Y(t)) &= [[f \circ X^{-1}]'(X(F(t)))] \cdot [X \circ F \circ Y^{-1}]'_{e_i}(Y(t)) \\ &= [[f \circ X^{-1}]'(\underbrace{X(F(t))}_{\text{HELY}})] \cdot \left[\sum_{k=1}^n x_k(F \circ Y^{-1})'_{e_i}(\underbrace{Y(t)}_{\text{HELY}}) \cdot e_k \right] \\ &= \sum_{k=1}^n [f \circ X^{-1}]'_{e_k}(\underbrace{X(F(t))}_{\text{HELY}}) x_k(F \circ Y^{-1})'_{e_i}(\underbrace{Y(t)}_{\text{HELY}}) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(F(t)) \frac{\partial x_k(F)}{\partial y_i}(t) . \end{aligned}$$

Következmény. Ha $X = (x_1, \dots, x_n)$ és $Y = (y_1, \dots, y_n)$ $\mathcal{C}^1$ -kompatibilis koordinátarendszerek S -en és $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ egy X -differenciálható függvény, akkor

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial y_i} \quad (i = 1, \dots, n) .$$

Definíció. Legyenek $X : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ ill. $Y : T \rightarrow \mathbb{R}^n$ (nyitott) koordinátarendszerek. Egy $F : T \rightarrow S$ ($Y \rightarrow X$)-differenciálható leképezés *derivált mátrixa* az ($Y \rightarrow X$) koordinátázással

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1(F)}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1(F)}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_1(F)}{\partial y_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_n(F)}{\partial y_1} & \frac{\partial x_n(F)}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_n(F)}{\partial y_m} \end{pmatrix}.$$

Jelölések: $X(F) := \begin{pmatrix} x_1(F) \\ \vdots \\ x_n(F) \end{pmatrix}$, $\frac{\partial}{\partial Y} := \left(\frac{\partial}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial}{\partial y_m} \right)$,

ahonnan a deriváltmátrix $\frac{\partial X(F)}{\partial Y}$ vagy $\partial X(F)/\partial Y$.

Megjegyzés. Az összetett függvény deriváltjára vonatkozó tétel szerint

$$\frac{\partial}{\partial Z} X(F \circ G) = \frac{\partial X(F)}{\partial Y}(G) \cdot \frac{\partial Y(G)}{\partial Z}.$$

Atlaszok

Definíció. Legyen M egy halmaz és V egy vektortér ($\dim(V) < \infty$). Az S halmazon értelmezett $X : S \rightarrow V$ függvény egy *lokális térképe* M -nek V -n, ha $S \subset M$ és X injektív S -en.

Definíció. Az X, Y lokális térképei M -nek $\mathcal{C}^k$ -kompatibilisek, ha az $X \circ Y^{-1}$ ill. $Y \circ X^{-1}$ koordinátaáttérések V -nek nyitott halmazain értelmezett $\mathcal{C}^k$ -sima leképezések.

Definíció. Legyen M halmaz, V (véges dimenziós) vektortér és

$$\mathcal{A} \subset \{M \text{ lokális térképei } V\text{-ben}\}.$$

Az $\mathcal{A}$ térképcsalád V -beli $\mathcal{C}^k$ -atlasz M -en, ha*

$$1) \bigcup_{X \in \mathcal{A}} \text{dom}(X) = M, \quad 2) X, Y \text{ } \mathcal{C}^k\text{-kompatibilis} \quad (X, Y \in \mathcal{A}).$$

Megjegyzés. Ha $\mathcal{A}$ egy $\mathbb{R}^n$ -beli $\mathcal{C}^k$ -atlasz, akkor benne minden lokális térkép triviálisan $\mathcal{C}^k$ -kompatibilis önmagával, vagyis az $\mathcal{A}$ atlasz mindegyik X térképe nyitott koordinátarendszer ($\text{dom}(X)$ -en, nem feltétlenül az egész M -en).

Példa. A speciális relativitás geometriája

Legyen M egy 1-dimenziós egyenesen az események tere. Esemény alatt hely- és időkoordinátával azonosítható jelenséget értünk. Legyen $\mathbf{O}$ egy kijelölt esemény (az *origó*) M -ben. A $\mathbf{O}$ -ban álló kezdőpontú rendszerből v egyenletes sebességűnek látszó *inerciarendszer* szerinti koordinátázás legyen

* $\text{dom}(F)$ ill. $\text{ran}(F)$ az F függvény *értelmezési tartománya* ill. *értékkészlete*. (A jelölés eredete az angol "domain" ill. "range" szavak.)

$$I_v : M \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$m \mapsto \begin{pmatrix} t_v(m) \\ x_v(m) \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{IDŐ} \\ \text{TÉR} \end{matrix} .$$

Megjegyzés. A 0 időpontban $\mathbf{O}$ -ból induló u egyenletes sebességű mozgás eseményeinek koordinátái a

$$\left\{ \begin{pmatrix} t \\ tu \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

halmazt alkotják egy inerciarendszerben.

Posztulátum. Az $I_u \circ I_v^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ koordinátaáttérés mindig *lineáris transzformáció*. ($I_u \circ I_v^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ jelentése: Hogyan számoljuk át a v sebességű rendszer adatait az u sebességűbe.)

Axiómák. 1) Az I_v rendszer origójában álló pont I_v -ben 0 sebességű, I_0 -ban v sebességűnek látszik:

$$L_v \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ tv \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} .$$

2*) A FÉNYSEBESSÉG ÁLLANDÓ c érték:

$$L_v \left\{ \begin{pmatrix} t \\ tc \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ tc \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} .$$

3) I_v -ből I_0 -ba ugyanaz a transzformáció, mint I_0 -ból I_{-v} -be:

$$L_{-v} = L_v^{-1} .$$

4) Tükrözési elv:

$$L_{-v} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} L_v \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} .$$

5) A koordinátaáttérések folytonosak:

$$v \mapsto L_v \quad \text{folytonos} .$$

Megjegyzés. A klasszikus mechanikai szemléletet kifejező

$$\tilde{L}_v : \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} t \\ x + tv \end{pmatrix} \quad \tilde{L}_v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & 1 \end{pmatrix}$$

Galilei-transzformáció az 1) 3) 4) 5) axiómákat kielégíti, de ellentmond 2*)-nak.

Tétel. $L_v = \sqrt{1 - (v/c)^2} \begin{pmatrix} 1 & v/c^2 \\ v & 1 \end{pmatrix} \quad (-c < v < c) .$

Bizonyítás. A 3) 4) axiómákból azonnal következik, hogy

$$L_v^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} L_v \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} .$$

A determinánsok szorzástétele szerint így $1/\det(L_v) = (-1)\det(L_v) \cdot (-1)$, ahonnan $\det(L_v) \in \{\pm 1\}$. A folytonossági 5) axiómából és abból az egyszerű tényből, hogy L_0 szükségképpen az egységmátrix, adódik most, hogy

$$\det(L_v) = 1 \quad \forall v .$$

Legyen v tetszőlegesen rögzítve, és legyenek L_v komponensei $L_v := \begin{pmatrix} \ell_{11} & \ell_{12} \\ \ell_{21} & \ell_{22} \end{pmatrix} .$

Ekkor

$$L_v^{-1} = \frac{1}{\det(L_v)} \begin{pmatrix} \ell_{22} & -\ell_{12} \\ -\ell_{21} & \ell_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_{22} & -\ell_{12} \\ -\ell_{21} & \ell_{11} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} L_v \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_{11} & -\ell_{12} \\ -\ell_{21} & \ell_{22} \end{pmatrix}.$$

Következésképpen $\ell_{11} = \ell_{22}$ és $\ell_{11}^2 - \ell_{12}\ell_{21} = \det(L_v) = 1$. Az 1) axióma szerint létezik olyan κ együttható, amelyre

$$\begin{pmatrix} \ell_{11} \\ \ell_{21} \end{pmatrix} = L_v \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \kappa \begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix}, \quad L_v = \begin{pmatrix} \kappa & \ell_{12} \\ \kappa v & \kappa \end{pmatrix}.$$

A 2*) axióma szerint

$$L_v \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix} = \kappa' \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix} \quad \exists \kappa'$$

$$\begin{pmatrix} \kappa \\ \kappa v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \ell_{12}c \\ \kappa c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa' \\ \kappa'c \end{pmatrix}.$$

Szükségképpen $\kappa' = \kappa(1 + \frac{v}{c})$ és $\ell_{12} = \frac{\kappa' - \kappa}{c} = \frac{v}{c^2}\kappa$. Mivel $\det(L_v) = \kappa^2 - \kappa^2 \frac{v^2}{c^2} = 1$, adódik $\kappa^2 = 1 - \frac{v^2}{c^2}$. Azaz mint v -nek a függvénye, $\kappa(v) \in \{\pm(1 - (v/c)^2)\}$. Csakhogy az 5) axióma alapján $\lim_{v \rightarrow 0} \kappa(v) = 1$, ahonnan $\kappa(v) = (1 - (v/c)^2)$.

Sokaságok, vektorok

Definíció. Az $M, \mathcal{A}$ pár $\mathcal{C}^k$ -sokaság, ha $\mathcal{A}$ egy $\mathcal{C}^k$ -atlasz M -en.

Tétel. Ha $M, \mathcal{A}$ egy $\mathcal{C}^k$ -sokaság V -beli térképekkel, akkor $\mathcal{V}$ -vel jelölve a V véges dimenziós vektortér természetes topológiáját,

$\exists! \mathcal{U}$ topológia M -en $\forall X \in \mathcal{A} \quad X(\mathcal{U}|\text{dom}(X) \rightarrow \mathcal{V})$ -folytonos,

$X^{-1}(\mathcal{V}|\text{ran}(X) \rightarrow \mathcal{U})$ -folyt., $\text{dom}(X)$ $\mathcal{U}$ -nyitott $\subset M$.

Bizonyítás. Unicitás: Bármely $p \in M$ pontra szükségképpen

$$\mathcal{U}_p = \{U \subset M : \exists X \in \mathcal{A} \quad \exists G \text{ nyitott } \subset V \quad p \in X^{-1}(G) \subset U\}.$$

Egzisztencia: Defináljuk a fenti módon az $\mathcal{U}$ környezetrendszert M -en. Ekkor, ha G_1, G_2 nyitott $\subset V$, az $U_i := X_i^{-1}(G_i)$ alakzatokra $U_i \in \mathcal{U}_p \quad (i = 1, 2)$ és

$$X_1(U_1 \cap U_2) = X_1(X_1^{-1}(G_1) \cap X_2^{-1}(G_2))$$

$$= G_1 \cap X_1(X_2^{-1}(G_2))$$

$$U_1 \cap U_2 = X_1^{-1}(\underbrace{G_1 \cap (X_1 \circ X_2^{-1})(G_2)}_{\text{nyitott } \Leftarrow X_2 \circ X_1^{-1} \text{ folyt}}).$$

Tehát $\mathcal{U}$ topológia, amelynél minden $X \in \mathcal{A}$ térkép-leképezés folytonosan invertálható.

Definíció. A tételben bevezetett topológiát az $M, \mathcal{A}$ sokaság *természetes topológiájának* nevezzük. Mivel a véges dimenziós vektorterek természetes topológiája Hausdorff, a differenciálható sokaságok természetes topológiája szintén Hausdorff.

Lemma. Legyen $M, \mathcal{A}$ C^1 -sokaság, $p \in M$ és $c : \mathbb{R} \rightarrow M$ egy görbe M -ben, amelyre $c(0) = p$. Tegyük fel, hogy $X : S \leftrightarrow G$ ill. $Y : T \leftrightarrow H$ (nyitott $\subset V$) egy-egy p -t tartalmazó térkép (azaz $p \in \text{dom}(X) \cap \text{dom}(Y) = S \cap T$) az $\mathcal{A}$ atlaszból, amelyre a c görbe $X(c)$ képe 0-nál differenciálható. Ekkor $Y(c)$ szintén differenciálható 0-nál, és a $v := \frac{d}{dt}\Big|_0 X(c(t)) \in V$ vektorra

$$\frac{d}{dt}\Big|_0 Y(c(t)) = [(Y \circ X^{-1})'(X(p))]v .$$

Bizonyítás. Csak annyit kell észrevenni, hogy $Y \circ c = (Y \circ X^{-1}) \circ (X \circ c)$, majd az összetett függvény differenciálási láncszabályát kell alkalmazni.

A lemmából azonnal adódik a következő.

Tétel. Ha $M, \mathcal{A}$ egy C^1 -sokaság, $p \in M$ és $c : \mathbb{R} \rightarrow M$ egy görbe, melynél $c(0) = p$, akkor

1) Az $X \circ c$ képgörbék egyszerre differenciálhatók vagy nem-differenciálhatók 0-nál minden $X \in \mathcal{A}_p := \{X \in \mathcal{A} : p \in \text{dom}(X)\}$ térképen

2) A $\mathbf{v} : X \mapsto \frac{d}{dt}\Big|_0 X(c(t))$ olyan $\mathcal{A}_p \rightarrow V$ leképezés, hogy

$$\mathbf{v}(Y) = (Y \circ X^{-1})'(X(p))\mathbf{v}(X) \quad (X, Y \in \mathcal{A}_p) .$$

Definíció. Legyen $M, \mathcal{A}$ egy C^1 -sokaság és p egy pont M -ben. Ekkor

$$\mathcal{A}_p := \{X \in \mathcal{A} : p \in \text{dom}(X)\}$$

a p -körüli térképek családja, és

$$T_p(M) := \{\mathbf{v} : \mathcal{A}_p \rightarrow V : (Y \circ X^{-1})'(X(p))\mathbf{v}(X) = \mathbf{v}(Y) \quad \forall X, Y \in \mathcal{A}_p\}$$

a p -beli vektorok tere az $M, \mathcal{A}$ sokaságnál, vagy más szóhasználattal $M, \mathcal{A}$ érintőtere a p pontnál. A $\mathbf{v} \in T_p(M)$ vektor reprezentánsa az $X \in \mathcal{A}_p$ térképen a

$$\mathbf{v}^X := \mathbf{v}(X) \in V$$

hagyományos vektor.

Tétel. Ha $M, \mathcal{A}$ egy C^1 -sokaság, $p \in M$ és $X_0 \in \mathcal{A}_p$, akkor a

$$v \mapsto [X \mapsto (X \circ X_0^{-1})'(X_0(p))v]$$

leképezés lineáris kölcsönösen egyértelmű $V \leftrightarrow T_p(M)$ megfeleltetés.

Bizonyítás. Legyen az $X \in \mathcal{A}_p$ térkép tetszőlegesen rögzített. Most a

$$v \mapsto (X \circ X_0^{-1})'(X_0(p))v$$

leképezés lineáris $V \leftrightarrow V$. Másrészt minden $X, Y \in \mathcal{A}_p$ térképpárra

$$\begin{aligned} (Y \circ X_0^{-1})'(X_0(p)) &= [Y \circ X^{-1} \circ X \circ X_0^{-1}]'(X_0(p)) \\ &= [[Y \circ X^{-1}]'(X \circ X_0^{-1}(X_0(p)))] \cdot (X \circ X_0^{-1})'(X_0(p)) \\ &= [(Y \circ X^{-1})'(X(p))] \cdot (X \circ X_0^{-1})'(X_0(p)) . \end{aligned}$$

Következésképpen a $v \mapsto [X \mapsto (X \circ X_0^{-1})'(X(p))v]$ megfeleltetés injektív és lineáris $V \rightarrow T_p(M)$. Tegyük fel, hogy a $\mathbf{v} : \mathcal{A}_p \rightarrow V$ leképezésre $\mathbf{v} \in T_p(M)$. Ekkor a $v := \mathbf{v}^{X_0}$ reprezentánsra

$$\mathbf{v}^X = \mathbf{v}(X) = (X \circ X_0^{-1})'(X_0(p))v \quad (X \in \mathcal{A}_p) .$$

Definíció. Az $M, \mathcal{A}$ $\mathcal{C}^1$ -sokaságnál

$$T(M) := \{(p, \mathbf{v}) : p \in M, \mathbf{v} \in T_p(M)\}$$

a sokaság érintőnyalábja. Egy $X \in \mathcal{A}$ lokális térképhez megalkotjuk TM -nek a

$$\begin{aligned} TX : (p, \mathbf{v}) &\mapsto (X(p), \mathbf{v}(X)) \\ \{(p, v) : p \in \text{dom}(X), v \in T_p(M)\} &\rightarrow V \times V \end{aligned}$$

lokális térképét. Legyen

$$T\mathcal{A} := \{TX : X \in \mathcal{A}\}.$$

Tétel. Ha $M, \mathcal{A}$ $\mathcal{C}^k$ -sokaság, akkor $T(M), T\mathcal{A}$ egy $\mathcal{C}^{k-1}$ -sokaság.

Bizonyítás. Állítás: Minden $X \in \mathcal{A}$ térképnél a TX leképezés injektív és $\text{ran}(TX) = \text{ran}(X) \times V$. Bizonyítás: Ha $p \neq q$, akkor $X(p) \neq X(q)$, ahonnan $TX(p, \mathbf{v}) \neq TX(q, \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}$. Ha $\mathbf{v} \neq \mathbf{u}$, akkor $\mathbf{v}(X) \neq \mathbf{u}(X)$, ahonnan $TX(p, \mathbf{v}) \neq TX(p, \mathbf{u}) \quad \forall p \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_p(M)$. Tehát $\{TX(p, \mathbf{v}) : \mathbf{v} \in T_p(M)\} = V$ az előző tétel szerint.

Állítás: Ha $X, Y \in \mathcal{A}$, akkor a $(TY) \circ (TX)^{-1}$ áttérési leképezés $\mathcal{C}^{k-1}$ -sima. Bizonyítás: Vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned} (TX)^{-1} : (x, w) &\mapsto (X^{-1}(x), [Z \mapsto (Z \circ X^{-1})'(x)w]) \\ (TY) \circ (TX)^{-1} : (x, w) &\mapsto \left(\underbrace{Y \circ X^{-1}}_{\mathcal{C}^k(\text{ran}(X), V)}(x), \underbrace{(Y \circ X^{-1})'(x)}_{\mathcal{C}^{k-1}(\text{ran}(X), \mathcal{L}(V, V))} w \right). \end{aligned}$$

Leképezés deriváltjai

Definíció. Legyenek $M, \mathcal{A}$ ill. $M', \mathcal{A}'$ $\mathcal{C}^1$ -sokaságok és $F : M \rightarrow M'$. Az F leképezés differenciálható az $p \in M$ helyen, ha minden $X \in \mathcal{A}_p$, $Y \in \mathcal{A}'_{F(p)}$ térképpárra az

$$Y \circ F \circ X^{-1}$$

koordinátareprezentáció differenciálható az $X(p)$ helyen (a hagyományos értelemben, mint vektortér nyitott halmazán értelmezett és másik vektortérbe képező függvény).

Lemma. Ha $M, \mathcal{A}$ ill. $M', \mathcal{A}'$ $\mathcal{C}^1$ -sokaságok és $F : M \rightarrow M'$ továbbá $p \in M$, akkor

1) F differenciálható a p pontban, ha található olyan $X \in \mathcal{A}_p$, $Y \in \mathcal{A}'_{F(p)}$ térképpár, amelyben az $Y \circ F \circ X^{-1}$ reprezentáció differenciálható $X(p)$ -nél,

2) ha F differenciálható a p helyen, akkor a $T_p(M)$ -beli vektorokat $T_{F(p)}(M')$ -beli vektorokba vivő

$$(*) \quad \mathbf{v} \mapsto [\mathbf{w} \in T_{F(p)} : \mathbf{w}^Y = (Y \circ F \circ X^{-1})'_{X(p)} \mathbf{v}^X, (X \in \mathcal{A}_p)]$$

leképezés jól-definiált és lineáris.

Bizonyítás. A koordinátacserék hatásának vizsgálatakor az összetett függvény deriváltjára vonatkozó láncszabály (illetve az a tény, hogy az inverz leképezés deriváltja a derivált inverze) egyenesen vezet az állításokhoz.

Definíció. Legyenek $M, \mathcal{A}$ ill. $M', \mathcal{A}'$ $\mathcal{C}^1$ -sokaságok, $F : M \rightarrow M'$ egy a $p \in M$ pontban differenciálható leképezés. A $(*)$ lineáris $T_p(M) \rightarrow T_{F(p)}$ operátort az F leképezés p pontbeli deriváltjának nevezzük. Jelölése: $F'(p)$. Ha F mindenütt differenciálható M -en, a $TF : TM \ni (p, \mathbf{v}) \mapsto F'(p)\mathbf{v}$ függvény F -nek az M sokaságbeli deriváltja. (Ez utóbbi fogalomnak az az előnye, hogy újra sokaságból sokaságba vezet, így lehet képezni a $T^2F(:= TTF), T^3F(:= TTF), \dots, T^kF$ magasabb rendű deriváltakat, ha $M, \mathcal{A}$ ill. $M', \mathcal{A}'$ $\mathcal{C}^k$ -sokaságok).

Megjegyzés. Heurisztikusan, a lemma üzenete az is, hogy elegendő leképezések lokális vizsgálatához egyetlen (tetszőleges) térképpárt kiragadni, és az abban hagyományos technikával kapott eredmények egyszerűen interpretálhatók a differenciálható sokaságok kontextusában. Mivel irány szerinti deriváltakkal

$$[F'(p)\mathbf{v}]^Y = (Y \circ F \circ X^{-1})'_{\mathbf{v}_X} \quad (X \in \mathcal{A}_p, Y \in \mathcal{A}'_{F(p)}, \mathbf{v} \in T_pM),$$

Lagrange tétele alapján áll a következő.

Tétel. Legyenek $M, \mathcal{A}$ ill. $M', \mathcal{A}'$ $\mathcal{C}^n$ -sokaságok, $F : M \rightarrow M'$. A $TF, T^2F, \dots, T^nF$ deriváltak mindegyike létezik és folytonos pontosan akkor, ha bármely $X \in \mathcal{A}, Y \in \mathcal{A}'$ térképpárra és $v_1, \dots, v_n \in V$ vektorcsaládra (ahol az $\mathcal{A}$ -beli térképek a V vektortérbe képeznek) az

$$[Y \circ F \circ X^{-1}]'_{v_1 \dots v_n}$$

deriváltak léteznek és folytonosak, azaz ha $Y \circ F \circ X^{-1} \in \mathcal{C}^n(\text{dom}(Y \circ F \circ X^{-1}), Z)$ (ahol az $\mathcal{A}'$ -beli térképek Z -be képeznek).

Definíció. Legyenek $M, \mathcal{A}$ ill. $M', \mathcal{A}'$ $\mathcal{C}^n$ -sokaságok, a V ill. Z (véges dimenziós) vektorterekbe képező térképekkel. A vektortérbeli fogalmak természetes kiterjesztékként értelmezzük a

$$\mathcal{C}^k(M, M') := \{F : M \rightarrow M' : TF, T^2F, \dots, T^nF \text{ jól-def. folyt.}\} \quad (1 \leq k \leq n)$$

ill. $\mathcal{C}(M, M') = \mathcal{C}^0(M, M') := \{\text{folyt. } M \rightarrow M' \text{ fgv-ek}\}$ függvényosztályokat. Az előző tétel szerint jól-definiált a $\mathcal{C}^n$ -sima $F : M \rightarrow M'$ leképezésekre az

$$F^{(n)}(p)(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) := \left[\mathbf{w} \in T_{F(p)}M' : \mathbf{w}^Y = [Y \circ F \circ X^{(-1)}]'_{\mathbf{v}_1^X \dots \mathbf{v}_n^X}(X(p)) \quad (X \in \mathcal{A}_p, Y \in \mathcal{A}'_{F(p)}) \right]$$

n -ik derivált tenzor minden $p \in M$ pontra és $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in T_pM$ vektor n -esre.

Tétel. A derivált tenzorok szimmetrikusak és minden vektor-változójukban lineárisak. Nevezetesen, ha $F \in \mathcal{C}^n(M, M')$ és $(p, \mathbf{v}_1), \dots, (p, \mathbf{v}_n) \in TM$, akkor minden $i_1, \dots, i_n$ permutációjára az $1, \dots, n$ indexeknek

$$F^{(n)}(p)(\mathbf{v}_{i_1}, \dots, \mathbf{v}_{i_n}) = F^{(n)}(p)(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) .$$

Bizonyítás. Ez direkt következménye Schwarz tételének.

MÉRTÉK ÉS INTEGRÁL

σ -algebrák

Definíció. Legyen Ω egy (nem-üres) halmaz, $\mathcal{A} \subset \{\Omega \text{ részhalmazai}\}$. Az $\mathcal{A}$ halmazcsalád σ -algebra Ω fölött, vagy más szóhasználattal az $\Omega, \mathcal{A}$ pár σ -algebra, ha

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n, \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, A_1 \setminus A_2, \Omega \in \mathcal{A} \quad (A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}).$$

Lemma. Legyen $\mathcal{A} \subset \{\Omega \text{ részhalmazai}\}$. Ekkor ekvivalensek:

- 1) $\mathcal{A}$ σ -algebra Ω fölött
- 2) $\Omega, A \cap B \in \mathcal{A}, \Omega \setminus C \in \mathcal{A} \quad (A, B, C \in \mathcal{A})$ és $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \in \mathcal{A} \quad (D_1, D_2, \dots \text{ diszjunkt} \in \mathcal{A}).^*$

Bizonyítás. 1) $\Rightarrow$ 2) triviális.

2) $\Rightarrow$ 1): Tegyük fel, hogy 2) áll, és legyenek $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$. Most

a) $A_1 \setminus A_2 = A_1 \cup (\Omega \setminus A_2) \in \mathcal{A}$.

b) Tekintsük a $D_1 := A_1$ és $D_k := A_k \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{k-1}) \quad (k = 2, 3, \dots)$ halmazokat. Észrevétel: $D_1, D_2, \dots$ diszj. $\in \mathcal{A}$ és $\bigcup_{k=1}^n A_k = \bigcup_{k=1}^n D_k \quad (n = 1, 2, \dots)$. Másrészt $D_k = (A_k \setminus A_1) \cap \dots \cap (A_k \setminus A_{k-1})$, és a) alapján $A_k \setminus A_j \in \mathcal{A} \quad (j < k)$. Így minden k indexre $D_k = [\text{véges sok } \mathcal{A}\text{-beli halmaz } \cap\text{-e}] \in \mathcal{A}$, és $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k \in \mathcal{A}$.

c) A már belátott a)b) alapján $\bigcup_{n=1}^{\infty} (\Omega \setminus A_n) \in \mathcal{A}$, és így $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} (\Omega \setminus A_n) \in \mathcal{A}$.

Következmény. Ha $\Omega, \mathcal{A}$ egy σ -algebra, akkor

1) $\Omega, \emptyset \in \mathcal{A}$, 2) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A} \Rightarrow \exists D_1, D_2, \dots \text{ diszj.} \in \mathcal{A} \quad \forall n \quad \bigcup_{k=1}^n A_k = \bigcup_{k=1}^n D_k$.

Borel-halmazok

Propozíció. Egy közös Ω halmaz feletti σ -algebrák akármilyen családjának közös tagjai σ -algebrát alkotnak Ω fölött.

Bizonyítás. Legyen $\{\mathcal{A}_i : i \in I\}$ σ -algebrák egy családja Ω fölött, és tegyük fel, hogy $A_1, A_2, \dots \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$. Legyen az i index tetszőlegesen rögzítve. Nyilván $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}_i$. Tehát mivel $\mathcal{A}_i$ σ -algebra, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n, A_1 \setminus A_2, \Omega \in \mathcal{A}_i$, azaz $\Omega \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ és a megszámlálhatóan végtelen unió, metszet ill. a különbségképzés nem vezet ki $\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ -ből.

Definíció. Ha $\mathcal{G} \subset \{\Omega \text{ részhalmazai}\}$, a $\mathcal{G}$ halmazcsalád által generált σ -algebra (Ω fölött) a $\mathcal{G}$ -t tartalmazó legszűkebb σ -algebra, azaz a

$$\bigcap \{\mathcal{A} \text{ } \sigma\text{-algebra } \Omega\text{-n: } \mathcal{G} \subset \mathcal{A}\}$$

halmazcsalád (amely a propozíció szerint jól-definiált, hiszen $\Omega, \{\Omega \text{ részhalmazai}\}$ is $\mathcal{G}$ -t tartalmazó σ -algebra). A $\{[-\infty, \infty]^N\text{-beli intervallumok}\}$ generálta σ -algebra tagjai a $[-\infty, \infty]^N$ -beli Borel-halmazok. (Emlékeztető: $[-\infty, \infty]^N$ -ben az

* A következőkben a $D_1, D_2, \dots$ diszjunkt $\in \mathcal{A}$ (röviden $D_1, D_2, \dots$ diszj. $\in \mathcal{A}$) típusú formula a " $D_1, D_2, \dots \in \mathcal{A}$ és $D_i \cap D_j = \emptyset$ valahányszor $i \neq j, i, j = 1, 2, \dots$ " típusú kifejezést rövidíti.

I alakzat intervallum, ha $I = I_1 \times \cdots \times I_N$ alakú, ahol I_k intervallum $\subset \mathbb{R}$ ($k = 1, \dots, N$).

Lemma. *A nyitott ill. zárt halmazok $[-\infty, \infty]^N$ -ben Borel-halmazok.*

Bizonyítás. Lindelöf tétele szerint bármelyik G nyitott $\subset [-\infty, \infty]^N$ felírható $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ alakban alkalmas $I_1, I_2, \dots \subset [-\infty, \infty]^N$ intervallumsorozattal. Másrészt minden zárt halmaz egy nyitott komplementere.

Mérhetőség

Definíció. Legyen $\Omega, \mathcal{A}$ egy σ -algebra. Az $f: \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$ függvény $\mathcal{A}$ -mérhető, ha

$$\forall I \text{ nyitott intervallum } \subset [-\infty, \infty] \quad f^{-1}(I) := \{x \in \Omega : f(x) \in I\} \in \mathcal{A}.$$

Tétel. f $\mathcal{A}$ -mérhető $\Leftrightarrow \forall B$ Borel $\subset [-\infty, \infty] \quad f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Bizonyítás. $\Leftarrow$: Triviális.

$\Rightarrow$: Tegyük fel, hogy az f függvény $\mathcal{A}$ -mérhető, és tekintsük a

$$\mathcal{B} := \{B \subset [-\infty, \infty] : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$$

halmazcsaládot. Jegyezzük meg, hogy $\mathcal{B} \supset \{\text{nyitott intervallumok } [-\infty, \infty]\text{-ben}\}$. Legyen $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{B}$. Ekkor $f^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(B_n) \in \mathcal{A}$, ahonnan $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{B}$. Hasonlóan $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{B}$, ill. az $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2) \in \mathcal{A}$ reláció miatt $B_1 \setminus B_2 \in \mathcal{B}$. Vagyis $\Omega, \mathcal{B}$ σ -algebra. Következésképpen $\mathcal{B} \supset \{B : B \text{ Borel } \subset [-\infty, \infty]^N\}$.

Tétel. Legyen $\Omega, \mathcal{A}$ egy σ -algebra, $f_1, \dots, f_N$ $\mathcal{A}$ -mérhető függvények, és legyen $F: [-\infty, \infty]^N \rightarrow [-\infty, \infty]$ Borel mérhető. Ekkor az $F(f_1, \dots, f_N)$ összetett függvény $\mathcal{A}$ -mérhető.

Bizonyítás. Feltevés szerint $F^{-1}(I)$ Borel $\subset [-\infty, \infty]^N$ valahányszor I intervallum $\subset [-\infty, \infty]^N$. Vezessük be a

$$\Phi: x \mapsto (f_1(x), f_N(x)), \quad \mathcal{B} := \{B \subset [-\infty, \infty]^N : \Phi^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$$

jelöléseket. Észrevétel: $\mathcal{B} \supset \{[-\infty, \infty]^N \text{ Borel részhalmazai}\}$. Bizonyítás: Ha $I_1 \times \dots \times I_N$ intervallum $\subset [-\infty, \infty]^N$, akkor

$$\Phi^{-1}(I) = \bigcap_{n=1}^N f^{-1}(I_n) \in \mathcal{A},$$

azaz $\mathcal{B} \supset \{N\text{-dimenziós intervallumok}\}$. Másrésztől ugyanúgy, mint az előző tétel bizonyításában, verifikálhatjuk, hogy $\Omega, \mathcal{B}$ σ -algebra. Az észrevételből azonnal adódik, hogy $F(f_1, \dots, f_N)^{-1}(I) \in \mathcal{A}$, ha I intervallum $\subset [-\infty, \infty]^N$.

Következmény. Ha f, g $\mathcal{A}$ -mérhető függvények, akkor $f+g, f-g, f \cdot g, \max\{f, g\}, \min\{f, g\}$ is $\mathcal{A}$ -mérhető.* $\mathcal{A}$ -mérhető függvények folytonos függvényei $\mathcal{A}$ -mérhetőek.

Tétel. Legyen $f_1, f_2, \dots$ $\mathcal{A}$ -mérhető függvények egy sorozata. Ekkor a

* Ha $f(x) = \infty$, $g(x) = -\infty$ vagy fordítva, akkor szokásosan $x \notin \text{dom}(f \pm g)$. Azonban az $f^{(-1)}\{\infty\} \cap g^{(-1)}\{-\infty\}$ ill. $f^{(-1)}\{-\infty\} \cap g^{(-1)}\{\infty\}$ halmazok ilyenkor is $\mathcal{A}$ -mérhetőek. Hogy egyszerűen mindenütt értelmezett függvényekkel dolgozhassunk, bevezetjük a $-\infty + \infty := 0$ konvenciót.

$$\sup_n f_n, \inf_n f_n, \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n, \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$$

függvények is $\mathcal{A}$ -mérhetők.

Bizonyítás. Legyen (α, β) egy tetszőleges nyitott intervallum $[-\infty, \infty]$ -ben. Ekkor

$$\begin{aligned} \{x \in \Omega : \sup_n f_n(x) \in (\alpha, \beta)\} &= \{x : \sup_n f_n(x) < \beta\} \cap \{x : \sup_n f_n(x) > \alpha\} \\ &= \{x : \exists m \forall n \ f_n(x) < \beta - \frac{1}{m}\} \cap \{x : \exists n \ f_n(x) > \alpha\} \\ &= \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}(-\infty, \beta - \frac{1}{m}) \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}(\alpha, \infty) . \end{aligned}$$

Feltevés szerint az $f_n^{-1}(-\infty, \beta - 1/m)$ ill. $f_n^{-1}(\alpha, \infty)$ alakú halmazok mind $\mathcal{A}$ -mérhetők. Így a $\sup_n f_n$ függvény $\mathcal{A}$ -mérhető. Az $\inf_n f_n$ alsó burkoló $\mathcal{A}$ -mérhetősége most következik az $\inf_n f_n = -\sup(-f_n)$ relációból. A $\liminf$ ill. $\limsup$ operációk pedig visszavezethetők $\sup$ - és $\inf$ -képzésre:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n = \inf_k \sup_{n \geq k} f_n, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n = \sup_k \inf_{n \geq k} f_n .$$

Mérték, σ -lépcsős függvények

Definíció. Legyen $\Omega, \mathcal{A}$ egy σ -algebra. A $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ függvény *mérték*, ha

$$\mu(\emptyset) = 0 \text{ és } \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(D_n) \quad (D_1, D_2, \dots \text{ diszj} \in \mathcal{A}) .$$

Az $\Omega, \mathcal{A}, \mu$ tripletet *mértéktérnek* mondjuk, ha $\Omega, \mathcal{A}$ egy σ -algebra és μ mérték $\mathcal{A}$ -n. A továbbiakban az egész fejezeten át $\Omega, \mathcal{A}, \mu$ egy tetszőlegesen rögzített mértéktér.

Lemma. Ha $B, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ és $B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, akkor $\mu(B) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Bizonyítás. Legyen $D_1 := A_1$, $D_n := A_n \setminus \bigcup_{k < n} A_k$ ($n = 1, 2, \dots$). Most a $B_n := B \cap D_n$ halmazokra $B_1, B_2, \dots$ diszj $\in \mathcal{A}$, továbbá $B = B \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = B \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ és $B_n \subset D_n \subset A_n$ ($n = 1, 2, \dots$). Innen

$$\mu(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(D_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) .$$

Definíció. A $\varphi : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$ függvény μ -lépcsős függvény, ha

$$\begin{aligned} &\exists A_1, A_2, \dots \text{ diszj} \in \mathcal{A} \quad \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots \in [-\infty, \infty] \\ &\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n 1_{A_n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| \mu(A_n) < \infty . \end{aligned}$$

Megjegyzés. Konvenció: $\pm\infty \cdot 0 := 0$.

$1_A(x) := [1 \text{ ha } x \in A, 0 \text{ ha } x \notin A]$ az A halmaz *indikátorfüggvénye*.

Ha $A_1, A_2, \dots$ diszj $\in \mathcal{A}$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n 1_{A_n}$ alakú függvényösszegek minden $x \in \Omega$ helyen jól-definiáltak, mivel bennük legfeljebb egy kivételével minden tag $= 0$.

Lemma. Tegyük fel, hogy $A_1, A_2, \dots$ diszj $\in \mathcal{A}$, $B_1, B_2, \dots$ diszj $\in \mathcal{A}$ továbbá $\sum_n |\alpha_n| \mu(A_n), \sum_n |\beta_n| \mu(B_n) < \infty$. Ekkor

$$\sum_n \alpha_n 1_{A_n} \leq \sum_m \beta_m 1_{B_m} \Rightarrow \sum_n \alpha_n \mu(A_n) \leq \sum_m \beta_m \mu(B_m) .$$

Bizonyítás. Tekintsük a $D_{n,m} := A_n \cap B_m$ ($m, n = 1, 2, \dots$) halmazokat. Ezek páronként diszjunktan fedik le az Ω teret. Így az összes indexekre

$$\mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} D_{n,m}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(D_{n,m}) , \quad \mu(B_m) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(D_{n,m}) .$$

Legyen $\alpha_{n,m} := \alpha_n$, $\beta_{n,m} := \beta_m$ ($m, n = 1, 2, \dots$). Tegyük fel, hogy $\sum_n \alpha_n 1_{A_n} \leq \sum_m \beta_m 1_{B_m}$. Észrevétel:

$$\alpha_{n,m} \leq \beta_{n,m} \quad \forall n, m$$

mivel

$$\sum_{n,m} \alpha_{n,m} 1_{D_{n,m}} = \sum_n \alpha_n 1_{A_n} \leq \sum_m \beta_m 1_{B_m} = \sum_{n,m} \beta_{n,m} 1_{D_{n,m}} .$$

Másfelől

$$\begin{aligned} \sum_{m,n} |\alpha_{n,m}| \mu(D_{n,m}) &= \sum_n \left(\sum_m \underbrace{|\alpha_{n,m}|}_{\alpha_n} \mu(D_{n,m}) \right) = \sum_n |\alpha_n| \sum_m \mu(D_{n,m}) \\ &= \sum_n |\alpha_n| \mu(A_n) < \infty \end{aligned}$$

és hasonlóan

$$\sum_{m,n} |\beta_{n,m}| \mu(D_{n,m}) = \sum_m |\beta_m| \mu(B_m) < \infty .$$

Abszolút konvergenciájuk következtében a $\sum_{m,n} \alpha_{n,m} \mu(D_{n,m})$ ill. $\sum_{m,n} \beta_{n,m} \mu(D_{n,m})$ összegek tetszőlegesen csoportosíthatók. Ezért

$$\begin{aligned} \sum_m \beta_m \mu(B_m) - \sum_n \alpha_n \mu(A_n) &= \sum_{m,n} \beta_{n,m} \mu(D_{n,m}) - \sum_n \alpha_{n,m} \mu(D_{n,m}) \\ &= \sum_{n,m} \underbrace{(\beta_{n,m} - \alpha_{n,m})}_{\geq 0} \mu(D_{n,m}) \geq 0 . \end{aligned}$$

Definíció. A φ μ -lépcsős fgv μ -integrálja

$$\int \varphi d\mu := \left[\sum_n \alpha_n \mu(A_n) : A_1, A_2, \dots \text{ diszj } \in \mathcal{A}, \sum_n |\alpha_n| \mu(A_n) < \infty, \varphi = \sum_n \alpha_n 1_{A_n} \right] .$$

Megjegyzés. A lemma mutatja, hogy az $\int d\mu$ operáció jól-definiált minden μ -lépcsős függvényre, sőt $\int \varphi d\mu \geq \int \psi d\mu$ ($\varphi \geq \psi$).

Lemma. A $\varphi \mapsto \int \varphi d\mu$ leképezés lineáris, azaz μ -lépcsős függvények lineáris kombinációi μ -lépcsősök, és

$$\int (\alpha\varphi + \beta\psi) d\mu = \alpha \int \varphi d\mu + \beta \int \psi d\mu \quad (\varphi, \psi \text{ } \mu\text{-lépcsős}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

Bizonyítás. 1) Tegyük fel, hogy φ, ψ μ -lépcsős függvények. Az előző lemma bizonyításából látszik, hogy

$$\begin{aligned} \exists D_1, D_2, \dots \text{ diszj} \in \mathcal{A} \quad \exists \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots \quad \varphi = \sum_n \alpha_n 1_{D_n}, \quad \psi = \sum_n \beta_n 1_{D_n} \\ \sum_n |\alpha_n| \mu(D_n), \sum_n |\beta_n| \mu(D_n) < \infty, \\ \int \varphi d\mu = \sum_n \alpha_n \mu(D_n), \quad \int \psi d\mu = \sum_n \beta_n \mu(D_n). \end{aligned}$$

Ekkor

$$\begin{aligned} \alpha\varphi + \beta\psi = \sum_n (\alpha\alpha_n + \beta\beta_n) 1_{D_n}, \quad \sum_n \overbrace{|\alpha\alpha_n + \beta\beta_n|}^{\leq |\alpha| \cdot |\alpha_n| + |\beta| \cdot |\beta_n|} \mu(D_n) \leq |\alpha| \sum_n |\alpha_n| \mu(D_n) + \\ + |\beta| \sum_n |\beta_n| \mu(D_n) < \infty, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int (\alpha\varphi + \beta\psi) d\mu &= \sum_n (\alpha\alpha_n + \beta\beta_n) \mu(D_n) \\ &= \alpha \sum_n \alpha_n \mu(D_n) + \beta \sum_n \beta_n \mu(D_n) = \alpha \int \varphi d\mu + \beta \int \psi d\mu. \end{aligned}$$

Alsó, felső integrál

Definíció. $f : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$ alsó ill. felső μ -integrálja

$$\begin{aligned} \underline{\int} f d\mu &:= \sup \left\{ \int \varphi d\mu : \varphi \text{ } \mu\text{-lépcsős} \leq f \right\}, \\ \overline{\int} f d\mu &:= \inf \left\{ \int \psi d\mu : \psi \text{ } \mu\text{-lépcsős} \geq f \right\}. \end{aligned}$$

Megjegyzés. Konvenció: $\inf \emptyset := \infty$, $\sup \emptyset := -\infty$.

$$\underline{\int} \varphi d\mu = \overline{\int} \varphi d\mu, \text{ ha } \varphi \text{ } \mu\text{-lépcsős függvény.}$$

Tétel. Ha f, f_1, f_2 tetszőleges $\Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$ függvények, akkor

- 1) $\underline{\int} (\alpha f) d\mu = \alpha \underline{\int} f d\mu \quad (\alpha \geq 0)$
- 2) $\underline{\int} (f_1 + f_2) d\mu \geq \underline{\int} f_1 d\mu + \underline{\int} f_2 d\mu$ valahányszor $(\underline{\int} f_1 d\mu, \underline{\int} f_2 d\mu) \neq (-\infty, \infty)$ vagy $(\infty, -\infty)$.

Bizonyítás. 1) Az $\alpha = 0$ eset triviális. Ha pedig $\alpha > 0$, akkor

$$\{\alpha \cdot \varphi \text{ } \mu\text{-lépcsős} : \varphi \leq f\} = \{\varphi \text{ } \mu\text{-lépcsős} : \varphi \leq \alpha f\}.$$

2) Az $\underline{\int} f_1 d\mu + \underline{\int} f_2 d\mu = -\infty$ eset triviális. Tegyük fel, $\underline{\int} f_k d\mu > -\infty$ ($k = 1, 2$). Most $\{\varphi \text{ } \mu\text{-lépcsős} : \varphi \leq f_k\} \neq \emptyset$ ($k = 1, 2$). Legyen $\gamma \in (-\infty, \underline{\int} f_1 d\mu + \underline{\int} f_2 d\mu)$ tetszőlegesen rögzítve. Ekkor

$$\exists \varphi_1, \varphi_2 \text{ } \mu\text{-lépcsős} \quad \varphi_k \leq f_k \quad (k = 1, 2), \quad \gamma < \sum_{k=1}^2 \underline{\int} \varphi_k d\mu.$$

Mivel ilyenkor $\varphi_1 + \varphi_2$ μ -lépcsős $\leq f_1 + f_2$,

$$\gamma < \sup\{\int \varphi d\mu : \varphi \text{ } \mu\text{-lépcsős} \leq f_1 + f_2\} = \int (f_1 + f_2) d\mu .$$

Lemma. $\int f d\mu = -\int (-f) d\mu$.

Bizonyítás. Általában is: $\inf(Z) = -\sup(-Z)$ ($Z \subset [-\infty, \infty]$).

Következmény. 1') $\int (\alpha f) d\mu = \alpha \int f d\mu$ ($\alpha \geq 0$).

2') $\int (f_1 + f_2) d\mu \leq \int f_1 d\mu + \int f_2 d\mu$ ha $(\int f_1 d\mu, \int f_2 d\mu) \neq (-\infty, \infty)$ vagy $(\infty, -\infty)$.

Integrál

Definíció. Az $f : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$ függvény μ -integrálható, ha

$$-\infty < \int f d\mu = \bar{\int} f d\mu < \infty .$$

f integrálja μ szerint

$$\int f d\mu := \int f d\mu \quad \text{ha} \quad \int f d\mu = \bar{\int} f d\mu .$$

Megjegyzés. Az $\int f d\mu = \bar{\int} f d\mu$ reláció akkor is előfordulhat, ha $\int f d\mu = \infty$ vagy $\bar{\int} f d\mu = -\infty$. Ilyenkor azonban nem lehet μ -lépcsős függvényt találni, amely $\geq f$ ill. $\leq f$. Ezzel szemben, (az $\int, \bar{\int}$ integrálok definícióját kifejtve) f pontosan akkor μ -integrálható, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \varphi, \psi \text{ } \mu\text{-lépcsős} \quad \varphi \leq f \leq \psi, \quad \int \psi d\mu - \int \varphi d\mu < \varepsilon .$$

Propozíció. Az integrál lineáris operáció, azaz ha f_k μ -integrálható és $\alpha_k \in \mathbb{R}$ ($k = 1, 2$), akkor $\sum_{k=1}^2 \alpha_k f_k$ μ -integrálható és

$$\int \sum_{k=1}^2 \alpha_k f_k d\mu = \sum_{k=1}^2 \alpha_k \int f_k d\mu .$$

Bizonyítás. Legyenek f_1, f_2 μ -integrálhatóak. Ekkor

$$\int \alpha_k f_k d\mu = \begin{cases} \alpha_k \int f_k d\mu & (\alpha_k \geq 0) \\ \int (-|\alpha_k| f_k) d\mu = -|\alpha_k| \bar{\int} f_k d\mu & (\alpha_k < 0) \end{cases} = \alpha_k \int f_k d\mu .$$

Hasonlóan $\bar{\int} \alpha_k f_k d\mu = \alpha_k \int f_k d\mu$. Következésképpen az $\alpha_k f_k$ függvények μ -integrálhatóak, és $\int \alpha_k f_k d\mu = \alpha_k \int f_k d\mu$ ($k = 1, 2$). Most

$$\sum_{k=1}^2 \alpha_k \int f_k d\mu = \sum_{k=1}^2 \int \alpha_k f_k d\mu \leq \int \sum_{k=1}^2 \alpha_k f_k d\mu .$$

Ugyanígy $\sum_{k=1}^2 \alpha_k \int f_k d\mu \geq \bar{\int} \sum_{k=1}^2 \alpha_k f_k d\mu$. Azonban az alsó integrál mindig $\leq$ a felsőnél, így $\sum_{k=1}^2 \alpha_k \int f_k d\mu = \bar{\int} \sum_{k=1}^2 \alpha_k f_k d\mu = \int \sum_{k=1}^2 \alpha_k f_k d\mu$.

Null-halmazok

Definíció. Az $\Omega, \mathcal{A}, \mu$ mértéktér $S \subset \Omega$ részhalmaza μ -0-halmaz, ha

$$\exists A \in \mathcal{A} \quad \mu(A) = 0 \text{ és } S \subset A .$$

Egy $T : \Omega \rightarrow \{\text{IGAZ, HAMIS}\}$ tulajdonság μ -majdnem mindenütt (rövidítve μ -mm.) teljesül, ha $\{x \in \Omega : T(x) = \text{HAMIS}\}$ μ -0-halmaz.

Lemma. Ha $\int f d\mu < \infty$, akkor $f < \infty$ μ -mm.* $[\int f d\mu > -\infty, \Rightarrow f > -\infty$ μ -mm.].

Bizonyítás. Legyen $S := \{x : f(x) = \infty\}$. Valamilyen μ -lépcsős ψ függvényre $f \leq \psi$. Felírva ezt

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n 1_{B_n} \quad B_1, B_2, \dots \text{diszj} \in \mathcal{A}, \quad \beta_1, \beta_2, \dots \in [-\infty, \infty]$$

alakban, $S \subset \{x : \psi(x) = \infty\} = \bigcup_{n: \beta_n = \infty} B_n$. Mivel $\sum_{n=1}^{\infty} (\beta_n) \mu(B_n) < \infty$, minden olyan n indexre, ahol $|\beta_n| = \infty$ szükségképpen $\mu(B_n) = 0$. Innen $\mu\{x : \psi(x) = \infty\} = \sum_{n: \beta_n = \infty} \mu(B_n) = 0$.

Lemma. Ha $f, g : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$ és $f = g$ μ -mm., akkor

$$\int f d\mu = \int g d\mu, \quad \bar{\int} f d\mu = \bar{\int} g d\mu.$$

Bizonyítás. Legyen f és g két μ -mm. egybeeső függvény Ω -n. Állítás:

Ha φ μ -lépcsős $\leq f$, akkor $\int \varphi d\mu \leq \int g d\mu$. Bizonyítás: Vehetünk egy olyan $A \in \mathcal{A}$ halmazt, amelyre

$$\mu(A) = 0 \text{ és } A \supset \{x : f(x) \neq g(x)\}.$$

Másrésről

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n 1_{A_n} \quad A_1, A_2, \dots \text{diszj} \in \mathcal{A} \quad \alpha_1, \alpha_2, \dots \in [-\infty, \infty]$$

írható. Ekkor a

$\tilde{\varphi} := \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n 1_{\tilde{A}_n}$ ahol $\alpha_0 := -\infty$, $\tilde{A}_0 := A$, $\tilde{A}_n := A_n \setminus A$ ($n = 1, 2, \dots$) függvény μ -lépcsős, és

$$\tilde{\varphi} \leq g, \quad \int \tilde{\varphi} d\mu = \int \varphi d\mu.$$

Az állításból azonnal következik, hogy

$$\int g d\mu \geq \sup\{\int \varphi d\mu : \varphi \mu\text{-lépcsős} \leq f\} = \int f d\mu.$$

Innen $f \leftrightarrow g$ cserével kapjuk, hogy $\int g d\mu \leq \int f d\mu$ is. A gondolatmenet $\bar{\int}$ -ra analóg.

Definíció. Kiterjesztjük a μ -integrál fogalmát a μ -majdnem mindenütt értelmezett függvényekre: Ha f μ -mm. definiált, akkor

$$\int f d\mu := \int \tilde{f} d\mu, \quad \bar{\int} f d\mu := \bar{\int} \tilde{f} d\mu, \quad \int f d\mu := \int \tilde{f} d\mu$$

ahol $\tilde{f} : x \rightarrow [f(x) \text{ ha } x \in \text{dom}(f), 0 \text{ ha } x \notin \text{dom}(f)]$.

Következmény. Egy μ -0-halmazon megváltoztatva egy μ -majdnem mindenütt értelmezett függvényt, annak μ -integrálhatósága és μ -integrálja nem változik.

Tétel. Egy f függvény μ -integrálható $\Leftrightarrow \exists g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{A}$ -mérhető μ -integrálható $f = g$ μ -mm.

* Részletesebben: $f(x) < \infty$ μ -majdnem minden $x \in \Omega$ -ra, azaz $\{x \in \Omega : f(x) < \infty\}$ egy μ -0-halmaz.

Bizonyítás. $\Leftarrow$: Az előző lemma.

$\Rightarrow$: Legyen $f : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$ egy μ -integrálható függvény. Ekkor találhatóunk olyan $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ ill. $\psi_1, \psi_2, \dots$ μ -lépcsős függvényeket, amelyekkel

$$\varphi_n \leq f \leq \psi_n \quad , \quad \int \varphi_n d\mu, \int \psi_n d\mu \rightarrow \int f d\mu \quad (n \rightarrow \infty) .$$

Sőt itt vehető

$$\varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \dots \quad , \quad \psi_1 \geq \psi_2 \geq \dots$$

is, $[\varphi_n$ ill ψ_n helyett a $\max_{k=1}^n \varphi_k$ ill. $\min_{k=1}^n \psi_k$ μ -lépcsős függvényekre áttérve]. Tekintsük az

$$\underline{f} := \sup_n \varphi_n \quad , \quad \bar{f} := \inf_n \psi_n$$

függvényt. Tudjuk, hogy $\underline{f}, \bar{f}$ $\mathcal{A}$ -mérhetőek és $\underline{f} \leq f \leq \bar{f}$. Az első lemmát φ_1, ψ_1 -re alkalmazva kapjuk, hogy

$$\exists A \in \mathcal{A} \quad \mu(A) = 0 \quad , \quad A \supset \{x : \varphi_1(x) = -\infty\} \cup \{x : \psi_1(x) = \infty\} .$$

Véve egy ilyen A halmazt, tekintsük a

$$h := 1_{\Omega \setminus A} \bar{f} - 1_{\Omega \setminus A} \underline{f}$$

$\mathcal{A}$ -mérhető függvényt. Erre

$$(1_{\Omega \setminus A} \psi_n) - (1_{\Omega \setminus A} \varphi_n) \geq h \geq 0$$

$$0 \leq \int \bar{f} h d\mu \leq \int \psi_n d\mu - \int \varphi_n d\mu \downarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) .$$

Tehát a $h \geq 0$ függvény μ -integrálható és $\int h d\mu = 0$. Az $A_n := \{x : h(x) \geq \frac{1}{n}\}$ ($n = 1, 2, \dots$) halmazok a h függvény $\mathcal{A}$ -mérhetősége miatt $\mathcal{A}$ -beliek. Mivel $\frac{1}{n} 1_{A_n} \leq h$,

$$\frac{1}{n} \mu(A_n) = \int \frac{1}{n} 1_{A_n} d\mu \leq \int h d\mu = 0 \quad ,$$

azaz $\mu(A_n) = 0$ ($n = 1, 2, \dots$). Innen $\mu\{x : h(x) \neq 0\} = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = 0$, vagyis $h = 0$ μ -mm. Következésképpen $1_{\Omega \setminus A} \underline{f} = f = 1_{\Omega \setminus A} \bar{f}$ μ -mm.

Átrendezési lemma

Lemma. Legyen $\phi : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ egy olyan $\mathcal{A}$ -mérhető függvény, amelynek értékkészlete 0-n kívül egy kétirányú sorozat, nevezetesen

$$\text{ran}(\phi) = \{y_k : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\} \quad , \quad \text{ahol } y_{k+1} > y_k \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow -\infty) .$$

Ekkor

$$\int \phi d\mu = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (y_k - y_{k-1}) \mu\{x : \phi(x) \geq y_k\} .$$

Bizonyítás. Az $A_n := \{x : f(x) = y_n\}$ halmazok $\mathcal{A}$ -mérhetőek és páronként diszjunktak. Ezért, és mivel $y_n > 0 \quad \forall n$,

$$\int \phi d\mu = \int \bar{\phi} d\mu = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n \mu(A_n) .$$

Mivel $\lim_{k \rightarrow -\infty} y_k = 0$, teleszkopikus összegként

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^n (y_k - y_{k-1}) \quad (n \in \mathbb{Z}) .$$

Vagyis

$$\begin{aligned}
\int \phi d\mu &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k \leq n} (y_k - y_{k-1}) \mu(A_n) = \sum_{(n,k): k \leq n} (y_k - y_{k-1}) \mu(A_n) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n \geq k} (y_k - y_{k-1}) \mu(A_n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (y_k - y_{k-1}) \sum_{n \geq k} \mu(A_n) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (y_k - y_{k-1}) \mu\left(\underbrace{\bigcup_{n \geq k} A_n}_{\{x: f(x) \geq y_k\}} \right).
\end{aligned}$$

Integrálhatósági kritériumok

Lemma. Ha f μ -integrálható, akkor f^+ is* μ -integrálható.

Bizonyítás. Legyen egy $\Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$ μ -integrálható függvény és $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen adott. Ekkor találhatók olyan φ, ψ μ -lépcsős függvények, hogy

$$\varphi \leq f \leq \psi, \quad \int \psi d\mu - \varepsilon \leq \int f d\mu \leq \int \varphi d\mu + \varepsilon.$$

Észrevétel: φ^+, ψ^+ μ -lépcsős függvények (ugyanis ha pl. $\varphi = \sum_n \alpha_n 1_{A_n}$ ahol $A_1, A_2, \dots$ diszj $\in \mathcal{A}$, akkor $\varphi^+ = \sum_{n: \alpha_n > 0} \alpha_n 1_{A_n}$ és $\sum_{n: \alpha_n > 0} |\alpha_n| \mu A_n < \sum_n |\alpha_n| \mu A_n < \infty$). Mivel az $y \mapsto y^+$ függvény növény, $0 \leq \varphi^+ \leq f^+ \leq \psi^+$. Így

$$\int f^+ d\mu \leq \int \psi^+ d\mu < \infty, \quad \int f^+ d\mu \geq \int \varphi^+ d\mu > -\infty.$$

A $\beta^+ - \alpha^+ \leq \beta - \alpha$ ($\beta \geq \alpha$) egyenlőtlenség alapján pedig

$$\int f^+ d\mu - \int f d\mu \leq \int (\psi^+ - \varphi^+) d\mu \leq \int (\psi - \varphi) d\mu \leq 2\varepsilon.$$

Az $\varepsilon > 0$ választásának tetszőlegessége miatt innen $\int f^+ d\mu = \underline{\int} f^+ d\mu$.

Tétel. Legyen f egy $\mathcal{A}$ -mérhető függvény. Ekkor ekvivalensek

- 1) f μ -integrálható,
- 2) $\exists g$ $\mathcal{A}$ -mérhető μ -integrálható $|f| \leq g$,
- 3) $\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k \mu\{x : |f(x)| > 2^k\} < \infty$.

Bizonyítás. Ha $\mu\{x : |f(x)| = \infty\} \neq 0$, akkor az 1)2)3) tulajdonságok triviálisan nem teljesülnek. Mivel pedig egy függvényt μ -0-halmazon megváltoztatva annak integrálhatósági tulajdonságai nem változnak, feltehetjük a továbbiakban, hogy $|f|, g : \Omega \rightarrow [0, \infty)$.

1) $\Rightarrow$ 2): A lemma szerint $|f| = f^+ + (-f)^+$ μ -integrálható, ha f μ -integrálható.

2) $\Rightarrow$ 3): Tekintsük a

$$\begin{aligned}
\phi : x &\mapsto [2^n \text{ ha } 2^n < g(x) \leq 2^{n+1} \text{ } (n \in \mathbb{Z}), \text{ } 0 \text{ ha } g(x) = 0] \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^n 1_{\{x: 2^n < g(x) \leq 2^{n+1}\}}
\end{aligned}$$

* A pozitív rész $z^+ := [z \text{ ha } z \geq 0, 0 \text{ ha } z < 0]$, a negatív rész $z^- := (-z)^+$.

függvényt. Mivel $g : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ $\mathcal{A}$ -mérhető, a ϕ függvény jól-definiált, $\mathcal{A}$ -mérhető és $\phi \leq g$. Feltevés szerint g μ -integrálható, így

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^n \mu\{x : 2^n < g(x) \leq 2^{n+1}\} = \int \phi d\mu \leq \int g d\mu < \infty ,$$

Az átrendezési lemma szerint

$$\begin{aligned} \int \phi d\mu &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (2^k - 2^{k-1}) \mu\{x : \phi(x) \geq 2^k\} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k-1} \mu\{x : \phi(x) \geq 2^k\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k-1} \mu\{x : \phi(x) > 2^{k-1}\} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k-1} \mu\{x : g(x) > 2^{k-1}\} \geq \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k-1} \mu\{x : |f(x)| > 2^{k-1}\} . \end{aligned}$$

3) $\Rightarrow$ 1): Vehető $f \geq 0$, mivel 3) pontosan akkor teljesül f -re, amikor f^+ -re és f^- -re. Az összes $q > 1$ együtthatóra vezessük be a

$$\varphi_q := \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^n 1_{\{x : q^n < f(x) \leq q^{n+1}\}} , \quad \psi_q := q \cdot \varphi_q \quad (q > 1)$$

lépcsős függvényeket. Hasonlóan, mint imént a ϕ függvényét, láthatjuk ezek jól-definiáltságát. Mivel $\varphi_q(x) = q^n < f(x) \leq q^{n+1} = \psi_q(x)$ valahányszor $f(x) \in (q^n, q^{n+1}]$ valamilyen n -re, $\varphi_q \leq f \leq \psi_q$ minden $q > 1$ mellett. Sőt

$$\varphi_2 \leq \varphi_{\sqrt{2}} \leq \varphi_{\sqrt[4]{2}} \leq \dots \leq f \leq \dots \leq \psi_{\sqrt[4]{2}} \leq \psi_{\sqrt{2}} \leq \psi_2 .$$

Ha 3) áll, akkor az átrendezési lemma szerint

$$\int \varphi_2 d\mu < \infty , \quad \int \psi_2 d\mu = \int 2 \varphi_2 d\mu < \infty .$$

Tehát ilyenkor

$$\int (\psi_{2^{1/n}} - \varphi_{2^{1/n}}) d\mu = (2^{1/n} - 1) \int \varphi_{2^{1/n}} d\mu \leq (2^{1/n} - 1) \int \psi_2 d\mu \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

azaz az f felett és alatt elhelyezkedő μ -lépcsős függvények integrálkülönbsége tetszőlegesen kicsiny lehet.

Következmény. Ha $f \geq 0$ egy $\mathcal{A}$ -mérhető μ -integrálható függvény, akkor

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k \mu\{x : f(x) > 2^k\} \leq \int f d\mu \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k+1} \mu\{x : f(x) > 2^k\} .$$

Diszkrét Lebesgue tétel

A következő tétel (amely az integrálszámítás alaptételének speciális esete) tisztán sorelméleti, azonban egyszerűsége ellenére ebben a formában ritkán szerepel a sorelméleti bevezetőkben.

Legyenek $n = 1, 2, \dots$ -re $a_1^{(n)} + a_2^{(n)} + \dots$ abszolút konvergens sorok, amelyek tagonként is konvergálnak: $a_i^{(1)}, a_i^{(2)}, \dots \rightarrow a_i$ minden rögzített i indexre. Azaz

$$\begin{array}{ccccccc} a_1^{(1)} & + & a_2^{(1)} & + & a_3^{(1)} & + & \dots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(1)} \\ a_1^{(2)} & + & a_2^{(2)} & + & a_3^{(2)} & + & \dots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(2)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_1^{(n)} & + & a_2^{(n)} & + & a_3^{(n)} & + & \dots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(n)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ a_1 & + & a_2 & + & a_3 & + & \dots = ? \end{array}$$

Tétel. Ha létezik olyan $c_1, c_2, \dots \geq 0$ sorozat, amelyre

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i < \infty \quad , \quad \sup_n |a_i^{(n)}| \leq c_i \quad (i = 1, 2, \dots) \quad ,$$

akkor

$$\sum_i a_i^{(n)} \rightarrow \sum_i a_i \quad (n \rightarrow \infty).$$

Bizonyítás. Mivel $|a_i| = \lim_n |a_i^{(n)}| \leq c_i$ minden i -re, $\sum_i |a_i| < \infty$ és így akármilyen I indexnél felbontva

$$\begin{aligned} \left| \sum_i a_i^{(n)} - \sum_i a_i \right| &\leq \sum_i |a_i^{(n)} - a_i| = \sum_{i=1}^I |a_i^{(n)} - a_i| + \sum_{i=I+1}^{\infty} |a_i^{(n)} - a_i| \\ &\leq \sum_{i=1}^I |a_i^{(n)} - a_i| + \sum_{i=I+1}^{\infty} 2c_i \quad (n = 1, 2, \dots) . \end{aligned}$$

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen adott. Mivel $\sum_i c_i < \infty$, választható I úgy, hogy

$$\sum_{i=I+1}^{\infty} 2c_i < \frac{\varepsilon}{2}$$

legyen. Mivel pedig most $\lim_n (a_i^{(n)} - a_i) = 0$ ($i = 1, \dots, I$), található olyan N küszöb, hogy

$$\sum_{i=1}^I |a_i^{(n)} - a_i| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (n > N) .$$

Ekkor $|\sum_i a_i^{(n)} - \sum_i a_i| < \varepsilon$ minden $n > N$ indexű sorra.

Következmény. Ha minden i indexre $0 \leq a_i^{(n)} \uparrow a_i$ ($n \rightarrow \infty$), akkor $\sum_i a_i = \lim_n \sum_i a_i^{(n)}$.

Bizonyítás. Ha $\sum_i a_i < \infty$, akkor a tételt alkalmazhatjuk $c_i := a_i$ ($i = 1, 2, \dots$) mellett. Ha $\sum_i a_i = \infty$, akkor minden I -re $\lim_n \sum_i a_i^{(n)} \geq \lim_n \sum_{i=1}^I a_i^{(n)} = \sum_{i=1}^I a_i$. Itt a jobb oldal $\rightarrow \infty$ ha $I \rightarrow \infty$.

Markov egyenlőtlenség

Lemma. Ha $f \geq 0$ egy $\mathcal{A}$ -mérhető μ -integrálható függvény, akkor bármely $y > 0$ számra

$$\mu\{x : f(x) \geq y\} \leq \frac{1}{y} \int f d\mu .$$

Bizonyítás. Az $A := \{x : f(x) \geq y\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x : f(x) > y - 1/n\}$ halmaz $\mathcal{A}$ -mérhető, és

$$y \cdot 1_A \leq f .$$

A 2) integrálhatósági kritérium szerint az $y \cdot 1_A$ függvény μ -lépcsős. Így

$$y \cdot \mu(A) = \int y \cdot 1_A d\mu \leq \int f d\mu .$$

Fatou lemma

Lemma. Tegyük fel, hogy $g_1 \geq g_2 \geq \dots$ μ -integrálható $\mathcal{A}$ -mérhető függvények, amelyekre $g_n \downarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Ekkor $\int g_n d\mu \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

Bizonyítás. Tekintsük az integrálhatósági kritériumok 3) $\Rightarrow$ 1) implikációjában használt ψ_2 -nek megfelelő függvényeit $g_1, g_2, \dots$ -nek:

$$\psi_{2,n} := \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k+1} \cdot 1_{\{x : 2^k < g(x) \leq 2^{k+1}\}} \quad (n = 1, 2, \dots) .$$

Tudjuk: $\psi_{2,n}$ μ -lépcsős $\geq g_n$ ($n = 1, 2, \dots$). Észrevétel: Minden rögzített $k \in \mathbb{Z}$ indexre

$$\{x : g_1(x) > 2^k\} \supset \{x : g_2(x) > 2^k\} \supset \dots$$

$$\emptyset = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x : g_n(x) > 2^k\} \quad (\Leftarrow g_n \downarrow 0)$$

$$\mu\{x : g_n(x) > 2^k\} \searrow \mu(\emptyset) = 0 \quad (n \rightarrow \infty) .$$

Tehát az átrendezési lemmát majd a diszkrét Lebesgue tételt alkalmazva

$$\begin{aligned} 0 \leq \int g_n d\mu &\leq \int \psi_{2,n} d\mu = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k+1} \mu\{x : g_n(x) > 2^k\} \\ &\rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k+1} \cdot 0 = 0 . \end{aligned}$$

Beppo Levi tétel

Lemma. Ha $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ és $A_1 \subset A_2 \subset \dots$, akkor $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$.

Bizonyítás. Találhatók $D_1, D_2, \dots$ diszj $\in \mathcal{A}$, amelyekre $A_n = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_n$ ($n = 1, 2, \dots$). Ekkor

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(D_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \mu(D_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mu(A_N) .$$

Tétel. Ha $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$ $\mathcal{A}$ -mérhető μ -integrálható függvények és $\sup_n \int f_n d\mu < \infty$, akkor a $\sup_n f_n$ felső burkoló függvény μ -integrálható és

$$\int \sup_n f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu .$$

Bizonyítás. Legyen $I := \sup_n \int f_n d\mu (= \lim_n \int f_n d\mu)$ és $f := \sup_n f_n$. Tudjuk: f $\mathcal{A}$ -mérhető. A Integrálhatósági kritériumok c. alfejezetbeli következmény szerint

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k \mu\{x : f_n(x) > 2^k\} \leq \int f_n d\mu \leq I \quad (n = 1, 2, \dots) .$$

Egy tetszőlegesen rögzített k indexre

$$\begin{aligned} \{x : f_1(x) > 2^k\} &\subset \{x : f_2(x) > 2^k\} \subset \dots , \\ \{x : f(x) > 2^k\} &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : f_n(x) > 2^k\} . \end{aligned}$$

A lemma alapján

$$\mu\{x : f_n(x) > 2^k\} \nearrow \mu\{x : f(x) > 2^k\} \quad (n \rightarrow \infty) .$$

A diszkrét Lebesgue tétel következménye szerint

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k \mu\{x : f_n(x) > 2^k\} &\nearrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k \mu\{x : f(x) > 2^k\} \quad (n \rightarrow \infty) \\ &\leq I < \infty . \end{aligned}$$

Így a 3) kritérium szerint az f függvény μ -integrálható. Minthogy $f - f_n \downarrow 0$, a Fatou lemma alapján $\int f d\mu - \int f_n d\mu \rightarrow 0$.

Következmény. Ha $f_1, f_2, \dots$ μ -integrálható függvények növvő vagy csökkenő sorozata és $\{\int f_n d\mu : n = 1, 2, \dots\}$ korlátos $\subset \mathbb{R}$, akkor az $f := \lim_n f_n$ függvény μ -integrálható és $\int f d\mu = \lim_n \int f_n d\mu$.

Bizonyítás. Egy μ -0-halmazon való változtatás után vehetjük, hogy az összes $f, f_1, f_2, \dots$ függvények $\mathcal{A}$ -mérhetőek. Alkalmazzuk a növvő esetben a $0 = f_1 - f_1 \leq f_2 - f_1 \leq f_3 - f_1 \leq \dots$, a csökkenő esetben a $0 = f_1 - f_1 \leq f_1 - f_2 \leq f_1 - f_3 \leq \dots$ függvényt.

Lebesgue tétel

Tétel. Legyenek $f_1, f_2, \dots$ μ -integrálható függvények és

$$f_n \rightarrow f \quad \mu\text{-mm.} \quad (n \rightarrow \infty) .$$

Tegyük fel, hogy van olyan μ -integrálható g függvény, amelyre

$$|f_n| \leq g \quad (n = 1, 2, \dots) .$$

Ekkor $f, f_1, f_2, \dots$ μ -integrálhatók és

$$\int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu \quad (n \rightarrow \infty) .$$

Bizonyítás. Egy μ -0-halmazon való változtatás után feltehetjük, hogy az összes $f, f_1, f_2, \dots$ függvények $\mathcal{A}$ -mérhetők, és $f_n \rightarrow f$ mindenütt Ω -n. Legyen

$$g_N := \sup_{n \geq N} f_n \quad (N = 1, 2, \dots).$$

Tudjuk: $f, g_1, g_2, \dots$ $\mathcal{A}$ -mérhető függvények és $g_n \downarrow f$ ($N \rightarrow \infty$). A 2) integrálhatósági kritérium szerint $f, g_1, g_2, \dots$ μ -integrálhatók. A Fatou lemmát $g_1 - f, g_2 - f, \dots$ -re alkalmazva kapjuk, hogy $\int (g_N - f) d\mu \searrow 0$, azaz

$$\int g_N d\mu \searrow \int f d\mu \quad (N \rightarrow \infty).$$

Mivel $g_N \geq f_N$ minden N indexre,

$$\int f d\mu = \lim_{N \rightarrow \infty} \int g_N d\mu \geq \limsup_{N \rightarrow \infty} \int f_N d\mu.$$

A gondolatmenetet f_n helyett $-f_n$ -re alkalmazva, $\limsup_{N \rightarrow \infty} \int (-f_N) d\mu \leq -\int f d\mu$, azaz

$$\int f d\mu \leq \liminf_{N \rightarrow \infty} \int f_N d\mu$$

(hiszen általában is, $\limsup_{N \rightarrow \infty} (-a_N) = -\liminf_{N \rightarrow \infty} a_N$ a számsorozatokra). Vagyis

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \int f_N d\mu \leq \int f d\mu \leq \liminf_{N \rightarrow \infty} \int f_N d\mu.$$

Ugyanakkor itt a $\limsup_{N \rightarrow \infty} \int f_N d\mu \geq \liminf_{N \rightarrow \infty} \int f_N d\mu$ egyenlőtlenség triviális.

Következmény. Ha $f_1, f_2, \dots$ μ -integrálhatók, $f_n \rightarrow f$ μ -mm. továbbá

$$\sup_N \int \max_{k=1}^N f_k d\mu < \infty \quad \text{és} \quad \inf_N \int \min_{k=1}^N f_k d\mu > -\infty$$

(vagy egyszerre $\sup_N \int \max_{k=1}^N |f_k| d\mu < \infty$), akkor az f limes μ -integrálható és

$$\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

Bizonyítás. Jegyezzük meg mindenképp, hogy egy μ -0-halmazon való változtatással feltehető az összes szereplő függvények $\mathcal{A}$ -mérhetősége. Mivel pedig

$$-|f_1| - \dots - |f_N| \leq \min_{k=1}^N f_k \leq \max_{k=1}^N f_k \leq |f_1| + \dots + |f_N|,$$

a 2) integrálhatósági kritérium szerint a $\max_{k=1}^N f_k$ ill. $\min_{k=1}^N f_k$ függvények mind μ -integrálhatók. A Beppo Levi tétel értelmében a

$$h_1 := \sup_n f_n = \sup_N \max_{k=1}^N f_k, \quad h_2 := \sup_n f_n = \sup_N \min_{k=1}^N f_k$$

felső ill. alsó burkoló függvények μ -integrálhatók. Most a $g := h_1 + h_2$ függvénnyel alkalmazhatjuk a tételt.

MÉRTÉK KONSTRUKCIÓJA

Legyen az egész fejezeten keresztül tetszőlegesen rögzítve az $\Omega \neq \emptyset$ halmaz, és legyen

$$\tau : \mathcal{T} \rightarrow [0, \infty] \quad \text{ahol} \quad \emptyset \neq \mathcal{T} \subset \{\Omega \text{ részalmazai}\}.$$

Lefedési kiterjesztés

Definíció. A τ halmazfüggvény *lefedési kiterjesztése* a

$$\bar{\tau}(X) := \inf \left\{ \sum_{T \in \mathcal{F}} \tau(T) : \mathcal{F} \text{ megszámlálható } \mathcal{T} \text{ részalmazai, } \bigcup \mathcal{F} \supset X \right\}.$$

halmazfüggvény, amely Ω összes részalmazára jól-definiált.*

Tétel. 1) Ha $\emptyset \in \mathcal{T}$ és $\tau(\emptyset) = 0$, akkor $\bar{\tau}(T) \leq \tau(T)$ ($T \in \mathcal{T}$).

$$2) \bar{\tau}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\tau}(X_n) \quad (X_1, X_2, \dots \subset \Omega).$$

Bizonyítás. 1) Mivel $T = T \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \emptyset$, ilyenkor $\bar{\tau}(T) \leq \tau(T) + \sum_{n=1}^{\infty} \tau(\emptyset) = \tau(T)$.

2) Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen adott. Bontsuk ezt fel megszámlálható részre:

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots > 0 : \quad \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots.$$

Mindegyik n indexhez válasszunk egy olyan $\mathcal{F}_n$ megszámlálható $\mathcal{T}$ halmazcsaládot, amelyre

$$\bigcup \mathcal{F}_n \supset X_n, \quad \sum_{T \in \mathcal{F}_n} \tau(T) \leq \bar{\tau}(X_n) + \varepsilon_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Ekkor az $\mathcal{F} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ család megszámlálható és $\bigcup \mathcal{F} \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$. Ezért

$$\begin{aligned} \bar{\tau}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n\right) &\leq \sum_{T \in \mathcal{F}} \tau(T) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{T \in \mathcal{F}_n} \tau(T) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} [\bar{\tau}(X_n) + \varepsilon_n] = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\tau}(X_n) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Definíció. A $\tau : \mathcal{T} \rightarrow [0, \infty]$ halmazfüggvény *előmérték* (Ω fölött), ha

$$\emptyset \in \mathcal{T}, \quad \tau(\emptyset) = 0 \quad \text{és} \quad \bar{\tau}(T) = \tau(T) \quad (T \in \mathcal{T}).$$

Tétel. Az $\mathbb{R}$ nyitott intervallumain értelmezett

$$\lambda((a, b)) := b - a \quad (-\infty \leq a \leq b \leq \infty)$$

halmazfüggvény előmérték.

Bizonyítás. Tetszőleges $a \in \mathbb{R}$ számot véve, $\lambda(\emptyset) = \lambda((a, a)) = a - a = 0$.

Legyen a nem-üres (a, b) intervallum és az $\mathcal{I} = \{I_1, I_2, \dots\}$ lefedése (a, b) -nek adott (tetszőlegesen). Most ha $a', b' \in \mathbb{R}$ olyan számok, hogy $a < a' < b' < b$, akkor $\bigcup \mathcal{I} \supset [a', b']$, és így a Borel befedési tétel szerint

* Konvenció: $\inf \emptyset := \infty$. Az $\mathcal{F}$ megszámlálható $\mathcal{T}$ kifejezés az $\mathcal{F}$ megszámlálható részalmazai $\mathcal{T}$ -nek kijelentést rövidíti.

$$\exists I_{n_1}, I_{n_2}, \dots, I_{n_K} \in \mathcal{I} \quad \bigcup_{k=1}^K I_{n_k} \supset [a', b'] , \quad \sum_{k=1}^K \lambda(I_{n_k}) > b' - a' .$$

Tehát $\sum_{I \in \mathcal{I}} \lambda(I) \geq \sup\{b' - a' : a < a' < b' < b\} = b - a = \lambda((a, b))$.

Külső mérték, mérhetőség

Definíció. A $\kappa : \{\Omega \text{ részhalmazai}\} \rightarrow [0, \infty]$ halmazfüggvény *külső mérték* (Ω fölött), ha

$$\kappa(\emptyset) = 0 , \quad \kappa\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \kappa(X_n) \quad (X_1, X_2, \dots \subset \Omega).$$

Megjegyzés. 1) Láttuk: τ előmérték $\Rightarrow \bar{\tau}$ külső mérték.

2) κ külső mérték $\Leftrightarrow \bar{\kappa} = \kappa$. Azaz a külső mértékek pontosan az összes részhalmazra értelmezett előmértékek.

Probléma. Keresendő olyan $\mathcal{A}$ σ -algebra $\subset \{\Omega \text{ részhalmazai}\}$, amelyre $\kappa|_{\mathcal{A}}$ mérték.

Definíció. Legyen κ egy külső mérték (Ω fölött). Az $A \subset \Omega$ halmaz κ -mérhető, ha

$$\kappa(X) = \kappa(X \setminus A) + \kappa(X \cap A) \quad (X \subset \Omega) .$$

Jelölés: $\mathcal{A}_{\kappa} := \{\kappa\text{-mérhető}\} (= \{\Omega \text{ } \kappa\text{-mérhető részhalmazai}\})$.

Lemma. Ha κ külső mérték és $A_1, A_2, \dots \text{diszj} \in \mathcal{A}_{\kappa}$, akkor

$$\kappa\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \kappa(A_n) .$$

Bizonyítás. Legyen κ egy külső mérték Ω -n és $A_1, A_2, \dots \text{diszj} \in \mathcal{A}_{\kappa}$. Mivel κ külső mérték,

$$\kappa\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \kappa(A_n) .$$

Másrészt

$$A_1 \in \mathcal{A}_{\kappa} , \Rightarrow \kappa\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \kappa(A_1) + \kappa(A_2 \cup A_3 \cup \dots)$$

$$A_2 \in \mathcal{A}_{\kappa} , \Rightarrow \kappa(A_2 \cup A_3 \cup \dots) = \kappa(A_2) + \kappa(A_3 \cup A_4 \cup \dots)$$

$$\kappa\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \kappa(A_1) + \kappa(A_2) + \kappa(A_3 \cup A_4 \cup \dots)$$

$\vdots$

$$\kappa\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \kappa(A_1) + \dots + \kappa(A_N) + \kappa(A_{N+1} \cup A_{N+2} \cup \dots)$$

$$\geq \sum_{n=1}^m \kappa(A_n)$$

tetszőleges N -re. Innen $\kappa\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \kappa(A_n)$.

Tétel. Legyen κ külső mérték Ω fölött. Ekkor $\mathcal{A}_\kappa$ σ -algebra Ω -n.

Bizonyítás. 1) $A \in \mathcal{A}_\kappa, \Rightarrow \Omega \setminus A \in \mathcal{A}_\kappa$. Bizonyítás: Ha $X \subset \Omega$, akkor

$$\kappa(X) = \kappa(X \cap A) + \kappa(X \setminus A) = \kappa(X \setminus (\Omega \setminus A)) + \kappa(X \cap (\Omega \setminus A)).$$

2) $A, B \in \mathcal{A}_\kappa, \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}_\kappa$. Bizonyítás: Legyenek

$$\begin{aligned} X_1 &:= X \cap (A \cap B) & X_2 &:= X \cap (B \setminus A) \\ X_3 &:= X \cap (A \setminus B) & X_4 &:= X \setminus (A \cup B). \end{aligned}$$

Belátandó: $\kappa(X_1 \cup \dots \cup X_4) = \kappa(X_1) + \kappa(X_2 \cup X_3 \cup X_4)$.

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{A}_\kappa, \Rightarrow \kappa(X_1 \cup X_2) &= \kappa((X_1 \cup X_2) \cap A) + \kappa((X_1 \cup X_2) \setminus A) \\ &= \kappa(X_1) + \kappa(X_2) \end{aligned}$$

$$\kappa(X_3 \cup X_4) = \kappa(X_3) + \kappa(X_4) \text{ ugyanígy.}$$

$$\begin{aligned} B \in \mathcal{A}_\kappa, \Rightarrow \kappa(X_1 \cup \dots \cup X_4) &= \kappa(X) = \kappa(X \cap B) + \kappa(X \setminus B) \\ &= \kappa(X_1 \cup X_2) + \kappa(X_3 \cup X_4) \\ &= \kappa(X_1) + \dots + \kappa(X_4). \end{aligned}$$

X helyett az előbbi gondolatmenetet $X_2 \cup X_3 \cup X_4$ -re alkalmazva,

$$\kappa(X_2 \cup X_3 \cup X_4) = \kappa(X_2) + \kappa(X_3) + \kappa(X_4).$$

3) $A_1, A_2, \dots$ diszj $\in \mathcal{A}_\kappa, \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}_\kappa$. Bizonyítás: Legyen

$$X_0 := X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad X_1 := X \cap A_1, \quad X_2 := X \cap A_2, \dots$$

Belátandó: $\kappa(X_0 \cup X_1 \cup \dots) = \kappa(X_0) + \kappa(X_1 \cup X_2 \cup \dots)$.

$$\begin{aligned} A_1 \in \mathcal{A}_\kappa, \Rightarrow \kappa(X_0 \cup X_1 \cup \dots) &= \kappa(X_1) + \kappa(X_0 \cup X_2 \cup X_3 \cup \dots) \\ A_2 \in \mathcal{A}_\kappa, \Rightarrow \kappa(X_0 \cup X_2 \cup X_3 \cup \dots) &= \kappa(X_2) + \kappa(X_0 \cup X_3 \cup X_4 \cup \dots) \\ \kappa(X_0 \cup X_1 \cup \dots) &= \kappa(X_1) + \kappa(X_2) + \kappa(X_0 \cup X_3 \cup X_4) \\ &\vdots \\ A_n \in \mathcal{A}_\kappa, \Rightarrow \kappa(X_0 \cup X_1 \cup \dots) &= \kappa(X_1) + \dots + \kappa(X_n) + \\ &\vdots + \kappa(X_0 \cup \underbrace{X_{n+1} \cup X_{n+2} \cup \dots}_{\geq \kappa(X_0)}), \end{aligned}$$

azaz

$$\kappa(X) \geq \kappa(X_0) + \kappa(X_1) + \dots + \kappa(X_n) \quad \forall n.$$

Mivel κ külső mérték, $\kappa(X_0 \cup X_1 \cup \dots) \leq \kappa(X_0) + \kappa(X_1) + \dots$, és így

$$\kappa(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \kappa(X_n).$$

X helyett ezt $X_1 \cup X_2 \cup \dots$ -re alkalmazva kapjuk, hogy

$$\kappa(X_1 \cup X_2 \cup \dots) = \sum_{n=1}^{\infty} \kappa(X_n).$$

4) Általában is 1)2)3) $\Rightarrow \mathcal{A}_\kappa$ σ -algebra.

Mérték reguláris előmértékből

Definíció. A $\tau : \mathcal{T} \rightarrow [0, \infty]$ előmérték (Ω fölött) *reguláris*, ha

$$\tau(T) \geq \bar{\tau}(T \setminus U) + \bar{\tau}(T \cap U) \quad (T, U \in \mathcal{T}).$$

Tétel. Ha $\tau : \mathcal{T} \rightarrow [0, \infty]$ egy reguláris előmérték, akkor minden $\mathcal{T}$ -beli halmaz $\bar{\tau}$ -mérhető, azaz $\mathcal{T} \subset \mathcal{A}_{\bar{\tau}}$.

Bizonyítás. Legyen $X \subset \Omega$ és $T \in \mathcal{T}$ tetszőlegesen adott. Belátandó:

$$\bar{\tau}(X) = \bar{\tau}(X \setminus T) + \bar{\tau}(X \cap T).$$

Mivel $\bar{\tau}$ külső mérték, itt a $\leq$ reláció definíció szerint áll. Legyen $\varepsilon > 0$ adott. Állítás:

$$\bar{\tau}(X \cap T) + \bar{\tau}(X \setminus T) \leq \bar{\tau}(X) + \varepsilon.$$

(Innen a tétel azonnal jön). Bizonyítás: Találhatók $U_1, U_2, \dots, \mathcal{T}$ úgy, hogy

$$X \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \tau(U_n) < \bar{\tau}(X) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Vegyünk egy olyan $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots > 0$ rendszert, melyre $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n = \varepsilon/4$. Mivel a τ előmérték reguláris, $n = 1, 2, \dots$ -re rendre

$$\begin{aligned} \exists U_1^{(n)}, U_2^{(n)}, \dots \in \mathcal{T} \quad \exists T_1^{(n)}, T_2^{(n)}, \dots \in \mathcal{T} \\ \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k^{(n)} \supset U_n \setminus T \quad \sum_{k=1}^{\infty} \tau(U_k^{(n)}) < \bar{\tau}(U_n \setminus T) + \varepsilon_n \\ \bigcup_{k=1}^{\infty} T_k^{(n)} \supset U_n \cap T \quad \sum_{k=1}^{\infty} \tau(T_k^{(n)}) < \bar{\tau}(U_n \cap T) + \varepsilon_n. \end{aligned}$$

Ekkor

$$\begin{aligned} \bigcup_{n,k=1}^{\infty} U_k^{(n)} \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} [U_n \setminus T] \supset X \setminus T \quad \bigcup_{n,k=1}^{\infty} T_k^{(n)} \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} [U_n \cap T] \supset X \cap T \\ \sum_{n,k=1}^{\infty} \tau(U_k^{(n)}) < \sum_{n=1}^{\infty} [\bar{\tau}(U_n \setminus T) + \varepsilon_n] = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\tau}(U_n \setminus T) + \frac{\varepsilon}{4} \\ \sum_{n,k=1}^{\infty} \tau(T_k^{(n)}) < \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\tau}(U_n \cap T) + \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{ugyanígy.} \end{aligned}$$

Vagyis, a harmadik lépésben kihasználva τ regularitását,

$$\begin{aligned} \bar{\tau}(X \cap T) + \bar{\tau}(X \setminus T) &\leq \sum_{n,k=1}^{\infty} \tau(T_k^{(n)}) + \sum_{n,k=1}^{\infty} \tau(U_k^{(n)}) \\ &< \sum_{n=1}^{\infty} [\bar{\tau}(U_n \setminus T) + \bar{\tau}(U_n \cap T)] + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \tau(U_n) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \bar{\tau}(X) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Lebesgue mérték

Tétel. *A nyitott intervallumok hossza reguláris előmérték $\mathbb{R}$ -en.*

Bizonyítás. Mint a Lefedési kiterjesztés alfejezet példájában, használjuk a szokásos

$$\lambda : \{\text{nyitott intervallumok}\} \rightarrow [0, \infty], \quad \lambda(I) := [I \text{ hossza}]$$

jelölést. Láttuk: λ előmérték $\mathbb{R}$ -en. Észrevétel: A $-\infty \leq a < b \leq \infty$ végpontú intervallumokra

$$\bar{\lambda}((a, b)) = \bar{\lambda}([a, b)) = \bar{\lambda}([a, b]) = \lambda((a, b)) = b - a.$$

Bizonyítás: Nem-korlátos intervallum $\bar{\lambda}$ -mértéke $= \infty$, mert a belseje egy nem-korlátos nyitott intervallum. Ha $-\infty < a < b < \infty$, akkor bármely $\varepsilon > 0$ -ra $(a - \varepsilon, b + \varepsilon) \supset [a, b]$, ahonnan

$$b - a = \lambda((a, b)) = \bar{\lambda}((a, b)) \leq \bar{\lambda}([a, b]) \leq \bar{\lambda}((a - \varepsilon, b + \varepsilon)) = b - a + 2\varepsilon.$$

Az észrevétel alapján,

$$\lambda(I) = \bar{\lambda}(I \cap J) + \bar{\lambda}(I \setminus J) \quad (I, J \text{ nyitott intervallum } \subset \mathbb{R}).$$

Definíció. A $\bar{\lambda}|_{\mathcal{A}_{\bar{\lambda}}}$ mérték neve 1-dimenziós *Lebesgue mérték*. Az $\mathcal{A}_{\bar{\lambda}}$ halmazcsalád tagjai az $\mathbb{R}$ -beli *Lebesgue mérhető* halmazok. Szokásos $A \in \mathcal{A}_{\bar{\lambda}}$ esetén $\bar{\lambda}(A)$ helyett is $\lambda(A)$ -t írni.

Tétel. 1) *A Lebesgue mérték szerinti integrál kiterjesztése a Riemann integrálnak.*
2) *Az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény Riemann integrálható pontosan akkor, ha λ -majdnem mindenütt folytonos továbbá korlátos és egy véges intervallumon kívül eltűnik.*

Bizonyítás. 1) Legyen f egy Riemann integrálható függvény $\mathbb{R}$ -en. A Darboux-féle

$$\begin{aligned} \varphi_n &:= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \inf f\left(\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)\right) \cdot 1_{\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)} , \\ \psi_n &:= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sup f\left(\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)\right) \cdot 1_{\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)} \end{aligned} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

alsó ill. felső közelítő függvények λ -lépcsősök (csak véges sok tag $\neq 0$ ezekben az összegekben) és

$$\int \psi_n d\lambda - \int \varphi_n d\lambda \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Így az integrálható definíciója utáni megjegyzés szerint f λ -integrálható.

2) Tegyük fel, hogy f egy Riemann integrálható függvény $\mathbb{R}$ -en. Mivel a véges I intervallumok 1_I indikátorfüggvényei tetszőleges pontossággal közelíthetők folytonos függvényekkel alulról és felülről integrálban (Riemann- vagy Lebesgue-itt ugyanaz), találhatók olyan $\underline{f}_1, \bar{f}_1, \underline{f}_2, \bar{f}_2, \dots \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ függvények, amelyekre

$$\begin{aligned} \underline{f}_n &\leq \varphi_n \leq f \leq \psi_n \leq \bar{f}_n \\ \int (\varphi_n - \underline{f}_n) d\lambda, \int (\bar{f}_n - \psi_n) d\lambda &\leq \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \dots) . \end{aligned}$$

az előbb használt Darboux függvényekkel. Tekintsük az

$$\underline{f} := \sup_n \underline{f}_n, \quad \bar{f} := \inf_n \bar{f}_n$$

burkoló függvényeket.

$$\int f \, d\lambda = \lim_n \int \varphi_n \, d\lambda = \lim_n \int \underline{f}_n \, d\lambda \leq \int \underline{f} \, d\lambda \leq \int f \, d\lambda$$

azaz $\int \underline{f} \, d\lambda = \int f \, d\lambda$. Hasonlóan, $\int \bar{f} \, d\lambda = \int f \, d\lambda$. Tehát

$$\int (\bar{f} - \underline{f}) \, d\lambda = 0, \quad \bar{f} - \underline{f} \geq 0,$$

ami csak úgy lehet, hogy $\bar{f} = \underline{f} = f$ λ -majdnem mindenütt. Tudjuk: folytonos függvények sup-a alulról-, inf-a felülről folytonos. Nevezetesen az $\bar{f}$ függvény alulról, $\underline{f}$ pedig felülről folytonos, azaz

$$\underline{f}(x) \geq \limsup_{h \rightarrow 0} \underline{f}(x+h), \quad \bar{f}(x) \leq \liminf_{h \rightarrow 0} \bar{f}(x+h) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Mivel $\underline{f} \leq f \leq \bar{f}$, az f függvény így folytonos minden olyan x helyen, ahol $\underline{f}(x) = f(x) = \bar{f}(x)$. Ez azonban, mint láttuk, λ -mm. bekövetkezik. Másrészt a Riemann integrálhatóság definíciója megköveteli, hogy $|f| \leq M \cdot 1_I$ valamely $M < \infty$ és korlátos I intervallum mellett.

Fordítva: Legyen f λ -mm. folytonos, $|f| \leq M \cdot 1_I$ ahol I egy korlátos zárt intervallum és $M < \infty$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy I végpontjai racionálisak. Az $S := \{x : f \text{ nem folyt. } x\text{-nél}\} \subset I$ 0-halmaz tetszőleges $\varepsilon > 0$ mellett lefedhető ε összhosszúságú nyitott intervallumok megszámlálható G_ε uniójával. Minden $x \in I \setminus G_\varepsilon$ ponthoz válasszunk egy olyan racionális végpontú $I_x + [a_x, b_x)$ intervallumot x körül, amelyen az itt folytonos f függvény ε -nál kevesebbet változik ($\sup f(I_x) - \inf f(I_x) < \varepsilon$). Mivel a G_ε halmaz nyitott, $I \setminus G_\varepsilon$ mindig kompakt. Így vehető véges sok $x_1, \dots, x_N$ úgy, hogy

$$H_\varepsilon := I_{x_1} \cup \dots \cup I_{x_N} \supset I \setminus G_\varepsilon.$$

Minthogy az I_{x_k} intervallumok és I végpontjai racionálisak, mind előállnak valamilyen közös q_ε nevezővel $[p/q_\varepsilon, (p+1)/q_\varepsilon)$ alakú intervallumokból. Most a $\varphi_{q_\varepsilon}, \psi_{q_\varepsilon}$ alsó- és felső Darboux függvények integrálkülönbségére

$$\begin{aligned} \int (\psi_{q_\varepsilon} - \varphi_{q_\varepsilon}) \, d\lambda &= \frac{1}{q_\varepsilon} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left[\sup f\left(\left[\frac{p}{q_\varepsilon}, \frac{(p+1)}{q_\varepsilon}\right)\right) - \inf f\left(\left[\frac{p}{q_\varepsilon}, \frac{(p+1)}{q_\varepsilon}\right)\right) \right] \\ &\leq \frac{1}{q_\varepsilon} \sum_{p: [p/q_\varepsilon, (p+1)/q_\varepsilon) \subset H_\varepsilon} \varepsilon + \frac{1}{q_\varepsilon} \sum_{p: [p/q_\varepsilon, (p+1)/q_\varepsilon) \subset I \setminus H_\varepsilon} 2M \\ &= \lambda(H_\varepsilon) \cdot \varepsilon + \lambda(I \setminus H_\varepsilon) \cdot 2M \leq \varepsilon \cdot \lambda(H_\varepsilon) + 2M \cdot \lambda(G_\varepsilon) \\ &\leq \varepsilon \cdot \lambda(I) + 2M \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot (\lambda(I) + 2M) \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0). \end{aligned}$$

Jelölés. Az $\int f \, d\lambda$ absztrakt írásmód helyett általában a szuggesztívebb $\int f(x) \, dx$ -et használjuk.

Következmény. Ha $f_1, f_2, \dots : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann integrálható függvények, amelyekre $|f_n| \leq M < \infty$ $n = 1, 2, \dots$ és $f_n \rightarrow f$ egy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre, akkor

$$\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx \quad (n \rightarrow \infty).$$

Bizonyítás. Lebesgue tétele alkalmazható az $1_{[a,b]}f_1, 1_{[a,b]}f_2, \dots$ függvénysorozatra a $g := M \cdot 1_{[a,b]}$ majoránssal.

Példa. Ha $f : (0, 1) \times (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ egy korlátos Borel függvény, amely a második változója szerint korlátosan parciálisan differenciálható, akkor a $t \mapsto \int_0^1 f(x, t) dt$ függvény jól-definiált és differenciálható az egész $(0, 1)$ -en és

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 f(x, t) dx = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) dx.$$

Bizonyítás. Minden rögzített $t \in (0, 1)$ mellett az $x \mapsto f(x, t)$ függvény Borel mérhető és korlátos, így Lebesgue integrálható. Sőt

$$\left| \frac{f(x, t') - f(x, t)}{t' - t} \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial t}(\vartheta_{x, t', t}) \right| \leq \sup \left| \frac{\partial f}{\partial t} \right| \quad (x, t', t \in (0, 1))$$

a Lagrange középérték tétel alapján $(\exists \vartheta_{x, t', t} \in (0, 1))$. Ha tehát $t_1, t_2, \dots \rightarrow t$, akkor alkalmazható Lebesgue tétele a

$$\phi_n := \frac{f(\cdot, t_n) - f(\cdot, t)}{t_n - t} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t) \quad (n \rightarrow \infty)$$

korlátos intervallumon korlátos függvénysorozatra.

Stieltjes mértékek

Legyen I egy intervallum $\mathbb{R}$ -ben és $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ egy növekvő balról folytonos függvény, és legyen

$$\begin{aligned} \tau_\alpha : \{ [a, b] \subset I : a \leq b \} &\rightarrow \mathbb{R} \\ [a, b] &\mapsto \alpha(b) - \alpha(a). \end{aligned}$$

Tétel. A τ_α halmazfüggvény reguláris előmérték,

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_\alpha((a, b)) &= \lim_{x \downarrow a} [\alpha(b) - \alpha(x)], & \bar{\tau}_\alpha([a, b]) &= \lim_{y \uparrow b} [\alpha(y) - \alpha(a)], \\ \bar{\tau}_\alpha((a, b)) &= \lim_{x \downarrow a} \lim_{y \uparrow b} [\alpha(y) - \alpha(x)]. \end{aligned}$$

Bizonyítás. Lemásolható az $\alpha(x) \equiv x$ súlyfüggvénynek megfelelő Lebesgue-eset tárgyalása.

Definíció. Az $\bar{\alpha}|_{\mathcal{A}_{\bar{\alpha}}}$ mérték az α súlyfüggvény Stieltjes mértéke (az I intervallumon).

Jelölés. $\int_I f(x) d\alpha(x) := \int f d\bar{\tau}_\alpha$ ($f \in \bar{\tau}_\alpha|_{\mathcal{A}_{\bar{\tau}_\alpha}}$ -integrálható).

Propozíció. Az I -beli Borel halmazok minden súlyfüggvényre Stieltjes-mérhetők (azaz $\mathcal{A}_{\bar{\tau}_\alpha}$ -ba tartoznak minden megengedett α -ra).

Bizonyítás. Legyen $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ egy súlyfüggvény. Láttuk: $\mathcal{A}_{\bar{\tau}_\alpha}$ tartalmazza I összes korlátos részintervallumát, így az általuk generált σ -algebrát is.

Következmény. A véges intervallumokon kívül eltűnő korlátos Borel-mérhető függvények minden $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ súlyú Stieltjes mérték szerint integrálhatók.

Szorzatmérték

Ebben az alfejezetben jelöljenek $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$, $\nu : \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$ tetszőlegesen rögzített mértékeket, és legyen

$$\tau : A \times B \mapsto \mu(A)\nu(B) \quad (A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}) .$$

Tétel. A τ halmazfüggvény reguláris előmérték.

Bizonyítás. 1) τ előmérték: Bizonyítandó, hogy

$$\tau(A \times B) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \tau(A_n \times B_n) \quad (A, A_1, \dots \in \mathcal{A}, \quad B, B_1, \dots \in \mathcal{B}, \\ A \times B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \times B_n) .$$

Csak az $\sum_{n=1}^{\infty} \tau(A_n \times B_n) < \infty$ eset érdekes. Ekkor

$$\tau(A \times B) = \mu(A)\nu(B) = \int \nu(B) \cdot 1_A d\mu \quad \sum_{n=1}^{\infty} \tau(A_n \times B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int \nu(B_n) 1_{A_n} d\mu \\ \sum_{n=1}^N \nu(B_n) \cdot 1_{A_n} \nearrow \sum_{n=1}^{\infty} \nu(B_n) 1_{A_n} \quad \sum_{n=1}^N \int \nu(B_n) 1_{A_n} d\mu \nearrow \sum_{n=1}^{\infty} \tau(A_n \times B_n) < \infty .$$

Tehát a Beppo Levi tétel szerint

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(A_n \times B_n) = \int \left[\sum_{n=1}^{\infty} \nu(B_n) 1_{A_n} \right] d\mu .$$

Tetszőleges $x \in A$ -ra

$$\sum_{n=1}^{\infty} \nu(B_n) 1_{A_n}(x) = \sum_{n: x \in A_n} \nu(B_n) \geq \nu\left(\overbrace{\bigcup_{n: x \in A_n} B_n}^{\supset B}\right) \geq \nu(B) ,$$

ahonnan

$$\tau(A \times B) = \int \nu(B) 1_A d\mu \leq \int \sum_{n=1}^{\infty} \nu(B_n) 1_{A_n} d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(A_n \times B_n) .$$

2) τ reguláris: Bizonyítandó, hogy

$$\tau(A \times B) \geq \bar{\tau}((A \times B) \cap (C \times D)) + \bar{\tau}((A \times B) \setminus (C \times D))$$

ha $A, C \in \mathcal{A}$ ill. $B, D \in \mathcal{B}$. Az $A_1 := A \cap C$, $A_2 := A \setminus C$, $B_1 := B \cap D$, $B_2 := B \setminus D$ jelölésekkel

$$\tau(A \times B) = \mu(A)\nu(B) = \sum_{i,k=1,2} \mu(A_i) \cup \nu(B_k) \\ = \tau((A \cap C) \times (B \cap D)) + \sum_{\substack{i,k=1,2 \\ i+k > 2}} \mu(A_i) \nu(B_k) .$$

Itt $\bigcup_{\substack{i,k=1,2 \\ i+k > 2}} A_i \times B_k = (A \times B) \setminus (C \times D)$ miatt $\sum_{\substack{i,k=1,2 \\ i+k > 2}} \mu(A_i) \nu(B_k) \geq \bar{\tau}((A \times B) \setminus (C \times D))$.

Definíció. Legyenek μ és ν mértékek. Az $A \times B \mapsto \mu(A)\nu(B)$ reguláris előmértékhez konstruált mérték μ és ν szorzatmértéke.

Megjegyzés. Technikailag egyszerűen (de hosszadalmas) verifikálható, hogy a mértékek szorzása asszociatív, ha azonosítjuk az $(\Omega_1 \times \Omega_2) \times \Omega_3$ és $\Omega_1 \times (\Omega_2 \times \Omega_3)$ típusú Descartes szorzatokat.

Definíció. A $\tau_k : \mathcal{T}_k \rightarrow [0, \infty]$ ($k = 1, \dots, n$) halmazfüggvények *tenzori szorzata*

$$\tau_1 \otimes \tau_2 \otimes \dots \otimes \tau_n : (A_1 \times \dots \times A_n) \mapsto \tau_1(A_1) \dots \tau_n(A_n) .$$

Ha $\mu_1, \dots, \mu_n$ mértékek, a félreértés veszélye nélkül $\mu \otimes \dots \otimes \mu_n$ jelöli egyben a szorzatmértéküket is. (Rutinszerű belátni: a szorzatmérték valójában az $\overline{\mu \otimes \dots \otimes \mu_n}$ külső mértékből származó mérték.)

$\mathbb{R}^n$ -en a λ Lebesgue mérték n -szeres $\lambda^{\otimes n} := \lambda \otimes \dots \otimes \lambda$ szorzata az n -dimenziós Lebesgue mérték.

Egyszerű függvények

Definíció. Legyen $\tau : \mathcal{T} \rightarrow [0, \infty]$ előmérték Ω fölött. A $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ függvény τ -egyszerű függvény, ha

$$\exists T_1, \dots, T_n \in \mathcal{T} \quad \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad \varphi = \sum_{n=1}^N \alpha_n 1_{T_n} .$$

Tétel. Legyen $\tau : \mathcal{T} \rightarrow [0, \infty]$ reguláris előmérték (Ω fölött) és $f : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$ egy $\bar{\tau}$ -integrálható függvény. Ekkor

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \varphi \text{ } \tau\text{-egyszerű} \quad \int |f - \varphi| d\bar{\tau} < \varepsilon .$$

Bizonyítás. Mivel $f = f^+ - f^-$ és f^+, f^- $\bar{\tau}$ -integrálhatók, vehetők $f \geq 0$. Legyen most $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen adott. Tudjuk*: Található $q > 1$, melyre

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^n 1_{A_n} \leq f \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n+1} 1_{A_n} , \quad \int |f - \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^n 1_{A_n}| d\bar{\tau} < \varepsilon/2$$

ahol $A_n := \{x \in \Omega : q^n < f(x) \leq q^{n+1}\}$ ($n = 0, \pm 1, \dots$). Legyen

$$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_{-1}, \dots > 0 : \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon_n = \varepsilon/2 .$$

Elegendő belátni, hogy

$$\exists T_1^{(n)}, T_2^{(n)}, \dots \in \mathcal{T} \quad q^n \cdot \int |1_{A_n} - \sum_{k=1}^{\infty} 1_{T_k^{(n)}}| d\bar{\tau} < \varepsilon_n \quad (n = 0, \pm 1, \dots) .$$

A $\bar{\tau}$ kiterjesztés definíciója alapján tetszőleges n -re

$$\exists T_1^{(n)}, \dots \in \mathcal{T} \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} T_k^{(n)} \supset A_n \quad \sum_{k=1}^{\infty} \tau(T_k^{(n)}) < \bar{\tau}(A_n) + \frac{\varepsilon_n}{q^n}$$

Mivel itt $\sum_{k=1}^{\infty} 1_{T_k^{(n)}} \geq 1_{A_n}$ ($n = 0, \pm 1, \dots$), a Beppo Levi tétel szerint (a $\sum$ és

* Az Integrálhatósági kritériumok alfejezet 3) $\Rightarrow$ 1) bizonyításából.

(felcserélésekor) minden rögzített n -re

$$\begin{aligned} \int |1_{A_n} - \sum_{k=1}^{\infty} 1_{T_k^{(n)}}| d\bar{\tau} &= \int (\sum_{k=1}^{\infty} 1_{T_k^{(n)}} - 1_{A_n}) d\bar{\tau} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int 1_{T_k^{(n)}} d\bar{\tau} - 1_{A_n} d\bar{\tau} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \tau(T_k^{(n)}) - \bar{\tau}(A_n) < \frac{\varepsilon_n}{q^n} . \end{aligned}$$

Következmény. Ha $\tau : \mathcal{T} \rightarrow [0, \infty]$ reguláris előmérték és az $f : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$ függvény $\bar{\tau}$ -integrálható, akkor

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists T_1, T_2, \dots \in \mathcal{T} \quad \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots \in \mathbb{R}$$

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k 1_{T_k} \quad \bar{\tau}\text{-mm.}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| \tau(T_k) < \int |f| d\bar{\tau} + \varepsilon .$$

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ adott, és vegyünk egy

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots > 0 : \quad \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots = \varepsilon/4$$

felbontást. A tétel alapján

$$\begin{aligned} \exists \varphi_1 \text{ } \tau\text{-egyszerű} \quad \int |f - \varphi_1| d\bar{\tau} &< \varepsilon_1 \quad \varphi_1 = \sum_{k=1}^{K_1} \alpha_k^{(1)} 1_{T_k^{(1)}} \\ \sum_{k=1}^{K_1} |\alpha_k^{(1)}| \cdot \tau(T_k^{(1)}) &< \int |f| d\bar{\tau} + \varepsilon_1 . \end{aligned}$$

Definiáljuk ezzel az $f_2 := f - \varphi_1$ függvényt. Erre ugyanígy

$$\begin{aligned} \exists \varphi_2 \text{ } \tau\text{-egyszerű} \quad \int |f_2 - \varphi_2| d\bar{\tau} &< \varepsilon_2 \quad \varphi_2 = \sum_{k=1}^{K_2} \alpha_k^{(2)} 1_{T_k^{(2)}} \\ \sum_{k=1}^{K_2} |\alpha_k^{(2)}| \tau(T_k^{(2)}) &< \varepsilon_2 . \end{aligned}$$

Definiálva $f_3 := f_2 - \varphi_2$ -t, folytathatjuk ezt az eljárást úgy, hogy minden $N \in \mathbb{N}$ mellett kapunk egy olyan φ_N, f_{N+1} függvénpárt, amelyre

$$\begin{aligned} \varphi_N \text{ } \tau\text{-egyszerű} , \quad \int |f_N - \varphi_N| d\bar{\tau} &< \varepsilon_N , \quad f_{N+1} = f_N - \varphi_N \\ \varphi_N = \sum_{k=1}^{K_N} \alpha_k^{(N)} 1_{T_k^{(N)}} \quad \sum_{k=1}^{K_N} |\alpha_k^{(N)}| \tau(T_k^{(N)}) &< \varepsilon_N . \end{aligned}$$

Jegyezzük meg, hogy ekkor

$$\sum_{N=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{K_N} |\alpha_k^{(N)}| \tau(T_k^{(N)}) < \int |f| d\bar{\tau} + \frac{\varepsilon}{4}$$

és $\int |f_n| d\bar{\tau} < \varepsilon_{n-1}$, $\varphi_n = f_n - f_{n+1}$ ($n = 2, 3, \dots$). Speciálisan $\sum_{n=2}^{\infty} \int |f_n| d\bar{\tau} < \infty$. Beppo Levi tételét a $\sum_{n=2}^N |f_n|$ ($N = 2, 3, \dots$) részletösszegekre alkalmazva kapjuk, hogy a $\sum_{n=2}^{\infty} |f_n|$ függvény $\bar{\tau}$ -integrálható, és így az

$$S := \{x : \sum_{n=2}^{\infty} |f_n(x)| = \infty\}$$

halmaz $\bar{\tau}$ -0-halmaz. Ha pedig $x \in \Omega \setminus S$, akkor

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \varphi_n(x) &= (f(x) + f_2(x)) + (f_1(x) - f_2(x)) + \dots + (f_N(x) - f_{N+1}(x)) \\ &= f(x) - f_{N+1}(x) \rightarrow f(x) \quad (N \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Megjegyzés. Ha $f = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n 1_{T_n}$ és $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| \tau(T_n) < \infty$, akkor Lebesgue tétele alapján

$$\int f d\bar{\tau} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \tau(T_n).$$

Fubini tétel

Ebben az alfejezetben

$$\tau := \mu_1 \otimes \mu_2 \quad \text{ahol} \quad \mu_k : \mathcal{A}_k \rightarrow [0, \infty] \text{ mérték } \Omega_k\text{-n} \quad (k = 1, 2).$$

Tétel. Legyen $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow [0, \infty]$ egy $\bar{\tau}$ -integrálható függvény. Ekkor μ_1 -majdnem minden $x_1 \in \Omega_1$ mellett az $x_2 \mapsto \int f(x_1, x_2)$ függvény μ_2 -integrálható. A μ_1 -mm. definiált $x_1 \mapsto \int f(x_1, x_2) d\mu_2(x_2)$ függvény μ_1 -integrálható és

$$\int f d\bar{\tau} = \int \left[\int f(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) \right] d\mu_1(x_1).$$

Bizonyítás. Tudjuk:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n 1_{A_n \times B_n} \quad \bar{\tau}\text{-mm.}$$

olyan $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}_1$, $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{A}_2$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots \in \mathbb{R}$ sorozatokkal, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| \tau(A_n \times B_n) < \infty$.

1) Ha csak $f = 1_{A \times B}$, akkor

$$\begin{aligned} f d\bar{\tau} &= \tau(A \times B) = \mu_1(A) \mu_2(B) \\ &= \int \left(\int 1_B(x_2) d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1) = \\ &= \int \left(\int 1_{A \times B}(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1) \\ &= \int \left(\int f(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1). \end{aligned}$$

2) Ezután, legyen $f = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n 1_{A_n \times B_n}$ ahol $\alpha_1, \alpha_2, \dots > 0$. Ekkor

$$f_N := \sum_{n=1}^N \alpha_n 1_{A_n \times B_n} \nearrow f \quad (N \rightarrow \infty) .$$

1) alapján mindegyik N -re

$$\int f_N d\bar{\tau} = \int \left[\int f_N(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) \right] d\mu_1(x_1) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \tau(A_n \times B_n) < \infty .$$

Beppo Levi tételét alkalmazva az

$$x_1 \mapsto \int f_N(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) \quad (N = 1, 2, \dots)$$

növvő sorozatra kapjuk, hogy az $x_1 \mapsto \int f_N(x_1, x_2) d\mu_2(x_2)$ limesfüggvény μ_1 -integrálható és így

$$(*) \quad \int f(x_1, x_2) d\mu(x_2) < \infty \quad \mu_1\text{-mm. } x_1\text{-re}$$

továbbá

$$\begin{aligned} \int f d\bar{\tau} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int f_N d\bar{\tau} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \left[\int f_N(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) \right] d\mu_1(x_1) \\ &= \int \left[\int f(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) \right] d\mu_1(x_1) . \end{aligned}$$

3) Az általános eset. Ekkor $f = h_1 - h_2 + g$ írható, ahol

$$h_1 := \sum_{n: \alpha_n > 0} \alpha_n 1_{A_n \times B_n} , \quad h_2 := \sum_{n: \alpha_n < 0} \alpha_n 1_{A_n \times B_n} , \quad \bar{\tau}\{x : g(x) \neq 0\} = 0 .$$

2) szerint a tétel állítását már tudjuk a h_1, h_2 függvényekre. Így az integrál additivitása miatt a tétel következik az alábbi önmagában is érdekes lemmából.

Lemma. Ha $S \subset \Omega_1 \times \Omega_2$ egy $\bar{\tau}$ -0-halmaz, akkor $\bar{\mu}_2\{x_2 \in \Omega_2 : (x_1, x_2) \in S\} = 0$ μ_1 -majdnem minden x_1 -re.

Bizonyítás. A külső mérték definíciója szerint minden N -re vehetők olyan $R_1^{(N)}, R_2^{(N)}, \dots \in \mathcal{A}_1$ ill. $S_1^{(N)}, S_2^{(N)} \dots \in \mathcal{A}_2$ sorozatok, hogy

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \tau(R_n^{(N)} \times S_n^{(N)}) &< \frac{1}{2^N} \quad (N = 1, 2, \dots) \\ S &\subset \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n^{(N)} \times S_n^{(N)} . \end{aligned}$$

Észrevétel:

$$S \subset \{(x_1, x_2) : \sum_{N, n=1}^{\infty} 1_{R_n^{(N)} \times S_n^{(N)}}(x_1, x_2) = \infty\} .$$

Mivel $\sum_{N,n} \mu_1(R_n^{(N)}) \mu_2(S_n^{(N)}) < \sum_N 2^{-N} = 1$, a 2) rész gondolatmenete alkalmazható a $\sum_{N,n} 1_{R_n^{(N)} \times S_n^{(N)}}$ függvényre. Nevezetesen a (*) formula szerint

$$\mu_1\{x_1 : \int \sum_{N,n} 1_{R_n^{(N)} \times S_n^{(N)}}(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) = \infty\} = 0 .$$

Csak hogy az észrevétel alapján

$$\{x_1 : \overline{\mu}_2(\{x_2 : (x_1, x_2) \in S\}) > 0\} \subset \{x_1 : \int \sum_{N,n} 1_{R_n^{(N)} \times S_n^{(N)}}(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) = \infty\}.$$

Következmény. Ha $\mu_1, \dots, \mu_N$ mértékek és f egy $\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_N^-$ -integrálható függvény, akkor minden $(i_1, \dots, i_N)$ permutációra

$$\int f d\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_N^- = \int \left[\dots \left[\int \left[\int f(x_1, \dots, x_N) d\mu_{i_1}(x_{i_1}) \right] d\mu_{i_2}(x_{i_2}) \right] \dots \right] d\mu_{i_N}(x_{i_N}).$$

Bizonyítás. Tekintve, hogy

$$\int \left[\int 1_{A \times B}(x_1, x_2) d\mu_1(x_1) \right] d\mu_2(x_2) = \mu_1(A) \mu_2(B) = \int \left[\int 1_{A \times B}(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) \right] d\mu_1(x_1),$$

a tétel bizonyítása az integrálási sorrend felcserélésével is véghezvihető. Ez adja az $N = 2$ esetet. Innen azonnal következik indukcióval az állítás.

GEOMETRIAI MÉRTÉK

Cél: α -dimenziós mérték, amely pl. $\alpha=1$ -re a *hossz*, 2-dimenzióra a *felszín*, 3-dimenzióra a *térfogat* szerepét játssza. A legfontosabb elvárások: egybevágóság-invariancia, és az, hogy az $\mathbb{R}^N$ -beli α -dimenziós egységkocka (az $[0, 1]^\alpha \times \{0\}^{N-\alpha}$ alakzat) α -dimenziós térfogata $= 1$ legyen.

Figyelemre méltó, hogy ez tisztán csak a metrikus tulajdonságokon megalapozható, sőt az α dimenzió-paraméter technikailag tetszőleges nem-negatív szám lehet, annak ellenére, hogy pl. nem-egész dimenziós egységkocka nincs.

Az egész fejezeten át rögzített egy X, d metrikus tér és egy $\alpha \in \mathbb{R}_+$ szám (a konstruálandó mérték *dimenziószáma*).

Hausdorff-mértékek

Definíció. Minden $\varepsilon > 0$ mellett legyen

$$\mathcal{T}_\varepsilon := \{S \subset X : \text{diam}(S) \leq \varepsilon\}$$

$$\tau_\varepsilon(S) := \text{diam}(S)^\alpha \quad (S \in \mathcal{T}_\varepsilon).$$

Megjegyzés. Általában τ_ε nem előmérték. Pl. $\mathbb{R}$ -en $\overline{\tau_\varepsilon} \equiv 0$ ha $\alpha > 1$.

Tudjuk: $\overline{\tau_\varepsilon}$ külső mérték.

Ha $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, akkor $\mathcal{T}_{\varepsilon_1} \subset \mathcal{T}_{\varepsilon_2}$, és így $\overline{\tau_{\varepsilon_1}} \geq \overline{\tau_{\varepsilon_2}}$.

Lemma. *Külső mértékek sup-a külső mérték.*

Bizonyítás. Legyen κ_i ($i \in \mathcal{I}$) külső mértékek egy családja egy közös Ω tér fölött, és legyen $\kappa := \sup_{i \in \mathcal{I}} \kappa_i$.

1) $\kappa(\emptyset) = \sup_{i \in \mathcal{I}} \kappa_i(\emptyset) = \sup_{i \in \mathcal{I}} 0 = 0$.

2) Állítás: $X_1, X_2, \dots \subset \Omega, \Rightarrow \kappa(\bigcup_{n=1}^\infty X_n) \leq \sum_{n=1}^\infty \kappa(X_n)$. Bizonyítás:
Legyen $y < \kappa(\bigcup_{n=1}^\infty X_n)$ tetszőleges. (Belátandó: $\sum_{n=1}^\infty \kappa(X_n) > y$). Ekkor

$$\exists i_0 \in \mathcal{I} \quad \kappa_{i_0}(\bigcup_{n=1}^\infty X_n) > y$$

$$\sum_{n=1}^\infty \kappa(X_n) \geq \sum_{n=1}^\infty \kappa_{i_0}(X_n) \geq \kappa_{i_0}(\bigcup_{n=1}^\infty X_n) > y.$$

Definíció. az α -dimenziós *Hausdorff-térfogat* (az X, d metrikus térben) a

$$\text{vol}_\alpha := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \overline{\tau_\varepsilon} \quad (= \sup_{\varepsilon > 0} \overline{\tau_\varepsilon})$$

külső mérték. A vol_α -mérhető halmazokra megszorított vol_α halmazfüggvény az α -dimenziós *Hausdorff-mérték*.

Emlékeztető. Az $A, B \subset X$ halmazok távolsága

$$d(A, B) := \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\} > 0.$$

Egyszerűsége ellenére döntő a következő additivitási lemma.

Lemma. *Pozitív távolságú alakzatok Hausdorff-térfogatai összeadódnak, azaz*

$$\text{vol}_\alpha(A \cup B) = \text{vol}_\alpha(A) + \text{vol}_\alpha(B) \quad (d(A, B) > 0 \text{ } A, B \subset X).$$

Bizonyítás. Legyen $\delta := d(A, B)$, és tekintsük az

$$A' := \{x : \exists a \in A \ d(x, a) < \delta/2\} , \quad B' = \{x : \exists b \in B \ d(x, b) < \delta/2\}$$

parallelhalmazokat. Észrevételek:

- 1) $A' \cap B' = \emptyset$,
- 2) $\varepsilon < \delta/2$, $T_1, T_2, \dots \in \mathcal{T}_\varepsilon$ és $\bigcup_{n=1}^\infty T_n \supset A$ esetén $\bigcup_{n: T_n \subset A'} T_n \supset A$,
- 3) $\varepsilon < \delta/2$, $U_1, U_2, \dots \in \mathcal{T}_\varepsilon$ és $\bigcup_{n=1}^\infty U_n \supset B$ esetén $\bigcup_{n: U_n \subset B'} U_n \supset B$.

Innen azonnal adódik, hogy

$$\begin{aligned} \overline{\tau}_\varepsilon(A \cup B) &= \overline{\tau}_\varepsilon(A) + \overline{\tau}_\varepsilon(B) \quad (\varepsilon < \delta/2) \\ \text{vol}_\alpha(A \cup B) &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \overline{\tau}_\varepsilon(A \cup B) = \lim_{\delta/2 > \varepsilon \downarrow 0} \overline{\tau}_\varepsilon(A \cup B) \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} [\overline{\tau}_\varepsilon(A) + \overline{\tau}_\varepsilon(B)] . \end{aligned}$$

Következmény. Ha $A_1, A_2, \dots \subset X$, akkor

$$\text{vol}_\alpha\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) = \sum_{n=1}^\infty \text{vol}_\alpha(A_n) \quad (d(A_m, A_n) > 0 \ (m \neq n))$$

Bizonyítás. Mivel vol_α külső mérték, $\text{vol}_\alpha(\bigcup_{n=1}^\infty A_n) \leq \sum_{n=1}^\infty \text{vol}_\alpha(A_n)$.

Állítás: $\text{vol}_\alpha(\bigcup_{n=1}^N A_n) = \sum_{n=1}^N \text{vol}_\alpha(A_n)$ ($N = 1, 2, \dots$). Bizonyítás: Indukció N -re. Az $N = 2$ eset a lemmából következik. Mivel

$$d\left(\bigcup_{n=1}^N A_n, A_{N+1}\right) = \min_{n \leq N} d(A_n, A_{N+1}) > 0 ,$$

a lemma majd az indukciós feltevés szerint

$$\begin{aligned} \text{vol}_\alpha\left(\bigcup_{n=1}^{N+1} A_n\right) &= \text{vol}_\alpha\left(\bigcup_{n=1}^N A_n\right) + \text{vol}_\alpha(A_{N+1}) \\ &= \sum_{n=1}^N \text{vol}_\alpha(A_n) + \text{vol}_\alpha(A_{N+1}) . \end{aligned}$$

Az állítás mutatja, hogy

$$\text{vol}_\alpha\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) \geq \text{vol}_\alpha\left(\bigcup_{n=1}^N A_n\right) = \sum_{n=1}^N \text{vol}_\alpha(A_n) \quad (N = 1, 2, \dots) .$$

Tehát a fordított $\text{vol}_\alpha(\bigcup_{n=1}^\infty A_n) \geq \sum_{n=1}^\infty \text{vol}_\alpha(A_n)$ egyenlőtlenség is áll.

Carathéodory tétele

Tétel. Legyen A zárt $\subset X$. Ekkor A vol_α -mérhető.

Bizonyítás. Tekintsük az

$$A_\delta := \{x : d(\{x\}, A) \leq \delta\} , \quad B_\delta := X \setminus A_\delta \quad (\delta \geq 0)$$

parallelhalmazokat. Észrevétel:

- 1) $A = A_0$ ($\Leftarrow A$ zárt),
- 2) $d(B_\delta, A) \geq \delta$ ($\delta \geq 0$).

Legyen ezután $Z \subset X$ tetszőlegesen adott. Belátandó:

$$\text{vol}_\alpha(Z) = \text{vol}_\alpha(Z \cap A) + \text{vol}_\alpha(Z \setminus A).$$

Mivel vol_α külső mérték, az 1) észrevétel alapján

$$\text{vol}_\alpha(Z) \leq \text{vol}_\alpha(Z \cap A) + \text{vol}_\alpha(Z \setminus A) = \text{vol}_\alpha(Z \cap A_0) + \text{vol}_\alpha(Z \cap B_0).$$

A 2) észrevételt és az additivitási lemmát használva

$$\begin{aligned} \text{vol}_\alpha(Z) &\geq \text{vol}_\alpha((Z \cap A) \cup (Z \cap B_\delta)) \\ &= \text{vol}_\alpha(Z \cap A) + \text{vol}_\alpha(Z \cap B_\delta) \quad (\delta > 0). \end{aligned}$$

Így a tételhez elegendő belátni:

$$\text{vol}_\alpha(Z \cap B_0) = \lim_{\delta \downarrow 0} \text{vol}_\alpha(Z \cap B_\delta).$$

Itt a $\geq$ reláció (az = helyén) triviális, hiszen $B_0 \supset B_\delta$ ($\delta > 0$). Legyen

$$\delta_1 > \delta_2 > \dots \downarrow 0$$

adott tetszőlegesen. Kérdés: $\text{vol}_\alpha(B_{\delta_N} \cap Z) \nearrow \text{vol}_\alpha(B_0 \cap Z)$? Csak a $\text{vol}_\alpha(Z) < \infty$ eset érdekes. Vegyük a

$$D_k := B_{\delta_{k+1}} \setminus B_{\delta_k} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

csíkokat. Észrevétel:

- 3) $B_{\delta_n} = B_{\delta_N} \cup D_N \cup D_{N+1} \cup \dots \cup D_{n-1} \quad (n > N),$
- 4) $n > m + 1 \Rightarrow d(D_m, D_n) \geq \delta_{m+1} - \delta_n (> 0).$

A 3) észrevétel szerint

$$B_0 = B_{\delta_N} \cup D_N \cup D_{N+1} \cup \dots$$

$$\text{vol}_\alpha(B_0 \cap Z) - \text{vol}_\alpha(B_{\delta_N} \cap Z) \leq \sum_{n=N}^{\infty} \text{vol}_\alpha(D_n \cap Z) \quad (N = 1, 2, \dots).$$

A bizonyítás befejezéséhez azt kell látni, hogy itt a jobb oldal $\rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$). Ehhez elegendő, ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{vol}_\alpha(D_n \cap Z) < \infty.$$

A 4) észrevételből az additivitási lemma következménye szerint

$$\begin{aligned} \text{vol}_\alpha(Z \cap (D_1 \cup D_3 \cup D_5 \cup \dots)) &= \sum_{k=1}^{\infty} \text{vol}_\alpha(Z \cap D_{2k-1}) \\ \text{vol}_\alpha(Z \cap (D_2 \cup D_4 \cup D_6 \cup \dots)) &= \sum_{k=1}^{\infty} \text{vol}_\alpha(Z \cap D_{2k}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \text{vol}_\alpha(D_n \cap Z) &= \text{vol}_\alpha(Z \cap (D_1 \cup D_3 \cup \dots)) + \text{vol}_\alpha(Z \cap (D_2 \cup D_4 \cup \dots)) \\ &\leq \text{vol}_\alpha(Z) + \text{vol}_\alpha(Z) < \infty. \end{aligned}$$

Definíció. A *Borel halmaz* fogalmát kiterjesztjük tetszőleges topologikus terekre. Ha $Y, \mathcal{U}$ topologikus tér,

$$\{Y \text{ Borel halmazai}\} := \left[\text{Az } \{Y\text{-beli nyitottak}\} \text{ generálta } \sigma\text{-algebra} \right].$$

Következmény. Az X, d metrikus tér Borel halmazai mind vol_α -mérhetők.

Leképezési tétel

Ebben az alfejezetben X, d ill. X', d' metrikus terek és $\alpha \geq 0$ egy tetszőlegesen rögzített dimenziószám. A félreértés veszélye nélkül vol_α egyszerre jelöli az α -dimenziós Hausdorff térfogatot X -ben a d - ill. X' -ben a d' metrika szerint.

Tétel. Ha $A \subset X$ és az $f : A \rightarrow X'$ leképezés M -kontrakció, azaz ha

$$d'(f(a), f(b)) \leq M \cdot d(a, b) \quad (a, b \in A),$$

akkor

$$\text{vol}_\alpha(f(A)) \leq M^\alpha \text{vol}_\alpha(A).$$

Bizonyítás. Észrevétel: $\text{diam}(f(T)) \leq M \cdot \text{diam}(T) \quad (T \subset A).$

A $\tau_\varepsilon, \overline{\tau}_{M\varepsilon}$ halmazfüggvények és ebből a vol_α térfogat definíciója azonnal adja, hogy

$$\tau_{M\varepsilon}(f(T)) \leq M^\alpha \tau_\varepsilon(T) \quad (T \subset A, \text{diam}(T) \leq \varepsilon, \varepsilon > 0)$$

$$\overline{\tau}_{M\varepsilon}(f(S)) \leq M^\alpha \overline{\tau}_\varepsilon(S) \quad (S \subset A, \varepsilon > 0)$$

$$\text{vol}_\alpha(f(S)) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \overline{\tau}_{M\varepsilon}(f(S)) \leq \lim_{\varepsilon \downarrow 0} M^\alpha \overline{\tau}_\varepsilon(S) = M^\alpha \text{vol}_\alpha(S) \quad (S \subset A).$$

Következmény. Ha $A \subset X$ és a $g : A \rightarrow X'$ leképezés az $m > 0$ faktoral m -expanzió, azaz ha

$$d'(g(a), g(b)) \geq m \cdot d(a, b) \quad (a, b \in A),$$

akkor

$$\text{vol}_\alpha(g(A)) \geq m^\alpha \text{vol}_\alpha(A).$$

Bizonyítás. Az $m > 0$ feltétel biztosítja a g leképezés injektivitását. Így az $f := g^{-1}$ inverz egy jól-definiált $f : g(A) \rightarrow A$ leképezés, amelyre $x, y \in g(A)$ esetén

$$d'(x, y) = d'(g(f(x)), g(f(y))) \geq m \cdot d(f(x), f(y))$$

$$d(f(x), f(y)) \leq \frac{1}{m} d'(x, y).$$

A tételt a $g(A)$ halmazzal az f leképezésre alkalmazva kapjuk, hogy

$$\text{vol}_\alpha(A) = \text{vol}_\alpha(f(g(A))) \leq \frac{1}{m^\alpha} \text{vol}_\alpha(g(A)).$$

Definíció. Az $A \subset X$ és $A' \subset X'$ alakzatok *egybevágók*, ha

$$\exists f : A \leftrightarrow A' \quad d'(f(a), f(b)) = d(a, b) \quad (a, b \in A).$$

Következmény. Ha A egybevágó A' -vel, akkor $\text{vol}_\alpha(A) = \text{vol}_\alpha(A')$.

Lebesgue mérték és $\text{vol}_N \mathbb{R}^N$ -en

Ettől kezdve N egy rögzített dimenziószám, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a skalárszorzat és $\| \cdot \|$ a norma $\mathbb{R}^N$ -en. Azaz

$$\langle x, y \rangle := \sum_{n=1}^N x_n y_n, \quad \|x\| := \left[\sum_{n=1}^N x_n^2 \right]^{1/2} \quad (x = (x_1, \dots, x_N), \quad y = (y_1, \dots, y_N)).$$

$\mathbb{R}^N$ -en a $\| \cdot \|$ -ből származó euklideszi távolsággal képezzük a Hausdorff-térfogatókat, $\overline{\lambda}_N$ pedig az N -dimenziós külső Lebesgue mértéket jelöli,

$$\omega_N := \overline{\lambda}_N \{x : \|x\| \leq 1\} \quad \text{az egységgömb térfogata.}$$

Definíció. $\alpha_N := \sup \{ \overline{\lambda}_N(T) : T \subset \mathbb{R}^N, \text{diam}(T) \leq 1 \}$

Megjegyzés. 1) $\text{diam}(T) \leq 1$ esetén $\exists a_1, \dots, a_N \in \mathbb{R} \quad T \subset \prod_{n=1}^N [a_n, a_n + 1]$.
Innen $\alpha_N \leq 1$.

2) STEINER TÉTELE (biz. nélkül): Az azonos átmérőjű alakzatok közül a gömb a legnagyobb térfogatú $\mathbb{R}^N$ -ben ($\overline{\lambda}_N$ szerint). Innen $\alpha_N = \frac{\omega_N}{2^N}$.

3) Fubini tételét az $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{N-2}$ felbontásra használva, az

$$\begin{aligned} \omega_N &= \int_0^1 \omega_{N-2} \sqrt{1-r^2}^{N-2} \cdot 2r\pi \, dr \stackrel{s:=1-r^2}{=} \\ &= \pi \omega_{N-2} \int_0^1 s^{\frac{N-2}{2}} \, ds = \frac{2\pi}{N} \omega_{N-2} \end{aligned}$$

rekurzióhoz jutunk. Innen $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = \pi$ miatt

$$\omega_{2k} = \frac{\pi^k}{k!} \quad \omega_{2k+1} = \frac{2^{k+1} \pi^k}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k+1)} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Lemma. $\overline{\lambda}_N \leq \alpha_N \cdot \text{vol}_N$.

Bizonyítás. Legyen $A \subset \mathbb{R}^N$ tetszőleges. Ekkor

$$T_1, T_2, \dots \subset \mathbb{R}^N, \quad \bigcup_{n=1}^\infty T_n \supset A, \quad \text{diam}(T_n) \leq \varepsilon \quad (n = 1, 2, \dots)$$

esetén az α_N konstans definíciója szerint

$$\overline{\lambda}_N(A) \leq \sum_{n=1}^\infty \overline{\lambda}_N(T_n) \leq \alpha_N \sum_{n=1}^\infty \text{diam}(T_n)^N.$$

Következésképpen

$$\begin{aligned} \overline{\lambda}_N(A) &\leq \alpha_N \overline{\tau}_\varepsilon(A) \quad (\varepsilon > 0) \\ \overline{\lambda}_N(A) &\leq \alpha_N \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \overline{\tau}_\varepsilon(A) = \alpha_N \text{vol}_N(A). \end{aligned}$$

Definíció. $\kappa_N := \text{vol}_N[0, 1]^N$ az egységkocka Hausdorff-térfogata.

Lemma. $\text{vol}_N \leq \kappa_N \cdot \overline{\lambda}_N$.

Bizonyítás. 1) Ha Q δ -oldalú kocka $\mathbb{R}^N$ -ben, akkor $\text{vol}_N(Q) = \kappa_N \cdot \delta^N$.

Bizonyítás: $\exists f : [0, 1]^N \leftrightarrow Q \quad \|f(x) - f(y)\| = \delta \cdot \|x - y\| \quad (x, y \in [0, 1]^N)$.

Most a leképezési tétel szerint

$$\text{vol}_N(Q) = \text{vol}_N(f([0, 1]^N)) = \delta^N \cdot \text{vol}_N[0, 1]^N.$$

$$2) \text{ vol}_N(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_N, b_N) = \kappa_N \cdot (b_1 - a_1) \cdots (b_N - a_N).$$

Bizonyítás: $(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_N, b_N)$ lefedhető $\lceil \frac{b_1 - a_1}{\delta} + 1 \rceil \cdots \lceil \frac{b_N - a_N}{\delta} + 1 \rceil$ darab* δ -oldalú kockával ($\delta > 0$). Tehát

$$\begin{aligned} \text{vol}_N(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_N, b_N) &\leq \lceil \frac{b_1 - a_1}{\delta} + 1 \rceil \cdots \lceil \frac{b_N - a_N}{\delta} + 1 \rceil \kappa_N \cdot \delta^N \\ &\rightarrow \kappa_N \prod_{k=1}^N (b_k - a_k) \quad (\delta \downarrow 0). \end{aligned}$$

Mivel pedig $(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_N, b_N)$ -be beírható $\lceil \frac{b_1 - a_1}{\delta} - 1 \rceil \cdots \lceil \frac{b_N - a_N}{\delta} - 1 \rceil$ darab diszjunkt $\delta(> 0)$ -oldalú kocka,

$$\begin{aligned} \text{vol}_N(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_N, b_N) &\geq \lceil \frac{b_1 - a_1}{\delta} - 1 \rceil \cdots \lceil \frac{b_N - a_N}{\delta} - 1 \rceil \kappa_N \cdot \delta^N \\ &\rightarrow \kappa_N \prod_{k=1}^N (b_k - a_k) \quad (\delta \downarrow 0). \end{aligned}$$

3) Ha $T_n := (a_1^{(n)}, b_1^{(n)}) \times \cdots \times (a_N^{(n)}, b_N^{(n)})$ ($n = 1, 2, \dots$) és $\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n \supset A$, akkor a 2) észrevétel alapján

$$\text{vol}_N(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \text{vol}_N(T_n) = \kappa_N \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=1}^N (b_k - a_k) = \kappa_N \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_N(T_n).$$

4) Tudjuk: $\overline{\lambda}_N(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_N(T_n) : T_1, T_2, \dots \text{ nyitott téglák, } \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n \subset A \right\}.$

Vagyis 3) alapján $\text{vol}_N(A) \leq \kappa_N \cdot \overline{\lambda}_N(A).$

Tétel. $\text{vol}_N = \frac{2^N}{\omega_N} \cdot \overline{\lambda}_N.$

Bizonyítás. Belátandó: $\kappa_N = \frac{1}{\alpha_N} = \frac{2^N}{\omega_N}.$ Már tudjuk, hogy

$$1 = \lambda_N([0, 1]^N) \leq \alpha_N \text{vol}_N([0, 1]^N) = \alpha_N \kappa_N.$$

Steiner tétele szerint így $\kappa_N \geq \frac{1}{\alpha_N} = \frac{2^N}{\omega_N}.$

A $\kappa_N = \text{vol}_N[0, 1]^N \leq \frac{2^N}{\omega_N}$ reláció bizonyítása: Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen adott. Ekkor

(*) $\exists B_1, B_2, \dots$ diszj. gömbök $\subset (0, 1)^N$ $\text{diam}(B_k) \leq \varepsilon$ ($k = 1, \dots, K$)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \overline{\lambda}_N(B_k) = 1 \quad (= \overline{\lambda}_N[0, 1]^N).$$

* $\lceil z \rceil$ a $z \in \mathbb{R}$ szám egész része.

[* bizonyítása: Általában is, ha G nyitott $\subset \mathbb{R}^N$, akkor választható véges sok $T_1, \dots, T_M$ diszjunkt zárt kocka $\subset G$ -ben úgy, hogy $\sum_{m=1}^M \overline{\lambda}_N(T_m) > \overline{\lambda}_N(G)/2$. Most S_m -mel jelölve a T_m -be írt (maximális sugarú) gömböt, $\sum_{m=1}^M \overline{\lambda}_N(S_m) > \overline{\lambda}_N(G)/4$. G után $G \setminus \bigcup_{m=1}^M S_m$ térfogatának megint legalább $1/4$ -e lefedhető gömbökkel, és így tovább... Az n -ik lépésben még lefedetlenül maradt térfogat $\leq \overline{\lambda}_N(G) \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$.]

Lévéen Borel halmazok, $[0, 1]^N, B_1, B_2, \dots$ mind $\overline{\lambda}_N$ -mérhetőek. Ezért

$$\overline{\lambda}_N([0, 1]^N \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k) = \overline{\lambda}_N([0, 1]^N) - \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\lambda}_N(B_k) = 1 - 1 = 0$$

Tehát mivel $\text{vol}_N \leq \kappa_N \cdot \overline{\lambda}_N$, innen $\text{vol}_N([0, 1]^N \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k) = 0$. Következésképpen

$$\begin{aligned} \overline{\tau}_\varepsilon([0, 1]^N) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\tau}_\varepsilon(B_k) + \overline{\tau}_\varepsilon([0, 1]^N \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k) \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \text{diam}(B_k)^N + \text{vol}_N([0, 1]^N \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^N}{\omega_N} \overline{\lambda}_N(B_k) + 0 = \frac{2^N}{\omega_N}. \end{aligned}$$

Az $\varepsilon > 0$ tetszőlegessége miatt $\kappa_N = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \overline{\tau}_\varepsilon([0, 1]^N) \leq \frac{2^N}{\omega_N}$.

Definíció. $\omega_\alpha := \frac{\pi^{\alpha/2}}{\Gamma(\frac{\alpha}{2} + 1)}$ $(\alpha \geq 0)$

ahol $\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \quad (z \geq 0)$

az $n \mapsto (n-1)!$ függvény analitikus folytatása $\mathbb{R}_+$ -on az *Euler-formulával*.

Minden X, d metrikus térben és $\alpha > 0$ mellett

$\text{Vol}_\alpha := \frac{2^\alpha}{\omega_\alpha} \text{vol}_\alpha$ az α -dimenziós *normalizált Hausdorff mérték*.

Következmény. $\overline{\lambda}_N = \text{Vol}_N \quad (N = 1, 2, \dots)$.

Megjegyzés. Kérdés: Van-e $\alpha \notin \mathbb{N}$ -re ” α -dimenziós halmaz”? Azaz

$\forall \alpha \exists? A \subset \mathbb{R}^N \quad \text{Vol}_\alpha(A) > 0 = \text{Vol}_\beta(A) = 0 \quad (\beta > \alpha), \text{Vol}_\gamma(A) = \infty \quad (\gamma < \alpha)$.

Válasz: IGEN.

Példa. A $C := [0, 1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{3^{n-1}} \left(\frac{2k-1}{3^n}, \frac{2k}{3^n}\right)$ Cantor halmaz dimenziója $\frac{\log 2}{\log 3}$.

Bizonyítás: tetszőleges α mellett $\tau_{1/3^K}^{(\alpha)}(C) = \tau_{1/3^K}^{(\alpha)}\left([0, 1] \setminus \bigcup_{n=1}^K \bigcup_{k=1}^{3^{n-1}} \left(\frac{2k-1}{3^n}, \frac{2k}{3^n}\right)\right)$
 $= \tau_{1/3^K}^{(\alpha)}(2^K \text{ db. diszj. } \frac{1}{3^K} \text{ hosszú interv.}) = 2^K \cdot \left(\frac{1}{3^K}\right)^\alpha \quad (K = 1, 2, \dots)$. Innen $K \rightarrow \infty$ -re $\text{vol}_{\log 2 / \log 3}(C) = 1$.

Felszín-formula

Lemma. Legyen $L : \mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}^N$ egy lineáris leképezés, ahol $K \leq N$. Ekkor

$$\text{Vol}_K(LA) = [\det(L^*L)]^{1/2} \cdot \text{Vol}_K(A) \quad (A \subset \mathbb{R}^K).$$

Bizonyítás. Tudjuk lineáris algebrából*:

$$\exists \{e'_1, \dots, e'_K\} \text{ ORTN} \subset \mathbb{R}^K \quad \exists \{e''_1, \dots, e''_K\} \text{ ORTN} \subset \mathbb{R}^N \quad \exists \alpha_1, \dots, \alpha_K \geq 0$$

$$Le'_k = \alpha_k e''_k \quad (k = 1, \dots, K)$$

$$\text{és } \exists U : L\mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}^K \text{ izometria} \quad Ue''_k = e'_k \quad (k = 1, \dots, K).$$

Jegyezzük meg, hogy a leképezési tétel alapján

$$\text{Vol}_K(UL(A)) = \text{Vol}_K(L(A)) \quad (A \subset \mathbb{R}^K).$$

Észrevétel:

$$ULe'_k = \alpha_k e'_k \quad (k = 1, \dots, K).$$

Következésképpen $\overline{\lambda}_K(UL(A)) = \alpha_1 \cdots \alpha_K \overline{\lambda}_K(A)$ ($A \subset \mathbb{R}^K$). Innen

$$\begin{aligned} \text{Vol}_K(L(A)) &= \text{Vol}_K(UL(A)) = \overline{\lambda}_K(UL(A)) = \alpha_1 \cdots \alpha_K \overline{\lambda}_K(A) \\ &= \alpha_1 \cdots \alpha_K \text{Vol}_K(A) \quad (A \subset \mathbb{R}^K). \end{aligned}$$

Mivel az L lineáris operátor adjungáltjára

$$L^* : e''_k \mapsto \alpha_k e'_k, \quad L^*L : e'_k \mapsto \alpha_k^2 e'_k \quad (k = 1, \dots, K),$$

fennáll $\det(L^*L) = \alpha_1^2 \cdots \alpha_K^2$.

Következmény. Ha $\det(L^*L) \neq 0$, akkor $\|Lv\| \geq \|[L^*L]^{-1}\|^{-1/2} \|v\|$ ($v \in \mathbb{R}^K$).

Bizonyítás. Az előbbi jelölésekkel

$$\begin{aligned} Lv &= U \sum_{k=1}^K \alpha_k \langle v, e'_k \rangle e''_k \\ \|Lv\| &= \left[\sum_{k=1}^K \alpha_k^2 \langle v, e'_k \rangle^2 \right]^{1/2} \geq \alpha_1 \left[\sum_{k=1}^K \langle v, e'_k \rangle^2 \right]^{1/2} \\ &\geq \alpha_1 \|v\| \quad \text{ahol } 0 < \alpha_1 \leq \cdots \leq \alpha_K. \end{aligned}$$

Mivel $L^*L : e'_k \mapsto \alpha_k^2 e'_k$, $[L^*L]^{-1} : e'_k \mapsto \alpha_k^{-2} e'_k$. Innen $\alpha_1 = \|[L^*L]^{-1}\|^{-1/2}$.

Definíció. Legyenek $K \leq N$ (egészek), G nyitott $\subset \mathbb{R}^K$ és $f \in \mathcal{C}^1(G, \mathbb{R}^N)$.

$$\text{Jac}(f)(x) := [\det(f'(x)^* f'(x))]^{1/2}.$$

az f függvény *Jacobi-determinánsa* az $x \in G$ pontnál.

* Az ORTN rövidítés jelentése: *ortonormált*. Azaz $\{e_1, \dots, e_n\} \text{ ORTN} \subset \mathbb{R}^n$, ha $\langle e_i, e_j \rangle = 1_{\{i=j\}}(j)$ ($i, j = 1, \dots, n$).

Megjegyzés. A determinánsok szorzástételéből

$$\text{Jac}(f)(x) = [(\det f'(x))^2]^{1/2} = |\det f'(x)| \quad \text{ha } K = N.$$

Tétel. Legyen $K \leq N$, G nyitott $\subset \mathbb{R}^K$ és $f \in \mathcal{C}^1(G, \mathbb{R}^N)$. Tegyük fel, hogy az f leképezés injektív és $\text{Jac}(f)(x) \neq 0 \quad (x \in G)$. Ekkor

$$\text{Vol}_K f(A) = \int_A \text{Jac}(f) d\text{Vol}_K \quad (A \text{ kompakt intervallum } \subset G) .$$

Bizonyítás. Legyen $A := I_1 \times \dots \times I_K$ ahol $I_1, \dots, I_K$ korlátos zárt intervallumok $\mathbb{R}$ -ben. Rendre $n = 1, 2, \dots$ mellett felbontjuk az A téglát n^K darab $\frac{\lambda(I_1)}{n} \times \dots \times \frac{\lambda(I_n)}{n}$ oldalhosszú páronként diszjunkt $T_i^{(n)}$ téglára. Azaz

$$A = T_1^{(n)} \dot{\cup} T_2^{(n)} \dot{\cup} \dots \dot{\cup} T_{n^K}^{(n)} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

(itt $\dot{\cup}$ jelentése *diszjunkt unió*). Mivel az f leképezés injektív,

$$\begin{aligned} \text{Vol}_K(f(A)) &= \sum_{i=1}^{n^K} \text{Vol}_K(f(T_i^{(n)})) = \sum_{i=1}^{n^K} \frac{\text{Vol}_K(f(T_i^{(n)}))}{\text{Vol}_K(T_i^{(n)})} \text{Vol}_K(T_i^{(n)}) \\ &= \int_A \Phi_n d\text{Vol}_K \end{aligned}$$

az A téglán értelmezett λ_K -egyszerű

$$\Phi_n(x) := \frac{\text{Vol}_K(f(T_i^{(n)}))}{\text{Vol}_K(T_i^{(n)})} \quad (x \in T_i^{(n)}, i = 1, \dots, n^K)$$

függvényekkel ($n = 1, 2, \dots$). Elegendő látni:

$$\Phi_n \rightrightarrows \text{Jac}(f) \quad A \text{ fölött} \quad (n \rightarrow \infty) .$$

Az összes n, i indexpárra legyen

$$x_i^{(n)} := [T_i^{(n)} \text{ egy csúcsa}] \quad L_{n,i} : T_i^{(n)} \ni x \mapsto f(x_i^{(n)}) + f'(x_i^{(n)})(x - x_i^{(n)}) .$$

Mivel az $L_i^{(n)}$ leképezés deriváltja $f'(x_i^{(n)})$ állandóan,

$$\text{Vol}_K(P_i^{(n)}) = \text{Jac}(f)(x_i^{(n)}) \text{Vol}_K(T_i^{(n)}) \quad \text{a } P_i^{(n)} := L_i^{(n)}(T_i^{(n)}) \text{ paralelepipedonra.}$$

Tehát bevezetve a

$$\Psi_n(x) := \text{Jac}(f)(x_i^{(n)}) \quad (x \in T_i^{(n)})$$

függvényeket, mindegyik n -re

$$\text{ran}(\Phi_n / \Psi_n) = \left\{ \frac{\text{Vol}_K(f(T_i^{(n)}))}{\text{Vol}_K(P_i^{(n)})} : i = 1, \dots, n^K \right\} .$$

Csak hogy mivel $f \in \mathcal{C}^1(G, \mathbb{R}^N)$, az f' derivált egyenletesen folytonos a kompakt A halmazon, és így a $\Psi_1, \Psi_2, \dots$ függvénysorozat egyenletesen konvergál $\text{Jac}(f)$ -hez A fölött. Vagyis elegendő megmutatni, hogy

$$\max_{i=1}^{n^K} \frac{\text{Vol}_K(f(T_i^{(n)}))}{\text{Vol}_K(P_i^{(n)})}, \min_{i=1}^{n^K} \frac{\text{Vol}_K(f(T_i^{(n)}))}{\text{Vol}_K(P_i^{(n)})} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Legyen n, i tetszőlegesen rögzítve. Írjunk röviden $T := T_i^{(n)}$, $P := P_i^{(n)}$, $L := L_i^{(n)}$, $\bar{x} := x_i^{(n)}$ -t. Mivel feltevés szerint $\text{Jac}(f)(\bar{x}) \neq 0$, az L affin leképezés injektív, azaz $L : T \leftrightarrow P$. Az injektivitást eleve feltettük f -ről, így $f : T \leftrightarrow f(T)$, és a

$$\Lambda := f \circ L^{-1} : P \leftrightarrow f(T)$$

leképezés jól-definiált. Legyen

$$M := \sup_{p, q \in P} \frac{\|\Lambda(p) - \Lambda(q)\|}{\|p - q\|}, \quad m := \inf_{p, q \in P} \frac{\|\Lambda(p) - \Lambda(q)\|}{\|p - q\|}.$$

A leképezési tétel és következménye szerint

$$m^K \leq \frac{\text{Vol}_K(f(T))}{\text{Vol}_K(P)} \leq M^K.$$

Cél: i -től független becslés $m(=m_i^{(n)})$, $M(=M_i^{(n)})$ -re, amely $n \rightarrow \infty$ -nél $\rightarrow 1$. Mivel P minden pontja felírható $L(x)$, $x \in T$ alakban,

$$M = \sup_{x, y \in T} \frac{\|f(x) - f(y)\|}{\|L(x) - L(y)\|}, \quad m = \inf_{x, y \in T} \frac{\|f(x) - f(y)\|}{\|L(x) - L(y)\|}.$$

Az alapötlet az, hogy f "keveset" különbözik L -től T fölött. Legyen g az eltérésük, és legyen ω a folytonossági modulusa f' -nek (az egész A -n). Azaz

$$g := f - L \quad \omega(\delta) := \sup_{\substack{\|x-y\| \leq \delta \\ x, y \in A}} \|f(x) - f(y)\| \quad (\delta \geq 0).$$

Legyen $x, y \in T$ tetszőleges. Most a $\triangle$ -egyenlőtlenség szerint

$$\begin{aligned} \frac{\|f(x) - f(y)\|}{\|L(x) - L(y)\|} &= \frac{\|(L(x) - L(y)) + (g(x) - g(y))\|}{\|L(x) - L(y)\|} \\ &\geq \frac{\|L(x) - L(y)\| - \|g(x) - g(y)\|}{\|L(x) - L(y)\|} \\ &= 1 - \frac{\|g(x) - g(y)\|}{\|f'(\bar{x})(x - y)\|}. \end{aligned}$$

Ugyanígy $\frac{\|f(x) - f(y)\|}{\|L(x) - L(y)\|} \leq 1 + \frac{\|g(x) - g(y)\|}{\|f'(\bar{x})(x - y)\|}$. A lemma következményét az $f'(\bar{x})$ operátorra alkalmazva

$$1 - \theta \leq \frac{\|f(x) - f(y)\|}{\|L(x) - L(y)\|} \leq 1 + \theta \quad \text{ahol } \theta := \|f'^* f'(\bar{x})^{-1}\|^{1/2} \frac{\|g(x) - g(y)\|}{\|x - y\|}.$$

A kontrakciós lemma szerint tehát

$$1 - \|f'^* f'(\bar{x})^{-1}\|^{\frac{1}{2}} \sup \|g'(T)\| \leq \frac{\|f(x) - f(y)\|}{\|L(x) - L(y)\|} \leq 1 + \|f'^* f'(\bar{x})^{-1}\|^{\frac{1}{2}} \sup \|g'(T)\|.$$

Ezt már könnyű i -től függetlenül becsülni: Mivel a teljes A alakzat kompakt és $f \in \mathcal{C}^1(G, \mathbb{R}^N)$, így jól-definiált és $\max \| [f' * f']^{-1}(T) \| < \infty$. Másrészt $x \in T$ -re $g'(x) = f'(x) - f'(\bar{x})$, és innen $\|g'(x)\| \leq \omega(\text{diam}(T)) = \omega(\text{diam}(A)/n)$. Vagyis

$$1 - \max \| [f' * f']^{-1}(T) \|^{1/2} \omega\left(\frac{\text{diam}(A)}{n}\right) \leq m_i^{(n)} \leq M_i^{(n)} \leq 1 + \max \| [f' * f']^{-1}(T) \|^{1/2} \omega\left(\frac{\text{diam}(A)}{n}\right).$$

Itt a jobb és bal oldal i -től független és $\rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$).

Többváltozós helyettesítés

Tétel. Tegyük fel, hogy $K \leq N$, G nyitott $\subset \mathbb{R}^K$ és $f \in C^1(G, \mathbb{R}^N)$ egy injektív leképezés, amelynél $\text{Jac}(f)(x) \neq 0$ ($x \in G$). Ekkor minden $\phi : f(G) \rightarrow \mathbb{R}$ Borel-mérhető Vol_K -integrálható függvényre

$$\int_{f(G)} \phi(y) d\text{Vol}_K(y) = \int_G \phi(f(x)) \text{Jac}(f)(x) d\text{Vol}_K(x).$$

Bizonyítás. 1) A felszín-formula szerint, ha T kompakt téglac G , akkor a $\phi := 1_{f(T)}$ függvényre

$$\begin{aligned} \int_{f(G)} \phi d\text{Vol}_K &= \text{Vol}_K f(T) = \int_T \text{Jac}(f) d\text{Vol}_K \\ &= \int_G 1_T \text{Jac}(f) d\text{Vol}_K = \int (\phi \circ f) \text{Jac}(f) d\text{Vol}_K \end{aligned}$$

mivel most $1_T = 1_{f(T)} \circ f = \phi \circ f$.

2) Az előző alapján azonnal kapjuk (v.ö. Egyszerű függvények alfejezet), hogy a tétel állítása teljesül a

$$\begin{aligned} \Phi &:= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n 1_{f(T_n)} \quad T_1, T_2, \dots \text{ kompakt téglac } G \\ &\quad \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| \text{Vol}_K f(T_n) < \infty, \end{aligned}$$

alakú függvényekre is. Ugyanis $\phi_n := 1_{f(T_n)}$ -et írva

$$\begin{aligned} \int_{f(G)} \phi_n d\text{Vol}_K &= \int_G (\phi_n \circ f) d\text{Vol}_K \quad (n = 1, 2, \dots) \\ \sum_n \alpha_n \int_{f(G)} \phi_n d\text{Vol}_K &= \sum_n \alpha_n \int_G (\phi_n \circ f) d\text{Vol}_K \\ \int_{f(G)} \sum_n \alpha_n \phi_n d\text{Vol}_K &= \int_G \sum_n \alpha_n (\phi_n \circ f) d\text{Vol}_K. \end{aligned}$$

3) Tekintsük az általános esetet. Legyen $\Psi : f(G) \rightarrow \mathbb{R}$ egy Borel mérhető Vol_K -integrálható függvény.

3a) Észrevétel: Található olyan, a 2)-ben tárgyalt típusú függvény, amely Vol_K -majdnem mindenütt $= \phi$.

Bizonyítás: Tekintsük a

$$\mathcal{T} := \{f(T) : T \text{ kompakt tégl} \subset G\}$$

halmazcsaládot. Ha T kompakt $\subset G$, akkor (f folytonossága miatt) az $f(T)$ kép kompakt, így speciálisan zárt is $\mathbb{R}^N$ -ben. Tehát Carathéodory tétele szerint a $\mathcal{T}$ -beli halmazok mind Vol_K -mérhetők. Sőt, mivel $\mathcal{T}$ tagjai Borel halmazok és Vol_K mérték a Borel halmazokra megszorítva, $\text{Vol}_K|_{\mathcal{T}}$ reguláris előmért $f(G)$ fölött. Tehát az egyszerű függvények soraival való előállíthatóságról szóló tétel szerint 3a) következik az alábbi állításból.

Állítás: $\{f(G) \text{ Borel részei}\} = [f(\mathcal{T}) \text{ generálta } \sigma\text{-algebra } f(G)\text{-ben}]$.

Itt a $\supset$ tartalmazás triviális. $\subset$ bizonyítása: Definíció szerint $\{f(G) \text{ Borel részei}\} = [\{f(G) \text{ rész-halmaz-topológiájában nyitottak}\} \text{ gen. } \sigma\text{-alg.}]$. Így elég belátni, hogy

$$\{f(G) \text{ nyitott részei}\} \subset [f(\mathcal{T}) \text{ gen. } \sigma\text{-alg. } f(G)\text{-ben}].$$

Legyen H nyitott $\subset f(G)$ adott. Ekkor $f^{-1}(H)$ nyitott $\subset G$. Lindelöf tétele szerint most talaálható $T_1, T_2, \dots$ kompakt tégl $\subset G$ úgy, hogy $f^{-1}(H) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$. Tehát $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} f(T_n) \in [f(\mathcal{T}) \text{ gen. } \sigma\text{-alg. } f(G)\text{-ben}]$.

3b) Észrevétel: Az $f(G)$ -beli Vol_K -0-halmazok a G -beli Vol_K -0-halmazok f -képei.

Bizonyítás: Legyen $S \subset f(G)$, $\text{Vol}_K(S) = 0$. Belátandó: $\text{Vol}_K f^{-1}(S) = 0$. Lindelöf tétele alapján

$$\exists K_1, K_2, \dots \text{ kompakt tégl} \subset G \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = G.$$

Megmutatjuk, hogy $\text{Vol}_K\{x \in K_n : f(x) \in S\} = 0$ mindegyik n indexre. Tegyük fel, hogy ezzel ellentétben valamelyik m -re $\text{Vol}_K\{x \in K_m : f(x) \in S\} > 0$ volna. Mivel K_m kompakt, f' folytonos és $\text{Jac}(f) > 0$,

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \frac{\|f(x) - f(y)\|}{\|x - y\|} \geq \varepsilon \quad (x, y \in K_m).$$

Innen a leképezési tétel alapján a

$$\begin{aligned} 0 &= \text{Vol}_K\{y \in S : f^{-1}(y) \in K_m\} = \text{Vol}_K f\{x \in K_m : f(x) \in S\} \\ &\leq \varepsilon^K \text{Vol}_K\{x \in K_m : f(x) \in S\} > 0 \end{aligned}$$

ellentmondásra jutnánk.

A két észrevételt felhasználva, egyrészt alkalmas $T_1, T_2, \dots$ G -beli kompakt téglákkal és a $\sum_n \alpha_n \text{Vol}_K(T_n) < \infty$ feltételt kielégítő együtthatókkal

$$\phi \circ f = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n 1_{f(T_n)} \right) \circ f \quad \text{Vol}_K\text{-mm } G \text{ fölött,}$$

másrészt

$$\begin{aligned}
\int_{f(G)} \phi \, d\text{Vol}_K &= \int_{f(G)} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n 1_{f(T_n)} \right) d\text{Vol}_K \stackrel{2)}{=} \\
&= \int_G \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n 1_{f(T_n)} \circ f \right) \cdot \text{Jac}(f) \, d\text{Vol}_K \\
&= \int_G (\phi \circ f) \text{Jac}(f) \, d\text{Vol}_K .
\end{aligned}$$

Következmény. (Általános felszín-formula). Az $A \subset G$ Borel halmazokra

$$\text{Vol}_K f(A) = \int_A \text{Jac}(f) \, d\text{Vol}_K .$$

Bizonyítás. A $\phi := 1_{f(A)}$ függvényt alkalmazva

$$\text{Vol}_K f(A) = \int_{f(G)}^A \phi \, d\text{Vol}_K = \int_G \underbrace{(\phi \circ f)}_{1_A} \text{Jac}(f) \, d\text{Vol}_K .$$

ELŐJELES MÉRTÉKEK

Ha a mérték fogalmát ki akarjuk terjeszteni $[0, \infty]$ -értékű halmazfüggvényekről $[-\infty, \infty]$ -beli értékűekre, a σ -additivitást nem követelhetjük meg korlátlanul úgy, mint a pozitív esetben. Ugyanis az összeadást $\mathbb{R}$ -ről $[-\infty, \infty]$ -re nem lehet folytonosan kiterjeszteni, akármilyen, az $\mathbb{R}$ -ét folytató Hausdorff topológiát veszünk $[-\infty, \infty]$ -en. Ebben a rövid fejezetben csak a (továbbiakhoz legszükségesebb) $\mathbb{R}$ -beli értékű előjeles mértékeket tárgyaljuk.

Az egész fejezeten keresztül legyen $\Omega, \mathcal{A}$ egy rögzített σ -algebra.

Korlátos változású előjeles mértékek

Definíció. Egy $\nu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ halmazfüggvény *korlátos változású előjeles mérték*, ha

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n) \quad \left(= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \nu(A_n)\right) \quad (A_1, A_2, \dots \text{ diszjunkt } \in \mathcal{A}).$$

Megjegyzés. Ha $\nu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ egy korlátos változású előjeles mérték és $A_1, A_2, \dots$ diszjunkt $\in \mathcal{A}$, akkor szükségképpen $\sum_{n=1}^{\infty} |\nu(A_n)| < \infty$. Speciálisan $\nu(\emptyset) = 0$ (mivel $\emptyset = \bigcup_{n=1}^{\infty} \emptyset$ miatt $\sum_{n=1}^{\infty} |\nu(\emptyset)| < \infty$).

Bizonyítás. Sorelméletből tudjuk: ha $a_1, a_2, \dots \in \mathbb{R}$ és $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty$, akkor vagy $a_n \not\rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) vagy pedig tetszőleges $q \in \mathbb{R}$ számhoz található olyan $\pi : \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$ indexpermutáció, hogy $\sum_{i=1}^{\infty} a_{\pi(i)} = q$. Márpedig a $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ unió (és így a $\nu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$ szám) független a tagok sorrendjétől.

Példa. Legyen $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ egy mérték, $f : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$ pedig egy μ -integrálható függvény. Ekkor a

$$\nu(A) := \int_A f d\mu \quad (A \in \mathcal{A})$$

halmazfüggvény korlátos változású előjeles mérték Ω fölött Lebesgue tétele szerint. Látni fogjuk, minden korlátos változású előjeles mérték ilyen.

Jelölés: A $d\nu = f d\mu$ formális rövidítést használjuk, ha a ν korlátos változású előjeles mérték a példabeli alakban áll elő.

Ettől kezdve az egész alfejezetben $\nu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ egy (tetszőlegesen adott) korlátos változású előjeles mértéket fog jelölni.

Propozíció. Tegyük fel, hogy ν felveszi a maximumát egy $P \in \mathcal{A}$ halmaznál. Ekkor a

$$\begin{aligned} \nu_+(A) &:= \nu(A \cap P), \quad \nu_-(A) := -\nu(A \setminus P), \\ |\nu|(A) &:= \nu_+(A) + \nu_-(A) \end{aligned} \quad (A \in \mathcal{A})$$

nem-negatív halmazfüggvények mértékek Ω fölött, és

$$d\nu = (1_P - 1_{\Omega \setminus P}) d|\nu|.$$

Bizonyítás. Ha $A_1, A_2, \dots$ diszj. $\in \mathcal{A}$ akkor szintén $A_1 \cap P, A_2 \cap P, \dots$ diszj. $\in \mathcal{A}$ és $A_1 \setminus P, A_2 \setminus P, \dots$ diszj. $\in \mathcal{A}$. Vagyis a ν_+, ν_- ill. $|\nu| = \nu_+ - \nu_-$ halmazfüggvények korlátos változású előjeles mértékek. Jegyezzük meg, hogy

$$\nu_-(A) = \nu(A \setminus P) = \nu(\emptyset) = 0 \quad (P \supset A \in \mathcal{A}),$$

$$\nu_+(B) = \nu(B \cap P) = \nu(\emptyset) = 0 \quad (\Omega \setminus P \supset B \in \mathcal{A}).$$

Mivel $\nu(A) = \nu((A \cap P) \cup (A \setminus P))$ ($A \in \mathcal{A}$), azaz $\nu = \nu_+ - \nu_-$, azt kell még csak belátnunk, hogy

$$\nu_+(A), \nu_-(B) \geq 0 \quad (A \subset P, B \subset \Omega \setminus P, A, B \in \mathcal{A}).$$

Legyen $P \supset A \in \mathcal{A}$. Ekkor $A \cup (P \setminus A) = P$, ahonnan $\nu_+(A) + \nu_+(P \setminus A) = \nu(A) + \nu(P \setminus A) = \nu(P)$, azaz

$$\nu_+(A) = \nu(P) - \nu(P \setminus A) = \max \nu - \nu(P \setminus A) \geq 0.$$

Tekintsük ezután az $\Omega \setminus P \supset B \in \mathcal{A}$ esetet. Ekkor $P \cap B = \emptyset$, ahonnan $\nu(P \cup B) = \nu(P) + \nu(B)$, azaz

$$\nu_-(B) = -\nu(B \setminus P) = -\nu(B) = \nu(P) - \nu(P \cup B) = \max \nu - \nu(P \cup B) \geq 0.$$

Lemma. Ha $X_k, Y_k \in \mathcal{A}$ ($k = 1, 2, \dots$), akkor

$$1) \quad X_1 \subset X_2 \subset \dots \text{ esetén } \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \nu(X_N),$$

$$2) \quad Y_1 \supset Y_2 \supset \dots \text{ esetén } \nu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} Y_n\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \nu(Y_N).$$

Bizonyítás. 1) A $D_N := X_N \setminus \bigcup_{n < N} X_n$ ($N = 1, 2, \dots$) halmazok diszjunktak és $X_N = D_1 \cup \dots \cup D_N$ ($N = 1, 2, \dots$). Innen

$$\nu\left(\bigcup_N X_N\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(D_n) = \lim_N \sum \nu(D_n) = \lim_N \sum_{n=1}^N \nu(D_n) = \lim_N \nu(X_N).$$

2) Most az $X_N := \Omega \setminus Y_N$ ($N = 1, 2, \dots$) komplementer-halmazokra alkalmazhatjuk 1)-et.

Következmény. Ha $\sup \nu < \infty$, akkor létezik $P \in \mathcal{A}$, amelyre $\nu(P) = \max \nu$.

Bizonyítás. Legyen $M := \sup \nu (< \infty$ feltevés szerint), és válasszunk egy olyan $A_1, A_2, \dots$ sorozatot, amelynél

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \infty \quad \text{ahol} \quad \varepsilon_n := M - \nu(A_n) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Észrevétel: Általában is,

$$\nu(Z_k) \geq M - \delta_k \quad (k = 1, 2), \Rightarrow \nu(Z_1 \cup Z_2) \geq M - (\delta_1 + \delta_2).$$

Ugyanis $\alpha := \nu(Z_1 \setminus Z_2)$, $\beta := \nu(Z_2 \setminus Z_1)$ ill. $\gamma := \nu(Z_1 \cap Z_2)$ -vel

$$\begin{aligned} \nu(Z_1 \cup Z_2) &= \alpha + \beta + \gamma = (\alpha + \gamma) + (\beta + \gamma) - \gamma \\ &= \nu(Z_1) + \nu(Z_2) - \underbrace{\nu(Z_1 \cap Z_2)}_{\leq M} \\ &\geq M - \delta_1 + M - \delta_2 - M. \end{aligned}$$

Ezt felhasználva k szerinti indukcióval láthatjuk, hogy

$$\nu\left(\bigcup_{n=N}^{N+k} A_n\right) \geq M - (\varepsilon_N + \dots + \varepsilon_{N+k}) \quad (N, k = 1, 2, \dots),$$

ahonnan a lemma 1) pontja szerint

$$\nu\left(\bigcup_{n \geq N} A_n\right) \geq M - \sum_{n \geq N} \varepsilon_n \quad (N = 1, 2, \dots).$$

Most a lemma 2) pontját alkalmazva kapjuk, hogy =

$$\nu\left(\bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n \geq N} A_n\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \nu\left(\bigcup_{n \geq N} A_n\right) \geq \lim_{N \rightarrow \infty} \left(M - \sum_{n \geq N} \varepsilon_n\right) = M ,$$

vagyis a $P := \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n \geq N} A_n$ választás megfelel.

Tétel. (Hahn-Jordan felbontási tétel). Legyen $\nu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ egy korlátos változású előjeles mérték. Ekkor található pontosan egy $|\nu| : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ (pozitív) mérték és egy $|\nu|$ -0-halmaztól eltekintve egyértelmű $\mathcal{A}$ -mérhető $\text{sgn}(\nu) : \Omega \rightarrow \{\pm 1\}$ függvény, amelyre

$$d\nu = \text{sgn}(\nu) d|\nu| .$$

Bizonyítás. Egzisztencia: Tekintsük a

$$\mathcal{P} := \{A \in \mathcal{A} : \forall X \in \mathcal{A} \ X \subset A \Rightarrow \nu(X) \geq 0\}$$

halmazcsaládot, és legyen $M := \sup(\nu|\mathcal{P})$. Mivel $\emptyset \in \mathcal{P}$, $M \geq 0$. Vegyük észre, hogy $\mathcal{P}$ -beli halmazok megszámlálható egyesítése is $\mathcal{P}$ -beli. Tehát véve egy olyan $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{P}$ sorozatot, amelynél $M = \lim_n \nu(A_n)$, a $P := \bigcup_n A_n$ halmazra

$$P \in \mathcal{P} , \quad \nu(P) = M ,$$

mivel $M \geq \nu(P) = \nu(A_n) + \nu(P \setminus A_n) \geq \nu(A_n)$ ($n = 1, 2, \dots$). Az egzisztencia-bizonyítás befejezéséhez megmutatjuk, hogy

$$\nu(B) \leq 0 \quad (B \subset \Omega \setminus P \ B \in \mathcal{A}).$$

Tekintsünk egy tetszőleges $\mathcal{A}$ -beli $B \subset \Omega \setminus P$ halmazt. Állítás:

$$\Omega \setminus P \supset B \in \mathcal{A} \text{ és } \nu(B) > 0, \Rightarrow \sup_{B \supset X \in \mathcal{A}} \nu(X) = \infty .$$

Bizonyítás: ν_B -vel jelölve a ν korlátos változású előjeles mérték B -re való megszorítottját, a következményt és a propozíciót erre alkalmazva, $\sup \nu_B < \infty$ esetén B -n belül volna maximális pozitív ν -mértékű P_B halmaz, és ennek minden $\mathcal{A}$ -beli részhalmaza ≥ 0 ν -mértékű lenne. Ekkor azonban a

$$P' := P_B \cup P \in \mathcal{P} \text{ és } \nu(P') = \nu(P) + \nu(P_B) > \nu(P) = M$$

volna, ellentétben M definíciójával.

Tegyük fel ezután, hogy valamelyik $B_0 \in \mathcal{A}$ halmazra $B_0 \subset \Omega \setminus P$ és $\nu(B_0) > 0$. Ekkor az állítás szerint $\sup_{B_0 \supset X \in \mathcal{A}} \nu(X) = \infty$. Ezért van $B_1 \subset B_0$, amelynél $\nu(B_1) \geq \nu(B_0) + 1$. A gondolatmenetet alkalmazhatjuk most B_0 helyett a B_1 halmazra, égy így tovább... Ezzel kapunk egy $B_1 \supset B_2 \supset \dots$ sorozatot, ameyre $\nu(B_k) \geq k$ ($k = 1, 2, \dots$). A lemma 2) pontja alapján ekkor

$$\nu\left(\bigcap_k B_k\right) = \lim_k \nu(B_k) = \infty$$

volna, ami ellentmond a $\text{ran}(\nu) \subset \mathbb{R}$ feltételnek.

Unicitás: Elég megmutatnunk, hogy szükségképpen

$$d\nu = f d\mu \quad \mu \geq 0 \ |f| = 1 , \Rightarrow \mu(A) = \sup_{A \supset X \in \mathcal{A}} |\nu(X)| + |\nu(A \setminus X)| \quad (A \in \mathcal{A}) .$$

Tegyük fel, hogy μ és f teljesítik a feltételeket. Tudjuk, most van olyan $\mathcal{A}$ -mérhető $\tilde{f}$ függvény is, amely μ -majdnem mindenütt egybeesik f -fel. Tekintsük a

$$P := \{x \in \Omega : \tilde{f}(x) = 1\}$$

halmazt. Mivel ezzel $\tilde{f} = 1_P - 1_{\Omega \setminus P}$, valahányszor $X \subset A$, $A, X \in \mathcal{A}$, fennáll

$$\begin{aligned}
|\nu(X)| + |\nu(A \setminus X)| &= |\nu(X \cap P) + \nu(X \setminus P)| + |\nu((A \setminus X) \cap P) + \nu((A \setminus X) \setminus P)| \\
&\leq |\nu(X \cap P)| + |\nu(X \setminus P)| + |\nu((A \setminus X) \cap P)| + |\nu((A \setminus X) \setminus P)| \\
&= \left| \int_{X \cap P} \tilde{f} d\mu \right| + \left| \int_{X \setminus P} \tilde{f} d\mu \right| + \left| \int_{(A \setminus X) \cap P} \tilde{f} d\mu \right| + \left| \int_{(A \setminus X) \setminus P} \tilde{f} d\mu \right| \\
&= \mu(X \cap P) + \mu(X \setminus P) + \mu((A \setminus X) \cap P) + \mu((A \setminus X) \setminus P) \\
&= \mu(A) = \mu(A \cap P) + \mu(A \setminus (A \cap P)) \\
&= \left| \int_A \tilde{f} d\mu \right| + \left| \int_{\Omega \setminus A} \tilde{f} d\mu \right| \\
&= |\nu(A \cap P)| + |\nu(A \setminus (A \cap P))|.
\end{aligned}$$

Az unicitási bizonyításból kiderül a $|\nu|$ változási mérték explicit alakja. Sőt hasonló módszerrel formula nyerhető a ν_+ , ν_- növekmény-mértékekre is.

Következmény. Minden $A \in \mathcal{A}$ halmazra

$$\begin{aligned}
|\nu|(A) &= \max_{A \supset X \in \mathcal{A}} [\nu(X) - \nu(A \setminus X)] = \sup \left\{ \sum_n |\nu(A_n)| : A_1, A_2, \dots \text{diszj.} \in \mathcal{A}, \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset A \right\} \\
\nu_+(A) &= \max_{A \supset x \in \mathcal{A}} \nu(A_n) = \sup \left\{ \sum_n \nu(A_n)_+ : A_1, A_2, \dots \text{diszj.} \in \mathcal{A}, \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset A \right\} \\
\nu_-(A) &= \min_{A \supset x \in \mathcal{A}} \nu(A_n) = \inf \left\{ \sum_n \nu(A_n)_- : A_1, A_2, \dots \text{diszj.} \in \mathcal{A}, \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset A \right\}.
\end{aligned}$$

Véges értékű előjeles mértékek

Definíció. Legyen Ω egy nem-üres halmaz, $\mathcal{R} \subset \{\Omega \text{ részhalmazai}\}$. Az $\mathcal{R}$ halmazcsalád *lokális σ -algebra*, ha minden $B \in \mathcal{R}$ mellett $\{R \in \mathcal{R} : R \subset B\}$ egy σ -algebra. Egy $\nu : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ halmazfüggvény (*véges értékű*) *előjeles mérték* Ω -n, ha

- 1) $\mathcal{R}$ lokális σ -algebra,
- 2) $\bigcup_n B_n \in \mathcal{R}$ valahányszor $B_1, B_2, \dots \text{diszj.} \in \mathcal{R}$ és $\sum_n |\nu(R_n)| < \infty$ ($B_n \supset R_n \in \mathcal{R}$ ($n = 1, 2, \dots$)),
- 3) $\nu(\bigcup_n B_n) = \sum_n \nu(B_n)$ valahányszor $B_1, B_2, \dots \text{diszj.} \in \mathcal{R}$ és $\bigcup_n B_n \in \mathcal{R}$.

Megjegyzés. A definíció első és harmadik pontja szerint, ha $\nu : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egy véges értékű előjeles mérték, akkor a

$$\nu_B := \nu|_{\{R \in \mathcal{R} : R \subset B\}} \quad (B \in \mathcal{R})$$

halmazfüggvények korlátos változású előjeles mértékek.

Jelöljön mostantól ebben az alfejezetben $\nu : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egy véges értékű előjeles mértéket egy Ω alaphalmaz fölött, és legyen

$$\overline{\mathcal{R}} := [\text{az } \mathcal{R}\text{-generálta } \sigma\text{-algebra } \Omega\text{-n}] \quad .$$

Lemma. Az $\overline{\mathcal{R}}$ -en definiált

$$|\nu| : X \rightarrow \sup \left\{ \sum_n |\nu(R_n)| : R_1, R_2, \dots \text{diszj.} \in \mathcal{R} \text{ és } \bigcup_n R_n \subset X \right\}$$

halmazfüggvény egy mérték Ω -n, amelynél

$$\mathcal{R} = \{X \in \overline{\mathcal{R}} : |\nu|(X) < \infty\} \text{ és } |\nu_B|(R) = |\nu|(R) \quad (R \subset B, R, B \in \mathcal{R})$$

a Megjegyzésben definiált ν_B korlátos változású előjeles mértékekre.

Bizonyítás. A Hahn-Jordan tétel következményéből már tudjuk a ν_B előjeles mértékekre vonatkozó állítást. Sőt innen kapjuk az $\mathcal{R} = \{X \in \overline{\mathcal{R}} : |\nu|(X) < \infty\}$ relációt is. Hogy a $|\nu| \geq 0$ halmazfüggvény mérték, azonnal következik az alábbi két egyszerű észrevételből: Ha $X_1, X_2, \dots \text{diszj.} \in \overline{\mathcal{R}}$, akkor

- 1) $R_1, R_2, \dots \text{diszj.} \in \mathcal{R}$ és $\bigcup_n R_n \subset \bigcup_n X_n$ esetén $k = 1, 2, \dots$ mellett $R_1 \cap X_k, R_2 \cap X_k, \dots \text{diszj.} \in \mathcal{R}$ (innen $|\nu|(\bigcup_k X_k) \leq \sum_k |\nu|(X_k)$),
- 2) ha $k = 1, 2, \dots$ mellett $R_{1k}, R_{2k}, \dots \text{diszj.} \in \mathcal{R}$ és $\bigcup_n R_{n,k} \subset X_k$, akkor $\{R_{nk} : n, k = 1, 2, \dots\} \text{diszj.} \subset \mathcal{R}$ (innen $\sum_k |\nu|(X_k) \leq |\nu|(\bigcup_k X_k)$).

Definíció. A $\nu : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ előjeles mérték *változási mértéke* a

$$|\nu|(X) := \sup \left\{ \sum_n |\nu(R_n)| : R_1, R_2, \dots \text{diszj.} \in \mathcal{R} \text{ és } \bigcup_n R_n \subset X \right\} \quad (X \in \overline{\mathcal{R}})$$

mérték Ω fölött.

Megjegyzés. 1) Az Ω fölötti ν előjeles mérték pontosan akkor korlátos változású, ha $\Omega \in \text{dom}(\nu)$ és $|\nu|(\Omega) < \infty$. Ez a tény a "korlátos változású előjeles mérték" elnevezés eredete.

- 2) Bár minden $B \in \mathcal{R}$ halmazra

$$d\nu_B = \text{sgn}(\nu_B) d|\nu_B| = \text{sgn}(\nu_B) d|\nu|,$$

általában nem található olyan közös $s : \Omega \rightarrow \{\pm 1\}$ függvény, amellyel minden $R \in \mathcal{R}$ halmazra teljesül $\nu(R) = \int_R s d|\nu|$.

Példa. 1) Legyen $\mathcal{R} := \{R_1 \cup R_2 : R_1 \in \mathcal{R}_1, R_2 \in \mathcal{R}_2\}$, ahol

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1 &:= \left\{ \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \times \{y_i\} : y_i \in \mathbb{R}, A_i \text{ } \bar{\lambda}\text{-mérhető } \subset \mathbb{R}, \bar{\lambda}(A_i) < \infty \text{ } (i = 1, 2, \dots) \right\} \\ \mathcal{R}_2 &:= \left\{ \bigcup_{i=1}^{\infty} \{x_i\} \times B_i : x_i \in \mathbb{R}, B_i \text{ } \bar{\lambda}\text{-mérhető } \subset \mathbb{R}, \bar{\lambda}(B_i) < \infty \text{ } (i = 1, 2, \dots) \right\} \end{aligned}$$

és $\nu(\bigcup_{i=1}^{\infty} ((A_i \times \{y_i\}) \cup (\{x_i\} \times B_i))) := \sum_{i=1}^{\infty} (\bar{\lambda}(A_i) - \bar{\lambda}(B_i))$

az $\mathcal{R}$ -beli halmazokra. Ekkor a $\nu : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ halmazfüggvény előjeles mérték, és $|\nu| = \text{Vol}_1|_{\overline{\mathcal{R}}}$. Ha valamilyen $s : \mathbb{R}^2 \rightarrow \{\pm 1\}$ függvényre $\nu(R) = \int_R s d\nu$ ($R \in \mathcal{R}$) volna, akkor $\nu|_{\mathcal{R}_1} = \text{Vol}_1|_{\mathcal{R}_1}$ miatt Vol_1 -mm. $s = 1$ -nek, kell lennie minden $\mathbb{R} \times \{y\}$ alakú egyenesen, másrészt $\nu|_{\mathcal{R}_2} = -\text{Vol}_1|_{\mathcal{R}_2}$ miatt Vol_1 -mm. $s = -1$ -nek kell lennie minden $\{x\} \times \mathbb{R}$ egyenesen, ami egyszerre nem teljesülhet.

2) A következő fejezet *integrálformái* (az $\equiv 0$ kivételével) mind olyan véges értékű előjeles mértékek lesznek, amelyek nem $\int_{\bullet} s d|\nu|$ alakúak globálisan.

Megjegyzés. Mindazonáltal, ha $\nu : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ véges értékű előjeles mérték és az $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ függvény $|\nu|$ -integrálható, akkor a

$$\text{supp}(f) := \{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$$

tartóhalmaz* megszámlálható sok $\mathcal{R}$ -beli halmaz egyesítése, így ezen egy $|\nu|$ -0-halmaztól eltekintve egyértelműen definiálható egy

* A supp jelölés a latin *support* (tartó) szót rövidíti.

$$\operatorname{sgn}_{\operatorname{supp}(f)}(\nu) : \Omega \rightarrow \{-1, 0, 1\}$$

függvény, amelyre

$$\begin{aligned} \{x : \operatorname{sgn}_{\operatorname{supp}(f)}(\nu)(x) = 0\} &= \Omega \setminus \operatorname{supp}(f) \quad \text{és} \\ \nu(R) &= \int_R \operatorname{sgn}_{\operatorname{supp}(f)}(\nu) d|\nu| \quad (\operatorname{supp}(f) \supset R \in \mathcal{R}). \end{aligned}$$

Ez lehetővé teszi, hogy az integrálást kiterjesszük véges értékű előjeles mértékekre.

Definíció. Legyen $\nu : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egy véges értékű előjeles mérték az Ω alaphalmazon. Az $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ függvény ν -integrálható, ha f $|\nu|$ -integrálható (a hagyományos értelemben). Egy ν -integrálható f függvény ν -integrálja

$$\int f d\nu := \int f \cdot \operatorname{sgn}_{\operatorname{supp}(f)}(\nu) d|\nu|.$$

Az előjeles mértékek konstrukciójánál jól használható a következő.

Tétel. (Összeillesztési tétel). Legyen $\mathcal{Q} \subset \{\Omega \text{ részhalmazai}\}$ egy olyan (nem-üres) halmazcsalád, amelynél $Q_1 \cap Q_2 \in \mathcal{Q}$ ($Q_1, Q_2 \in \mathcal{Q}$). Tegyük fel, hogy minden $Q \in \mathcal{Q}$ mellett $\nu_Q : \mathcal{A}_Q \rightarrow \mathbb{R}$ egy korlátos változású előjeles mérték a Q halmaz fölött és $Q_1, Q_2 \in \mathcal{Q}$ -nél mindig

$$Q_1 \subset Q_2 \Rightarrow \mathcal{A}_{Q_1} \subset \mathcal{A}_{Q_2} \quad \text{és} \quad \nu_{Q_1} = \nu_{Q_2}|_{\mathcal{A}_{Q_1}}.$$

Ekkor pontosan egy olyan ν véges értékű előjeles mérték létezik, amelyre

$$\operatorname{dom}(\nu) \subset \overline{\mathcal{Q}} := \left\{ \bigcup_n A_n : A_1, A_2, \dots \in \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} \mathcal{A}_Q \right\} \quad \text{és} \quad \nu_Q = \nu|_{\mathcal{A}_Q} \quad (Q \in \mathcal{Q}).$$

Bizonyítás. Észrevétel: A $\bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} \mathcal{A}_Q$ halmazcsalád lokális σ -algebra, és így

$$\overline{\mathcal{Q}} = \left\{ \bigcup_n B_n : B_1, B_2, \dots \text{ diszj. } \in \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} \mathcal{A}_Q \right\}.$$

Ugyanis, ha $A_1 \in \mathcal{A}_{Q_1}, A_2 \in \mathcal{A}_{Q_2}, \dots$, akkor $A_n \cap A_k \in \mathcal{A}_{Q_1 \cap Q_2} \subset \mathcal{A}_{Q_n} \cap \mathcal{A}_{Q_k}$ ($n, k = 1, 2, \dots$), ahonnan az $\bigcup_n A_n$ -et diszjunktan előállító $B_n := A_n \setminus \bigcup_{k < n} (A_n \cap A_k)$ ($n = 1, 2, \dots$) halmazok is $\bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} \mathcal{A}_Q$ -beliek.

Az észrevétel alapján az egyetlen szóba jöhető véges értékű előjeles ν mérték az

$$\mathcal{R} := \left\{ \bigcup_n A_n : A_1, A_2, \dots \text{ diszj. } \in \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} \mathcal{A}_Q, \sum_n |\nu_{Q_n}|(A_n) < \infty \right\}$$

halmazcsaládon értelmezett

$$\begin{aligned} \nu(R) := \left[\sum_n \nu_{Q_n}(B_n) : \bigcup_n B_n = R, \quad B_1, B_2, \dots \text{ diszjunktak,} \right. \\ \left. B_n \in \mathcal{A}_{Q_n} \quad (n = 1, 2, \dots) \right] \quad (R \in \mathcal{R}) \end{aligned}$$

halmazfüggvény. Ennek a jól-definiáltsága közvetlen folyománya annak, hogy $P, Q \in \mathcal{Q}$ -ra a ν_P ill. ν_Q korlátos változású mértékek mindig egybeesnek a $P \cap Q$ halmazon. Ha ugyanis $B_1, B_2, \dots$ ill. $B'_1, B'_2, \dots$ diszjunktak, $B_n \in \mathcal{A}_{Q_n}, B'_n \in \mathcal{A}_{Q'_n}$ ($n = 1, 2, \dots$) és $\bigcup_n B_n = \bigcup_m B'_m \in \mathcal{R}$, akkor

$$\begin{aligned} \sum_n |\nu_{Q_n}(B_n)|, \sum_m |\nu_{Q'_m}(B'_m)| &\leq \sum_{m,n} |\nu_{Q_n \cap Q'_m}(B_n \cap B'_m)| < \infty \\ \sum_n \nu_{Q_n}(B_n) &= \sum_{m,n} \nu_{Q_n \cap Q'_m}(B_n \cap B'_m) = \sum_m \nu_{Q'_m}(B'_m). \end{aligned}$$

A ν halmazfüggvény σ -additivitása hasonló technikával bizonyítható.

DIFFERENCIÁLFORMÁK $\mathbb{R}^N$ -EN

Az egész fejezeten át $N, K \in \mathbb{N}$ rögzített dimenziószámokat jelölnek, amelyekre $K \leq N$. Az $x_1, \dots, x_N$ ill. $t_1, \dots, t_K$ jelöléseket pedig fenntartjuk az

$$\begin{aligned} x_i &: (\xi_1, \dots, \xi_N) \mapsto \xi_i & (i = 1, \dots, N) \\ t_j &: (\tau_1, \dots, \tau_K) \mapsto \tau_j & (j = 1, \dots, K) \end{aligned}$$

alapkoordináták számára $\mathbb{R}^N$ -ben ill. $\mathbb{R}^K$ -ban.

Jacobi determináns és alternáló formák

Tétel. Legyen G nyitott $\subset \mathbb{R}^K$ és $T : G \rightarrow \mathbb{R}^N$ egy folytonosan differenciálható leképezés. Ekkor

- 1) $\text{Jac}(T) = \left[\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_K \leq N} \det^2 \left(\frac{\partial x_{i_k}(T)}{\partial t_j} \right)_{j,k=1,\dots,K} \right]^{1/2}.$
- 2) Minden $1 \leq i_1, \dots, i_K \leq N$ indexcsaládra az

$$\omega_{i_1, \dots, i_K} : (\mathbb{R}^N)^K \ni (v_1, \dots, v_K) \mapsto \det(x_{i_k}(v_j))_{j,k=1,\dots,K}$$

leképezés egy alternáló K -forma* és

$$\det \left(\frac{\partial x_{i_k}(T)}{\partial t_j} \right)_{j,k=1,\dots,K} = \omega_{i_1, \dots, i_K} \left(\frac{\partial T}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial T}{\partial t_K} \right).$$

Bizonyítás. 1) Legyen $t \in G$ tetszőlegesen rögzítve, és legyen

$$\alpha := [T'(t) \text{ mátrixa}] \quad \alpha_{ij} = \frac{\partial x_i(T)}{\partial t_j}(t) \quad (i = 1, \dots, N \quad j = 1, \dots, K).$$

Tudjuk: találhatók olyan σ_1, σ_2 ortogonális $N \times N$ ill. $K \times K$ típusú mátrixok továbbá $0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_K$ számok, hogy

$$\alpha = \sigma_1 \Lambda \sigma_2 \quad \text{ahol} \quad \Lambda := \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_K \end{pmatrix}}_K \Bigg\}^N,$$

$$\begin{aligned} \text{Jac}(T)(t)^2 &= \det(T'^* T') = \det(\alpha^* \alpha) = \det(\Lambda^* \Lambda) \\ &= \lambda_1^2 \cdots \lambda_K^2 \end{aligned}$$

* Az alternáló K -formákkal kapcsolatos legszükségesebb előismereteket a következő megjegyzésben gyűjtöttük össze.

ahol a jobb áttekinthetőség kedvéért egyes 0 együtthatók helyét üresen hagyjuk (v.ö. a Felszín-formula c. alfejezet lemmája). Észrevétel:

$$\Lambda\Lambda^* = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1^2 & \\ \vdots & \\ \hline & \lambda_K^2 \\ \hline 0 \end{array} \right), \Rightarrow \lambda_1^2 \cdots \lambda_K^2 = \sum_{\mu \in \{\Lambda\Lambda^* \text{ } K\text{-főminorai}\}} \det(\mu) .$$

Innen $\langle \alpha_{i\bullet}, \alpha_{j\bullet} \rangle$ -vel jelölve az α mátrix i -ik és j -ik sorainak skalár-szorzatát,

$$\begin{aligned} \text{Jac}(T)(t)^2 &= \sum_{\mu \in \{\Lambda\Lambda^* \text{ } K\text{-főminorai}\}} \det(\mu) = \sum_{\nu \in \underbrace{\{\sigma_1 \Lambda \Lambda^* \sigma_1^*\}}_{\alpha\alpha^*} \text{ } K\text{-főmin.}\}} \det(\nu) \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_K \leq N} \det(\langle \alpha_{i_j\bullet}, \alpha_{i_k\bullet} \rangle)_{j,k=1,\dots,K} \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_K \leq N} \det \left[(\alpha_{i_j k})_{j,k=1}^K (\alpha_{k i_j})_{j,k=1}^K \right] \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_K \leq N} \det(\alpha_{i_j k})_{j,k=1}^K \det(\alpha_{k i_j})_{j,k=1}^K \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_K \leq N} \det^2 \left[(\alpha_{i_j k})_{j,k=1}^K \right] . \end{aligned}$$

2) állítása azonnal következik onnan, hogy

$$\frac{\partial x_i(T)}{\partial t_j} = x_i \left(\frac{\partial T}{\partial t_j} \right) \quad (i = 1, \dots, N \quad j = 1, \dots, K) .$$

Megjegyzés. 1) Legyen V egy véges dimenziós vektortér és V^* a duálisa. Azaz $V^* := \{\text{lineáris } V \rightarrow \mathbb{R} \text{ függvények}\} .$

Az $\omega : V^k \rightarrow \mathbb{R}$ leképezés k -forma, ha az mind a k változójában lineáris, azaz

$$[v \mapsto (v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_k)] \in V^* \quad (i = 1, \dots, k \quad v_1, \dots, v_k \in V) .$$

Az ω k -forma *alternáló*, ha

$$\begin{aligned} &\omega(v_1, \dots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_i, v_{j+1}, \dots, v_k) \\ &= -\omega(v_1, \dots, v_k) \quad (1 \leq i < j \leq k \quad v_1, \dots, v_k \in V) . \end{aligned}$$

Ha ω_1 alternáló k -forma, ω_2 alternáló ℓ -forma V -n, akkor a *külső szorzatuk* az az $\omega_1 \wedge \omega_2$ alternáló $(k + \ell)$ -forma, amelyre

$$\begin{aligned} \omega_1 \wedge \omega_2(v_1, \dots, v_{k+\ell}) &:= \\ &\frac{1}{(k + \ell)!} \sum_{\pi \in \text{PERM}} (-1)^{\text{par}(\pi)} \omega_1(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}) \omega_2(v_{\pi(k+1)}, \dots, v_{\pi(k+\ell)}) \end{aligned}$$

minden $v_1, \dots, v_{k+\ell}$ vektorsorozatra V -ből, ahol az összegzés az $\{1, \dots, k+\ell\}$ indexhalmaz összes permutációira történik, $\text{par}(\pi)$ pedig a π permutáció paritása.*

Definíció szerint

$$\begin{aligned}\{\text{alt. 0-formák}\} &:= \mathbb{R} & (\text{konstansok, 0-változós műveletek}) \\ \{\text{alt. 1-formák}\} &:= V^*\end{aligned}$$

Tudjuk, hogy

$$\begin{aligned}\dim(V) = N, \Rightarrow \{\text{alt. } (N+i)\text{-formák}\} &= \{0\} \quad (i > 0) \\ \{\text{alt. } N\text{-formák}\} &= \mathbb{R} \cdot \left[(v_1, \dots, v_N) \mapsto \det \left(\frac{(v_1, \dots, v_N)}{(e_1, \dots, e_N)} \right) \right]\end{aligned}$$

ahol $\{e_1, \dots, e_N\}$ egy bázis V -ben és $\frac{(v_1, \dots, v_N)}{(e_1, \dots, e_N)} \in \mathcal{L}(V)$ a lineáris kiterjesztése az $[e_i \mapsto v_i : i = 1, \dots, N]$ leképezésnek. Sőt

$$\begin{aligned}\{\text{alt. } k\text{-formák}\} &= \text{Span}\{\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_k : \phi_1, \dots, \phi_k \in V^*\} =: \bigwedge^k V^* \\ \phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_k(v_1, \dots, v_k) &= \det(\langle \phi_i, v_j \rangle)_{i,j=1}^k\end{aligned}$$

a $\langle \phi, v \rangle := \phi(v)$ konvencióval, ahol $\text{Span}(S)$ az S -beli vektorok által kifeszített altér.

2) A szokásos módon azonosítjuk a V^{**} biduális teret V -vel, azaz

$$v \equiv [\phi \mapsto \langle \phi, v \rangle] \quad (v \in V).$$

Minthogy így V maga is lineáris funkcionálok terének $(= (V^*)^*)$ tekinthető, értelmezhetők $v_1, \dots, v_k \in V$ -re a

$$\begin{aligned}v_1 \wedge \dots \wedge v_k &\in \bigwedge^k (V^*)^* \\ v_1 \wedge \dots \wedge v_k(\phi_1, \dots, \phi_k) &= \det(\langle v_i, \phi_j \rangle)_{i,j=1}^k \\ \det(\langle \phi_i, v_j \rangle)_{i,j=1}^k &= \phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_k(v_1, \dots, v_k) .\end{aligned}$$

Következésképpen fennáll az a dualitás a $\bigwedge^k V$ és az $\{\text{alt. } k\text{-formák } V\text{-n}\} = \bigwedge^k V^*$ terek között, hogy

$$\begin{aligned}\forall \Phi \in \left(\bigwedge^k V\right)^* \quad \exists! \omega \text{ alt. } k\text{-forma} \\ \langle \Phi, v_1 \wedge \dots \wedge v_k \rangle &= \omega(v_1, \dots, v_k) \quad (v_1, \dots, v_k \in V) .\end{aligned}$$

* $\text{par}(\pi) := [0 \text{ ha } \pi \text{ páros sok cserével, } 1 \text{ ha páratlan cserével állítható elő}]$.

3) $V = \mathbb{R}^N$ esetén

$$\{x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_K} : 1 \leq i_1 < \dots < i_K \leq N\} \text{ BÁZIS } \subset \{\text{alt. } K\text{-formák } \mathbb{R}^N\text{-en}\}$$

$$\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_K} : 1 \leq i_1 < \dots < i_K \leq N\} \text{ BÁZIS } \subset \bigwedge^K \mathbb{R}^N,$$

ahol $e_i := (0, \dots, \underset{i}{1}, \dots, 0)$ ($i = 1, \dots, N$) az $\mathbb{R}^N$ kanonikus egységvektorai.

A továbbiakban ellátjuk a $\bigwedge^K(\mathbb{R}^N)^*$ ill. $\bigwedge^K \mathbb{R}^N$ tereket a

$$\left\| \sum_{i_1, \dots, i_K} \alpha_{i_1, \dots, i_K} x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_K} \right\| = \left[\sum_{i_1, \dots, i_K} \alpha_{i_1, \dots, i_K}^2 \right]^{1/2}$$

$$\left\| \sum_{i_1, \dots, i_K} \alpha_{i_1, \dots, i_K} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_K} \right\| := \left[\sum_{i_1, \dots, i_K} \alpha_{i_1, \dots, i_K}^2 \right]^{1/2}$$

euklideszi normákkal. Itt az egyes vektori külső szorzatok bázis-felbontása

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_K = \sum_{i_1 < \dots < i_K \leq N} \det(v_{j, i_k})_{j,k=1}^K e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_K}$$

ahol $\det(v_{j, i_k})_{j,k=1}^K = x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_K}(v_1, \dots, v_K)$

Következmény. $\text{Jac}(T) = \left\| \frac{\partial T}{\partial t_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial T}{\partial t_K} \right\|$

$$= \left[\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_K \leq N} x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_K} \left(\frac{\partial T}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial T}{\partial t_K} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

$\mathcal{C}^\ell$ -kockák

Definíció. Legyen $\ell \in \mathbb{N}$ és legyen I egy korlátos nyitott intervallum $\mathbb{R}^K$ -ban (azaz $\exists I_1, \dots, I_K$ korlátos nyitott intervallum $\subset \mathbb{R}$ $I_1 \times \dots \times I_K = I$). A $Q : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ leképezés egy K -dimenziós $\mathcal{C}^\ell$ -kocka $\mathbb{R}^N$ -ben, ha

$$\exists J \text{ nyitott intervallum } \subset \mathbb{R}^K \quad \exists T \in \mathcal{C}^\ell(J, \mathbb{R}^N) \quad J \supset \bar{I} \text{ és } Q = T|I.$$

A Q $\mathcal{C}^\ell$ -kocka *reguláris*, ha itt a T *lefedő leképezés* választható úgy is, hogy injektív és $\text{Jac}(T) > 0$ legyen.

Megjegyzés. 1) Valójában a $\text{ran}(Q)(=Q(I))$ alakzat a "felület" $\mathbb{R}^N$ -ben. Mint függvény, Q a $\text{ran}(Q)$ bejárásáról is információt ad.

2) A felszín-formula szerint $\text{Vol}_K(\text{ran}(Q)) = \int_I \text{Jac}(Q) d\text{Vol}_K$.

3) Q mint $\mathbb{R}^K \times \mathbb{R}^N$ részhalmaza* tekintendő

$$Q \equiv \{(t, Q(t)) : t \in I\}.$$

* Halmazelméletileg az $f : X \rightarrow Y$ függvény az $\{(x, f(x)) : x \in X\}$ halmaz.

Így van értelme később a $\mathcal{C}^\ell$ -kockák által generált $\mathbb{R}^K \times \mathbb{R}^N$ -beli σ -algebráról beszélni.

Propozíció. Ha $Q_i : I_i \rightarrow \mathbb{R}^N$ ($i = 1, 2$) reguláris K -dimenziós $\mathcal{C}^\ell$ -kockák és $\text{ran}(Q_1) = \text{ran}(Q_2)$, akkor

$$\exists S \in \mathcal{C}^1(I_2, \mathbb{R}^K) \quad S : I_2 \leftrightarrow I_1 \quad Q_2 = Q_1 \circ S \quad \text{Jac}(S) > 0.$$

Bizonyítás. Az $S := Q_1^{-1} \circ Q_2$ leképezés jól-definiált, és

$$S : I_2 \xrightarrow{Q_2} \text{ran}(Q_1) \xrightarrow{Q_1^{-1}} I_1.$$

Állítás: $S \in \mathcal{C}^1(I_2, \mathbb{R}^K)$.

Bizonyítás: Legyen $t \in I_2$ tetszőlegesen rögzített, és legyen $p := Q_2(t)$ ill. $s := Q_1^{-1}(p) (= S(t))$. Minthogy $\text{Jac}(Q_1) \neq 0$, találunk $1 \leq i_1 < \dots < i_K \leq N$ indexeket, amelyekre $\det \left(\frac{\partial x_{i_k}(Q_1)}{\partial t_j}(s) \right)_{j,k=1}^K \neq 0$. Vezető az általánosság megszorítása nélkül $i_1 = 1, i_2 = 2, \dots, i_K = K$. Tekintsük a

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_1 : I_1 \times \mathbb{R}^{N-K} &\rightarrow \mathbb{R}^N (= \mathbb{R}^K \times \mathbb{R}^{N-K}) \\ (s', y) &\mapsto Q_1(s') + (0, y) \end{aligned}$$

leképezést. Itt (az alapkoordináták szerint)

$$\tilde{Q}'_1(s, 0) \text{ mátrixa} = \left[\begin{array}{c|c} Q'_1(s) & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} \end{array} \right] \begin{matrix} K \\ N-K \end{matrix}$$

ahol $\det(\tilde{Q}'_1) = \det \left(\frac{\partial x_k(Q_1)}{\partial t_j}(s) \right)_{j,k=1}^K \neq 0$. Az inverz függvény tétel alapján így

$$\exists \tilde{U} \text{ } p\text{-környezet} \exists \tilde{V}_1 \text{ } s\text{-környezet} (\subset \mathbb{R}^N) \quad \tilde{Q}_1 : \tilde{V}_1 \leftrightarrow \tilde{U} \quad \tilde{Q}_1^{-1} \in \mathcal{C}^\ell(\tilde{U}, \mathbb{R}^N).$$

Mivel Q_2 folytonos, a $V_2 := Q_2^{-1}(\tilde{U})$ halmaz környezete a t pontnak $\mathbb{R}^K$ -ban, és

$$S|_{V_2} = P \circ \tilde{Q}_1^{-1} \circ Q_2|_{V_2} \quad \text{ahol } P : (\xi_1, \dots, \xi_N) \mapsto (\xi_1, \dots, \xi_K).$$

Tehát $S|_{V_2}$ $\mathcal{C}^1$ -leképezések összetétele egy t -környezeten, ami adja az állítást.

Ha már tudjuk, hogy az S átviteli leképezés folytonosan differenciálható, akkor írható

$$\begin{aligned} \text{Jac}(Q_2)^2 &= \det(Q_2'^* Q_2') = \det(S'^* Q_1'^* Q_2' S') \\ &= \det(S'^*) \det(Q_1'^* Q_1') \det(S') = \det(S')^2 \text{Jac}(Q_1) \neq 0. \end{aligned}$$

Következmény. A következő alternatíva áll az S átviteli leképezésre

$$1) \det(S'(t)) > 0 \quad (t \in I_2) \quad \text{vagy} \quad 2) \det(S'(t)) < 0 \quad (t \in I_2).$$

Bizonyítás. Mivel a $t \mapsto S'(t)$ derivált folytonos, a $t \mapsto \det(S'(t))$ függvény is folytonos. Tehát az I_2 téglafüggősége miatt az $I := \det(S'(I_2))$ képhalmaz egy intervallum $\mathbb{R}$ -ben. Mivel $0 \notin I$, vagy $I > 0$ vagy $I < 0$.

Definíció. A $Q_i : I_i \rightarrow \mathbb{R}^N$ ($i = 1, 2$) K -dimenziós (nem feltétlenül reguláris) $\mathcal{C}^\ell$ -kockák *ekvivalensek*, jelölésben $Q_1 \sim Q_2$, ha

$$\exists S : I_2 \leftrightarrow I_1 \quad S \in \mathcal{C}^1(I_2, \mathbb{R}^K) \quad \det(S') > 0.$$

Differenciálmértékek és -formák

Definíció. Legyen $\ell \in \{0, 1, \dots\}$ és legyen $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^K \times \mathbb{R}^N$ -beli halmazok egy olyan családja, amelyre $\mathcal{R} \supset \{K\text{-dim. } \mathcal{C}^1\text{-kockák}\}$. Egy $\nu : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ halmazfüggvény K -adrendű $\mathcal{C}^\ell$ -*differenciálmérték* $\mathbb{R}^N$ -en, ha

ν véges értékű előjeles mérték és $\exists \phi \in \mathcal{C}^\ell(\mathbb{R}^N, (\bigwedge^K \mathbb{R}^N)^*)$

$$\nu(Q) = \int_I \left\langle \phi(Q(T)), \frac{\partial Q}{\partial t_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial Q}{\partial t_K} \right\rangle dt_1 \dots dt_K \quad (Q : I \rightarrow \mathbb{R}^N \text{ } \mathcal{C}^1\text{-kocka}).$$

Megjegyzés. Heurisztikusan: $\left(\frac{\partial Q}{\partial t_1} dt_1\right) \wedge \dots \wedge \left(\frac{\partial Q}{\partial t_K} dt_K\right)$ egy infinitezimális irányított parallelepipedon a $\frac{\partial Q}{\partial t_1} dt_1, \dots, \frac{\partial Q}{\partial t_K} dt_K$ oldalvektorokkal.

Példa. 1) Ha $x \mapsto \vec{F}(x)$ egy erőter $\mathbb{R}^3$ -on és $Q : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3$ egy út, akkor

$$[t, t + dt] \text{ idő alatt a MUNKA} = \left\langle \vec{F}(Q(t)), \frac{\partial Q}{\partial t} dt \right\rangle.$$

2) Legyen $x \in \mathbb{R}^3$ -nél $\vec{v}(x)$ folyóvíz sebessége az (időtől függetlenül) az x helyen. Ha a $Q : (0, 1)^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ reguláris $\mathcal{C}^1$ -kocka $\text{ran}(Q)$ képe e folyó egy keresztmetszete, akkor az ezen egységnyi idő alatt átfolyó víz előjelezett* mennyisége

$$\int_{(0,1)^2} \det\left(\vec{v}(Q(t)), \frac{\partial Q}{\partial t_1}, \frac{\partial Q}{\partial t_2}\right) dt_1 dt_2 = \text{ÁTFOLYÁSI SEBESSÉG}.$$

Itt a definíció jelölésével $\Phi(x) : \mathbb{R}^3 \wedge \mathbb{R}^3 \ni \vec{q}_1 \wedge \vec{q}_2 \mapsto \det(\vec{v}(x), \vec{q}_1, \vec{q}_2)$ ($x \in \mathbb{R}^3$).

Propozíció. Legyen ν egy K -rendű $\mathcal{C}^\ell$ -differenciálmérték $\mathbb{R}^N$ -ben. Ekkor

$\exists \omega \in \mathcal{C}^\ell(\mathbb{R}^N, \{\text{alt. } K\text{-formák}\})$

$$\nu(Q) = \int_I \omega(t_1, \dots, t_K) \left(\frac{\partial Q}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial Q}{\partial t_K} \right) dt_1 \dots dt_K \quad (Q : I \rightarrow \mathbb{R}^N \text{ } \mathcal{C}^1\text{-kocka}).$$

Bizonyítás. Ez azonnal adódik az $\bigwedge^K(\mathbb{R}^N)^*$ és $\bigwedge^K \mathbb{R}^N$ terek dualitásáról szóló 2) megjegyzésből.

Definíció. Az ℓ -szer folytonosan differenciálható

$$\mathbb{R}^N \rightarrow \{\text{alternáló } K\text{-formák}\} (= \bigwedge^K(\mathbb{R}^N)^*)$$

függvények a K -adrendű $\mathcal{C}^\ell$ -*differenciálformák* (röviden K -rendű $\mathcal{C}^\ell$ -formák) $\mathbb{R}^N$ -en. Egy ω differenciálforma integrálja a $Q : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ $\mathcal{C}^\ell$ -kockán

$$\int_Q \omega := \int_I \omega(t) \left(\frac{\partial Q}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial Q}{\partial t_K} \right) dt_1 \dots dt_K$$

* Pozitív előjellel számítva, ha a a víz a felület $\frac{\partial Q}{\partial t_1} \times \frac{\partial Q}{\partial t_2}$ (vektori szorzat) normálisának irányában folyik át, és negatívval, ha ellenkezőleg.

(itt szükségképpen $[\omega \text{ rendje}] = [Q \text{ dimenziója}]$ kell, hogy legyen).

Következmény. A differenciálmértékek differenciálformák integráljai a $\mathcal{C}^1$ -kockákon.

Tétel. Legyen ν egy differenciálmérték $\mathbb{R}^N$ -en és $Q_k : I_k \rightarrow \mathbb{R}^N$ ($k = 1, 2$) két K -dimenziós $\mathcal{C}^1$ -kocka. Ha $Q_1 \sim Q_2$, akkor $\nu(Q_1) = \nu(Q_2)$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $Q_1 \sim Q_2$. Vegyünk ekkor egy $\mathcal{C}^1$ -sima

$$S : I_2 \leftrightarrow I_1 \quad Q_2 = Q_1 \circ S \quad \det(S') > 0$$

átviteli leképezést. Állítás:

$$\frac{\partial Q_2}{\partial t_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial Q_2}{\partial t_K} = \det(S') \cdot \left(\frac{\partial Q_1}{\partial t_1}(S) \right) \wedge \cdots \wedge \left(\frac{\partial Q_1}{\partial t_K}(S) \right).$$

Bizonyítás: az összetett függvény differenciálási láncszabálya szerint

$$\frac{\partial Q_2}{\partial t_j} = \frac{\partial Q_1(S)}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^K \frac{\partial Q_1}{\partial t_i}(S) \frac{\partial t_i(S)}{\partial t_j}$$

ahol a koordinátázás $t_k : (\xi_1, \dots, \xi_k) \mapsto \xi_k$. Innen

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_2}{\partial t_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial Q_2}{\partial t_K} &= \\ &= \sum_{i_1=1}^K \cdots \sum_{i_K=1}^K \frac{\partial t_{i_1}(S)}{\partial t_1} \cdots \frac{\partial t_{i_K}(S)}{\partial t_K} \left[\frac{\partial Q_1}{\partial t_{i_1}}(S) \right] \wedge \cdots \wedge \left[\frac{\partial Q_1}{\partial t_{i_K}}(S) \right] \\ &= \sum_{\pi \in K\text{-PERM}} \frac{\partial t_{\pi(1)}(S)}{\partial t_1} \cdots \frac{\partial t_{\pi(K)}(S)}{\partial t_K} (-1)^{\text{par}(\pi)} \left[\frac{\partial Q_1}{\partial t_1}(S) \right] \wedge \cdots \wedge \left[\frac{\partial Q_1}{\partial t_K}(S) \right]. \end{aligned}$$

Az állításból azonnal következik, hogy ha ν -t a $\phi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N, (\bigwedge^K \mathbb{R}^N)^*)$ függvény definiálja, akkor

$$\begin{aligned} \nu(Q_2) &= \\ &= \int_{I_2} \left\langle \phi(Q_2(t)), \frac{\partial Q_2}{\partial t_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial Q_2}{\partial t_K} \right\rangle dt_1 \cdots dt_K \\ &= \int_{I_2} \left\langle \phi(Q_1(S(t)), \det(S'(t)) \cdot \frac{\partial Q_1}{\partial t_1}(S(t)) \wedge \cdots \wedge \frac{\partial Q_1}{\partial t_K}(S(t)) \right\rangle dt_1 \cdots dt_K \\ &= \int_{I_2} \left\langle \phi(Q_1(S(t))), \frac{\partial Q_1}{\partial t_1}(S(t)) \wedge \cdots \wedge \frac{\partial Q_1}{\partial t_K}(S(t)) \right\rangle \underbrace{\det S'(t)}_{\text{Jac}(S)(t) > 0} dt_1 \cdots dt_K \\ &= \int_{I_1} \left\langle \phi(Q_1(s)), \frac{\partial Q_1}{\partial t_1}(s) \wedge \cdots \wedge \frac{\partial Q_1}{\partial t_K}(s) \right\rangle ds_1 \cdots ds_K \\ &= \nu(Q_1), \end{aligned}$$

az utolsó lépésben az $s := S(t)$ helyettesítéssel.

Definíció. A Q_1, Q_2 K -dimenziós $\mathcal{C}^1$ -kockák *ellentétes irányításúak*, $Q_1 \uparrow Q_2$, ha

$$\text{ran}(Q_1) = \text{ran}(Q_2) \quad \det(Q_1^{-1} \circ Q_2) < 0.$$

Következmény. Ha a tételben $Q_1 \uparrow Q_2$, akkor $\nu(Q_1) = -\nu(Q_2)$.

Bizonyítás. Lemásolható az előző bizonyítás, de ott az utolsó előtti lépésnél $\det(S'(t)) = -\text{Jac}(S)(t)$.

Láncok

Definíció. K -dimeziós $\mathbb{R}^N$ -beli $\mathcal{C}^\ell$ -kockalánc alatt olyan

$$\Psi : \{K\text{-rendű } \mathcal{C}^0\text{-formák } \mathbb{R}^N\text{-en}\} \rightarrow \mathbb{R}$$

lineáris funkcionált értünk, amelyre

$$\exists Q_1, \dots, Q_n \text{ } \mathcal{C}^\ell\text{-kockák} \quad \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{Z}$$

$$\Psi(\omega) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_{Q_i} \omega \quad (\omega \text{ } K\text{-rendű } \mathcal{C}^0\text{-forma}) .$$

A továbbiakban a Q $\mathcal{C}^\ell$ -kocka láncát $\tilde{Q}$ -vel jelöljük. Azaz

$$\tilde{Q} : \omega \mapsto \int_Q \omega .$$

Az előző alfejezet konklúziója ezzel a terminológiával:

Következmény. 1) $Q_1 \sim Q_2 \Rightarrow \tilde{Q}_1 = \tilde{Q}_2$. 2) $Q_1 \uparrow Q_2 \Rightarrow \tilde{Q}_1 = -\tilde{Q}_2$.

Megjegyzés. Egy "irányított felület" esetén az elsősorban az szokott érdekes lenni, hogy a differenciálformák integráljai milyen értéket vesznek fel rajta. A paraméterezés ill. a $\mathcal{C}^\ell$ -kockákra való felparcellázás módja ebből a szempontból indifferens.

Lemma. Egy differenciálformát meghatároznak a láncokon, sőt már a reguláris $\mathcal{C}^\infty$ -kockákon vett integráljaik.

Bizonyítás. Legyen $\omega_1 \neq \omega_2$ két különböző K -rendű differenciálforma. Ekkor valamely $p, v_1, \dots, v_K \in \mathbb{R}^N$ -re $\omega_1(p)(v_1, \dots, v_K) - \omega_2(p)(v_1, \dots, v_K) = 1$. Most a $Q_\varepsilon : (0, 1)^K \ni t \mapsto p + \varepsilon \sum_k t_k v_k$ reguláris $\mathcal{C}^\infty$ -kockákra

$$\varepsilon^{-K} \left[\int_{Q_\varepsilon} \omega_1 - \int_{Q_\varepsilon} \omega_2 \right] \rightarrow 1 \quad (\varepsilon \downarrow 0).$$

Megjegyzés. Formailag, a lánc definíciójában nemcsak egész, hanem tetszőleges valós (sőt komplex) együtthatókat is megengedhetnénk. A kombinatorikus topológiában kap pl. szerepet ezek $\mathbb{Z}$ -belisége.

Természetesen egy láncot mindig többféleképpen állíthatunk elő $\mathcal{C}^\ell$ -kockák $\mathbb{Z}$ -lineáris kombinációjaként. Sőt pl. a

$$Q : (-1, 1) \ni t \mapsto t^2$$

1-dimenziós (de nem reguláris) $\mathbb{R}$ -beli $\mathcal{C}^\infty$ -kockánál $\tilde{Q} = 0$, azaz általában nem lehet a kiindulási kockát sem egyértelműen "visszakódolni" a láncából. Nem így a reguláris esetben.

Propozíció. Ha Q_1, Q_2 reguláris $\mathcal{C}_1$ -kockák és $\tilde{Q}_1 = \tilde{Q}_2$, akkor $Q_1 \sim Q_2$.

Bizonyítás. Ha $Q_1 \not\sim Q_2$, akkor $\text{ran}(Q_1) \neq \text{ran}(Q_2)$. Vehető az általánosság megszorítása nélkül, hogy $\text{ran}(Q_1) \setminus \text{ran}(Q_2) \neq \emptyset$. Véve olyan T_1, T_2 $\mathcal{C}^1$ -síma

injektív kiterjesztéseket, amelyekre $\text{dom}(T_i) \supset \overline{\text{dom}(Q_i)}$, $\text{Jac}(T_i) > 0$ ($i = 1, 2$), akkor az előző alfejezet tételének bizonyítási technikájával kimutatható a $\text{Jac}(T_1), \text{Jac}(T_2) > 0$ tulajdonság alapján, hogy

$$\exists p \in \text{ran}(Q_1) \quad \min\{\|p - q\| : q \in \overline{\text{ran}(Q_2)}\} > 0.$$

Ennél a $p = Q_1(t)$ pontnál is $\frac{\partial Q_1}{\partial t_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial Q_1}{\partial t_K} \neq 0$ (ahol $K = \dim(Q_1)$), mivel $\text{Jac}(Q_1)(t) > 0$. Ezért itt

$$\exists \omega_0 \text{ alt. } K\text{-forma} \quad \omega_0\left(\frac{\partial Q_1}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial Q_1}{\partial t_K}\right) = 1.$$

Mivel a Q'_1 derivált folytonos és a Q_1 -et lefedő T_1 leképezés injektív, van olyan U környezete a p pontnak, amelyen

$$\omega_0\left(\frac{\partial Q_1}{\partial t_1}(u), \dots, \frac{\partial Q_1}{\partial t_K}(u)\right) > 0 \quad (u \in U), \quad U \cap \overline{\text{dom}(Q_2)} = \emptyset.$$

Vegyünk egy egy olyan $0 \neq w \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ függvényt, amelyik az U környezeten kívül eltűnik.* Most az

$$\omega(x)(v_1, \dots, v_K) := w(x)\omega_0(v_1, \dots, v_K) \quad (x, v_1, \dots, v_K \in \mathbb{R}^N)$$

$\mathcal{C}^\infty$ -differenciálformára $\int_{Q_1} \omega > 0 = \int_{Q_2} \omega$, azaz ilyenkor $\widetilde{Q}_1 \neq \widetilde{Q}_2$.

Megjegyzés. Egy reguláris C^1 -kockának mindig vannak "sarkai".

Kérdés: Reprezentálható-e e egy gömb reguláris kockalánccal?

Példa. $\mathbb{R}^2$ -ben egy körlapot 5 db 2-dimenziós C^∞ -kocka láncával lehet reprezentálni:

$$\begin{aligned} \int_{t_1^2+t_2^2 < 1} \omega(t_1, t_2)(e_1, e_2) dt_1 dt_2 &= \sum_{k=0}^4 \int_{Q_k} \omega \quad \text{ahol} \\ Q_0(t) &:= t \quad \left(t \in (-1/2, 1/2)^2\right) \\ Q_k(\varphi, \rho) &:= \left[\rho + (1 - \rho)\sqrt{1/4 + \sin^2(\varphi - k\pi/2)}\right] \cdot (\cos \varphi, \sin \varphi) \\ &\quad \left((0 < \rho < 1 \quad k\pi/2 - \pi/4 < \varphi < k\pi/2 + \pi/4) \quad k = 1, 2, 3, 4\right). \end{aligned}$$

C^1 -kocka határa, Stokes tétel

Definíció. A $K \geq 1$ dimenziós $Q : (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_K, b_K) \rightarrow \mathbb{R}^N$ C^ℓ -kocka ($\ell \geq 0$) *határa* (pontosabban *lác-határa*) a

$$\begin{aligned} \widetilde{\partial} Q &:= \sum_{d=1}^K (-1)^{d-1} \cdot [(\xi_1, \dots, \xi_{K-1}) \mapsto Q(\xi_1, \dots, \xi_{d-1}, b_d, \xi_{d+1}, \dots, \xi_{K-1})]^\sim \\ &\quad - \sum_{d=1}^K (-1)^{d-1} \cdot [(\xi_1, \dots, \xi_{K-1}) \mapsto Q(\xi_1, \dots, \xi_{d-1}, a_d, \xi_{d+1}, \dots, \xi_{K-1})]^\sim \end{aligned}$$

* Tudjuk: a $\phi : \xi \mapsto [\exp(-1/x^2) (\xi > 0), 0 (\xi \leq 0)]$ függvényre $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Vagyis, ha a p körüli $\delta > 0$ sugarú gömb $\subset U$, akkor $w : x \mapsto \phi(\delta - \|x - p\|)$ megfelel.

$(K-1)$ -dimenziós $\mathcal{C}^\ell$ -kockalánc.

Megjegyzés. Egy, a lánc-határnak természetes módon megfelelő felület (itt $2K$ db. $(K-1)$ -dim. $\mathcal{C}^\ell$ -kocka uniója) a

$$\begin{aligned} \partial Q := & \bigcup_{d=1}^K [\Pi_{j=1}^K(a_j, b_j) \ni \xi \mapsto Q(\Pi_{j < d} S_j(\xi_1, \dots, \xi_{d-1}, b_d, \xi_{d+1}, \dots, \xi_{K-1}))] \\ & \cup \bigcup_{d=1}^K [\Pi_{j=1}^K(a_j, b_j) \ni \xi \mapsto Q(S_{s(d)} \Pi_{j < d} S_j(\xi_1, \dots, \xi_{d-1}, a_d, \xi_{d+1}, \dots, \xi_{K-1}))] \end{aligned}$$

ahol $S_j : (\zeta_1, \dots, \zeta_K) \mapsto (\zeta_1, \dots, \zeta_{j-1}, a + b - \zeta_j, \zeta_{j+1}, \dots, \zeta_K)$ és $s(d) := [K \text{ ha } d = 1, d-1 \text{ ha } d > 1]$.

Tétel. (Stokes). Minden $K-1 (\geq 0)$ rendű ω C^1 -formához található pontosan egy, szokásosan $d\omega$ -val jelölt, K -rendű C^0 -forma, amelyre

$$\tilde{\partial}Q(\omega) = \tilde{Q}(d\omega) \quad (Q \text{ } K\text{-dim. } C^2\text{-kocka}).$$

Bizonyítás. Az előző alfejezet lemmája szerint szükségképpen $\omega_1 = \omega_2$, ha $\tilde{\partial}Q(\omega) = \tilde{Q}(\omega_1) = \tilde{Q}(\omega_2) \forall Q$. Legyen ezután az ω $(K-1)$ -rendű C^1 -forma és a $Q : I = (a_1, b_1) \times \dots \times (a_K, b_K) \rightarrow \mathbb{R}^N$ C^2 -kocka tetszőlegesen rögzítve. Ekkor $-\tilde{\partial}Q(\omega)$ értéke

$$\begin{aligned} & \sum_{d=1}^K (-1)^d \int \cdots \int_{\substack{\Pi_{j \neq d}(a_j, b_j) \\ \text{over } \Pi_{j=1}^{K-1}}} \omega(t_1, \dots, \tau, \dots, t_K) \left(\frac{\partial Q}{\partial t_j}(t_1, \dots, \tau, \dots, t_K) : j \neq d \right) \Big|_{\tau=a_d}^{b_d} \Pi_{j \neq d} dt_j \\ &= \sum_{d=1}^K (-1)^d \int_I \frac{\partial}{\partial t_d} \left[\omega(Q(t)) \left(\frac{\partial Q}{\partial t_j} : j \neq d \right) \right] dt_1 \cdots dt_K \\ &= \sum_{d=1}^K (-1)^d \int_I \left[\frac{\partial \omega(Q)}{\partial t_d} \left(\frac{\partial Q}{\partial t_j} : j \neq d \right) + \right. \\ & \quad \left. + \sum_{m \neq d} \omega \left(\frac{\partial Q}{\partial t_j} \text{ ha } j \neq m, \frac{\partial^2 Q}{\partial t_m \partial t_d} \text{ ha } j = m : j \neq d \right) \right] dt_1 \cdots dt_K. \end{aligned}$$

Itt a második tag eltűnik. Ugyanis $v_j := \partial Q / \partial t_j$ -t írva

$$\begin{aligned} & \sum_{d=1}^K (-1)^d \sum_{m \neq d} \omega \left(\frac{\partial Q}{\partial t_j} \text{ ha } j \neq m, \frac{\partial^2 Q}{\partial t_m \partial t_d} \text{ ha } j = m : j \neq d \right) \\ &= \sum_{d < m} \left[(-1)^d \omega(v_1, \dots, v_{d-1}, v_{d+1}, v_{d+2}, \dots, v_{m-1}, \frac{\partial^2 Q}{\partial t_m \partial t_d}, v_{m+1}, \dots, v_K) + \right. \\ & \quad \left. + (-1)^m \omega(v_1, \dots, v_{d-1}, \frac{\partial^2 Q}{\partial t_m \partial t_d}, v_{d+2}, \dots, v_{m-2}, v_{m-1}, v_{m+1}, \dots, v_K) \right] = \\ &= \sum_{d < m} [(-1)^d \omega(\dots) + (-1)^{m+m+d-1} \omega(\dots)] = \\ &= \sum_{d < m} (-1)^d [\omega(\dots) - (-1)^{2m-2d} \omega(\dots)] = 0 \end{aligned}$$

mivel $(m - d - 1)$ cserével vihető a 2-ik tagban a $\frac{\partial Q}{\partial t_m \partial t_d}$ komponens az m -ik helyre. Vagyis

$$\begin{aligned}\tilde{\partial}Q(\omega) &= \int_I \sum_{d=1}^K (-1)^{d-1} \frac{\partial \omega(Q)}{\partial t_d} \left(\frac{\partial Q}{\partial t_j} : j \neq d \right) dt_1 \cdots dt_K \\ &= \int_I \sum_{d=1}^K (-1)^{d-1} \frac{\partial Q}{\partial t_d} \omega'(Q) \left(\frac{\partial Q}{\partial t_j} : j \neq d \right) dt_1 \cdots dt_K \\ &= \int_I \sum_{d=1}^K (-1)^{d-1} \omega_{\partial Q / \partial t_d}'(Q) \left(\frac{\partial Q}{\partial t_j} : j \neq d \right) dt_1 \cdots dt_K .\end{aligned}$$

Külső derivált

Definíció. Az $\mathbb{R}^N$ -beli $(K-1)$ -rendű ω C^1 -forma *külső deriváltja* az $x \in \mathbb{R}^N$ helyen

$$d\omega(x) : (v_1, \dots, v_K) \mapsto \sum_{d=1}^K (-1)^{d-1} \omega_{v_d}'(x) (v_j : j \neq d) .$$

Ha L egy lánc ill. Q egy $\mathcal{C}^\ell$ -kocka, akkor formálisan az érzékletesebb

$$\int_L \omega := L(\omega) , \quad \int_{\partial Q} := \tilde{Q}(\omega)$$

jelöléseket is használni foguk.

Megjegyzés. Stokes tételének megfelelően

$$\int_{\partial Q} \omega = \int_Q d\omega \quad (\omega \text{ } \mathcal{C}^1\text{-forma, } Q \text{ } \mathcal{C}^2\text{-kocka}) .$$

Lemma. Ha $f \in C^1(\mathbb{R}^N)$ $(= C^1(\mathbb{R}^N, \{ \text{alt. 0-formák} \}) = \{0\text{-rendű } \mathcal{C}^1\text{-formák} \})$,

akkor

$$df = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i .$$

Bizonyítás. Definíció szerint, $v \in \mathbb{R}^N$ -re a $p \in \mathbb{R}^N$ helyen

$$\begin{aligned}df(p)(v) &= (-1)^0 f'_v(p) = \sum_{i=1}^N x_i(v) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \\ dx_j(p)(v) &= \sum_{i=1}^N x_i(v) \frac{\partial x_j}{\partial x_i}(p) = x_j(v) \quad (j = 1, \dots, N) .\end{aligned}$$

Lemma. Ha $f \in C^1(\mathbb{R}^N)$, akkor

$$d(f dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{K-1}}) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{K-1}} .$$

Bizonyítás. A hely explicit jelölését elhagyva,

$$\begin{aligned} d(f dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{K-1}})(v_1, \dots, v_K) &= \\ &= \sum_{d=1}^K (-1)^{d-1} \sum_{i=1}^N x_i(v_d) \frac{\partial f}{\partial x_i} [dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{K-1}}](v_j : j \neq d) \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \sum_{d=1}^K (-1)^{d-1} x_i(v_d) \det(x_{i_m}(v_j))_{j \neq d, 1 \leq m < K} \\ &= \sum_{i_0=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_{i_0}} \det(x_{i_m}(v_j))_{j=1}^K \quad \begin{matrix} K \\ m=0 \end{matrix} \\ &= \sum_{i_0=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_{i_0}} [dx_{i_0} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{K-1}}](v_1, \dots, v_K) . \end{aligned}$$

Megjegyzés. 1) A d jelölés eredetéről.

Ha $\alpha \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ egy növekvő függvény, $Q : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ egy 1-dimenziós $\mathcal{C}^1$ -kocka $\mathbb{R}$ -ben, akkor $\int_Q d\alpha = \alpha(q) - \alpha(p)$ ahol $p = Q(a+0) = \lim_{t \downarrow a} Q(t)$ ill. $q = Q(b-0) = \lim_{t \uparrow b} Q(t)$ a $\text{ran}(Q)$ szakasz végpontjai. Ez nem más, mint $\text{ran}(Q)$ -nak az α súlyfüggvény szerinti Stieltjes mértéke. Így

$$\begin{array}{ll} \int_Q g d\alpha &= \int_{\text{ran}(Q)} g(x) d\alpha(x) \quad (g \text{ korl. Borel fgv.}). \\ \text{Differenciálmérték} &\quad \text{Stieltjes int.} \end{array}$$

Speciálisan, a bal oldalon x -szel jelölve a $\xi \mapsto \xi$ koordinátafüggvényt,

$$\begin{array}{ll} \int_Q g dx &= \int_{\text{ran}(Q)} g(x) d\alpha(x) \quad (g \text{ folytonos fgv.}). \\ \text{Differenciálmérték} &\quad \text{Riemann int.} \end{array}$$

2) A helyettesítéssel integrálást a két Lemma szerint a következő technikával is végrehajthatjuk (ami persze nem más, mint a Jacobi determináns egy egészen elemi kiszámítási módja, és csak kevés változó esetén gazdaságos).

Példa: az $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ polárkoordinátás helyettesítés

$$\begin{aligned} dx \wedge dy &= [d(r \cos \varphi)] \wedge [d(r \sin \varphi)] \\ &= [r(-\sin \varphi) d\varphi + \cos \varphi dr] \wedge [r(\cos \varphi d\varphi + \sin \varphi dr)] \\ &= -r \sin \varphi \cos \varphi \underbrace{d\varphi \wedge d\varphi}_0 - r \sin^2 \varphi d\varphi \wedge dr + \\ &\quad + r \cos^2 \varphi \underbrace{dr \wedge d\varphi}_{-d\varphi \wedge dr} + \sin \varphi \cos \varphi \underbrace{dr \wedge dr}_0 \\ &= (-r \sin^2 \varphi - r \cos^2 \varphi) d\varphi \wedge dr = -r d\varphi dr , \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \underbrace{|-r|}_r d\varphi dr .$$

Tétel. 1) $d^2\omega = 0$ ($\omega \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^N, \wedge^K(\mathbb{R}^N)^*)$).

2) $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = (d\omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^{K_1} \omega_1 \wedge (d\omega_2)$ ($\omega_i \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N, \wedge^{K_i}(\mathbb{R}^N)^*)$ $i=1, 2$).

Bizonyítás. Tudjuk: Egy K -rendű Ω $\mathcal{C}^\ell$ -forma mindig $f \cdot dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_K}$ alakúak véges lineáris ($i_1 < i_2 < \dots < i_K$ $f \in \mathcal{C}^\ell(\mathbb{R})$) kombinációja. Így 1)2) bizonyítását elég csak ilyenekre elvégeznünk.

1) $d^2[f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_K}] = d[(df) \wedge x_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_K}] = (d^2 f) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_K}$, és itt

$$\begin{aligned} d^2 f &= d \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \\ &= \sum_{i=1}^N \left(d \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \wedge dx_i = \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_j \wedge dx_i \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i \wedge dx_j + \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \underbrace{dx_j \wedge dx_i}_{-dx_i \wedge dx_j} \right] = 0 . \end{aligned}$$

2) Vethető $\omega_1 := f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_K}$ $\omega_2 = g dx_{i_{K+1}} \wedge \dots \wedge dx_{i_{K+L}}$.
Ekkor

$$\begin{aligned} d(\omega_1 \wedge \omega_2) &= d(fg \cdot dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{K+L}}) = [d(fg)] \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{K+L}} \\ &= \left[\sum_{i=1}^N \frac{\partial fg}{\partial x_i} dx_i \right] \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{K+L}} \\ &= \left[\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} g + f \frac{\partial g}{\partial x_i} \right) dx_i \right] \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{K+L}} \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_K} \wedge (g dx_{i_{K+1}} \wedge \dots \wedge dx_{i_{K+L}}) + \\ &\quad + \sum_{i=1}^N f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_K} \wedge (-1)^K \frac{\partial g}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{i_{K+1}} \wedge \dots \wedge dx_{i_{K+L}} . \end{aligned}$$

Differenciálforma primitívjei

Megjegyzés. Egy folytonos $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény *primitív függvénye* (primitívje) $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ha $F' = f$. Ekkor $F(x) = F_0(x) + C$ ($x \in \mathbb{R}$), ahol $F_0(x) := \int_{s=0}^x f(s) ds$, $C \in \mathbb{R}$ pedig tetszőleges konstans.

Az előbbi differenciálformákkal kifejezve: F pontosan akkor primitívje f -nek, ha $dF = f dx$, ahol $x : \xi \mapsto \xi$ a természetes koordinátafüggvény $\mathbb{R}$ -en.

Definíció. Egy $\mathbb{R}$ fölötti K -adrendű ω forma *primitívje* a $(K-1)$ -rendű Ω forma, ha $\omega = d\Omega$.

Megjegyzés. 1) Ha $\omega = d\Omega$ akkor $d\omega = d^2\Omega = 0$.

2) Az 1-dimenziós $\omega := f dx$ esetben ω primitívjei 0-formák (azaz $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvények, nevezetesen $\Omega_0 + \text{const}$ alakúak, ahol

$$\Omega_0(x) = F_0(x) = \int_{s=0}^x f(s) ds = \int_{t=0}^1 f(tx)x dt = \int_{t=0}^1 \omega(tx)(x) dt.$$

Tétel. Ha $1 \leq K < N$ és ω olyan K -forma $\mathbb{R}^N$, amelynél $d\omega = 0$, akkor az

$$\Omega_0(x)(v_1, \dots, v_{K-1}) := \int_{t=0}^1 \omega(tx)(x, tv_1, \dots, tv_{K-1}) dt \quad (x, v_1, \dots, v_{K-1} \in \mathbb{R}^N)$$

$\mathbb{R}^N$ -fölötti $(K-1)$ -forma primitívje ω -nak.

Bizonyítás. Elegendő belátni: ha $Q : [0, 1]^K \rightarrow \mathbb{R}^N$ tetszőleges K -dimenziós $\mathcal{C}^1$ -kocka, akkor $\int_Q \omega = \int_Q d\Omega_0 = \int_{\partial Q} \Omega_0$. Tekintsük a

$$\tilde{Q}(t, t_1, \dots, t_K) := tQ(t_1, \dots, t_K) \quad (t, t_1, \dots, t_K \in \mathbb{R}^N)$$

$(K+1)$ -dimenziós $\mathcal{C}^1$ -kockát. A $2K$ darab $(K-1)$ -dimenziós $\mathcal{C}^1$ -kockából álló ∂Q lánc-határt $\partial Q = \sum_{m=1}^{2K} R_m$ alakban írva,

$$\partial \tilde{Q} = Q - 0 + \sum_{m=1}^{2K} \tilde{R}_m \quad \text{a } \tilde{R} : (t, s_1, \dots, s_{K-1}) \mapsto tR(s_1, \dots, s_{K-1}) \text{ jelöléssel.}$$

Tudjuk: általában is

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{R}} \omega &= \int_{(t, s_1, \dots, s_{K-1}) \in [0, 1]^K} \omega(R(t, s_1, \dots, s_{K-1})) \left[\frac{\partial \tilde{R}}{\partial t}, \frac{\partial \tilde{R}}{\partial s_1}, \dots, \frac{\partial \tilde{R}}{\partial s_{K-1}} \right] dt ds_1 \cdots ds_{K-1}, \\ &= \int_{t=0}^1 \int_{S \in [0, 1]^{K-1}} \omega(tR(s)) \left[R, t \frac{\partial R}{\partial s_1}, \dots, t \frac{\partial R}{\partial s_{K-1}} \right] ds_1 \cdots ds_{K-1} dt = \\ &= \int_{t=0}^1 t^{K-1} \omega(tx) \left[x, \frac{\partial R}{\partial s_1}, \dots, t \frac{\partial R}{\partial s_{K-1}} \right] ds_1 \cdots ds_{K-1} dt = \\ &= \int_R \Omega_0. \end{aligned}$$

Vagyis Stokes tétele szerint

$$\int_Q \omega = - \sum_{m=1}^{2K} R_m \Omega_0 = - \int_{\partial Q} \Omega_0 = \int_Q d\Omega_0. \quad \text{Qu.e.d.}$$

Következmény. $d\omega = 0$ esetén $\omega = d\Omega$ áll valamely 1-gyel alacsonyabb rendű Ω differenciálformával, és

$$\{\omega \text{ primitívjei}\} = \Omega_0 + \{0 \text{ primitívjei}\} = \{\Omega_0 + d\Gamma : \Gamma \text{ tetsz. } (K-2)\text{-forma}\}.$$

Lánc határa

Megjegyzés. Hasonlóan mint az 1-változós esetben belátható^{*}, hogy

$$\bar{I} \text{ kompakt} \subset G \text{ nyitott} \subset \mathbb{R}^N, \quad f \in C^\ell(G), \Rightarrow$$

$$\exists f_1, f_2, \dots \in C^\infty(G) \quad f_n^{(k)} \rightrightarrows f \quad \bar{I} \text{ fölött} \quad (n \rightarrow \infty, k = 0, \dots, \ell).$$

Lemma. Ha $Q : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ K -dimenziós $\mathcal{C}^1$ -kocka és ω egy $(K-1)$ -rendű $\mathcal{C}^1$ -forma $\mathbb{R}^N$ -en, akkor

$$\tilde{\partial}Q(\omega) = \tilde{Q}(d\omega).$$

Bizonyítás. Stokes tétele szerint az állítás $\mathcal{C}^2$ -kockára igaz. Az iménti megjegyzés alapján

$$\exists Q_1, Q_2, \dots : I \rightarrow \mathbb{R}^N \quad \mathcal{C}^2\text{-kockák} \quad Q_n \rightrightarrows Q \quad Q' \rightrightarrows Q' \quad (n \rightarrow \infty).$$

Ezekkel

$$\tilde{\partial}Q(\omega) \rightarrow \tilde{\partial}Q(\omega) \quad \tilde{Q}(d\omega) \rightarrow \tilde{Q}(d\omega) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Mivel itt $\tilde{\partial}Q_n(\omega) = \tilde{Q}_n(d\omega) \quad (n = 1, 2, \dots)$, határértékben $\tilde{\partial}Q(\omega) = \tilde{Q}(d\omega)$.

Tétel. Ha $Q_1, R_1, \dots, Q_m, R_m$ K -dimenziós $\mathcal{C}^1$ -kockák, $\alpha_1, \beta_1, \alpha_m, \beta_m \in \mathbb{Z}$, akkor

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \tilde{Q}_i = \sum_{i=1}^m \beta_i \tilde{R}_i \Rightarrow \sum_{i=1}^m \alpha_i \tilde{\partial}Q_i = \sum_{i=1}^m \beta_i \tilde{\partial}R_i.$$

Bizonyítás. Legyen az $\omega \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N, \wedge^{K-1}(\mathbb{R}^N)^*)$ $\mathcal{C}^0$ -forma rögzítve tetszőlegesen.

$$\text{Belátandó: } \sum_{i=1}^m \alpha_i \tilde{\partial}Q_i(\omega) = \sum_{i=1}^m \beta_i \tilde{\partial}R_i(\omega).$$

A megjegyzés szerint találhatók olyan $\omega_1, \omega_2, \dots$ $(K-1)$ -rendű $\mathcal{C}^1$ -formák $\mathbb{R}^N$ -en, amelyekre $\omega_n \rightrightarrows \omega \quad (n \rightarrow \infty)$. A lemma alapján tehát

$$\begin{aligned} \tilde{\partial}Q_i(\omega_n) &= \tilde{Q}_i(d\omega_n) & \tilde{\partial}R_i(\omega_n) &= \tilde{R}_i(d\omega_n) & (i = 1, \dots, m \quad n = 1, 2, \dots) \\ \sum_{i=1}^m \alpha_i \tilde{\partial}Q_i(\omega_n) &= \sum_{i=1}^m \alpha_i \tilde{Q}_i(d\omega_n) & \text{Feltevés} \\ &= \sum_{i=1}^m \beta_i \tilde{R}_i(d\omega_n) &= \sum_{i=1}^m \beta_i \tilde{\partial}R_i(\omega_n) & (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

$$\text{Innen } n \rightarrow \infty\text{-re} \quad \sum_{i=1}^m \alpha_i \tilde{\partial}Q_i(\omega) = \sum_{i=1}^m \beta_i \tilde{\partial}R_i(\omega).$$

Definíció. A K -dimenziós L $\mathcal{C}^1$ -kockalánc határa az a

$$\partial L : \{ (K-1)\text{-rendű } \mathcal{C}^0\text{-formák} \} \rightarrow \mathbb{R}$$

^{*} Nevezetesen, az $f_n(p) := \int \bar{f}(p-z)(2\pi)^{-N/2} n^N \exp[-\|nz\|^2/2] d\text{Vol}_N(z)$ függvények megfelelnek, ahol $\bar{f}(q) := [f(q) \text{ ha } q \in G, 0 \text{ ha } q \notin G]$.

lineáris funkcionál, amelyre

$$\partial L(\omega) := \left[\sum_{i=1}^m \alpha_i \tilde{\partial} Q_i(\omega) : L = \sum_{i=1}^m \alpha_i \tilde{Q}_i \text{ ahol } Q_1, \dots, Q_m \text{ } \mathcal{C}^1\text{-kockák, } \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{Z} \right] .$$

Következmény. Ha L egy K -dimenziós kockalánc és $\omega \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N, \bigwedge^{K-1}(\mathbb{R}^N)^*)$, akkor

$$\partial L(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} L(d\omega_n) \quad (\omega_n \rightrightarrows \omega, \quad \omega_1, \omega_2, \dots \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N, \bigwedge^{K-1}(\mathbb{R}^N)^*)) .$$

Felületdarabok

Voltaképpen még nem tisztáztuk azt a kérdést, hogy léteznek-e egyáltalán differenciálmértékek. Azaz egy adott ω $\mathcal{C}^0$ -formához (K -rendű, $\mathbb{R}^N$ -en)

$$\exists ? \nu \text{ lokális előjeles mérték} \quad \nu(Q) = \int_Q \omega \quad (Q \text{ } K\text{-dim. } \mathcal{C}^1\text{-kocka}).$$

Ennek a (pozitív) megválaszolása annál inkább érdekes lenne, mivel a külső derivált absztrakt definíciója mellett nagyon természetes pl. az $\int \cdot dx$ szimbólumot mint egy "integrálásra éhes" (vagyis az $\int f dx$ integráláshoz f függvényeket váró) műveleti jelet felfogni.

Először megvizsgáljuk, hogy a differenciálható kockákból kiindulva milyen alakzatokon lehet ilyen lokális előjeles mértékeket definiálni.

Emlékeztető. Az $\mathbb{R}^N$ -beli K -dimenziós $Q : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ $\mathcal{C}^\ell$ -kockát azonosítottuk az $\mathbb{R}^K \times \mathbb{R}^N$ -beli $\{(t, Q(t)) : t \in I\}$ alakzattal (ami a grafikonja).

Definíció. Az $F \subset \mathbb{R}^K \times \mathbb{R}^N$ halmaz K -dimenziós $\mathcal{C}^\ell$ -felületdarab $\mathbb{R}^N$ -ben, ha

$$\exists G \text{ korlátos nyitott } \subset \mathbb{R}^K \quad \exists A \text{ Borel } \subset G \quad \exists T \in \mathcal{C}^\ell(G, \mathbb{R}^N) \\ \overline{A} \subset G \text{ és } F = T \mid G .$$

Lemma. Ha G nyitott $\subset \mathbb{R}^K$ és $T_1, T_2 \in \mathcal{C}^1(G, \mathbb{R}^N)$, akkor az $S := \{t : T_1(t) = T_2(t), T_1'(t) \neq T_2'(t)\}$ első-rendű egybeesési paramétertartományra $\text{Vol}_K(S) = 0$.

Bizonyítás. A döntő észrevétel az, hogy

$$\forall t \in S \exists U \text{ } t\text{-környezet } \subset G \exists Q \text{ } (K-1)\text{-dim. } \mathcal{C}^1\text{-kocka } \subset \mathbb{R}^N \quad S \cap U = \text{ran}(Q) .$$

Bizonyítás: Legyen $t \in S$ tetszőlegesen adott. Ekkor

$$\exists i, j \quad \frac{\partial x_i(T_1)}{\partial t_j}(t) \neq \frac{\partial x_i(T_2)}{\partial t_j}(t) .$$

Vehető, hogy itt $i = N$ és $j = K$. Most

$$f := T_1 - T_2 \text{ mellett} \quad f(t) = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial t_k}(t) \neq 0 .$$

Az implicit függvény tétel szerint tehát

$$\exists I_1, \dots, I_K \text{ nyitott intervallum } \subset \mathbb{R} \quad \exists g \in \mathcal{C}^1(I_1 \times \dots \times I_{K-1}) \\ I_1 \times \dots \times I_K \text{ } t\text{-környezet és } \{p \in I_1 \times \dots \times I_K : f(p) = 0\} = \\ = \{(p_1, \dots, p_{K-1}, g(p_1, \dots, p_{K-1})) : p_1 \in I_1, \dots, p_{K-1} \in I_{K-1}\} .$$

Választva egy olyan nyitott $I \neq \emptyset$ intervallumot $\mathbb{R}^{K-1}$ -ben, amelyre

$$(t_1, \dots, t_{K-1}) \in I, \quad \bar{I} \subset I_1 \times \dots \times I_{K-1},$$

az észrevétel bizonyításához a

$$Q : I \ni (p_1, \dots, p_{K-1}) \mapsto (p_1, \dots, p_{K-1}, g(p_1, \dots, p_{K-1}))$$

$\mathcal{C}^1$ -kocka megfelel.

Az észrevételből azonnal következik, hogy

$$\forall t \in S \quad \exists U_t \text{ } t\text{-környezet} \subset G \quad \text{Vol}_K(S \cap U) = 0.$$

Lindelöf tétele szerint az U_t ($t \in S$) környezetek közül kiválasztható egy $U_{t(1)}, U_{t(2)}, \dots$ sorozat, amely lefedi az S alakzatot. Ezekkel pedig

$$\text{Vol}_K(S) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \text{Vol}_K(S \cap U_{t(n)}) = 0.$$

Propozíció. Tegyük fel, hogy $F : A \rightarrow \mathbb{R}^N$ egy K -dimenziós $\mathcal{C}^1$ -felületdarab, amelynek $T_i : G_i \rightarrow \mathbb{R}^N$ ($i = 1, 2$) két különböző lefedése, ahol

$$\bar{A} \subset G_1, G_2 \text{ korl. nyitott} \subset \mathbb{R}^K \quad T_i \in \mathcal{C}^1(G_i, \mathbb{R}^N) \quad F = T_i \mid A \quad (i = 1, 2).$$

Ekkor bármely $\Phi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^K, \mathbb{R}^N))$ függvényre

$$\int_A \Phi(T_1, T'_1) d\text{Vol}_K = \int_A \Phi(T_2, T_2) d\text{Vol}_K.$$

Bizonyítás. A lemma mutatja, hogy a $\{t \in A : T'_1(x) \neq T'_2(t)\}$ halmaz Vol_K szerint 0-mértékű, mivel föltevés szerint $\bar{A} \subset G_1 \cap G_2$ és $T_1(t) = T_2(t)$ ($t \in \bar{A}$).

Következmény. Az előbbi jelölésekkel $\int_A \text{Jac}(T_1) d\text{Vol}_K = \int_A \text{Jac}(T_2) d\text{Vol}_K$.

Felületek és integrálformák

Definíció. Az $F \subset \mathbb{R}^K \times \mathbb{R}^N$ alakzat K -dimenziós $\mathcal{C}^\ell$ -felület $\mathbb{R}^N$ -ben, ha

$$\exists F_1, F_2, \dots \text{ } K\text{-dim. diszjunkt } \mathcal{C}^\ell\text{-felületdarabok} \quad F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Tétel. Legyen ω egy K -rendű $\mathcal{C}^0$ -forma $\mathbb{R}^N$ -en. Ekkor létezik pontosan egy ν_ω lokális előjeles mérték, amelyre

$$\text{dom}(\nu_\omega) \subset \{K\text{-dimenziós } \mathcal{C}^1\text{-felületek}\}, \text{ és}$$

$$\nu_\omega(F) = \int_F \omega \quad (F \text{ } K\text{-dimenziós } \mathcal{C}^1\text{-felületdarab}).$$

Bizonyítás. A tétel tipikus speciális esete az összeillesztési tételnek. Legyen $\mathcal{Q}$ az $\mathbb{R}^N$ -beli K -dimenziós $\mathcal{C}^1$ -felületdarabok családja. Minden $Q \in \mathcal{Q}$ mellett legyen

$$\mathcal{A}_Q := \{R \in \{Q\} : R \subset Q\}, \quad \nu_Q(R) := \int_R \omega \quad (R \in \mathcal{A}_Q).$$

Ha $Q \in \mathcal{Q}$ és $Q_n : A_n \rightarrow \mathbb{R}^N$ ($n = 1, 2, \dots$) páronként diszjunkt tagjai $\mathcal{A}_Q$ -nak, továbbá $T \in \mathcal{C}^1(G, \mathbb{R}^N)$ egy lefedő leképezése Q -nak (azaz $[\text{dom}(Q)]^- \subset G$

nyitott $\subset \mathbb{R}^K$ és $Q = T| \text{dom}(Q)$), akkor

$$\begin{aligned}\nu_Q\left(\bigcup_n Q_n\right) &= \int_{\bigcup_n Q_n} \omega = \int_{\bigcup_n A_n} \omega(T)\left(\frac{\partial T}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial T}{\partial t_K}\right) d\text{Vol}_K \\ &= \sum_n \int_{A_n} \omega(T)\left(\frac{\partial T}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial T}{\partial t_K}\right) d\text{Vol}_K \\ &= \sum_n \int_{Q_n} \omega .\end{aligned}$$

Vagyis a ν_Q halmazfüggvények mind korlátos előjeles mértékek. Másrészt a $Q_1 \cap Q_2 \in \mathcal{Q}$, $\nu_{Q_1 \cap Q_2} = \nu_{Q_1}|_{\mathcal{A}_{Q_1 \cap Q_2}}$ ($Q_1, Q_2 \in \mathcal{Q}$) relációk triviálisak. Innen az összeillesztési tétel közvetlenül adja az mind az egzisztencia- mind az unicitási állítását a tételnek.

A paraméteres előállításából a $\nu_Q(: \mathcal{A}_Q \ni R \mapsto \int_R \omega)$ differenciálmértékeknek (mostmár jogos így mondani) azonnal adódik, hogy a bizonyítás jelöléseivel

$$\begin{aligned}|\nu_\omega|(Q) &= \int_A \left| \omega(T)\left(\frac{\partial T}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial T}{\partial t_K}\right) \right| d\text{Vol}_K \\ &= \sup \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_{M_n} \omega \right| : M_1, M_2, \dots \text{ diszj. felületdarabok, } \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n = Q \right\} .\end{aligned}$$

Így az összeillesztési tétel pontos információt ad azokról a felületekről, amelyekre a ν_ω differenciálmérték definiálva van.

Következmény. A ν_ω differenciálmérték értelmezési tartománya

$$\left\{ F : F \text{ } \mathbb{R}^N \text{-beli } K\text{-dim. } C^1\text{-felület,} \right. \\ \left. \sup \left\{ \sum_n \left| \int_{M_n} \omega \right| : M_1, M_2, \dots \text{ diszj. felületdarabok, } \bigcup_n M_n = F \right\} < \infty \right\} .$$

Definíció. A tételben megkonstruált ν_ω differenciálmérték az ω differenciálforma integrálja. Jelölése: $\int_{\bullet} \omega$. Az ω differenciálforma integrálformája az

$$\int \omega : f \mapsto \int \hat{f} d\nu_\omega$$

funkcionál, amely azokra a Borel mérhető $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ függvényekre van definiálva, amelyeknek az

$$\hat{f} : \mathbb{R}^K \times \mathbb{R}^N \ni (t, x) \mapsto f(x)$$

felemeltje ν_ω -integrálható.

Felületdarabok ekvivalenciája

Definíció. Az $F_1 : A_1 \rightarrow \mathbb{R}^N$, $F_2 : A_2 \rightarrow \mathbb{R}^N$ K -dimenziós C^1 -felületdarabok ekvivalensek, $F_1 \approx F_2$, ha

$$\exists G_1, G_2 \text{ nyitott } \subset \mathbb{R}^K \quad \exists S : G_1 \leftrightarrow G_2 \\ S \in C^1(G_1, \mathbb{R}^K), \quad F_1 = F_2 \circ S, \quad \det(S') > 0.$$

Lemma. $A \approx$ reláció ekvivalencia.

Bizonyítás. 1) Triviálisan, $F \approx F$ mindig.

2) Tegyük fel, hogy $F_1 \approx F_2$, és legyen $S : G_1 \leftrightarrow G_2$ mint a definícióban. Most $S^{-1} : G_2 \leftrightarrow G_1$, és az implicit függvény tétel szerint

$$S^{-1} \in C^1(G_2, \mathbb{R}^K) \quad \det((S^{-1})') = 1/\det(S') > 0,$$

ahonnan $F_2 \approx F_1$.

3) Tegyük fel, hogy $F_1 \approx F_2 \approx F_3$ ahol $F_i \rightarrow \mathbb{R}^K$ ($i = 1, 2, 3$). Ekkor

$$\exists G_1, G_2, H_2, H_3 \text{ nyitott } \subset \mathbb{R}^K \quad \exists S_1 \in C^1(G_1, \mathbb{R}^K) \quad \exists S_2 \in C^1(H_2, \mathbb{R}^K) \\ \overline{A}_1 \subset G_1, \quad \overline{A}_2 \subset G_2, H_2, \quad \overline{A}_3 \subset H_3, \\ S_1 : G_1 \leftrightarrow G_2, \quad S_2 : H_2 \leftrightarrow H_3, \quad \det(S'_i) > 0 \quad (i = 1, 2), \\ F_1 = F_2 \circ S_1, \quad F_2 = F_3 \circ S_2.$$

Most az $S := S_2 \circ S_1$ leképezésre

$$S : K_1 \leftrightarrow K_3 \quad \text{ahol} \quad K_1 := S_1^{-1}(G_2 \cap H_2), \quad K_3 = S_2(G_2 \cap H_2).$$

A G_2, H_2 halmazok nyitottsága és az S_1, S_2^{-1} transzformációk folytonossága miatt a K_1 ill. K_3 halmazok is nyitottak, és $\overline{A}_i \subset K_i$ ($i = 1, 3$). Másrészt $S = [\mathcal{C}^1\text{-függvények összetétele}] \in C^1(K_1, \mathbb{R}^K)$, és emellett $\det(S') = \det(S'_2(S_1)) \cdot \det(S'_1) > 0$. Azaz $F_1 \approx F_3$.

Tétel. Tegyük fel, hogy az $F_1 : A_1 \rightarrow \mathbb{R}^N$, $F_2 : A_2 \rightarrow \mathbb{R}^N$ felületdarabok ekvivalensek. Ekkor

$$\int_{A_1} \Phi(T_1, \frac{\partial T_1}{\partial t_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial T_1}{\partial t_K}) d\text{Vol}_K = \int_{A_2} \Phi(T_2, \frac{\partial T_2}{\partial t_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial T_2}{\partial t_K}) d\text{Vol}_K$$

valahányszor $\Phi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N \times \bigwedge^K \mathbb{R}^N)$ egy a $\bigwedge^K \mathbb{R}^N$ -beli változójában pozitív-homogén* függvény és a T_1, T_2 leképezésekre $T_i \in C^1(G_i, \mathbb{R}^N)$, ahol $\overline{A}_i \subset G_i$ nyitott $\subset \mathbb{R}^K$ és $F_i = T_i|_{A_i}$ ($i = 1, 2$).

Bizonyítás. Mivel $F_1 \approx F_2$, választhatunk olyan H_1, H_2 nyitott $\subset \mathbb{R}^K$ halmazokat és $S \in C^1(H_1, \mathbb{R}^K)$ transzformációt, amelyre

$$\overline{A}_i \subset H_i \quad (i = 1, 2), \quad S : H_1 \leftrightarrow H_2, \quad F_1 = F_2 \circ S, \quad \det(S) > 0.$$

Most a

$$K_2 := S(G_1 \cap H_1) \cap G_2, \quad K_1 := S^{-1}(K_2) = S^{-1}(G_2 \cap H_2) \cap G_1$$

$\mathbb{R}^K$ -beli nyitott halmazokra

$$\overline{A}_2 \subset K_2, \quad \overline{A}_1 = S^{-1}(\overline{A}_2) \subset^{-1} (K_2) = K_1.$$

Ugyanis $\overline{A}_1 \subset G_1 \cap H_1$ és az S leképezés a folytonos S^{-1} inverze, ahonnan $\overline{A}_2 = S(A_1)^- = S(\overline{A}_1) \subset S(G_1 \cap H_1)$. Tehát az eredetileg adott G_i halmaz helyett az $\overline{A}_i$ -t szintén tartalmazó nyitott K_i részére áttérve, vehető az általánosság megszorítása nélkül, hogy

$$S : G_1 \leftrightarrow G_2.$$

* Azaz $\Phi(x, \alpha \cdot \Lambda) = \alpha \cdot \Phi(x, \Lambda) \quad (\alpha \geq 0 \quad x \in \mathbb{R}^N \quad \Lambda \in \bigwedge^K \mathbb{R}^N).$

Észrevétel: $\text{Vol}_K \{t \in A_1 : T'_1(t) \neq T'_2(S(t)) \cdot S'(t)\} = 0$. (Ez azonnal adódik a Felületdarabok alfejezet lemmájából, mivel $T_1, T_2 \circ S \in \mathcal{C}^1(G_1, \mathbb{R}^N)$ és $T_1|_{A_1} = T_2 \circ S|_{A_1} [= F_1]$.) Legyen $B_1 := \{t \in A_1 : T'_1(t) = T'_2(S(t))S'(t)\}$. Ekkor

$$\begin{aligned}
& \int_{A_1} \Phi\left(T_1, \frac{\partial T_1}{\partial t_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial T_1}{\partial t_K}\right) d\text{Vol}_K \stackrel{\text{Észrevétel}}{=} \\
&= \int_{B_1} \Phi\left(T_1, \frac{\partial T_1}{\partial t_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial T_1}{\partial t_K}\right) d\text{Vol}_K \stackrel{B_1 \text{ def.}}{=} \\
&= \int_{B_1} \Phi\left(T_2 \circ S, \frac{\partial T_2 \circ S}{\partial t_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial T_2 \circ S}{\partial t_K}\right) d\text{Vol}_K \\
&= \int_{B_1} \Phi\left(T_2 \circ S, \det(S') \cdot \frac{\partial T_2}{\partial t_1}(S) \wedge \cdots \wedge \frac{\partial T_2}{\partial t_K}(S)\right) d\text{Vol}_K \stackrel{\Phi \text{ hom.} + \det(S') > 0}{=} \\
&= \int_{B_1} \Phi\left(T_2 \circ S, \frac{\partial T_2}{\partial t_1}(S) \wedge \cdots \wedge \frac{\partial T_2}{\partial t_K}(S)\right) \det(S') d\text{Vol}_K \stackrel{\text{HELYETTESÍTÉS}}{=} \\
&= \int_{S(B_1)} \Phi\left(T_2, \frac{\partial T_2}{\partial t_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial T_2}{\partial t_K}\right) d\text{Vol}_K \\
&= \int_{A_2} \Phi\left(T_2, \frac{\partial T_2}{\partial t_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial T_2}{\partial t_K}\right) d\text{Vol}_K
\end{aligned}$$

mivel $A_2 = S(A_1) = S(B_1) \cup S(A_1 \setminus B_1) = S(B_1) \cup [\text{Vol}_K \text{ szerint } 0\text{-halmaz}]$.

Következmény. $F_1 \approx F_2$ esetén 1) $\sigma_K(F_1) = \sigma_K(F_2)$, 2) a tétel jelöléseivel

$$\int_{A_1} \omega(T_1) \left(\frac{\partial T_1}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial T_1}{\partial t_K} \right) d\text{Vol}_K = \int_{A_2} \omega(T_2) \left(\frac{\partial T_2}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial T_2}{\partial t_K} \right) d\text{Vol}_K$$

minden $\mathbb{R}^N$ -beli K -rendű $\omega \in \mathcal{C}^0$ -formára.

Definíció. Az $\mathbb{R}^N$ -beli K -dimenziós $F : A \rightarrow \mathbb{R}^N$ felületdarabon az $\omega \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N, \bigwedge^K(\mathbb{R}^N)^*)$ differenciálforma integrálja

$$\begin{aligned}
\int_F \omega &:= \left[\int_A \omega(T) \left(\frac{\partial T}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial T}{\partial t_K} \right) d\text{Vol}_K : \right. \\
&\quad \left. G \text{ nyitott } \subset \mathbb{R}^K, \bar{A} \subset G, T \in C^1(G, \mathbb{R}^N), F = T|_A \right],
\end{aligned}$$

ami a tétel alapján jól-definiált kiterjesztése a $\mathcal{C}^1$ -kockákra való integrálnak.

Következmény. $\int_{F_1} \omega = \int_{F_2} \omega \quad (F_1 \approx F_2, \omega \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N, \bigwedge^K(\mathbb{R}^N)^*)).$

Felületek ekvivalenciája

Definíció. Az $\mathbb{R}^N$ -beli K -dimenziós $F, H \in \mathcal{C}^1$ -felületek *ekvivalensek*, $F \sim H$, ha $\exists F_1, F_2, \dots$ diszjunkt felületdarabok $\exists H_1, H_2, \dots$ diszjunkt felületdarabok

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \quad H = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n \quad F_n \approx H_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Propozíció. $A \sim$ reláció ekvivalencia.

Bizonyítás. $A \sim$ reláció triviálisan reflexív és szimmetrikus.

Tegyük fel, hogy $F \sim H \sim M$. Ekkor

$\exists F_1, F_2, \dots$ diszj. $\exists H_1, H_2, \dots$ diszj. $\exists K_1, K_2, \dots$ diszj. $\exists M_1, M_2, \dots$ diszj. felületdarabok

$$\begin{aligned} F &= \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n & H &= \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n & F_n &\approx H_n & (n=1, 2, \dots) \\ H &= \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n & M &= \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n & K_n &\approx M_n & (n=1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Ha tehát

$$F_n : A_n \rightarrow \mathbb{R}^N \quad H_n : B_n \rightarrow \mathbb{R}^N \quad K_n : C_n \rightarrow \mathbb{R}^N \quad M_n : D_n \rightarrow \mathbb{R}^N,$$

akkor találhatóak olyan

$$S_n : \hat{A}_n \leftrightarrow B_n \quad T_n : \hat{C}_n \leftrightarrow \hat{D}_n \quad \det(S'), \det(T') > 0$$

C^1 -síma leképezések, amelyeknél

$$\hat{A}_n, \hat{B}_n, \hat{C}_n, \hat{D}_n \text{ nyitott } \subset \mathbb{R}^K \quad \overline{A_n} \subset \hat{A}_n, \overline{B_n} \subset \hat{B}_n, \overline{C_n} \subset \hat{C}_n, \overline{D_n} \subset \hat{D}_n$$

és

$$F_n = H_n \circ S_n \quad H_n = M_n \circ T_n \quad (n=1, 2, \dots).$$

Képezzük a

$$B_{mn} := B_m \cap C_n$$

$$A_{mn} := S_m^{-1}(B_{mn}) \quad D_{mn} := T_n(B_{mn})$$

$$F_{mn} := F_m|_{A_{mn}} \quad H_{mn} := H_m|_{B_{mn}} = K_n|_{B_{mn}} \quad M_{mn} := M_n|_{D_{mn}}$$

közös beosztását a felületeknek $(m, n=1, 2, \dots)$. Ekkor

$$F = \bigcup_{m,n=1}^{\infty} F_{mn} \quad H = \bigcup_{m,n=1}^{\infty} H_{mn} \quad M = \bigcup_{m,n=1}^{\infty} M_{mn} \text{ diszjunkt uniók.}$$

Másrészt

$$A_{mn} \subset \hat{A}_n \quad \overline{B_{mn}} \subset \hat{B}_m, \hat{C}_m \quad \overline{D_{mn}} \subset \hat{D}_n$$

$$F_{mn} = H_{mn} \circ S_m \quad H_{mn} = M_{mn} \circ T_m,$$

ahonnan $F_{mn} \approx M_{mn}$ minden m, n indexpárra, és így $F \sim H$.

Tétel. Ha F és H ekvivalens K -dimenziós C^1 -felületek $\mathbb{R}^N$ -ben és $F \in \text{dom}(\int_{\bullet} \omega)$ akkor $H \in \text{dom}(\int_{\bullet} \omega)$ és $\int_F \omega = \int_H \omega$.

Bizonyítás. Vegyünk olyan $F_1, F_2, \dots$ ill. $H_1, H_2, \dots$ diszjunkt felületdarabokat, amelyekkel

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \quad H = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n \quad F_n \approx H_n \quad (n=1, 2, \dots).$$

Láttuk: $\int_{F_n} \omega = \int_{H_n} \omega$ minden n indexre. Innen $\int_F \omega = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{F_n} \omega = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{H_n} \omega$. Így már csak azt kell igazolnunk, hogy $H \in \text{dom}(\int_{\bullet} \omega)$.

Ehhez elegendő megmutatnunk, hogy valahányszor $M_1, M_2, \dots$ diszjunkt felületdarabok és $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, mindannyiszor $\sum_{n=1}^{\infty} |\int_{M_n} \omega| \leq |\nu_\omega|(F) (< \infty)$.

Tegyük föl tehát, hogy $M_1, M_2, \dots$ diszjunkt felületdarabok, és $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$. Az F_n felületdarab ekvivalenciája H_n -nel azt jelenti, hogy találhatóunk olyan $S : G_n \leftrightarrow H_n$ lefedő leképezést, amelynél

$$G_n, K_n \text{ nyitott } \subset \mathbb{R}^K \quad \text{dom}(F_n)^- \subset G_n \quad \text{dom}(H_n)^- \subset K_n, \\ S_n : G_n \leftrightarrow K_n \quad S_n \in \mathcal{C}^1(G_n, \mathbb{R}^K) \quad F_n = H_n \circ S_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Tekintsük a

$$H_{m,n} := H_m \cap M_n \quad F_{m,n} := L_{m,n} \circ S_m \quad (m, n = 1, 2, \dots)$$

felületdarabokat. Észrevétel: $F_{m,n} \approx H_{m,n}$ minden m, n indexpárra, az $\{F_{m,n} : m, n = 1, 2, \dots\}$ ill. $\{H_{m,n} : m, n = 1, 2, \dots\}$ felületdarab-családok diszjunktak és $F_m = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_{m,n}$, $H_m = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_{m,n}$ ($m = 1, 2, \dots$). Innen

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_{M_n} \omega \right| &= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{m=1}^{\infty} \int_{H_{m,n}} \omega \right| \\ &\leq \sum_{m,n=1}^{\infty} \left| \int_{H_{m,n}} \omega \right| = \sum_{m,n=1}^{\infty} \left| \int_{F_{m,n}} \omega \right| \\ &\leq |\nu_\omega|(F) < \infty, \end{aligned}$$

ami bizonyítja a tételt.