ELŐSZÓ

Egy-változóra koncentráló oktatás gyakori.

Még a több-változós feladatok jó része is egy-változósok rekapitulációja, "árucsatolás" (pl. sorozatok határértéke komponensenként, szukcesszív integrálás).

Mire a hallgató elér egy tipikus többváltozós problémához (pl. integrálási határok más sorrendű szukcesszív integrálásnál), belefárad, beleun.

Taylor sorfejtés – aligha a parciális differenciálás bujtatott gyakoroltatása (jó esetben rekurzióval együtt, mégha az ilyen sokakra ráférne is).

Mi itt az egy-változós kalkulus jó ismeretét feltesszük, arra koncentrálunk, hogyan vezethető vissza MAPLE szintű egy-változós műveletekre a megoldás.

Ugyanakkor nem "multivariate analysis by MAPLE". Az ilyen szakmai antyaga felszínesebb, és inkább a programcsomag speciális (de elméletileg nem releváns) sok szép szolgáltatására koncentrálnak programozói ambiciókkal.

Verifikálandók, és speciális logikai elemzést igényelnek a tisztán komputer-algebrai megközelítések a amesterséges intelligencis jelen fejlettségi szintjén.

Sok differenciálgeometriai alapgondolat. Ezt nem álcázzuk: jelentős hangsúly a koordinátázáson.

Elemi koordináta-olvasási és képletolvasási 0. fejezet.

Egy-változósnak látszó egyenlőtlenségek mint többváltozós szélsőérték-problémák kezelése.

Alap: Stachó László, "A többváltozós analízis alapjai" .

Így van bevezetőtopológia és mértékelmélet is.

Kissé tágabb a szokásos témaköröknél.

Egyes alkalmzásokból kiindulva.

Ugyanakkor nem kíván kézikönyv lenni.

Pl. Fourier- ill. Laplace-transzformációkat nem tárgyalunk.

Komplexifikált $\mathbb{C}$ -beli koordinátákkal is foglalkozunk.

Sok kidolgozott feladat van, de közel sem minden feladatnak adjuk meg a végeredményét.

Vannak olyan megoldással közölt egyszerű feladatok is, amelyek célja az alapfogalmak megérttetése (pl. A "Differenciálformák $\mathbb{R}^N$ -en" c. fejezet elején).

Vannak olyan feladatsorok is (pl. a Poincaré-lemmát tárgyaló), amelyek célja az elméleti anyag kiegészítése más tárgyak számára fontos tétellel.

Hasonló típusból csak kevés feladat van. Ha még tovább gyakorolni kíván egy típust az Olvasó, célszerű, hogy maga találjon ki ilyeneket. (Gyakran mélyebb hiányosságokra utalhat az eféle igény, hacsak nem dolgozati felkészülésnél "normaidő javítási edzésről" van szó).

Igyekeztünk tömör, célratörő stílusban fogalmazni: pl. ha az Olvasó csak egy állítást talál egy feladatnál, értelemszerűen az a dolga, hogy bizonyítsa be az illető állítást. (Tehát kerüljük az olyan szófordulatokat, mint "bizonyítsa be, hogy ...", "oldaja meg a következő egyenleteket ...", stb.)

JELÖLÉSEK

$\mathbb{R}$ $:= \{\text{valós számok}\}$.

$\mathbb{C}$ $:= \{\text{komplex számok}\}$.

$\mathbb{Q}$ $:= \{\text{racionális számok}\}$.

$\mathbb{R}^N$ $:= \underbrace{\mathbb{R}\times\cdots\mathbb{R}}_{n} = \{(\xi_1,\dots,\xi_N):\ \xi_1,\dots,\xi_N\in\mathbb{R}\}$.

$(\xi_1,\dots,\xi_N)$ az $[1\mapsto\xi_1,\dots,N\mapsto\xi_N]$ függvény. Alkalmanként célszerű módon azonosítjuk a $(\xi_1\ \xi_2\ \ \xi_N)$ sorvektorral vagy $\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_N\end{pmatrix}$ oszlopvektorral.

(x,y,z) a természetes koordinátafüggvények $\mathbb{R}^3$ -on (a kontextusból derül ki):

$x:(\xi,\eta,\zeta)\mapsto\xi\,,\quad y:(\xi,\eta,\zeta)\mapsto\eta\,,\quad z:(\xi,\eta,\zeta)\mapsto\zeta\,;$

tetszőleges $\mathbb{R}^2$ -n értelmezett leképezése $f=f(x,y,z)$.

$\mathbb{R}$ -et ill. $\mathbb{R}^2$ -t gyakran az $\mathbb{R}\times\{0\}\times\{0\}$ ill. $\mathbb{R}^2\times\{0\}$ alterekként fogjuk fel az x ill. (x,y) kanonikus koordinátázással.

$x_1,\dots,x_N$ természetes koordinátafüggvények $\mathbb{R}^3$ -on (a kontextusból derül ki):

$x_k:(\xi_1,\dots,\xi_N)\mapsto\xi_k\qquad(k=1,\dots,N)$.

$\big(F(x_1,\dots,x_N)=0\big)$ az $\{p:\ F(x_1(p),\dots,x_N(p))=0\}$ halmaz más jelölése.

$\mathrm{Mat}(m,n,\mathbb{R})$ $:= \big\{\, m\times n\text{-es valós mátrixok}\big\}$.

1_S az S halmazon 1 , másutt 0 értéket felvevő függvény.

$f\circ g$ az f leképezés összetétele g -vel: $f\circ g: x\mapsto f(g(x))$.

$X,\mathcal{U}$ az X alaphalmaz ellátva az $\mathcal{U}$ környezetrendszerrel.

$\mathcal{U}: X\to\{\,X\ \text{részhalmazai}\}\,,\quad \mathcal{U}_x := \mathcal{U}(x) = \{\,x\ \ \text{köornyezetei}\}$.

X,d X alaphalmazú (fél)metrikus tér,

$d: X\times X\to[0,\infty]\,,\quad d(x,y)=[\text{az }\ x,y\ \text{ pontok távolsága}]$.

$\mathcal{L}(U,V)$ $:= \big\{\ \text{lineáris}\ \ U\to V\ \ \text{leképezések}\big\}$.

U^*	$:= \mathcal{L}(U, \mathbb{R})$ az U fölötti lineáris funkcionálok tere.
$\langle \phi, v \rangle$	$:= \phi(x)$, ha ϕ lineŕis funkcionál.
$\det A$	$:= \big[$az A mátrix determinánsa$\big]$.
	Ha $A \in \mathcal{L}(V, V)$ általános V vektortérnél,
	$\det A := \big[\, A$ mátrixának determinánsa tetszőleges bázis szerint$\big]$.
$\mathrm{GL}(V)$	$:= \{A \in \mathcal{L}(V, V) :\ \det A \neq 0\}$.
A^*	$:= \big[$az A mátrix transzponáltja$\big]$.
	Általános U, V vektorterek közti leképezésre:
	$A^* \in \mathcal{L}(V^*, U^*)$, amelyre $\langle A^*\psi, u \rangle = \langle \psi, Au \rangle$. Explicite $A^* : \psi \mapsto A \circ \psi$.
$\mathrm{diag}(\lambda_i)_{i=1}^N$	a $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ főátlójú, másutt 0 $N \times N$ -es mátrix.
$f'_v(a)$	$:= \lim_{\tau \to 0} \tau^{-1}[f(a + \tau v) - f(a)]$ irány szerint derivált.
$f'(a)$	$:= \big[v \mapsto f'_v(a)\big]$
	az f vektor-vektor függvény deriváltja az a helynél.
$\mathrm{Jac} f(a)$	az f leképezés Jacobi determinánsa az a helynél.
	$\mathrm{Jac} A := \sqrt{\det(f'(a)^* f'(a))}$.
$\overline{\lambda_N}$	N -dimenziós külső Lebesgue mérték $\mathbb{R}^N$ -en
ω_N	az $\mathbb{R}^N$ -beli $\big(x_1^2 + \cdots + x_N^2 \leq 1\big)$ euklidesi egységgömb $\overline{\lambda_N}$ -mértéke.
	$\omega_1 = 2$, $\omega_2 = \pi$, $\omega_3 = 4\pi/3$, $\ldots$, $\omega_N = \pi^{N/2} / \Gamma\big(1 + (N/2)\big)$.
vol_α	α -dimenziós Hausdorff mérték (fraktál-mérték).
Vol_α	normalizált α -dimenziós Hausdorff mérték (fraktál-mérték).
	$\mathrm{Vol}_\alpha := \dfrac{2^\alpha \Gamma\big(1 + (\alpha/2)\big)}{\pi^{\alpha/2}} \mathrm{vol}_\alpha$.
	A szorzó konstansok úgy vannak megválasztva, hogy
	$\mathrm{Vol}_N = \overline{\lambda_N}$ $(N = 1, 2, \ldots)$ legyen.
Γ	Euler-féle Gamma függvény: $\Gamma(p) := \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x}\, dx$.

0. ELEMI KOORDINÁTÁZÁS

1) Legyen $C := \{(\xi, \eta) \in \mathrm{I\!R}^2 : \ \eta = |\xi| \pm \sqrt{1-\xi^2}\}$.

a) Ábrázoljuk a C halmazt.

b) Adjunk olyan 2 -változós $F : \mathrm{I\!R}^2 \to \mathrm{I\!R}$ elemi függvényt, amelyre

$C = (F(x,y) = 0)$.

c) Választható-e F polinomnak is?

[a) Szív alakú, b) Pl. $F := (y - |x|)^2 - (1 - x^2)$,

c) Igen. Pl. $F := (y^2 + 3x^2 - 1 - x^4)^2 - 4x^2y^2$].

2) Ábrázoljuk az $\big(x = k/5\big)$, $\big(z = \ell/5\big)$ $(-5 \le k \le 5, \ -5 \le \ell \le 10)$

síkmetszeteiből alkotott háló axonometrikus képével a

$(2x^2 - 2|x|y + y^2 + z^2 = 1)$ 3D SZÍV alakzatot.

3) A $\pm\sqrt{1-x^2}$ fgv ek eltoltjaival adjunk képletet szív alakú halmazra.

[Pl. $\big(y = \pm\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-(1-|x|)^2}\big)$].

4) Melyik elemi függvény grafikonja az egymás utáni indexű

$p_k := \big(2k+1, (-1)^k\big) \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

pontokat összekötő szakaszokból álló "végtelen fű részfog",.

[Pl. $\arcsin\big(\sin \frac{\pi}{2} x\big)$].

5) Adjunk további képleteket az előbbi fűrészfogra.

[Pl. a frac *törtrész függvény* terminusain

$4 \min\big\{\mathrm{frac}\big((x-1)/4\big), \mathrm{frac}\big((1-x)/4\big)\big\} - 1$.

Vagy pl. az $\mathrm{I\!R}$ -beli pontok halmaztól való távolságával

$\mathrm{dist}(x, -1 + 4\mathbb{Z}) - 1$].

6) Ábrázoljuk az $\left(e^y = \sin x\right)$ $\mathbb{R}^2$-beli halmazt.

[A $\log \sin x$ függvény grafikonja].

7) a) $T_0\binom{x}{y} := \binom{xy}{y}$. $T_0[0,1]^2$ ábrázolása.

b) Adjunk meg olyan másodfokú $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ polinomot, amelyre

$T[0,1]^2$ a $\binom{-1/2}{0}, \binom{1/2}{0}, \binom{0}{\sqrt{3}/2}$ csúcsú szabályos háromszög.

[a) $\binom{0}{0}, \binom{0}{1}, \binom{1}{1}$ csúcsú háromszög. b) $T = \binom{(1-y)(x-1/2)}{\sqrt{3}y/2}$.]

8) Mik az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény $f^{-1}(\alpha, \infty)$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ szinthalmazai, ha

a) $f := \arccos \cos xy$,

b) $f := \arccos \cos x + \arccos \cos y$,

c) $f := \arccos \cos(x+y) + \arccos \cos(x-y)$.

d) $f(x,y) := \sup_{u_1+u_2=(x,y)} f(u_1) + f(u_2)$, ahol $\varphi := 1_{\left(x^2+y^2<1\right)}$.

9) Legyen $L \subset \mathbb{R}^2$ a $(0,0),(2,0),(2,1),(1,1),(1,2),(0,2),(0,0)$ pontokat összekötő szakaszok által körülzárt "L" alakú idom. $L + L = ?$

10) a) $\{0\} \times [a,b] + [c,d] \times \{0\} = ?$ b) $[0,1]^2 + \left(x^2+y^2<1\right) = ?$

c) $[0,1]^2 + \left(|x|+|y|<1\right) = ?$ d) $[0,1]^2 + \left(|x|+|y|<1\right) + \left(x^2+y^2<1\right) = ?$

11) Ciklois. 1 sugarú kerék gördül az x tengelyen.

a) A $(0,2)$ pont mely $P(\varphi)$ pontba kerül φ szögű fordulat után?

b) Adjunk meg olyan 2-változós F elemi függvényt, amelyre

$\{P(\varphi) : \varphi \in [-\pi,\pi]\} = \left(F(x,y)=0\right)$.

[$P(\varphi) = (\varphi + \sin\varphi, 1 + \cos\varphi)$.

$x = x(P(\varphi)) = \varphi + \sin\varphi$,

$y = y(P(\varphi)) = 1 + \cos\varphi$, $\varphi = \arccos(y-1)$.

$\pm x = \arccos(y-1) + \underbrace{\sqrt{1-(y-1)^2}}_{\sin\arccos(y-1)}$,

$F := x^2 - [\arccos(y-1) + \sqrt{1-(y-1)^2}]^2$ megfelel].

12) Adjuk meg a következő, az y tengelyere szimmetrikus "arcfigurát" $\big(F(x,y)=0\big)$ alakban, ahol F (x,y)-polinom.

Fej: $(0,0)$ középpontú 10 sugarú kör;

jobb szem: $(5,3)$ középpontú $1/2$ sugarú kör;

száj: $(-2,-6),(2,-6)$ ill. $(0,\frac{1}{4}),(0,-\frac{1}{4})$ tengelyű ellipszis.

[$F := [x^2+y^2-10^2]\cdot[(x-5)^2+(y-3)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2]\cdot[(x+5)^2+(y-3)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2]\cdot$
$\cdot\left[\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y+6}{1/4}\right)^2-1\right]$].

13) Adjuk meg azt a "mosolyfigurát" $\big(F(x,y)=0\big)$ alakban, amelynél a fej, szemek mint előbb, a száj pedig $1/2$ magasságú torzított ellipszis — nagytengely a $(-2,-5),(0,-7),(2,-5)$ pontokon átmenő parabolaszakasz.

[$F := [x^2+y^2-10^2]\cdot[(x-5)^2+(y-3)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2]\cdot[(x+5)^2+(y-3)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2]\cdot$
$\cdot\left[\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y-2(x/2)^2}{1/4}\right)^2-1\right]$].

14) Adjunk meg olyan $F:[0,1]^3\to\mathbb{R}^3$ elemi függvényt, amelyre

a) $F[0,1]^3=(x^2+y^2+z^2\le 1)$ gömb

b) $F[0,1]^3=(|x|+|y|+|z|\le 1)$ oktaéder

c) $F[0,1]^3=(|x|^p+|y|^p+|z|^p\le 1)$ Kepler alakzat

d) $F[0,1]^3=(0\le x\le y\le z\le 1)$ tetraéder.

[Pl. a) $F_2 := \big(x\cos(\pi y), x\sin(\pi y)\cos_2\pi z, x\sin(\pi y)\sin_2\pi z\big)$;

b)c) $F_p := [|x(F_2)|^p+|y(F_2)|^p+|z(F_2)|^p]^{-1/p}\cdot F_2$;

d) $F := (xyz, yz, z)$ megfelel].

15) Adjunk meg olyan $f(x,y,z):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ elemi függvényt, hogy az

$\{p:\ f(p)=0\}$ alakzat a $[0,1]^3$ kocka oldalaira írt körök egyesítése legyen.

16) Adjunk olyan $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ elemi függvényt, amelyre $\big(f=0\big)=[0,1]^3$.

[Pl. $|x|+|x-1|+|y|+|y-1|+|z|+|z-1|-3$].

17) Adjunk olyan $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ elemi függvényt, amelynek 0-helyei az

1 oldalhosszú, 0 középpontú, egyik csúcsával a z tengelyen levő,

az $x=0$ síkra szimmetrikus szabályos zárt tetraéder pontjai.

18) Adjunk meg olyan $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ elemi függvényt, amelyre az $\big(F=0\big)$

alakzat az a tórusz $\mathbb{R}^3$-ban, amely az $\big(y\ =\ 0\big)$ síkot a $(\pm R,0,0)$

középpontú r sugarú körökben metszi, ahol $0<r<R$.

[Pl. $F:=x^2+y^2+z^2-2R\sqrt{x^2+y^2}+R^2-r^2$].

19) Legyen $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ olyan függvény, amelyre $f(x,y)\neq 0\ \ (x<0)$.

$\mathbb{R}^3$-ban az $K:=\big(f(x,z)=0,\ y=0\big)$ alakzatot megforgatjuk a z tengely

körül. Az így kapott T forgásfelületnek mi az egyenlete?

[PL. $T=\big(f(\sqrt{x^2+y^2},z)=0\big)$].

20) Legyen $Y:=(y_1,\dots,y_N)$ lineáris koordinátarendszer $\mathbb{R}^N$-en (azaz

$y_1,y_2,\dots,y_N:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ lineárisan független lineáris funkcionálok).

Tegyük fel, hogy az Y szerinti egységvektorok rendre

$(\alpha_{i1},\alpha_{i2},\dots,\alpha_{iN})\qquad i=1,\dots,N$.

a) Ekkor $\alpha_{ij}=x_j\big(Y^{-1}(e_i)\big)$, ahol $e_i:=(\overbrace{0,\dots,0}^{i-1},1,0,\dots,0)$.

b) Fejezzük ki y_k-t az α_{ij} együtthatókkal és az

$x_1,\dots,x_N$ alapkoordinátákkal.

c) Melyik $F:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N$ leképezést reprezentálja a lineáris

$L:(\eta_1,\dots,\eta_N)\mapsto(\eta_1,\dots,\eta_N)C$ [ahol $C\in\mathrm{Mat}(N,N,\mathbb{R})$]

leképezés az Y koordinátarendszerben?

[Az $A := \left(\alpha_{ij}\right)_{i,j=1}^{N}$ mátrixszal

b) $YA = X$, és így $y_k = \sum_{i=1}^{N} \widehat{\alpha}_{ik} x_i$, ahol $A^{-1} =: \left(\widehat{\alpha}_{ij}\right)_{i,j=1}^{N}$.

c) $F = Y^{-1} \circ L \circ Y$. Itt $Y : \mathbb{R}^N \ni \xi \mapsto \xi A^{-1}$. Innen $F : \xi \mapsto \underbrace{\overbrace{\xi A^{-1}}^{Y(\xi)} C}_{L(Y(\xi))} A$].

21) Legyenek U, V n - ill. m -dimenziós vektorterek, rajtuk

$X := (x_1, \ldots, x_n) : U \leftrightarrow \mathbb{R}^n$, $Y := (y_1, \ldots, y_m) : V \leftrightarrow \mathbb{R}^m$

lineáris koordinátázások. Tegyük fel, hogy $L : U \to V$ lineáris leképezés,

L mátrixa X, Y szerint $A \in \mathrm{Mat}(m, n, \mathbb{R})$

[azaz $Y\bigl(LX^{-1}(u)\bigr) = AX(u)$ $(u \in U)$].

Legyenek $\overline{X}, \overline{Y}$ új lineáris koordináták U ill. V fölött, amelyekre

$\overline{X}(u) = CX(u)$ $(u \in U)$, $\overline{Y}(v) = DY(v)$ $(v \in V)$, ahol

$C \in \mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{R})$, $D \in \mathrm{Mat}(m, m, \mathbb{R})$.

Adjuk meg L $\overline{X}, \overline{Y}$ -szerinti $\overline{A}$ mátrixát A, C, D terminusaival.

22) Alkossanak az $e^{(1)} := \begin{pmatrix} e_{11} \\ \vdots \\ e_{n1} \end{pmatrix}, \ldots, e^{(n)} := \begin{pmatrix} e_{1n} \\ \vdots \\ e_{nn} \end{pmatrix}$ vektorok bázist $\mathbb{R}^n$ -ben. Legyenek $y_1(v), \ldots, y_n(v)$ a $v \in \mathbb{R}^n$ vektor koordinátái az $\bigl(e^{(1)}, \ldots, e^{(n)}\bigr)$ rendezett bázis szerint [azaz $\sum_{k=1}^{n} y_k(v) e^{(k)} = v$ $(v \in V)$].

Fejezzük ki y_k -t az $\bigl[e^{(1)} \ \ldots \ e^{(n)}\bigr]$ mátrixszal.

23) Legyenek $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N \in \{0, 1\}$ tetszőlegesen rögzítve.

Adjunk meg egy olyan N -edfokú $P(x_1, \ldots, x_N)$ polinomot $\mathbb{R}^N$ -en, amelyre $P(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N) = 1$ és

$P(\alpha_1, \ldots, \alpha_N) = 0$ valahányszor $(\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \{0, 1\}^N \setminus \{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N)\}$.

[$P := \displaystyle\prod_{k=1}^{N} \frac{x_k - (1 - \varepsilon_k)}{\varepsilon_k - (1 - \varepsilon_k)}$].

24) Legyen $D := \{p \in \mathbb{R}^N : \; x_k(p) \in \{\alpha, \beta\}\}$.

Szerkesszünk olyan N-edfokú $P(x_1, \ldots, x_N)$ polinomot,

amely kiterjeszt egy adott $f_0 : D \to \mathbb{R}$ függvényt.

25) Legyen $\mathbb{R}^N$-ben S a $\{p_0, \ldots, p_N\}$ pontokat tartalmazó legszűkebb konvex alakzat.

a) $S = \{\lambda_0 p_0 + \cdots + \lambda_N p_n : \; \lambda_0 + \cdots + \lambda_N = 1, \; \lambda_0, \ldots, \lambda_N \geq 0\}$.

b) $S = p_0 + \{\mu_1(p_1 - p_0) + \mu_2(p_2 - p_1) + \cdots + \mu_N(p_N - p_{N-1}) :$

$$1 \geq \mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_N \geq 0\}.$$

c) $S = p_0 + \{\tau_1(p_1 - p_0) + \tau_1\tau_2(p_2 - p_1) + \cdots + \tau_1 \cdots \tau_N(p_N - p_{N-1}) :$

$$0 \leq \tau_1, \ldots, \tau_N \leq 1\}.$$

1. TOPOLÓGIA

1) A $+:(a,b)\mapsto a+b$ összeadás-függvény folytonos $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ függvény.

2) A $\times:(a,b)\mapsto ab$ szorzás-függvény folytonos $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ függvény.

3) Legyen $\mathcal{U}:\mathbb{R}^2\to\{\mathbb{R}^2 \text{ részhalmazai}\}$ a következő megfeleltetés:

$\mathcal{U}_{(0,0)}:=\big\{U\subset\mathbb{R}^2:\ \exists\,\varepsilon>0\quad (x^2+y^2<\varepsilon)\subset U\big\}$, míg a többi

$(\xi,\eta)\neq(0,0)$ pontokra $\mathcal{U}(\xi,\eta):=\big\{\mathbb{R}^2\big\}$.

Ekkor $\mathbb{R}^2,\mathcal{U}$ környezetrendszer, de nem topologikus tér.

4) $\mathbb{R}^2$ fölött vegyük a $\mathcal{U}_{\binom{\xi}{\eta}}:=\big\{S\cup\{\xi\}\times\mathbb{R}:\ S\subset\mathbb{R}^2\big\}$ környezetrendszert.

a) Topológia-e $\mathcal{U}$?

b) $\big\{\binom{\xi}{y}:\xi^2+\eta^2=1\big\}^{-\mathcal{U}}=$?

5) Ha X tetszőleges halmaz, és $\mathcal{U}_x:=\{X\}$ $(x\in X)$,

akkor az $X,\mathcal{U}$ rendszer topológia.

Megjegyzés: ennek a topológiának a szokásos neve a *durva* topológia X-en.

6) $\mathbb{R}^2$-n vegyük a $\mathcal{U}_{\binom{\alpha}{\beta}}:=\big\{\,\binom{\xi}{\eta}:\ (\xi-\alpha)^2+(\eta-\beta)^2<1\big\}\cup S:\ S\subset\mathbb{R}^2\big\}$

környezetrendszert. Tekitsük az $A:=\big\{\binom{\xi}{\eta}:\ |\xi|,|\eta|\le 2\big\}=[-2,2]^2$ halmazt.

Ha $S^\circ,\partial S$ jelöli az $S\subset\mathbb{R}^2$ halmaz belsejét ill. határát $\mathcal{U}$ szerint, akkor

a) $A^\circ=$? b) $A^{\circ\circ}=$? c) $\partial A=$? d)Hausdorff tér-e $\mathcal{U}$? e)Topológia-e $\mathcal{U}$?

[a) $[-1,1]^2$, b) $\{0\}$, c) $\bigcup_{a\in A}\big([x-x(a)]^2+[y-y(a)^2]\le 1\big)\setminus[-1,1]^2$,

d)e) NEM.]

7) $(0,\infty)^2\cup\big\{\binom{0}{0}\big\}$ fölött vegyük a az $\mathbb{R}^2$ természetes toplógiájából örökolt

$\mathcal{U}$ környezetrendszert. Legyen $A:=\{0\}\times\mathbb{R}$.

a) $A^\circ = ?$ b) $A^{\circ\circ} = ?$ c) Hausdorff tér-e $\mathcal{U}$? d) Topológia-e $\mathcal{U}$?

a) $\left\{ \binom{0}{0} \right\}$, b) $\emptyset$, c) IGEN, d) NEM.]

8) Ha X tetszőleges halmaz, és $\mathcal{U}_x := \{U \subset X : \ x \in X\}$ $(x \in X)$, akkor az $X, \mathcal{U}$ rendszer topológia.

Megjegyzés: ennek a topológiának a szokásos neve a *diszkrét* topológia X -en.

9) Legyen X tetszőleges halmaz, és vegyük $\mathbb{R}$ -et a szokásos topológiájával.

a) Melyek az X durva topológiája szerint folytonos $X \to \mathbb{R}$ függvények?

b) Melyek az X diszkrét topológiája szerint folytonos $X \to \mathbb{R}$ függvények?

c) Melyek az X durva topológiája szerint folytonos $\mathbb{R} \to X$ függvények?

d) Melyek az X diszkrét topológiája szerint folytonos $\mathbb{R} \to X$ függvények?

Definíció. KÖRNYEZETBÁZIS. Legyen $X, \mathcal{U}$ környezetrendszer. Ekkor $\mathcal{B} : X \ni x \mapsto \mathcal{B}_x \subset \{X \text{ részhalmazai}\}$ *bázisa* $X, \mathcal{U}$ -nak, ha $B_x \subset \mathcal{U}_x$ $(x \in X)$ és $\forall\, x \in X \ \forall\, U \in \mathcal{U} \ \exists\, B \in \mathcal{B}_x \quad B \subset U$.

10) $\mathbb{R}$ -en a természetes topológia egy bázisa

$\mathcal{B}_\xi := \{[\xi - 1/n, \xi + 1/n] : \ n = 1, 2, \ldots\} \qquad (\xi \in \mathbb{R})$.

11) Legyen $\mathcal{I} := \big\{ \big(k/n, (k+1)/n\big) : \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots ; \ n = 1, 2, \ldots \big\}$.

$\mathbb{R}$ -en a természetes topológia egy bázisa

$\mathcal{B}_\xi := \{I \in \mathcal{I} : \ \xi \in I\} \qquad (\xi \in \mathbb{R})$.

12) Legyenek $X, \mathcal{U}$ ill. $\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{U}}$ környezetrendszerek a $\mathcal{B}$ ill. $\widetilde{\mathcal{B}}$ bázisokkal. Az $f : X \to \widetilde{X}$ függvény pontosan akkor folytonos ($\mathcal{U} \to \widetilde{\mathcal{U}}$ szerint), ha

$\forall\, \widetilde{B} \in \widetilde{\mathcal{B}}_x \ \ \exists\, B \in \mathcal{B}_x \quad f(B) \subset \widetilde{\mathcal{B}}$.

13) $\mathcal{B}$ pontosan akkor bázisa az $X, \mathcal{U}$ környezetrendszernek,

ha $\mathcal{U}_x = \{B \cup S : \ B \in \mathcal{B}_x, \ S \subset X\} \qquad (x \in X)$.

14) $\mathcal{B} : X \ni x \mapsto \mathcal{B}_x \subset \{X \text{ részei}\}$ bázisa egy $X, \mathcal{U}$ környezetrendszernek, ha a következő B1), B2) axiómák teljesülnek bármely $x \in X$ pontnál:

B1) $x \in B \quad (B \in \mathcal{B}_x,)$; B2) $\forall\ B_1 B_2 \in \mathcal{B}_x \ \ \exists\ B \in \mathcal{B}_x \quad B \subset B_1 \cap B_2$.

15) Azonos topológiát definiának-e $\mathrm{I\!R}^2$-n a

$\mathcal{B}_{(x,y)} := \{\mathrm{I\!R} \times [y - \frac{1}{n}, y + \frac{1}{n}] : \ n = 1, 2, \ldots\}$,

$\widetilde{\mathcal{B}}_{(x,y)} := \{[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}] \times \mathrm{I\!R} : \ n = 1, 2, \ldots\}$ rendszerek?

16) A B1)+B2) axiómákat teljesítő $\mathcal{B}$ ill. $\widetilde{\mathcal{B}}$ pontosan akkor ugyanannak a környezetrendszernek a bázisa, ha

$\forall\ x \in X \ \ \forall\ B \in \mathcal{B}_x \ \ \exists\ \widetilde{B} \in \widetilde{\mathcal{B}}_x \quad \widetilde{B} \subset B$ és

$\forall\ x \in X \ \ \forall\ \widetilde{B} \in \widetilde{\mathcal{B}}_x \ \ \exists\ B \in \mathcal{B} \quad B \subset \widetilde{\mathcal{B}}$.

17) $\mathcal{B}$ pontosan akkor egy *topológia* bázisa, ha B1)+B2)+B3) teljesül, ahol

B3) $\forall\ x \in X \ \ \forall\ B \in \mathcal{B}_x \ \ \exists\ C \in \mathcal{B}_x \quad \forall\ y \in C \ \ \exists\ D \in \mathcal{B}_y \quad B \subset B$.

18) Legyen $\mathrm{I\!R}$-en $\mathcal{B}_x := \big\{\{x\}\big\} \quad (x \neq 0)$, $\mathcal{B}_0 := \{[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$.

Ekkor $\mathcal{B}$ egy olyan környezetrenszer bázisa, amely nem topológia.

19) Legyen $X, \mathcal{U}$ környezetrendszer. Ekkor

$\mathcal{V}_x := \{V \in \mathcal{U}_x : \ \exists\ U \in \mathcal{U}_x \ \ U \text{ nyitott } \subset X, \ \ U \subset V\} \qquad (x \in X)$

topológia X-en. Igaz-e mindig, hogy $\mathcal{U} = \mathcal{V}$.

[Pontosan akkor igaz $\mathcal{U} = \mathcal{V}$, ha $\mathcal{U}$ topológia].

20) Összefüggő-e $\Big[\ \sin \dfrac{1}{x} \text{ ha } x \neq 0, \ \ 0 \text{ ha } x = 0\ \Big]$ grafikonja?

21) a) Igaz-e, hogy egy $f : [a, b] \nearrow \mathrm{I\!R}$ (növő) függvény folytonos,

ha összefüggő a grafikonja?

b) Elhagyható-e a)-ból a monotonicitás feltevése?

22) Legyen $X, \mathcal{U}$ topologikus tér.

a) Ha S_1, S_2 összefüggő $\subset X$ és $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$, akkor $S_1 \cup S_2$ összefüggő $\subset X$.

b) Ha $S \subset X$ és $\forall\, x, y \in S \;\; \exists\, I$ összefüggő $\subset S \;\; x, y \in I$,

akkor S összefüggő $\subset X$.

23) ÖSSZEFÜGGŐSÉG KÖRNYEZETTÉRBEN.

Legyen $(X, \mathcal{U}$ környezetrendszer. Ebben az $A(\subset X)$ *halmaz környezatei*

$\mathcal{U}_A := \{U \subset X : \; \forall\, a \in A \;\; U \in \mathcal{U}_a\}$.

Az $A(\subset X)$ halmaz *széteső* ($\mathcal{U}$ szerint), ha

$\exists\, A_1, A_2 \neq \emptyset \;\; A_1 \cap A_2 = \emptyset, \; A_1 \cup A_2 = A, \; X \setminus A_1 \in \mathcal{U}_{A_2}, \; X \setminus A_2 \in \mathcal{U}_{A_1}$.

Az $A(\subset X)$ halmaz *összefüggő*, ha nem széteső.

a) Ez kiterjesztése a topológiákban ismert összefüggőségnek.

b) Összefüggő halmaz folytonos képe folytonos.

c) Nem-diszjunkt összefüggő halmazok uniója összefüggő.

d) Ha A összefüggő $\subset X$ és $p \in \partial A$, akkor $A \cup \{p\}$ összefüggő $\subset X$.

24) Az $S := \big(x^4 + y^6 + z^8 = 1\big)$ halmaz zárt $\subset \mathbb{R}^3$.

[IGEN: $S = f^{-1}\{1\}$ az $f := x^4 + y^6 + z^8$ folytonos $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ függvénnyel,

és $\{1\}$ zárt $\subset \mathbb{R}$].

25) $\big(\sqrt{x^2 + y^2 + z^4 - 5} < 2\big)$ zárt vagy nyitott $\subset \mathbb{R}^3$? [EGYIK SEM].

26) Összefüggő-e $\big(x + y^6 + z^{11} = 2\big)$ $\mathbb{R}^3$-ban?

27) Hány összefüggő komponense van a következő $\mathbb{R}^3$-beli halmazoknak

a) $\big(xyz = 1\big)$;

b) $\big((x+y)(y+z)(z+x) = 1\big)$;

c) $\big([z^2 + (x^2 + y^2 - 1)^2][y^2 + (z^2 + x^2 - 1)^2][x^2 + (y^2 + z^2 - 1)^2] = 0\big)$.

28) $\big(x_1x_2\cdots x_N = 1\big)(\subset \mathbb{R}^N)$ összefüggő komponenseinek száma.

29) Az $\big(\max\{x, 2|y|, 3z^6\}\big) < 7\big)$ alakzatnak

mely topológiai tulajdonságai vannak $\mathbb{R}^3$ -ban a következők közül:

nyitottság, zártság, összefüggőség, kompaktság?

30) Az X halmaz durva topológiája szerint

mi az $\{x\}$ szingleton (egy-pontú halmaz, $x \in X$) $\overline{\{x\}}$ lezártja?

31) Ha $X,\mathcal{U}$, diszkrét topologikus tér, $Y,\mathcal{V}$ pedig tetszőleges környezetrendszer,

akkor bármely $f : X \to Y$ függvény folytonos.

32) A diszkrét topológia szerint minden halmaz (az alaphalmaz minden részhalmaza) egyszerre nyitott és zárt.

33) Adjunk meg olyan topológiát végtelen alaphalmazzal, amely szerint minden halmaz kompakt.

34) Hausdorff térben két kompakt halmaz metszete és uniója kompakt.

35) Elhagyható-e az előző állításból a Hausdorff tulajdonság?

36) Legyen $X := \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ azzal a környezetrenszerrel, amelynél a véges $x \in \mathbb{R}$

számok környezetei a hagyományosakat tartalmazók, és $\mathcal{U}_{\pm\infty} := \big\{X\big\}$.

a) Kompakt topologikus tér-e ez?

b) Milyen topologikus tulajdonságai vannak benne a

$[-\infty,\infty)$, $(-\infty,\infty)$, $(-\infty,\infty]$ ill. $[-\infty,\infty](= X)$ intervallumoknak?

37) Egy $X,\mathcal{U}$ topologikus térben

$$x_1, x_2, \ldots \to x \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \forall\, U \in \mathcal{U}_x \ \ \exists\, N \ \ \forall n \ge N \ \ x_n \in U\ .$$

Adjunk olyan topológiát $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$-en, amely szerint

$x \in \mathbb{R}$ esetén az x-hez konvergáló sorozatok

a hagyományosak véges sok ∞ taggal kiegészítve,

míg $x_n \to \infty$, ha $\forall\, p \in \mathbb{R} \;\; \exists\, N \;\; \forall\, n \geq N \;\; x_n \geq p$.

Csak egyetlen ilyen topológia van?

38) Igaz-e, hogy folytonos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény esetén mindig

$f^{-1}(\text{KOMPAKT}) = \text{KOMPAKT}$?

39) Tegyük fel, hogy $X, \mathcal{U}$ topológia és $K \subset X$. Ekkor

K kompakt $\subset X$ pontosan akkor, ha minden olyan

$[K \ni x \mapsto G_x]$ halmazfüggvényre, amelynél $x \in G_x$ nyitott $\subset X$ $\quad (x \in K)$,

található F véges $\subset K$ úgy, hogy $K \subset \bigcup_{x \in F} G_x$.

Definíció. KOMPAKTSÁG ÉS PSZEUDOKOMPAKTSÁG.

Legyen $X, \mathcal{U}$ környezetrendszer, (esetleg nem topológia). Ekkor

$$K \text{ kompakt} \subset X \overset{\text{def}}{\iff} \forall\, [K \ni x \mapsto G_x] \quad \big(\forall\, x \in K \;\; x \in G_x \text{ nyitott} \subset X\big) \Rightarrow$$
$$\exists\, F \text{ véges} \subset K \quad K \subset \bigcup_{x \in F} G_x\, ;$$
$$K \text{ pszeudokompakt} \subset X \overset{\text{def}}{\iff} \forall\, [K \ni x \mapsto U_x] \quad \big(\forall\, x \in K \;\; U_x \in \mathcal{U}_x\big) \Rightarrow$$
$$\exists\, F \text{ véges} \subset K \quad K \subset \bigcup_{x \in F} U_x\, .$$

40) Általános környezetrendszerek közti folytonos függvény kompakt halmazt kompaktba, pszeudokompakt halmazt pszeudokompaktba visz.

41) Tekintsük $\mathbb{R}$-en azt az $\mathcal{U}$ környezetrendszert, amelyre

$\mathcal{U}_x := \big\{U \subset \mathbb{R} : \; (x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}) \subset U\big\} \quad (x \in \mathbb{R})$.

a) Melyik az $\mathcal{U}$-nyitott halmazok?

b) Melyek az $\mathcal{U}$-kompakt halmazok?

c) Melyek az $\mathcal{U}$-pszeudokompakt halmazok?

d) Topológia-e $\mathcal{U}$?

42) DIRICHLET FÜGGVÉNY. $\mathbb{R}$ mely részhalmazain folytonos az

$1_{\mathbb{Q}}$ $(: x \mapsto [\,1$ ha x racionális, 0 egyébként$])$ függvény?

[$S_0 := S \cap \mathbb{Q}$, $S_1 := S \setminus \mathbb{Q}$ mellett

$1_{\mathbb{Q}}$ folytonos S-en $\iff$ $\overline{S_0} \cap \overline{S_1} = \emptyset$ $\iff$

$\iff$ $\exists\, G_0, G_1$ nyitott $\subset \mathbb{R}$ $G_0 \cap G_1 = \emptyset$, $S_k \subset G_k$ $(k = 1, 2)$.

Kiindulás: $G_k := \bigcup_{x \in S_k} I_x^{(k)}$, az

$I_x^{(k)} := \big([x + \sup\{y \in S_{1-k} : \ y < x\}]/2, [x + \inf\{y \in S_{1-k} : \ y > x\}]/2\big)$

nyitott intervallumokkal].

2. METRIKUS TEREK

1) Kompakt-e $\{f \in \mathcal{C}([0,1],\mathrm{I\!R}): \ |f| \le 1\}$ a $d(f,g) := \max|f-g|$ metrika szerint? [NEM].

2) Kompakt-e $\mathrm{I\!R}$-ben a) $\{\frac{1}{n}: \ n \in \mathrm{I\!N}\}$, b) $\{\frac{1}{n}: \ n \in \mathrm{I\!N}\} \cup \{0\}$?

Definíció. Az X, d metrikus térben az $S \subset X$ halmaz *teljesen korlátos*, ha

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, \delta_\varepsilon \text{ véges} \subset S \qquad \min_{t\in S_\varepsilon} d(s,t) \le \varepsilon \quad (s \in S)\,.$$

$\mathcal{B}(X,Y) := \{\text{korlátos } X \to Y \text{ függvények}\}$ a $\sup|f-g|$ távolsággal ellátva.

3) Teljes metrikus térben a teljesen korlátos halmazok kompaktak.

4) S teljesen korlátos $\subset X$, ha

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, F_\varepsilon \text{ véges} \subset X \quad \min_{t\in F_\varepsilon} d(s,t) \le \varepsilon \quad (s \in S)\,.$$

5) Legyen $X,\mathcal{U}$ topologikus tér, és legyen $d(f,g) := \sup|f-g|$ a távolság (∞ értéket is megengedve) a folytonos függvények $\mathcal{C}(X,\mathrm{I\!R})$ terén.

a) $\mathcal{S}$ teljesen korlátos $\subset C(X,\mathrm{I\!R})$ pontosan akkor, ha

$\mathcal{S}$ korlátos $\subset X$ és $\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, \mathcal{G}_\varepsilon = \{G_1, \ldots, G_{n(\varepsilon)}\}$

$\bigcup_{i=1}^{n(\varepsilon)} G_i = X$, G_k nyitott $\subset X$, $\operatorname{diam} f(G_k) \le \varepsilon \quad (f \in \mathcal{S},\ k = 1, \ldots, n(\varepsilon))$.

b) Ha $X,\mathcal{U}$ kompakt, $\mathcal{S}$ teljesen korlátos $\subset \mathcal{C}(X,\mathrm{I\!R})$ pontosan akkor, ha

$\mathcal{S}$ korlátos és $\forall\, \varepsilon > 0,\ x \in X \ \ \exists U \in \mathcal{U}_x \quad \operatorname{diam} f(U) \le \varepsilon \quad (f \in \mathcal{S})$.

6) $\mathcal{S}$ korlátos $\subset \mathcal{B}(X,\mathrm{I\!R}) \iff \exists\, M \quad |f| \le M \quad (f \in \mathcal{S})$.

7) $\{p \in \mathrm{Pol}_N([0,1],\mathrm{I\!R}): \ |p|, |p'| \le 1\}$ kompakt $\subset \mathcal{C}([0,1],\mathrm{I\!R})$.

8) Ha $f \in \mathcal{B}([a,b],\mathrm{I\!R})$ akkor

$\{p \in \mathrm{Pol}_N([a,b],\mathrm{I\!R}): \ |p-f| \le M\}$ kompakt $\subset \mathcal{C}([a,b],\mathrm{I\!R})$.

9) a) $\mathrm{Pol}_N\big((0,1),\mathbb{R}\big) \cong \mathrm{Pol}_N\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ a $\sup|f-g|$ távolság szerint.

b) $\mathcal{C}\big((0,1),\mathbb{R}\big) \not\cong \mathcal{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ a $\sup|f-g|$ távolság szerint.

10) Tegyük fel, hogy $f_1,\dots,f_N \in \mathcal{B}(X,\mathbb{R})$. Ekkor egy $\mathcal{S} \subset \sum_{k=1}^N \mathbb{R} f_k$ függvénycsalád pontosan akkor kompakt a $d(f,g) := \sup|f-g|$ metrika szerint, ha korlátos és zárt $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$ -ben.

11) Kompakt metrikus tér teljes.

12) Példa nem szeparábilis metrikus térre:

$X := \big\{\text{véges tartójú } \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ függvények}\big\} \ \big(= \{f:\ (f \neq 0) \text{ véges} \subset \mathbb{R}\}\big)$,

$d(f,g) := \Big[\sum_{c\in\mathbb{R}} [f(c)-g(c)]^2\Big]^{1/2} \qquad (f,g \in X)$.

13) Ha X,d szeparábilis és $Y \subset X$, akkor Y szeparábilis a d távolság szerint.

Definíció. Az X,d metrikus térben az

$A,B \subset X$ halmazok távolsága $\quad d(A,B) := \inf\{d(a,b):\ a \in A,\ b \in B\}$,

$A \subset X$ távolsága $p \in X$ -től $\quad d(p,A) := d(\{p\},A) = \inf\{d(p,a):\ a \in A\}$.

14) Rögzített $A \subset X$ mellett a $p \mapsto d(p,A)$ távolságfüggvény folytonos.

15) Tegyük fel, hogy A,B zárt $\subset X$, $A \cap B = \emptyset$. Adjunk meg d terminusain olyan folytonos $f: X \to \mathbb{R}$ függvényt, amelyre $f(A) = 0 < f(X \setminus (A \cup B)) < f(B) = 1$.

[Pl. $x \mapsto \dfrac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,b)}$].

16) Ha A,B kompakt $\subset X$, akkor $\exists\, a \in A, b \in B \quad d(a,b) = d(A,B)$.

17) Ha A kompkt $\subset \mathbb{R}^N$ és B zárt $\subset \mathbb{R}^N$, akkor a d euklidesi távolság szerint $\quad \exists\, a \in A, b \in B \quad d(a,b) = d(A,B)$.

18) * Igaz-e mindig A kompakt, B teljes $\subset X \Rightarrow \exists\, a\in A, b\in B \;\; d(a,b)=d(A,B)$?

[Ellenpélda: $X:=\{$folytonos $[-1,1]\to\mathbb{R}$ függvények$\}$, $d(f,g):=\max|f-g|$,

$A := \{0\}$, $B := \{f \in X : \int_0^1 \mathrm{sgn}(x) f(x)\, dx = 1\}$].

19) Legyen $\langle\ ,\rangle$ a skalárszorzat $\mathbb{R}^N$ -en, és $d(p,q) := \langle p-q, p-q\rangle$.

Tegyük fel, hogy $A, B \subset \mathbb{R}^N$, $a \in A$, $b \in B$, $d(A,B) > 0$.

a) $d(a,b) = d(a,B)$ esetén $\forall\, x \in B \quad \langle x-b, b-a\rangle \geq 0$;

b) $d(a,b) = d(A,B)$ esetén $\langle x-a, a-b\rangle \geq 0 \geq \langle y-b, a-b\rangle \quad (x \in A, y \in B)$.

20) Legyen $0 < r < R$ mellett $\mathbb{R}^3$ -ban

$K := \big(x^2+y^2 = R^2,\ z = 0\big)$, $T := \{p \in \mathbb{R}^3 :\ d(p,K) = r\}$.

a) Ábrázoljuk a T alakzatot.

b) Milyen alakzat T -nek az $L_\varphi := \{(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, \zeta) :\ \rho > 0,\ \zeta \in \mathbb{R}\}$

félsíkkal való T_φ metszete?

c) A T_φ köröket trigonomtrikus függvényekkel paraméterezve, adjunk meg

olyan $t_1, t_2, t_3 : [0, 2\pi)^2 \to \mathbb{R}$ kétváltozós trigonometrikus polinomokat,

amelyekkel a $t := (t_1, t_2, t_3)$ leképezésre $t : [0, 2\pi)^2 \leftrightarrow T$.

[b) r sugarú kör.

c) Pl. $t(\varphi,\psi) := \big((R + r\cos\psi)\cos\varphi, (R + r\cos\psi)\sin\varphi, r\sin\psi\big)$].

21) Az előbbi T tórusz kompakt ($\mathbb{R}^3$ természtes topológiája szerint).

22) Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor található olyan $\varphi_1, \varphi_2, \ldots : [a,b] \to \mathbb{R}$

lépcsősfüggvénysorozat, amelyre $\varphi_n \rightrightarrows f \quad (n \to \infty)$.

23) Az e^{x^2} függvényt $[0,1]$ -en közelítsük lépcsős függvény-sorozattal.

[Pl. $\varphi_n := e^{(\mathrm{entire}(nx)/n)^2}$ mellett $\max|f - \varphi_n| = e - e^{1-(1/n))^2}$.

Jelölés: $\mathrm{entire}(\xi) := [\xi$ egész része$]$].

24) Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos és véges sok helyen kívül differenciálható, továbbá $|f| \leq M$, akkor f M -kontrakció (azaz $|f(x') - f(x)| \leq M|x' - x|$).

25) Adjuk meg az $\mathbb{R}^2$ téren azt a $\widetilde{d}$ távolságfüggvényt, amelynél a

p középpontú $\delta(>0)$ sugarú nyitott gömb

$S(p, \delta) = \big(x(p) - 2\delta < x < x(p) + 2\delta,\ y(p) - 3\delta < y < y(p) + 3\delta\big)$.

[$d(p, q) = \max\{|x(p) - x(q)|/2, |y(p) - y(q)|/3\}$]

26) Tegyük fel, hogy $d_1, d_2 : X^2 \to \mathbb{R}$ metrikák. Ekkor

a) $d_1 + d_2$ metrika X -en,

b) $\max\{d_1, d_2\}$ metrika X -en,

c) $\phi(d_1, d_2)$ metrika X -en valahányszor ϕ konvex $\mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}_+$ függvény, amelyre $\phi(\lambda p) = \lambda \phi(p)$ $(\lambda \geq 0, p \in \mathbb{R}^2_+)$ és $\phi(p) = 0 \iff p = 0$.

27) Az $\mathbb{R}^3$ -beli N -tagú pontrendszerek $\{(p_1, \dots, p_N) :\ p_1, \dots, p_N \in \mathbb{R}^3\} = [\mathbb{R}^3]^N$ terén vezessük be a következő $\approx^1$ ill. $\approx^2$ relációkat:

$(p_1, \dots, p_N) \approx^1 (q_1, \dots, q_N) \quad :\iff$

$$\exists\, v \in \mathbb{R}^3 \qquad q_1 = p_1 + v,\ \dots,\ q_N = p_N + v\,;$$

$(p_1, \dots, p_N) \approx^2 (q_1, \dots, q_N) \quad :\iff$

$$\exists\, v \in \mathbb{R}^3,\ A \in \mathrm{Ort}(3, \mathbb{R}) \qquad q_1 = Ap_1 + v,\ \dots,\ q_N = Ap_N + v\,.$$

a) $\approx^1$, $\approx^2$ ekvivalenciák.

b) Az $\approx^1$ szerinti ekvivalenciaosztályok

$[\mathbb{R}^3]^N/ \approx^1 := \big\{\{(q_1, \dots, q_N) : (p_1, \dots, p_N) \approx^2 (q_1, \dots, q_N)\} : (p_1, \dots, p_N) \in [\mathbb{R}^3]^N\big\}$

tere lineárisan izomorf $\mathbb{R}^{3N-3}$ -mal.

c) Van-e mindig két legközelebbi pontrendszer két különböző $\approx^1$ -ekvivalenciaosztályban az $[\mathbb{R}^3]^N \equiv \mathbb{R}^{3N}$ -beli euklieszi metrika szerint?

c') Van-e mindig két legközelebbi pontrendszer két különböző $\approx^2$-ekvivalenciaosztályban az $[\mathbb{R}^3]^N \equiv \mathbb{R}^{3N}$-beli δ euklieszi metrika szerint?

d) $k = 1, 2$ -re metrika-e a

$d_k(P, Q) := \inf\{\delta(p, q) : \ p \in P, \ q \in Q\}$

függvény az $\approx^k$-ekvivalenciaosztáyok $[\mathbb{R}^3]^N / \approx^k$ terén?

e) Kompakt-e $[\mathbb{R}^3]^N / \approx^k$ d_k szerint?

28) Legyen $x_0 := 2$, és rekurzíven legyen $x_{n+1} := \frac{x_n + \frac{2}{x_n}}{2}$.

Mutassuk meg a kontrakciós fixpont-tétellel, hogy $x_n \to \sqrt{2}$.

29) Legyen $a > 1$ tetszőlegesen adott. Keressünk olyan (a-tól függő) I zárt intvallumot $\mathbb{R}$-en, ill. $\alpha \in [0, 1]$ konstanst, hogy

$a, \sqrt{a} \in I$ és $|(\dfrac{x + \frac{a}{x}}{2})| \leq \alpha$ I fölött.

30) Tervezzünk iterációt $\sqrt[3]{2}$ kiszámításására.

31) Az $x^2 = \sin x$ egyenlet egyetlen $x^* > 0$ megoldása megkapható-e az

$x_{n+1} := \dfrac{\sin x_n}{x_n}$, $x_0 := \pi/2$ iterációval?

[Igen. $x^* \in [\frac{2}{\pi}, \frac{\pi}{2}]$, $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)' = \dfrac{x \cos x - \sin x}{x^2} \in (-1, 0)$ ha $x \in [\frac{2}{\pi}, \frac{\pi}{2}]$].

32) Newton-Raphson iteráció. Legyen I nyitott intervallum $\subset \mathbb{R}$, és $f : I \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható konvex függvény, amelyre $f' > 0$ és $(f = 0) \neq \emptyset$.

a) Ekkor pontosan egy $x_* \in I$ pont van, amelyre $f(x_*) = 0$.

b) Tetszőlegesen adott $x_0 \in I \cap [\alpha, \infty)$ esetén az

$x_{n+1} := [\, f \ x_n\text{-körüli elsőfokú Taylor polinomja gyöke}] = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$

iteráció x_*-hoz konvergál.

c) Valamilyen $\alpha \in [0, 1)$ és $M \in (0, \infty)$ mellett

$$x_{n+1} - x_* \le M\alpha^n \quad (n = 0, 1, \ldots)\,.$$

d) Sőt valamilyen $\widetilde{\alpha} \in [0,1)$ és $\widetilde{M} \in (0, \infty)$ mellett

$$x_{n+1} - x_* \le \widetilde{M}\widetilde{\alpha}^n \quad (n = 0, 1, \ldots)\,.$$

33) Határozzuk meg $0,001$ pontossággal az

$x^5 + x^2 = 1$ egyenlet egyetlen valós gyökét. $\qquad [\ 0,809 \pm 0,001\ ]$.

34) Határozzuk meg $0,0001$ pontossággal az

$x^{11} + x^7 = 1$ egyenlet egyetlen valós gyökét.

35) Legyen $q \in \{2, 3, \ldots\}$, és $A \in \mathrm{Mat}(N, N, \mathbb{R})$ olyan mátrix, amelyre

$A \ge \mathbf{I}_N$, azaz $\big\langle xA, x\big\rangle \ge \big\langle x\mathbf{I}_N, x\big\rangle = \langle x, x\rangle \quad (x \in \mathbb{R}^N)$.

Ekkor $\sqrt[q]{A}(:= \big[B \in \mathrm{Mat}(N, N, \mathbb{R}) :\ B \ge 0,\ B^q = A\big]) = \lim_{n\to\infty} X_n$,

ahol $X_0 := A$, $X_{n+1} := \left(1 - \dfrac{1}{N}\right) X_n + \dfrac{1}{N} A [X_n^{-1}]^{N-1}$.

[Kiindulás: valamely ortogonális Q mátrix és $\lambda_1 \ge \cdots \lambda_N \ge 1$ mellett

$A = Q^* \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_N) Q$, ahol

$\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_N) := \big[(\mu_{ij})_{i,j=1}^N :\ \mu_{ii} = \lambda_i,\ \mu_{ij} = 0\ (i \ne j \in \{1, \ldots, N\}\big]$.

Ekkor $X_n = Q^* \mathrm{diag}(\xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_N^{(n)}) Q$, ahol minden rögzített k indexre

$\xi_k^{(0)} = \lambda_k$, $\xi_k^{(n+1)} = \xi_k^{(n)}/N + (1 - 1/N)\lambda_k/[\xi^{(n)}]^{N-1}$].

36) Tervezzünk iterációt a következő egyenletrendszerek megoldására

a) $\left.\begin{aligned} x^3 + y^3 &= 2000 \\ x^7 - y^7 &= 10 \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} x^3 + y^3 &= 2000 \\ \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} &= \frac{1}{2000} \end{aligned}\right\}$ c) $\left.\begin{aligned} x^3 + y^3 &= 2000 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} &= \frac{1}{2000} \end{aligned}\right\}$.

[Pl c) Észrevétel: $\binom{x_*}{y_*} \approx \binom{10}{10}$! Ennek alapján az

$f : \binom{x}{y} \mapsto \begin{bmatrix} x^3 + y^3 - 2000 \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{2000} \end{bmatrix}$ leképezéssel

$\binom{x}{y} = \binom{x}{y} + Af\binom{x}{y}$, ahol $A := -f'\binom{10}{10}^{-1} = \begin{bmatrix} 300 & 300 \\ \frac{1}{100} & \frac{1}{100} \end{bmatrix}^{-1}$.

Ekkor $\quad \left[\binom{x}{y} + Af\binom{x}{y}\right]'\Big|_{\binom{x}{y}=\binom{10}{10}} \approx 0\,.$

$$\binom{x_{n+1}}{y_{n+1}} := -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} \frac{1}{100} & -300 \\ -\frac{1}{100} & 300 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} x^3+y^3-2000 \\ \dfrac{1^n}{x_n}-\dfrac{1^n}{y_n}-\dfrac{1}{2000} \end{bmatrix} + \binom{x_n}{y_n}\,, \qquad \binom{x_0}{y_0} := \binom{10}{10}\ ].$$

37) Tegyük fel, hogy $f(x_0) = x_0$, ahol $f : X \to X$ nyitott konvex $\subset U$ és $U, \|.\|$ véges-dimenziós normált tér.

Adjunk felső becslést $\|f^n(x) - x\|$-re (itt $f^n := \overbrace{f \circ \cdots \circ f}^{n}$) az $\omega(\delta) := \sup_{\|x-x_0\|\le\delta} \|f'(x)\| \quad (\delta > 0)$ mennyiséggel.

38) Tegyük fel, hogy X nyitott konvex $\subset \mathbb{R}^N$, és

$f : X \to \mathbb{R}^N$ $\mathcal{C}^1$-síma leképezés, amelyre $\det f' \neq 0$.

Állítás: $f(x_0) = 0 \iff \phi(x) = 0$, ahol $\phi(x) := x - f'(x)^{-1}f(x)$.

39) Ha $\emptyset \neq A, B$ kompakt $\subset \mathbb{R}^n$,

akkor $\exists\, a \in A, b \in B \quad \|a - b\| = \min\{\|a' - b'\| :\ a' \in A,\ b' \in B\}$.

Definíció. Ha X, d metrikus tér, az $\emptyset \neq A, B \subset X$ halmazok *Hausdorff távolság*a

$$d_{\mathrm{Hausdorff}}(A,B) := \inf\{\varepsilon > 0 : \forall\, a \in A\ \ \exists\, b \in B \quad d(a,b) \le \varepsilon \\ \text{és } \forall\, b' \in B\ \ \exists\, a' \in A \quad d(a',b') \le \varepsilon\}\,.$$

40) Legyen $\mathbb{R}^2$-ben $A := \big(x^2 + y^2 < 1\big)$, $B := \big((x-5)^2 + y^2 < 25\big)$.

Mennyi $d_{\mathrm{Hausdorff}}(A,B)$ a szokásos euklidesi távolság szerint?

41) A $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n) := \{K :\ \emptyset \neq K \text{ kompakt} \subset \mathbb{R}^n\}$ halmaz a $d_{\mathrm{Hausdorff}}$ távolsággal teljes metrikus tér.

42) A $d_{\mathrm{Hausdorff}}$ metrika topológiája szerint

$\{\,[0,1]^n$ kompakt nem-üres részei$\}$ kompakt $\subset \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$.

43) Legyen $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ affin α-kontrakció

(azaz $F : x \mapsto Ax + b$ alakú valamely $n \times n$-es A mátrix ill. $b \in \mathbb{R}^n$

vektor mellett, és $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$ $\|F(x) - F(y) < \alpha\|x - y\|$).

Ekkor az $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \ni A \mapsto F(A)$ leképezés α-kontrakció a

$d_{\text{Hausdorff}}$ metrika szerint.

44) Legyenek $F_1, \dots, F_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ affin kontrakciók. Ekkor az

$\mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \ni A \mapsto F(A) \cup \cdots \cup F_n(A)$ leképezés α-kontrakció a

$d_{\text{Hausdorff}}$ metrika szerint.

45) Legyen $0 < \alpha < 1$. Tegyük fel, hogy

$F_1, \dots, F_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ affin α-kontrakciók.

Ekkor pontosan egy olyan $A_* \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ halmaz van, amelyre

$F_*(A_*) = A_*$, ahol $F_* : \mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \ni A \mapsto F_1(A) \cup \cup F_m(a)$.

Megjegyzés. A FRAKTÁLOK az előbbi F_* alakú halmaz-leképezések fixpontjai.

46) Írjuk le azt az $A_* \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$ fraktálhalmazt, amely az $F_* := F_1 \cup F_2$,

ahol $F_1(K) := \frac{1}{3}K$, $F_2(K) := \frac{1}{3}K + \frac{2}{3}$ halmaz-leképezés fixpontja.

a) $F_*^n[0,1](= \underbrace{F_*(\cdots F_*(}_{n}[0,1])\cdots) = ?$ b) $F_*^n\{0\} = ?$ c) $F_*^n[-1,1] = ?$

d) $A_* = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k / 3^k : \ \alpha_1, \alpha_a, \ldots \in \{0,2\} \right\}$.

[Megjegyzés: $A_* =$ [CANTOR halmaz]].

47) Legyen $F_* : \mathcal{K}(\mathbb{R}) \ni A \mapsto [\frac{1}{4}A] \cup [\frac{1}{4}A + \frac{1}{2}]$. $\big[F_*$ FIXPONTJA$\big] = ?$

48) $F_* : \mathcal{K}(\mathbb{R}^2) \ni A \mapsto \bigcup_{\substack{\varepsilon_1, \varepsilon_2 = 0,1,2 \\ (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \neq (1,1)}} \left[\frac{1}{3}A + \left(\frac{\varepsilon_1}{3}, \frac{\varepsilon_2}{3} \right) \right]$ FIXPONTJA $= ?$

Definíció. Ha X, d metrikus tér, I intervallum $\subset \mathbb{R}$, $\gamma : I \to X$ folytonos függvény, akkor a

$$\bigl[\gamma \ \ \textit{görbe hossza}\bigr] := \sup_{t_0<t_1<\cdots<t_n} \sum_{i=1}^{n} d\bigl(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)\bigr) ,$$

ahol a $\sup$ művelet a beosztás végtelen finomításával veendő.

49) Ha $\gamma_1 : I_1 \to X$, $\gamma_1 : I_1 \to X$ foytonos injektív leképezések, és

$\gamma_1(I_1) = \gamma_2(I_2)$, akkor $[\gamma_1$ hossza$] = [\gamma_2$ hossza$]$.

50) Euklidesi térben két pont közt csak az egyenes a legrövidebb görbe.

[Kiindulás: $d(a,b) + d(b,c) = d(a,c) \iff c \in [a,b]$ euklidesi térben].

51) Az $X := \partial[0,1]^3$ kockafelületen legyen d az $\mathbb{R}^3$ -beli euklidesi távolság.

Melyek a legrövidebb görbék X -ben a $(0,0,0)$ és $(1,1,1)$ pontok között?

[Kiindulás: terítsük ki síkba X -et].

52) Az $X := \partial[0,1]^3$ kockafelületen a $p, q \in X$ pontok közti legrövidebb út

hosszát fejezzük ki p és q x, y, z -koordinátáival.

53) $\mathbb{R}^2$ fölött a $d_\infty(p,q) := \max\{|x(p) - x(q)|, |y(p) - y(q)|\}$ távolság szerint

több legrövidebb görbe is lehet két pont közt.

54) Tegyük fel, hogy $c : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ olyan folytonos görbe, amelyre

$c(0) = (0,0)$, $c(1) = (1,0)$, $x(c(t)) \equiv t$ és $y(c)$ differenciálható $(0,1)$ -en.

Ha $|y(c)'| \le 1$, akkor c legrövidebb görbe d_∞ szerint $(0,0)$ és $(1,0)$

közt.

[Használjuk a Lagrange-féle középérték-tételt $y(c)$ -re].

55) Tegyük fel, hogy $X, \mathcal{U}$ kompakt topologikus tér, és $f, f_1, f_2, \ldots : X \to \mathbb{R}$

olyan függvények, hogy $\forall\, x \in X \ \exists\, U_x \in \mathcal{U}_x \quad f_n\big|_{U_x} \rightrightarrows f\big|_{U_x}$.

Igaz-e, hogy $f_n \rightrightarrows f$?

56) Tegyük fel, hogy $f, f_1, f_2, \ldots : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan függvények, hogy

$$\mu_{kn} := \max\{|f_j(x) - f(x)| : \ |x| \le n, \ 1 \le j \le k\} < \infty \qquad (k, n = 1, 2, \ldots)\,.$$

Milyen feltétel kell a $(k, n) \mapsto \mu_{k,n}$ függvényre, hogy $f_n \rightrightarrows f$ legyen?

3. TOPOLOGIKUS ÉS NORMÁLT VEKTORTEREK

1) Ábrázoljuk az $\mathbb{R}^2$ fölötti $\|(x,y)\| := \max\{\frac{1}{2}|x|, |y|\}$ norma

$K := \{v : \|v\| \leq 1\}$ zárt egységgömbjét.

Mely lineáris leképezésekre szimmetrikus K ?

[Az x, y tengelyekkel párhuzamos oldalú, x irányban 4 , x irányban 2 oldalú origó középpontú téglalap. Csak az $(x,y) \mapsto (-x,y)$, $(x,y) \mapsto (x,-y)$ tükrözésekre szimmetrikus].

2) Legyen S az az $\mathbb{R}^2$ -beli nyitott ellipszis, amelynek tengelyei a $[-1,1]$ és $(1,1)$ ill. $[-1,1]$ és $(2,-2)$ közti szakaszok.

a) Ábrázoljuk S -et, és adjuk meg S -et $S = \big(F(x,y) \geq 0\big)$ alakban.

Mely $\langle\ ,\ \rangle$ skalárszorzat normája szerinti norma egységgömbje S ?

c) Mely ferde tükrözésekre szimmetrikus S ?

[a) Pl. $F := 1 - \widetilde{x}^2 + \widetilde{y}^2$, ahol $\widetilde{x} := (x-y)/4$, $\widetilde{y} := (x+y)/2$.

b) Pl. $\langle u, v\rangle := \widetilde{x}(u)\widetilde{x}(v) + \widetilde{y}(u)\widetilde{y}(v)$.

c) Az összes olyan lineáris $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ leképezésre, amely origón átmenő egyenesre való merőleges tükrözés az $\widetilde{X} := (\widetilde{x}, \widetilde{y})$ koordinátarenszer szerint. Tehát az összes alábbi leképezésekre:

$$v \mapsto \widetilde{X}^{-1}\big[(\widetilde{X}v)\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\big] =$$
$$= v\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{2}\\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}^{-1}\ ].$$

3) Adjunk meg véges sok pontot, amelyek konvex burka

(a legszűkebb őket tartalmazó konvex alakzat) $\mathbb{R}^N$ -ben

a) $\big(\max_{k=1}^N |x_k| \leq 1\big)$; b) $\big(\sum_{k=1}^N |x_k| \leq 1\big)$; c) $\big(\sum_{k=1}^N x_k = 1,\ x \geq 0\big)$.

4) Állítsunk elő $\quad K = \bigcap_{i\in I}\big(\phi_i \le c_i\big) \quad \big(\phi_i \in \mathcal{L}(\mathrm{I\!R}^N, \mathrm{I\!R}),\ c_i \in \mathrm{I\!R}\big)$ alakban a következő $\mathrm{I\!R}^N$-beli alakzatokat

a) $K := \big(\max_{k=1}^N |x_k| \le 1\big)$; $\quad$ b) $K := \big(\sum_{k=1}^N |x_k|^p \le 1\big) \quad p = 1, 2, 3$.

5) Legyen V tetszőleges vektortér, K konvex $\subset V$, amelyre $0 \in K$,

$\nu_K(v) := \inf\{\lambda > 0 :\ (1/\lambda)v \in K\} \quad (v \in V) \qquad$ [ahol $\inf\emptyset := \infty$].

Ekkor

a) $\nu_K(\alpha v) = \alpha\nu_K(v) \quad (\alpha > 0,\ v \in V)$;

b) $\nu_K(v) = \nu_K(-v) \ \ (v \in V) \iff K = -K(:= \{-v :\ v \in K\})$;

c) $\nu_k(v) < \infty, \iff \exists\ \varepsilon > 0 \quad [-\varepsilon, \varepsilon]v \subset K$;

d) $\nu_k(v) \ne 0, \iff \exists\ \lambda > 0 \quad \lambda v \notin K, \iff \exists\ \varepsilon > 0 \quad [\varepsilon, \infty)v \cap K = \emptyset$

e) $\nu_K(\alpha u + \beta v) \le \alpha\nu_K(u) + \beta\nu_K(v) \qquad \alpha, \beta > 0,\ u, v \in V)$.

6) $\nu_K : v \mapsto \inf\{\lambda > 0 :\ (1/\lambda)v \in K\}$ pontosan akkor norma, ha

K konvex, 0-szimmetrikus ($K = -K$), nem tartalmaz egyenest, és

V-t elnyeli (azaz $\bigcup_{n=1}^\infty nK = V$).

7) Ha az $f : V \to \mathrm{I\!R}$ függvény konvex, akkor $\{v :\ f(v) < 0\}$ konvex $\subset V$.

8) Ha $\phi : V \to \mathrm{I\!R}$ lineáris funkcionál, és $p \ge 1$, akkor

$v \mapsto |\phi(v)|^p$ konvex függvény.

9) Legyen $p \ge 1$, és $f_p := |x_1|^p + \cdots + |x_N|^p \quad \mathrm{I\!R}^N$-en.

a) f_p konvex függvény, és $K_p := \big(f_p < 1\big)$ konvex nyitott $\subset \mathrm{I\!R}^N$.

b) $\nu_p : v \mapsto \inf\{\lambda > 0 :\ (1/\lambda)v \in K_p\}$ norma $\mathrm{I\!R}^N$-en,

amelynek nyitott egységgömbje K_p .

c) Adjunk képletet ν_p-re. $\qquad$ [$\nu_p = \big[|x_1|^p + \cdots + |x_N|^p\big]^{1/p}$].

10) Adjunk algebrai képletet a

$$\left\|\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right\| := \sup_{\|(x\ y)\|_2 \le 1} \left\|(x\ y)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right\|_2$$

mátrixnormára, ahol $\mathbb{R}^2$ fölött $\|(x\ y)\|_2 := \sqrt{x^2+y^2}$.

[$\left[\frac{1}{2}\big(a^2+b^2+c^2+d^2\big)+\frac{1}{2}\sqrt{\big(a^2+b^2+c^2+d^2\big)^2-\big(ad-bc\big)^2}\right]^{1/2}$].

11)* Általában is, ha $A = \big[\alpha_{ij}\big]_{i,j=1}^{N} \in \mathrm{Mat}(N,N,\mathbb{R})$, akkor

$\|A\|(=\sup_{\|x\|_2\le 1}\|xA\|_2) = \big[\,\lambda \mapsto \det(\lambda - A^*A)$ legnagyobb gyöke$\big]^{1/2}$.

12) Legyen $K := \big(x^2+y^4<1\big)$.

a) Adjuk algebrai képletet a $\nu_K(: v \mapsto \sup\{\lambda>0:\ \lambda^{-1}v \in K\})$ normára.

b) Adjuk meg α,β elemi függvényeként a $\psi := \alpha x+\beta y$ lineáris funkcionál

$\|\phi\|_{\nu_K}(:= \sup\{|\langle\psi,v\rangle|:\ \nu_K(v)=1\})$ duális normáját.

[a) $\nu_K(x,y) = \max\{\lambda>0:\ (x/\lambda)^2+(y/\lambda)^4=1\} = \big[\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{x^4+4y^8}\big]^{1/2}$.

b) $\|\alpha x+\beta y\|_{\nu_K} = \big[\lambda>0:\ \exists!\,\xi,\eta\ge 0\ \ |\alpha|\xi+|\beta|\eta=\lambda,\ \xi^2+\eta^4=1\big] =$

$= \big[\lambda>0:\ \mathrm{Discriminant}\big(\alpha^2Z^4+\beta^2Z^2-2\lambda|\beta|Z+(\lambda^2-\alpha^2)\big)=0\big] =$

$= \big[\lambda \mapsto 16\alpha^2(\lambda^2)^3+(\beta^4-48\alpha^4)(\lambda^2)^2+(48\alpha^6-20\alpha^2\beta^4)(\lambda^2)^2$ max gyöke$\big]$].

13) Adjuk meg az együtthatók elemi függvényeként az

$A := \big(\alpha_{ij}\big)_{i,j=1}^{2}$ mátrix $\|v\|_1 := |x(v)|+|y(v)|$ norma szerinti

$\|A\|_1(:= \sup_{\|v\|_1=1}\|vA\|_1$ normáját.

[$\|A\|_1 = \max\{\|eA\|_1:\ e=(\pm1,0),(0,\pm1)\} = \max_{i=1,2}|\alpha_{i1}|+|\alpha_{i2}|\}$].

14) Adjuk meg az együtthatók elemi függvényeként az

$A := \big(\alpha_{ij}\big)_{i,j=1}^{N}$ mátrix $\|v\|_\infty := \max_{k=1}^{N}|x_k(v)|$ norma szerinti

$\|A\|_\infty(:= \sup_{\|v\|_\infty=1}\|vA\|_\infty$ normáját.

[$\|A\|_\infty = \max\{\|eA\|_\infty:\ e=(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_N),\ \varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_N=\pm1\} =$

$= \max_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}|\alpha_{ij}|$].

15) Legyen $A := \left(\alpha_{ij}\right)_{i,j=1}^{N}$, ahol $\alpha_{ij} := [\, N$ ha $i = j$, -1 ha $i \neq j\,]$.

Az előző feladat jelöléseivel, $\|A\|_\infty =?$

16) Tekintsük az $\|\binom{x}{y}\| := \max\big\{|x|, |y|\big\}$ normát az $\mathbb{R}^2$ síkon. Mennyi eszerint a norma szerint a $K := \big[\binom{\cos t}{\sin t} :\ t \in [0, 2\pi]\big]$ kör hossza? $[\ = 4\ ]$.

17) Az $\|\binom{x}{y}\| := \max\big\{|x|, |y|\big\}$ norma esetén mennyi a hossza az $\big[\binom{e^{-t}\cos t}{e^{-t}\sin t} :\ t \geq 0\big]$ spirálnak?

18) Az $\|\binom{x}{y}\| := |x| + |y|$ norma esetén mennyi a hossza az $\big[\binom{x}{y} :\ x^2 + xy + y^2 = 1\big]$ ellipszisnek?

19) Tegyük fel, hogy

$p_1, p_2, \ldots \in \mathrm{Pol}_K(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ és $p_n(x) \to f(x)$ $(n \to \infty,\ x \in \mathbb{R}^N)$.

a) Ekkor $f \in \mathrm{Pol}_K(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, és

$p_n^{(k)}|S \rightrightarrows f^{(k)}|S$ $(n \to \infty,\ S$ korlátos $\subset \mathbb{R}^N,\ k = 0, 1, 2, \ldots)$.

b) Hány pontban elég tudni a $p_n(x) \to f(x)$ $(n \to \infty)$ relációt, hogy az a)-beli konklúzió igaz legyen? $[\ N + 1\ ]$.

20) Legyenek $f \in C([a, b], \mathbb{R})$, $K \in \{1, 2 \ldots\}$ adottak. Ekkor az

$\|f - p\|_\infty (:= \max_{x \in [a,b]} |f - p|) \to \mathrm{MIN}$, $p \in \mathrm{Pol}_K(\mathbb{R})$

feladatnak van megoldása.

21) $\big\{p \in \mathrm{Pol}_K(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) :\ \max_{|x_1|, \ldots, |x_N| \leq 1} |p(x)| \leq 1\big\}$ kompakt a max-normával ellátott $\mathcal{C}\big((|x_1|, \ldots, |x_N| \leq 1), \mathbb{R}\big)$ térben.

4. TÖBBVÁLTOZÓS DIFFERENCIÁLÁS

1) Legyen $M : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ az $M(a,b) := ab$ szorzásfüggvény.

a) Számítsuk ki az $M'_{(v_1,v_2)}(a,b)$ irány szerinti deriváltakat.

b) Hol differenciálható M ?

c) Mi a deriváltja az M függvénynek?

[a) $M'_{(v_1,v_2)}(a,b) = \lim_{\tau\to 0} \tau^{-1}(M(a+\tau v_1, b+\tau v_2) - M(a,b))) = bv_1 + av_2$.

b) Mindenütt Lagrange tétele szerint, mivel tetszőlegesen rögzített (v_1,v_2)-re az M'_{v_1,v_2} irány szerinti derivált mindenütt folytonos.

c) $\big[M'(a,b) = [(v_1,v_2) \mapsto M'_{(v_1,v_2)}(a,b)] = [(v_1,v_2) \mapsto bv_1 + av_2]\big]$].

2) M' formulájából és az összetett leképezések deriválási formulájából hogyan következik az egyváltozós

$(fg)' = f'g + fg'$ $\quad (f,g : \mathbb{R} \to \mathbb{R})$ Leibniz-szabály?

[A $T :\mapsto (f(a), g(a))$ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ leképezéssel

$$(fg)'(a) = (fg)'_1(a) = M(T)'_1(a) = M'\big(T(a)\big)T'_1(a) =$$

$$= M'\big(f(a), g(a)\big)\big(f'_1(a), g'_1(a)\big) =$$

$$= g(a)f'_1(a) + f(a)g'_1(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$].

3) Adjuk meg az $M_3 : (\alpha,\beta,\gamma) \mapsto \alpha\beta\gamma$ szorzás deriváltját.

[$M'_3(\alpha,\beta,\gamma) = \big[(\xi,\eta,\theta) \mapsto \xi\beta\gamma + \alpha\eta\gamma + \alpha\beta\theta\big]$].

4) Hol deriválható az $\mathbf{M} : \mathrm{Mat}(m,n,\mathbb{R}) \times \mathrm{Mat}(n,p,\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}(m,p,\mathbb{R})$,

$\mathbf{M}(A,B) := AB$ leképezés, és mi ott a deriváltja?

[Mindenütt. $\mathbf{M}'(A,B)(X,Y) = AX + BY$].

5) Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (\cos t, \sin t, t)$. $f' = ?$

$\big[f'(t) = [v \mapsto (-\sin tv, \cos tv, v)]\big]$

6) $\left(x^4+y^4+z^4\right)' = ?$ $\quad\quad \Big[= [(v_1,v_2,v_3)\mapsto 4x^3v_1+4y^3v_1+4z^3v_3]\ \Big]\,.$

7) Legyen $A\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$. Igaz-e, hogy az $f: v\mapsto Av$ lineáris leképezésre

1) $f'(p)=f\quad (p\in\mathbb{R}^n$, 2) $f'=f$? $\quad$ [1) Igen, 2) Nem].

8) Legyen V véges dimenziós vektortér, $\mathrm{GL}(V) := \{A\in\mathcal{L}(V,V):\ \det A\neq 0\}$.

Adjuk meg az $f:\mathrm{GL}(V)\ni A\mapsto A^{-1}$ invertálás f' deriváltját.

$\Big[\ f'(A) = [\mathcal{L}(V,V)\ni X\mapsto -A^{-1}XA^{-1}]\ \Big]\,.$

9) Mi az $A\mapsto A^5$ $\mathrm{Mat}(n,n,\mathbb{R})\to\mathrm{Mat}(n,n,\mathbb{R})$ mátrixhatványozás deriváltja?

[Az A helynél $[X\mapsto XA^4+AXA^3+A^2XA^2+A^3XA+A^4X]$].

10) $$\frac{\partial^3}{\partial t^3}\Big|_{t=0}\Big[\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\Big]^{-2}=?$$

11) Adjuk meg az $f := e^{-(x^2+y^2)}$ $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ függvény

a) $f''(\xi,\eta)\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}))$ második deriváltját,

b) $f^{(2)}(\xi,\eta):[\mathbb{R}^2]^2\to\mathbb{R}^2$ második derivált tenzorát.

[a) $$\Big[(u_1,u_2)\mapsto\Big[(v_1,v_2)\mapsto$$
$$\mapsto (u_1\ u_2)\begin{pmatrix}(2+4\xi^2)e^{-(\xi^2+\eta^2)} & 4\xi\eta e^{-(\xi^2+\eta^2)}\\ 4\xi\eta e^{-(\xi^2+\eta^2)} & (2+4\eta^2)e^{-(\xi^2+\eta^2)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}\Big]\Big]\ ,$$

b) $$\big((u_1,u_2),(v_1,v_2)\big)\mapsto$$
$$\mapsto (u_1\ u_2)\begin{pmatrix}(2+4\xi^2)e^{-(\xi^2+\eta^2)} & 4\xi\eta e^{-(\xi^2+\eta^2)}\\ 4\xi\eta e^{-(\xi^2+\eta^2)} & (2+4\eta^2)e^{-(\xi^2+\eta^2)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}\ ].$$

12) $f := \log(x^2+xy+y^2)$. $\quad$ a) $f'(1,1)(1,2) = ?$

b) $f^{(2)}(1,1)(1,2)(2,1) = ?$ $\quad$ c) $f^{(3)}(1,1)(1,2)(2,1)(1,1) = ?$

[$f^{(1)}(x,y)(1,2) = \frac{\partial f}{\partial x}+2\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{4x+5y}{x^2+xy+y^2}$, $\quad f^{(1)}(1,1)(1,2) = 3$.

$f^{(2)}(x,y)(1,2)(2,1) = [f^{(1)}(x,y)(1,2)]^{(1)}(2,1) = -7\frac{x^2+4xy+y^2}{(x^2+xy+y^2)^2}$,

$f^{(2)}(1,1)(1,2)(2,1) = -14/3$.

$f^{(3)}(x,y)(1,2)(2,1)(1,1) = [f^{(2)}(x,y)(1,2)(2,1)]^{(1)}(1,1) = 126\frac{xy(x+y)}{(x^2+xy+y^2)^3}$,

$f^{(3)}(1,1)(1,2)(2,1)(1,1) = 28/3$.]

13) Hányszor differenciálható folytonosan

a) $\dfrac{y^2 \sin x + y^4}{\delta^2 \sin x + \delta^4}(2 - \cos x) + \cos x$; b) $\sqrt{x^4 + y^8}$;

c) $\big[\log(2 - e^{-x^2} - e^{-y^2})$ ha $(x,y) \neq (0,0)$, 0 ha $(x,y) = (0,0)\big]$;

d) $\big[(e^{-1/x^2} + e^{-1/y^2})^{123/4}$ ha $xy \neq 0$, 0 ha $xy = 0\big]$.

14) Adjunk meg olyan 6-odfokú $\varphi(x,y)$ polinomot, amellyel a

$$\phi := \big[1 \text{ ha } x^2 + y^2 \leq 1, \quad \varphi(x,y) \text{ ha } 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \quad 0 \text{ ha } x^2 + y^2 \geq 4\big]$$

függvény $\mathcal{C}^1$ -síma.

[Pl. $\varphi := 3\big(\frac{4-r^2}{3}\big)^2 - 2\big(\frac{4-r^2}{3}\big)^3$, ahol $r := \sqrt{x^2 + y^2}$].

15) Legyen $\phi := \big[e^{-1/x}$ ha $x > 0$, 0 ha $x \leq 0\big]$.

[Tudjuk: $0 \neq \phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathrm{I\!R}, \mathrm{I\!R})$, de $\phi(0) = \phi'(0) = \phi''(0) = \cdots = 0$].

Adjunk meg ϕ terminusaival olyan $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathrm{I\!R}^2, \mathrm{I\!R})$ függvényt, amelyre

a) $1 = f(0) \geq f \geq 0$, $f\big(x^2 + y^2 \geq 1\big) = 0$;

b) $1 = f\big(|x|, |y| \leq 6\big) \geq f\big(|x|, |y| \leq 1\big) = 0$;

c) $0 = f\big(|x|, |y| \leq 6\big) \leq f\big(|x| + |y| \leq 1\big) = 0$;

d) $f^{-1}\{0\} = \bigcup_{i=1}^n K_i$, ahol $K_1, \ldots, K_n$ zárt körlapok $\mathrm{I\!R}^2$ -ben.

16) * Megadható-e tetszőleges A kompakt $\subset \mathrm{I\!R}^N$ halmazhoz olyan $\mathcal{C}^\infty$ -síma $f : \mathrm{I\!R}^N \to \mathrm{I\!R}$ függvény, amelyre $f(A) = 0 < f(\mathrm{I\!R}^N \setminus A)$?

[Igen. $k = 1, 2, \ldots$ -hoz vehető olyan $A_k \supset A$ halmaz, amely véges sok A -beli középpontú $\frac{1}{k}$ sugarú zárt gömbből áll. Ezekhez vannak olyan $\mathcal{C}^\infty$ -síma ϕ_k függvények, hogy $\phi_k(A_k) = 0 < \phi_k(\mathrm{I\!R}^N \setminus A_k)$ legyen. Keressük f -et $\sum_{k=1}^\infty \varepsilon_k \phi_k$ alakban].

17) Konstruáljunk olyan $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényt, amely

minden egyenes fölött $\mathcal{C}^\infty$-síma [$a, v \in \mathbb{R}^2$ esetén $\tau \mapsto f(a+\tau v)$ $\mathcal{C}^\infty$-síma],

de nem is folytonos az origóban.

[Pl. $K_n := \big((x-1/n)^2 + (y-1/n^2)^2 \le 1/100^n\big)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ diszjunkt

körök, amelyek közül csak legfeljebb kettőt metsz egy egyenes.

Vegyünk olyan $\psi_1, \psi_2, \ldots \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^1, \mathbb{R})$ függvényeket, amelyeknél

$1 = \psi_n(1/n, 1/n^2)$ és $\psi_n(\mathbb{R}^2 \setminus K_n) = 0$. Ekkor $f := \sum_{n=1}^\infty \psi_n$ megfelel].

18) Egy egyváltozós $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény

jobb-oldali deriváltja $f^{(+)}(x) := \lim_{0<h\to 0}[f(x+h) - f(x)]/h$,

a bal-oldali derivált $f^{(-)}(x) := \lim_{0>h\to 0}[f(x+h) - f(x)]/h$.

a) Igaz-e, hogy $f^{(+)} \equiv 0 \Rightarrow 0$? [Általában NEM].

b) $f^{(+)}, f^{(-)}$ folytonos $\Rightarrow f$ differenciálható.

c) Differenciálható-e $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, ha $F_{e_k}^{(+)}$ folytonosak $(k = 1, 2)$.

d) Ha $F_{e_k}^{(\pm)}$ $(k = 1, 2)$ folytonosak, differenciálható-e F ?

Definíció. Bármely $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ függvényre és $u \in \mathbb{R}^N$ vektorra

$\Delta_u f : x \mapsto f(x+u) - f(x)$.

Ha g egy $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény és $\xi_0, \xi_1, \ldots \in \mathbb{R}$, akkor rekurzíven

$g(\xi_0, \xi_1) := [g(\xi_0) - g(\xi_1)]/(\xi_0 - \xi_1)$,

$$g(\xi_0, \ldots, \xi_{m+1}) = \frac{g(\xi_0, \ldots, \xi_m) - g(\xi_1, \ldots, \xi_{m+1})}{\xi_0 - \xi_1}$$

a g függvény *Newton-differenciái.* Tudjuk:

$$g(\xi_0, \ldots, \xi_m) = \frac{1}{m!} g^{(m)}(\xi) \quad \exists \xi \in \big(\min\{\xi_0, \ldots, \xi_m\}, \max\{\xi_0, \ldots, \xi_m\}\big).$$

19) Iterált Lagrange középérték-tétel.

Ha $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ és $u \in \mathbb{R}^N$, akkor

$$\Delta_{u_1} \cdots \Delta_{u_k} f(x) = f'^{\cdots\prime}_{u_1 \cdots u_k}(x+v) \qquad \exists\, v \in [0,1)u_1 + \ldots + u_k[(0,1)u_N.$$

20) * NEWTON-DIFFERENCIÁK TÖBB VÁLTOZÓBAN.

Legyen $x, u \in \mathbb{R}^N$ ill. $\tau_1, \ldots, \tau_M \in \mathbb{R}$ mellett

$\Delta_u^{\tau_1,\ldots,\tau_m} f(x) := f_{x,u}(0, \tau_1, \ldots, \tau_m)$, ahol $f_{x,u} : \tau \mapsto f(x + \tau u)$.

Állítás:

$\Delta_{u_1}^{\tau_1^{(1)},\ldots,\tau_{n_1}^{(1)}} \cdots \Delta_{u_n}^{\tau_1^{(n)},\ldots,\tau_{m_n}^{(n)}} f(x) = f_{u_1 \quad \cdots u_n}^{(m_1)\cdots(m_n)}(x^*)$

valamely $x^* \in x + \sum_{i=1}^n \left[\min_{k=1}^{m_i}\{0, \tau_k^{(i)}\}, \max_{k=1}^{m_i}\{0, \tau_k^{(i)}\}\right] \cdot u_i$ pontra.

Definíció. Ha f, g $\mathbb{R}^N$-beli halmazokon értelmezett függvények és $p \in \mathbb{R}^N$,

f-et g n*-edrendben közelíti* p-nél, ha

p egy $\mathbb{R}^N$-beli környezetén értelmezve van f ill. g, és

$\lim_{h \to 0} |f(p+h) - g(p+h)| / \|h\|^n = 0$ valamely $\|.\|$ norma szerint

(így minden $\mathbb{R}^N$ fölötti norma szerint is).

21) $o_n(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}) := \{ \equiv 0$-t 0-nál n-edrendben közelítő függvények$\}$

VEKTORTÉR (a függvények összeadásával és a számmal való szorzásával).

22) $x_1^{k_1} \cdots x_N^{k_N}$ n-ed rendben közelíti az $\equiv 0$ függvényt $\iff k_1 + \cdots + k_N > n$.

23) Tegyük fel, hogy S, d metrikus tér, $f : X \to \mathbb{R}$, $\widetilde{X} := (\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_N) : S \leftrightarrow G$,

ahol $0 \in G$ nyitott $\subset \mathbb{R}^N$. Ekkor tetszőleges $p \in X$ pontra és n számra

legfeljebb csak egy olyan n-edfokú $P(\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_N)$ polinom van, amelyre

$[f(s) - P(s)] d(s,p)^{-n} \to 0 \qquad \big(d(s,p) \to 0\big)$.

24) Legyen G 0-környezet $\mathbb{R}^N$-ben. Tegyük fel, hogy a

$$g := \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k_1,\ldots,k_N=1}^{N} \alpha_{k_1,\ldots,k_N} x_1^{k_1} \ldots x_N^{k_N}$$

függvénysor *egyenletesen* konvergens G fölött.

a) Ha g 0-nál n-edrendben közelít egy f függvényt, akkor

$$(*) \quad \alpha_{k_1,\ldots,k_N} = \frac{1}{k_1! \cdots k_N!} \frac{\partial^{k_1+\cdots+k_N}}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_N^{k_n}} f(0) \qquad (k_1 + \cdots + k_N \le n).$$

b) Ha az összes $k_1+\ldots+k_N \le n$ indexeknél
$\dfrac{\partial^{k_1+\ldots+k_N}}{\partial x_1^{k_1}\partial x_N^{k_N}} f$ folytonos 0-nál, és $(*)$ áll,
akkor g n-edrendben közelíti f-et 0-nál.

25) $\sqrt{\dfrac{1+x}{1+y}}$ 4-edrendű Taylor polinomja $(0,0)$ körül.

$$[\ (1+x)^{1/2}(1-y)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{1/2}{k}x^k \sum_{\ell=0}^{\infty}\binom{-1/2}{\ell}y^\ell =$$
$$= \sum_{k,\ell}\binom{1/2}{k}\binom{-1/2}{\ell}x^k y^\ell = \sum_{k,\ell\le 4}\binom{1/2}{k}\binom{-1/2}{\ell}x^k y^\ell + o_4(x,y)\ \ ].$$

26) $e^{-(x^2+y^2)}$ 0-körüli n-edrendű Taylor polinomja.

$[\sum_{k=0}^{\mathrm{entire}(n/2)}(-x^2-y^2)^k/k!\,]$.

27) $p(X) := (X+2I)^3$ $\big(X\in \mathrm{Mat}(2,2,\mathbb{R})\big)$, ahol $I :=$ [egységmátrix]

Taylor-sora 0 körül.

28) $p(X) := \sum_{k=1}^m \alpha_k X^k$ $\big(X\in \mathrm{Mat}(N,N,\mathbb{R})\big)$, ahol $I :=$ [egységmátrix]

Taylor-sora 0 körül?

29) $f := [e^{-1/(x^2+y^2)}\ (x^1+y^2>0),\ 0\ (x=y=0)]$ Taylor sora

[$\equiv 0$, tehát nem egyezik meg f-fel, bár az $\mathcal{C}^\infty$-síma].

30) $K(X,Y) := XYX^{-1}Y^{-1}$ $(X,Y\in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^5))$

2-odrendű Taylor polinomja $(1,1)$ körül [jelölés: $1\equiv \big(\text{egységmátrix}\big)$].

$$[\ (1+U)(1+V)(1+U)^{-1}(1+V)^{-1} =$$
$$= (1+U)(1+V)(1-U+U^2-U^3\pm\cdots)(1-V+V^2-V^3\pm\cdots) =$$
$$= (1+U)(1+V)[1-U-V+UV+U^2+V^2] + o_2(U,V) =$$
$$= 1+UV-VU+o_2(u,V) = 1+[U,V]+o_2(U,V)\ \ ].$$

31) $(1+X)^{-2}$ $(X\in \mathrm{Mat}(5,5,\mathbb{R}))$ 3-adrendű Taylor polinomja 0-körül.

32) $F(X,Y) := XYX^{-1}Y^{-1} \quad (X,Y \in \mathrm{Mat}(2,2))$

3-adfokú Taylor-polinomja $(1,1)$ körül.

$[\, f(1+H, 1+K) =$

$= 1 + (HK - KH) + (KH^2 - HK^2 + KHK - HKH) + o_3(H,K)\,.]$

33) $f(x,y) := \log(x^2+xy+y^2)$ 3-adfokú Taylor-polinomja $(1,-1)$ körül.

$[\, f(1+h, -1+k) =$

$= (h-k) + (h^2/2 + 2hk + k^2/2) + (-2h^3/3 - h^2k + hk^2 + 2k^3/3) + o_3(h,k)\,]$

34) $\det(\lambda - X)^{-1} \quad (X \in \mathrm{Mat}(5,5,\mathbb{R}))$ 3-adrendű Taylor polinomja 0-körül.

35) $[\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n) \ni A \mapsto A^{-1}]$ Taylor sora $1 \equiv$ [identitás] körül.

$[\, \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (A-1)^n\,]$.

36) $\det_n := [\mathrm{Mat}(n,n,\mathbb{R}) \ni A \mapsto \det A]$ Taylor sora 0 körül.

[Maga $\det_n$, hiszen ez n-változós n-edfokú homogén polinom].

37) $f : \mathrm{Mat}(2,2,\mathbb{R}) \ni X \mapsto \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + X \right]^{-1}$ Taylor sora (0 körül).

38) Adjuk meg a $\mathrm{Mat}(N,N,\mathbb{R}) \ni X \mapsto \exp(X)$ leképezés

Taylor sorát az A mátrix körül, ha

a) $A := 0$, b) $A :=$ [egységmátrix], c) A tetszőleges $\in \mathrm{Mat}(N,N,\mathbb{R})$.

39) Tegyük fel, hogy $\mathbb{R}^N$ egy 0-környezetén

$$f = \sum_{k_1,\dots,k_N=0}^{\infty} \alpha_{k_1,\dots,k_N}\, x_1^{k_1} \cdots x_N^{k_N} \quad \text{és}$$

$$g_m = \sum_{k_1,\dots,k_N}^{\infty} \beta^{(m)}_{k_1,\dots,k_N}\, x_1^{k_1} \cdots x_N^{k_N} \qquad (m = 1,\dots,N)\,.$$

a) Ekkor $\mathbb{R}^N$ egy 0-környezetén alkalmas $\gamma_{k_1,\dots,k_N}$ együtthatókkal

$$f(g_1,\dots,g_N) = \sum_{k_1,\dots,k_N=0}^{\infty} \gamma_{k_1,\dots,k_N}\, x_1^{k_1} \dots x_N^{k_N}\,.$$

b) Mi itt $\gamma_{k_1,\dots,k_N}$?

c) Tekintsük azokat a fa gráfokat, amelyeknek

gyökerére $\alpha_{k_1,\dots,k_N}$ van írva,

a gyökérből $k_1+\cdots+k_N$ ág indul; az ágak végére rendre

k_1 $\beta^{(1)}_{****}$ alakú, $\cdots$, k_N $\beta^{(N)}_{****}$ alakú együttható van írva;

egy $\beta^{(m)}_{\ell_1,\dots,\ell_N}$ feliratú csúcsból $\ell_1+\cdots+\ell_N$ levélhez vezet ág:

ℓ_1 levélre x_1 van írva, $\cdots$, ℓ_N levélre x_N van írva.

Szorzzuk össze a benne levő elemeket. Az ilyen szorzatok összege éppen

$f(g_1,\dots,g_N)$ egy 0-környezeten.

40) $\operatorname{arctg}\dfrac{1+y}{1+x}$ 3-adrendű Taylor polinomja.

41) Adjuk meg az a) első-, b) másod-, c) N-edrenden

közelítő Taylor polinomját az *egységmátrix* körül az

$F:\mathrm{Mat}(3,3,\mathbb{R})\ni V\mapsto \dfrac{1}{\det V}$ függvénynek.

Definíció. Legyenek U,V vektorterek. A $P:U\to V$ leképezés

k*-homogén polinom*, ha $P(u)=L(\overbrace{u,\dots,u}^{k})$ $(u\in U)$

áll valamely k-változós $L:U^k\to V$ leképezéssel, amelyik

mindegyik változójában lineáris (ha a többi rögzítve van).

42) A $P:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ függvény pontosan akkor k-homogén polinom, ha

$P=\sum_{\substack{i_1+\cdots+i_N=k\\ i_1,\dots,i_N\ge 0}}\alpha_{i_1,\dots,i_N}x_1^{i_1}\cdots x_N^{i_N}$ alakú.

43) Tegyük fel, hogy U,V,Z véges-dimenziós vektorterek, $a\in U$, és

$g:U\to V$, $f:V\to Z$ olyan leképezések, hogy

$$f\big(g(a)+v\big)=\sum_{k=0}^{N}P_k(v)+o_N(v)\,,\qquad g(a+u)=\sum_{k=0}^{N}Q_k(u)+o_N(u)\,,$$

ahol $P_k : V \to Z$ ill. $Q_k : U \to V$ k-homogén polinomok.

Ekkor $f \circ g(a+u) = \sum_{k=0}^{N} \sum_{\substack{i_1+\ldots+i_k=N \\ i_1,\ldots,i_k \geq 0}} P_k(Q_{i_1}(u), \ldots, Q_{i_k}(u)) + o_N(u)$.

44) Tegyük fel, hogy $F : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^\infty$-síma függvények,

$F(0,0) = 0$, $g(0) = 0$, $\left.\frac{\partial}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} F(0,\xi) \neq 0$,

$F(x, g(x)) = 0$ $(x \in \mathbb{R}^d)$. Adjuk meg az implicite definiált g függvény

a) első-, b) másod-. c) N-edrendű Taylor polinomjait 0 körül.

45) a) A $\mathrm{Mat}(2,2,\mathbb{R})$ tér origójának ill. egységmátrixának van olyan

U ill. V nyitott környezete, amelyek között az

$\exp_U : U \ni X \mapsto e^X := \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} X^n$ leképezés kölcsönösen egyértemű.

b) Adjuk meg az előbbi $\exp_U$ leképezés $\log_V$ inverzének az

egységmátrix körüli Taylor sorát.

c) Az $e^{C(X,Y)} := e^X e^Y$ implicit reláció egyértelműen definiál egy

$C : U_0^2 \to \mathrm{Mat}(2,2,\mathbb{R})$ leképezést, ahol

U_0 a $\mathrm{Mat}(2,2,\mathbb{R})$ tér origójának egy alkalmas nyitott környezete.

d) Adjuk meg a C leképezés $(0,0)$ körüli 2-odrendű Taylor polinomját.

e)* Campbell-Hausdorff formula.

Adjuk meg a C leképezés $(0,0)$ körüli Taylor sorát.

46) Határozzuk meg a $\sin x + \sin y + \sin z - \sin(x+y+z)$ függvény széső-értékeit.

[Tekintsük a feladatot csak $[-\pi,\pi]^3$ felett].

47) Oldjuk meg az

$xyz \to \mathrm{MAX}$, $x+y+z=1$, $x,y,z \geq 0$

feltételes szélsőérték-feladatot.

[Célszerűen $x = u^2$, $y = v^2$, $z := w^2$, $u^2v^2w^2 \to \mathrm{MAX}$, $u^2+v^2+z^2 = 1$].

48) Melyik az $\big(x+y+z=1,\ x,y,z\geq 0\big)$ háromszög legközelebbi pontja (az euklidesi távolság szerint) a $(4,6,-1)$ ponthoz?

49) A $\lambda\mapsto\lambda^2+1$ karakterisztikus polinomú 2×2-es valós mátrixok közül melyek együtthatóinak négyzetösszege minimális?

50) A $[0,1]^3$ kocka csúcsainak távolság-négyzet összege az $\big(\,x+2y+3z=0\,\big)$ sík mely pontjaitól minimális?

51) Adottak a $p_1,\ldots,p_n\in\mathbb{R}^N$ pontok. Tegyük fel, hogy L egyenes $\subset\mathbb{R}^N$, amelyre $\displaystyle\sum_{i=1}^n d(p,L)^2=\min_{M\ \text{egyenes}\subset\mathbb{R}^N}\sum_{i=1}^n d(p_i,M)^2$.

a) Állítás: L átmegy az $\dfrac{1}{n}(p_1+\ldots+p_n)$ súlyponton.

b) L irányvektora milyen "tehetetlenségi" mátrix sajátvektora?

52) Az $\mathbb{R}^2$-beli d természetes euklidesi távolság szerint hol az a $p\in\mathbb{R}^2$ pont, amelyre $d(p,a)+d(p,b)+d(p,c)\to\text{MIN}$ az $a:=(0,1)$, $b:=(0,0)$, $c:=(1,0)$ háromszögnél?

53) Legyen a,b,c egy hegyesszögű háromszög a síkban.

a) A $p\mapsto d(p,a)+d(p,b)+d(p,c)$ (euklidesi) távolságösszeg pontosan egy p_* pontnál minimalizálódik.

b) $[\,ap_*b$ szög$]=[\,bp_*c$ szög$]=[\,cp_*a$ szög$]=120^o$.

54) Legyenek $a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{R}^N$. Az euklidesi távolság szerint pontosan egy $p_*\in\mathbb{R}^N$ megoldása van a $\sum_{i=1}^n d(p,a_i)\to\text{MIN}$ problémának.

Itt $\displaystyle\sum_{i=1}^n\frac{a_i-p_*}{d(a_i,p_*)}=0$.

55) a) $\sum_{k=1}^N x_k y_k\to\text{MAX}$, $\sum_{k=1}^N x_k^p=\sum_{k=1}^N y_k^q=1$ feltétellel.

b) Általánosítsuk a Hölder-egyenlőtlenséget a megoldás alapján.

[a) $\mathrm{MAX} = N^{1-(1/p+1/q)}$. b) Általánosított Hölder egyenlőtlenség:

$\sum_{k=1}^{N} |x_k y_k| \le N^{1-(1/p+1/q)} \left[\sum_{k=1}^{N} |x_k|^p\right]^{1/p} \left[\sum_{k=1}^{N} |y_k|^q\right]^{1/q}$.

Kidolgozás Lagrange-multiplikátorokkal. A maximum-helynél

$f := x_1y_1 + \ldots + x_Ny_N \quad c_1 := x_1^p + \ldots + x_N^p - 1\,, \; c_2 := y^q s_1 + \ldots + y_N^q - 1$

mellett $\exists\ \lambda_1, \lambda_2 \qquad \dfrac{\partial f}{\partial x_i} = \lambda_1 = \dfrac{\partial f_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \dfrac{\partial c_2}{\partial y_i} \quad \dfrac{\partial f}{\partial y_j} = \lambda_1 \dfrac{\partial c_1}{\partial y_j} + \lambda_2 \dfrac{\partial c_1}{\partial y_j}\,;$

$y_i = \lambda_1 p x_i^{p-1}, \quad x_j = \lambda_2 q y_j^{q-1}, \quad x_1^p + \cdots + x_N^p = 1, \quad y_1^q + \cdots + y_N^q = 1\,.$

Innen $\quad x_iy_i = \lambda_1 p x_i^p\,, \;\; x_jy_j = \lambda_2 q y_j^q\,.$ Ezt szummázva kapjuk, hogy

$\mu := \max f = \lambda_1^p = \lambda_2^q\,.$ Tehát $\; y_i = \mu x_i^{p-1}\,, \; x_j = \mu y_j^{q-1}$, azaz

$x_j = \mu\big(\mu x_j^{p-1}\big)^{q-1}$ és $x_j^{1-(p-1)(q-1)} = \mu^q\,.$

A) $(p-1)(q-1) = 1, \Rightarrow \mu^2 = 1, \;\Rightarrow\; \mu = 1\,.$

B) $(p-1)(q-1) \ne 1$ esetén $\; x_1 = x_2 = \cdots = x_N, \quad N x_1^p = 1\,,$

$x_1 = \cdots = x_N = N^{-1/p}\,, \quad y_1 = \cdots = y_N = N^{-1/q}\,,$

$\mu = \sum_{i=1}^{N} x_iy_i = N \cdot N^{-1/p} N^{-1q} = N^{1-(\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}$].

56) $x_1y_1 + 2x_2y_2 \to \mathrm{MAX}\,, \quad x_1^2 + x_2^2 = y_1 + y_2 = 1\,, \quad y_1, y_2 \ge 0\,.$

[Célszerű használni az $\; y_1 := u_1^2\,, \; y_2 := u_2^2 \;$ előállítást].

57) a) $(3\ 4)U\begin{pmatrix}-5\\6\end{pmatrix} \to \mathrm{MAX}$ az $\; U^{\mathrm{T}}U = \begin{pmatrix}10\\00\end{pmatrix}$ feltétellel.

b) $(3\ 4)U\begin{pmatrix}-5\\6\end{pmatrix} \to \mathrm{MAX}$ az $\; U^{\mathrm{T}}U = \begin{pmatrix}10\\01\end{pmatrix}$ feltétellel.

[a) 25 . b) $5\sqrt{61}$.]

58) $v, w \in \mathrm{Mat}(N, 1, \mathbb{R})$ adott vektorok, $\lambda_1 \ge \ldots \ge \lambda_N \ge 0\,.$

a) $u^{\mathrm{T}}Uv \to \mathrm{MAX}\,, \; U \in \mathrm{Mat}(N, N, \mathbb{R})\,, \; U^{\mathrm{T}}U = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)\,.$

b) $u^{\mathrm{T}}Uv \to \mathrm{MAX}\,, \; U \in \mathrm{Mat}(N, N, \mathbb{R})\,, \; U^{\mathrm{T}}U = A$, ahol $A \in \mathrm{Mat}(N, N, \mathbb{R})$ adott pozitív szemidefinit mátrix.

Definíció. GÖMBI TÁVOLSÁGOK. A 3-dimenziós $\; S_3 := \big(x^2 + y^2 + z^2 = 1\big)$ egységgömbön a p, q pontok közti *gömbi távolság* a köztük lévő főkörív hossza

$d_{S_3}(p,q) := \arccos\langle \mathrm{p}, \mathrm{q}\rangle$.

59) A gömbi főkörív a legrövidebb S_3 -beli görbe $p, q \in S_3$ között.

[Vehető $p = (1,0,0)$, $q = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$, ahol $\theta \in [0,\pi]$.

Ha $\gamma : [a,b] \to S_3$ síma görbe és $\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = q$, akkor a

$\widetilde{\gamma}(t) := \big(x(\gamma(t)), \sqrt{1 - x(\gamma(t))^2}, 0\big)$ görbére $\|\gamma'(t)\| \geq \|\widetilde{\gamma}'(t)\|$].

60) Hol van az a $p_* \in S_3$ pont, amelynél

$d_{S_3}(p,a) + d_{S_3}(p,b) + d_{S_3}(p,c) \to \mathrm{MIN}$, ha

a) $a := (0,0,1)$, $b := (1,0,0)$, $c := (0,1,0)$;

b) $a := (0,0,1)$, $b := (1,0,0)$, $c := (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$;

c) $a := (0,0,1)$,

$b := (\sin\theta\cos\alpha, \sin\theta\sin\alpha, \cos\theta)$, $c := (\sin\theta\cos\alpha, -\sin\theta\sin\alpha, \cos\theta)$;

d)* $a, b, c \in S_3$ általános helyzetű pontok?

[Használjunk földrajzi koordinátákat: ha $p, q \in S_3$ északi szélesség ill. keleti hosszúság szerint (ϑ_1, φ_1) , (ϑ_2, φ_2) -nél vannak,

$$d_{S_3}(p,q) = \arccos\langle \mathrm{p}, \mathrm{q}\rangle = \arccos\left\langle \begin{pmatrix} \cos\vartheta_1 \\ \sin\vartheta_1, \cos\varphi_1 \\ \sin\vartheta_1, \sin\varphi_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\vartheta_2 \\ \sin\vartheta_2, \cos\varphi_2 \\ \sin\vartheta_2, \sin\varphi_2 \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$= \arccos\big[\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2 + \sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\big]$].

61) Legyen $f : V \to \mathbb{R}$ egy vektortér fölötti konvex $\mathcal{C}^1$ -síma függvény, amelyre

$f(0) = 0 < f(v) = f(-v)$ $(0 \neq v \in V)$, és legyen

$K := \big(f < 1\big)$, $\nu_K : v \mapsto \inf\{\lambda > 0 : \ (1/\lambda)v \in K\}$.

a) ν_K norma V -n, amelynek $K = \big(\nu_K < 1\big)$ a nyitott egységgömbje, és

$\partial K = \big(\nu_K = 1\big) = \big(f = 1\big)$.

b) $v \in \big(f = 1\big)$ esetén $f'_v(v) > 0$.

c) Legyen $v \in \big(f = 1\big)$, és $\phi_v := [f'_v(v)]^{-1} f'(v)$. Ekkor $\phi_v \in V^*$, és

$\bigl|\bigl\langle\phi_v, K\bigr\rangle\bigr|(=\{|\phi_v(x)> \ x\in K\}) < 1 = \bigl\langle\phi, v\bigr\rangle$.

d) ϕ_v olyan lineáris funkcionál, amelynek a ν_K norma szerinti normája

$\|\phi_v\|_{\nu_K}(=\sup_{\nu_K(x)\le 1}\bigl|\bigl\langle\phi, x\bigr\rangle\bigr|) = 1$,

és ezt az értéket (az 1 ν_K -normájú) v -nél fel is veszi.

e) Ha $\phi\neq\phi_v$, de $\bigl\langle\phi, v\bigr\rangle = 1$, akkor $\|\phi\|_{\nu_K} > 1$.

f) Ha $\phi\in V^*$ a maximumát felveszi $\overline{K} := \bigl(f\le 1\bigr)$ -en v -nél,

akkor szükségképpen $\phi = \phi(v)\cdot\phi_v$.

62) $p > 1$ esetén alkalmazhatók az előző eredmények $V := \mathbb{R}^N$ -en

$f_p := |x_1|^p + \cdots + |x_N|^p$ ill. $K_p := \bigl(f_p < 1\bigr)$ -re.

a) Legyen $v := (v_1, \ldots, v_N)\in\bigl(f_p = 1\bigr)$. Melyik $\widetilde{v} := (\widetilde{v}_1, \ldots, \widetilde{v}_N)$

vektorral való skaláris szorzás adja a ϕ_v funkcionált?

b) A ν_{K_p} norma nem más, mint a klasszikus

$\|w\|_p := \Bigl[\sum_{k=1}^N |x_k(w)|^p\Bigr]^{1/p}$ norma, és áll a

$\sum_{k=1}^N u_k v_k \le \|u\|_q\|v\|_p \ \ (\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$ Hölder-egyenlőtlenség.

[a) $\widetilde{v} = \bigl(\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_N\bigr)\bigr|_{x_1=v_1,\ldots,x_N=v_M} =$

$= (\mathrm{sgn}(v_1)|v_1|^{p-1}, \ldots, \mathrm{sgn}(v_N)|v_N|^{p-1})$.

b) Elég $\|u\|_q = 1$ -re bizonyítani, hogy $\sup_{\|w\|_p\|=1}\sum_k u_k w_k \le 1$. Tegyük fel, hogy $\|u\|_q = \| = 1 < \sup_{\|w\|_p\|=1}\sum_k u_k w_k$. Legyen v olyan vektor, ahol $\phi : w\mapsto\sum_k u_k w_k$ felveszi a maximumát a kompakt $\{w : \ \|w\|_p = 1\|$ -en. Az előző feladat f) állítása szerint $\phi = \lambda\cdot\phi_v$, ahol $\lambda := \phi(v) > 1$. Az iménti a) eredménye alapján $u_k = \lambda\mathrm{sgn}(v_k)|v_k|^{p-1}$ $(k = 1, \ldots, N)$. Csakhogy ekkor $\|u\|_q^q = \sum_k |u_k|^q = \lambda^q\sum_k |v_k|^{(p-1)q} = \lambda^q\sum_k |v_k|^p = \lambda^q > 1$.

Ez ellentmond az $\|u\|_q = 1$ feltevésnek].

63) Legyen E vektortér, $e_1, \ldots, e_N$ bázis E -ben, továbbá

$e := \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3$ egy rögzített vektor.

Tegyük fel, hogy az $a_0, a_1, a_2, \lambda : E \to \mathbb{R}_+$ fgv ekre

$$\lambda(e) = \lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > 0\,,$$

$$\lambda^3 - a_1\lambda^2 + a_2\lambda - a_3 \equiv 0\,,$$

$$\lambda_k^3 - a_1(e)\lambda_k^2 + a_2(e)\lambda_k - a_3(e) = 0 \qquad (k = 1, 2, 3)\,.$$

Fejezzük ki a $\lambda^{(m)}(e)$ $(m = 1, 2, 3)$ deriváltakat az $a_k^{(p)}(e)$ deriváltakkal.

64) Legyen $T : \mathbb{R}^K \to \mathbb{R}^N$ egy $\mathcal{C}^1$-síma leképezés, ahol $K \geq N$. Tegyük fel, hogy a $T'(p)$ derivált-mátrixok rangjára $\operatorname{rank} T'(p) = K$ $(p \in \mathbb{R}^K)$.

a) $\exists\, U$ 0-környezet $\exists\, i_1 < \cdots < i_K$ $\det \begin{bmatrix} x_{i_1} & (T) \\ \vdots & \\ x_{i_k} & (T) \end{bmatrix}' \neq 0$ U fölött.

b) $\exists\, U$ 0-környezet $\subset \mathbb{R}^K$ $\exists\, f : \mathbb{R}^K \to \mathbb{R}^{N-k}$ $T(U) = \operatorname{graph}(f)$.

(Itt $\operatorname{graph}(f)$ az f leképezés *grafikon*ja, a $\{(p, f(p)) :\ p \in U\}$ halmaz).

65) Legyenek $T_1, T_2 : \mathbb{R}^K \to \mathbb{R}^N$ $\mathcal{C}^1$-síma injektív leképezések, amelyekre $T_1(\mathbb{R}^K) = T_2(\mathbb{R}^K)$. Tegyük fel, hogy $\operatorname{rank}(T_1') \equiv \operatorname{rank}(T_2') \equiv K \leq N$. Ekkor a $T_1^{-1} \circ T_2 : \mathbb{R}^K \to \mathbb{R}^K$ leképezés $\mathcal{C}^1$-síma.

5. DIFFERENCIÁLHATÓ SOKASÁGOK

1) Van-e $\mathbb{R}^2$-n olyan (u,v) nem-lineáris koordinátarendszer, amelyben

a) $\big(y=x^2\big)$ egyenes,

b) $\big(x^2+4y^2=1\big)$ kör,

c) az összes $\big(y=x^2+c\big)$ $(c\in\mathbb{R})$ egyenes,

d) $\big(x^2+y^2=1\big)$ kör, míg $\big(y=x^2\big)$ egyenes.

[IGEN. Pl. a)c) $u:=x,\ v:=y-x^2$; b) $u:=x,\ v:=2y$;

d) $u:=x\,,\ v:=\Psi(x,y-x^2)$, ahol $\Psi(x,.):\mathbb{R}\leftrightarrow\mathbb{R}\,,\ \Psi(x,0)=0\,,$

$\Psi(x,\pm\sqrt{1-x^2}-x^2)=\pm\sqrt{1-x^2}-1/\sqrt{2}$].

2) Van-e olyan (u,v) koordinátarendszer $(0,\infty)^2$-en, amely szerint az összes $\big(y=cx^2, x>0\big)$ $(c>0)$ félparabola egyenes.

[Pl. $u:=\log x,\ v:=\log y$].

3) Adjunk meg olyan koordinátafüggvényeket $\mathbb{R}^2$-n, amelynek szintvonalai origó középpontú négyzetek ill. origó kezdőpontú félegyenesek.

4) Legyen $S:=\{$páratlan ≤ 5-ödfokú $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ polinomok$\}$.

Milyen $\xi_1,\dots,\xi_n\in\mathbb{R}$ mellett lesz

$X:P\mapsto\big(P(\xi_1),\dots,P(\xi_k)\big)$ koordinátarendszer S-en?

[$\#\{|\xi_i|:\ i=1,\dots,n\}\setminus\{0\}\ge 3$].

5) Legyen $S:=\{\,5$-ödfokú $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ polinomok$\}$.

Milyen $p_1,\dots,p_k\in\mathbb{R}^2$ mellett lesz

$X:P\mapsto\big(P(p_1),\dots,P(p_k)\big)$ nyitott koordinátarendszer S-en?

6) Szabadon eső koordinátarendszert használva, mutassuk meg, hogy egy o pontból különböző irányokban v nagyságú sebességgel dobott testek (pl. egy szétrobbanó rakéta darabjai) T idő múlva gömbfelületen lesznek.

7) $x = r\cos\varphi\,,\ y = r\sin\varphi\,,\ p = \tanh r\big(= (e^r - e^{-r})/(e^r + e^{-r})\big)$ koordináták $\mathbf{R}^2$-n.

Az (x, y)-beli $\partial/\partial y$ kifejezése a (p, φ) koordinátarendszerben.

$[\,(\partial f/\partial x, \partial f/\partial y)\left(\begin{smallmatrix}\partial x/\partial p & \partial x/\partial\varphi\\ \partial y/\partial p & \partial y/\partial\varphi\end{smallmatrix}\right) = (\partial f/\partial p, \partial f/\partial\varphi)\,,$

$\left(\begin{smallmatrix}\partial x/\partial p & \partial x/\partial\varphi\\ \partial y/\partial p & \partial y/\partial\varphi\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin p & \cos\varphi\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}(1-p^2)^{-1} & 0\\ 0 & \operatorname{arth} p\end{smallmatrix}\right).$

$\partial f/\partial y = (1 - p^2)\sin\varphi\,\partial f/\partial p + (\operatorname{arth} p)^{-1}\cos\varphi\,\partial f/\partial\varphi\,.]$

8) Speciális relativitás 1 térdimenzióban.

Legyenek $I_1, I_2 : S \leftrightarrow \mathbb{R}^2\,,\quad c, v \in (0, \infty)\,.$ Tegyük fel, hogy

1) $I_2 \circ I_1^{-1}\Big\{\left(\begin{smallmatrix}t\\0\end{smallmatrix}\right) :\ t \in \mathbb{R}\Big\} = \Big\{\left(\begin{smallmatrix}t\\vt\end{smallmatrix}\right) : t \in \mathbb{R}\}\,,$

2) $I_2(p) = \left(\begin{smallmatrix}\alpha\beta\\ \gamma\delta\end{smallmatrix}\right)I_1(p) \qquad (p \in S)\,.$

3) $I_2 \circ I_1^{-1}\Big\{\left(\begin{smallmatrix}t\\tc\end{smallmatrix}\right) :\ t \in \mathbb{R}\Big\} = \Big\{\left(\begin{smallmatrix}t\\tc\end{smallmatrix}\right) :\ t \in \mathbb{R}\Big\}\,.$

a) Milyen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ együtthatókkal teljesül 1)2)3) ?

b) Milyen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$-ra teljesül 1)2)3)4) [ezzel 4 ismeretlen 4 egyenlet], ahol

4) $\Big\{\left(\begin{smallmatrix}\alpha\beta\\ \gamma\delta\end{smallmatrix}\right)^{-1}\left(\begin{smallmatrix}t\\0\end{smallmatrix}\right) :\ t \in \mathbb{R}\Big\} = \Big\{\left(\begin{smallmatrix}t\\-vt\end{smallmatrix}\right) :\ t \in \mathbb{R}\Big\}\,.$

d) Mit jelent 1)2)3)4) fizikailag?

[I_1, I_2 inerciarendszer, v I_2 sebessége I_1-ben, c fénysebeség, 4) tükrözés].

9) Descartes-koordinátarendszerek. Legyen V n-dimenziós vektortér, $\langle\ ,\ \rangle$ skalárszorzat V fölött, d az általa meghatározott

$d(p, q) := \langle p - q, p - q\rangle^{1/2} \quad (p, q \in V)$ távolság.

Állítás: a lineáris $x_1, \dots x_n : V \to \mathbb{R}$ funkcionálok pontosan akkor alkotnak d szerinti Descartes-koordinátarendszert (azaz mindig $d(p,q) = \Big[\sum_{i=1}^{n}[x_i(p) - x_i(q)]^2\Big]^{1/2}$), ha

$\exists\big\{e_1,\ldots,e_n\big\}$ORTONORMÁLT $\subset V \qquad x_i : p \mapsto \big\langle p, e_i\big\rangle \quad (i=1,\ldots,n)$.

10) Általában is, ha az n-dimenziós $V, \big\langle\ ,\ \big\rangle$ belsőszorzat téren az

$x_1, \ldots x_n : V \to \mathbb{R}$ függvények Descartes-koordinátarendszert alkotnak a

$d(p,q) = \Big[\sum_{i=1}^{n}[x_i(p) - x_i(q)]^2\Big]^{1/2}$ metrika szerint, akkor szükségképpen

$\exists\big\{e_1,\ldots,e_n\big\}$ORTONORMÁLT $\subset V\ \exists\, a \in V \quad x_i : p \mapsto \big\langle p{-}a, e_i\big\rangle \quad (i=1,\ldots,n)$.

11) Gömbön a gömbi távolsággal nem lehet Descartes koordinátaredszer.

12) Legyen $\{u_1,\ldots,u_N\}$ lineárisan független $\subset \mathbb{R}^N$. Ekkor pontosan egy olyan d metrika és N-dimenziós d-szerinti $(x_1,\ldots,x_N)$ Descartes koordinátarendszer létezik $\mathbb{R}^N$-en, amelyre $x_i(u_j) = \delta_{ij} \quad (i,j = 1,\ldots,N)$.

13) Határozzuk meg a $d(p,q) := \int_0^1 (p-q)^2\, dx$ metrikával ellátott

$\mathcal{P}_n := \big\{\, n$-edfokú $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinomok$\big\}$ téren azt a d szerinti

$x_0, \ldots, x_n : \mathcal{P}_n \to \mathbb{R}$ Descartes-koordinátarendszert, amelyre

$\mathcal{P}_k = \big(x_{k+1} = \cdots = x_n = 0\big) \quad (k = 0,\ldots,n)$.

[$x_k(p) = \int_0^1 pq_k\, dx \quad (k = 0,\ldots,n)$, ahol

$p_0, \ldots, p_n$ az első n *Hermite-polinom*, azaz

$q_0 \equiv 1$, $q_k := \big[q \in \mathcal{P}_k :\ \int_0^1 q^2\, dx = 1,\ \int_0^1 q_j q\, dx = 0 \ \ (j<k)\big] \quad (k = 0,\ldots,n)$].

Definíció. KOORDINÁTA-TENGELYEK, POLINOMOK. Legyen az S halmazon $X := (x_1,\ldots,x_n) : S \to \mathbb{R}^n$ n-dimenziós nyitott koordinátarendszer .

A $p \in S$ *ponton áthaladó* x_k*-tengely* $L_{p,x_k} := \{q \in S :\ X_k(p) = x_k(q)\}$.

Az $f : S \to \mathbb{R}$ függvény X*-polinom*, ha $f = \sum\limits_{0 \le i_1,\ldots,i_n \le K} \alpha_{i_1,\ldots,i_n}\, x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$ alakú.

14) Ha $X := (x_1,\ldots,x_n) : S \to \mathbb{R}^n$ nyitott koordinátarendszer és $p \in S$, akkor

$L_{p,x_k} = X^{-1}\big(X(p) + \mathbb{R}e_k\big) \qquad$ [ahol $e_k := (\overbrace{0,\ldots,0}^{k-1},1,0,\ldots,0)$].

15) Tegyük fel, hogy $f = \sum\limits_{0 \le i_1, \dots, i_n \le K} \alpha_{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$ X-polinom. Ekkor

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \sum_{0 \le i_1, \dots, i_n \le K} \alpha_{i_1 \dots i_n} \, i_k \, x_k^{i_k - 1} \prod_{j:\ j \ne k} x_j^{i_j} =$$
$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[f\big(X^{-1}\big(X(p) + te_k\big)\big) - f(p) \right] .$$

16) * Tegyük fel, hogy $f = \sum\limits_{i_1, \dots, i_n} \alpha_{i_1, \dots, i_n} \, x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$ (végtelen sor). Ekkor

$$\lim_{N \to \infty} \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{i_1, \dots, i_n \le N} \alpha_{i_1, \dots, i_n} \, x_1^{i_1}(p) \cdots x_n^{i_n}(p) =$$
$$= \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \left[f\big(X^{-1}\big(X(p) + te_k\big)\big) - f(p) \right] .$$

17) X-ANALITIKUS FÜGGVÉNYEK PARCIÁLIS DERIVÁLTJAI. Tegyük fel, hogy

$$F(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n = 0}^{\infty} \alpha_{i_1, \dots, i_n} \, \xi_1^{i1} \cdots \xi_n^{i_n} \qquad \big((\xi_1, \dots, \xi_n) \in G \text{ nyitott} \subset \mathbb{R}^n\big) ,$$

$\widetilde{X} := (\widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_n) : S \leftrightarrow \mathbb{R}^n$ és $f := F \circ X$. Ekkor

$$\sum_{i_1, \dots, i_n = 0}^{\infty} i_k \, \alpha_{i_1, \dots, i_n} \, x_k^{-1}(p) \, [\widetilde{x}_1^{i_1}(p) \cdots \widetilde{x}_n^{i_n}(p)] = \frac{\partial F}{\partial \widetilde{x}_k}(p) =$$
$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t = \widetilde{x}_k(p)} F(\widetilde{x}_1(p), \dots, \widetilde{x}_{k-1}(p), t, \widetilde{x}_{k+1}(p), \dots, \widetilde{x}_n(p)) .$$

18) Legyen $\mathbb{R}^2$ fölött $X := (x, y)$, $\widehat{X} := (x, \widehat{y})$, $\widetilde{X} := (x, \widetilde{y})$ az alábbi három koordinátarendszer, ahol

$x : (\xi_1, \xi_2) \mapsto \xi_1$, $y : (\xi_1, \xi_2) \mapsto \xi_2$, $\widehat{y} : (\xi_1, \xi_2) \mapsto -\xi_2$, $\widetilde{y} : (\xi_1, \xi_2) \mapsto \xi_1 + \xi_2$.

Határozzuk meg az $f := x^2 + y^2$ függvény $\frac{\partial f}{\partial x}$ parciális deriváltját X, $\widehat{X}$ ill. $\widetilde{X}$ szerint.

[$2x$, $2x$, $4x + 2\widetilde{x}$].

19) $\Delta := \dfrac{\partial^2}{x^2} + \dfrac{\partial^2}{y^2}$ kifejezése az $u := x + y$, $v := x - y$ koordinátákkal.

20) Tegyük fel, hogy $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ne 0$. Fejezzük ki az $\mathbb{R}^2$-beli $u := ax + by$, $v := cx + dy$ koordinátákkal a $\frac{\partial^n}{\partial x^n}$ differenciáloperátorokat.

[$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}=a\frac{\partial f}{\partial u}+c\frac{\partial f}{\partial v},\quad \frac{\partial}{\partial x}=a\underbrace{\frac{\partial}{\partial u}}_{A}+c\underbrace{\frac{\partial}{\partial v}}_{B}.$$

Észrevétel: A felcserélhető B-vel. Innen

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}=(A+B)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^kB^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kc^{n-k}\frac{\partial^n}{\partial u^k\partial v^{n-k}}\ ].$$

21) Legyenek W,V véges-dimenziós vektorterek, $A\in\mathcal{L}(W,V)$,

$X^{(1)},X^{(2)}$ lineáris koordinátarenszerek W fölött,

$Y^{(1)},Y^{(2)}$ lineáris koordinátarenszerek V fölött.

a) Írjuk fel a $\partial/\partial x_1^{(s)},\ldots,\partial/\partial x_{\dim W}^{(s)}$ differenciál operátorokkal az A leképezés $\alpha^{(s)}$ mátrixát, ha W-n ill V-n az $X^{(s)}$ ill. $Y^{(s)}$ koordinátarenszereket használjuk $(s=1,2)$.

b) Fejezzük ki az $\alpha^{(2)}$ mátrixot a $\lambda:=\frac{\partial X^{(2)}}{\partial X^{(1)}}$, $\mu:=\frac{\partial Y^{(2)}}{\partial Y^{(1)}}$ ill. $\alpha^{(1)}$ mátrixokkal.

[a) $\alpha^{(s)}=\left(\dfrac{\partial y_i^{(s)}(A)}{\partial x_j^{(s)}}\right)_{i=1}^{\dim V}{}_{j=1}^{\dim W}$ $(s=1,2)$. b) $\alpha^{(2)}=\mu\alpha^{(1)}\lambda^{(-1)}$].

22) Tegyük fel, hogy $U\in\mathcal{C}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$, és $\dfrac{\partial^2U}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2U}{\partial y^2}=0$.

Ekkor az $u:=x+y$, $v:=x-y$ koordinátákkal

$\exists\ \phi,\psi\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})\qquad U=\phi(u)+\Psi(v)$.

[Kiindulás: $\dfrac{\partial^2U}{\partial u\partial v}=0$].

23) Lambert-féle síkvetületek. Az $S:=\big(x^2+y^2+z^2=1\big)\subset\mathbb{R}^3$ gömbön minden $p\in S\setminus\{\pm(0,0,1)\}$ ponthoz elkészítünk egy

$X_p=(x_p,y_p):\ S\setminus\{p^*\}\leftrightarrow\mathbb{R}^2$, ahol $p^*:=\big[q\in S:\ \|p-q\|=2\big]$

[p^* a p-vel szembeni pont S-ben] térképet a következő módon.

Vesszük a p-beli T_p érintősíkban a p-ből az $(1,0,0)$ "Északi sark" felé induló főkörív v_p érintő egységvektorát, és az arra merőleges "Kelet" irányába mutató u_p egységvektort. A $p^*\neq q\in S$ pont $(x_p(q),y_p(q))$

koordinátái a p^*-ot q-val összekötő $L(p^*, q)$ egyenes és a T_p sík $Q_p(q)$ metszéspontjának a koordinátái az p origójú, u_p, v_p tengelyirányú T_p-beli Descartes-koordinátarendszer szerint.

a) Adjuk meg a

$$p := (\cos\vartheta\cos\varphi, \cos\vartheta\sin\varphi)\,, \qquad q := (\cos\vartheta'\cos\varphi', \cos\vartheta'\sin\varphi')\,.$$

pontokhoz tartozó p^*, $Q_p(q)$ pontok ill. u_p, v_p vektorok

(x, y, z)-koordinátáit, és az $(x_p(q), y_p(q))$ síkvetületi koordinátákat.

b) Ha $\gamma_1, \gamma_2 : (-1, 1) \to S$ $\mathcal{C}^1$-síma görbék, amelyek a

$q := \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ pontban α szögben metszik egymást,

akkor bármely X_p térképen a két görbe

$X_p \circ \gamma_k : t \mapsto \big(x_p(\gamma_k(t), y_p(\gamma_k(t))\big)$ $\quad (k = 1, 2)$ képe is

α szögben metszi egymást.

c) Egy S-beli körvonal X_p-képe mindig kör vagy egyenes.

d) Mi az $X_{p^*} \circ X_p^{-1}$ koordináta-átszámítási függvény?

e) Adjuk meg az X_q-koordinátákat az X_p-koordináták alapján kiszámító

$\Phi_{p,q} := X_q \circ X_p^{-1}$ $\quad \mathbb{R}^2 \leftrightarrow \mathbb{R}^2$ függvény formuláját a

$p := (\cos\vartheta\cos\varphi, \cos\vartheta\sin\varphi)\,,$ $\quad q := (\cos\vartheta'\cos\varphi', \cos\vartheta'\sin\varphi')$ pontokra.

f) Igaz-e, hogy $\mathcal{A} := \{X_p :\ p \in S\}$ $\mathcal{C}^\infty$-atlasz S-en? [Igen].

24) Mely ℓ értékekre van olyan $\mathcal{A} := \{X_1, X_2\}$ $\mathcal{C}^\ell$-atlasz

$S := \big(x^2 + y^2 + z^2 = 1\big)$-en, amelynél

$X_1 : S \setminus \{(0, 0, 1)\} \to \mathbb{R}^2\,,$ $\quad X_2 : S \setminus \{(0, 0, -1)\} \to \mathbb{R}^2\,,$

és valamely $L \subset S$ görbére

$X_1(L) = \big(y = 0\big)(\subset \mathbb{R}^2)$ és $X_2(L) = \big(y = |x|^{\pi^2}\big)$?

[$\ell \le 9$].

25) Van-e olyan $\mathcal{A} := \{X_i : i \in I\}$ $\mathcal{C}^1$-atlasz S-en, hogy

valamely $K \subset S$ alakzatra ill. $i, j \in I$ indexpárra

$X_i(K)$ kör, míg $X_j(K)$ négyzet.

[Nincs].

26) Fejezzük ki az $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ $|\varphi| < \pi$, $r > 0$ relációkkal

definiált $P := (r,\varphi) : \mathbb{R}^2 \setminus [-\mathbb{R} \times \{0\}] \to \mathbb{R}^2$ polárkoordinátákkal a

$\Delta := \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ Laplace operátort.

[Kiindulás:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} ,$$
$$\frac{\partial f}{\partial(r,\varphi)} = \frac{\partial f}{\partial(r,\varphi)} \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} , \qquad \frac{\partial f}{\partial(x,y)} = \frac{\partial f}{\partial(v,\varphi)} \left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}\right]^{-1} .$$

Végeredmény: $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}$].

27) Tegyük fel, hogy $a_1, \ldots, a_n : \mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^\infty$-síma függvények, és $\mathbb{R}^n$-en

$x_i = a_i(u_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Feladat:

$\dfrac{\partial^{k_1+\cdots+k_n}}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_n^{k_n}}$ kifejezése az $(u_1, \ldots, u_n)$ koordinátarendszerben.

28) Legyen (u,v) az a koordinátarendszer $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ fölött, amelyre

$x = \dfrac{u}{u^2+v^2}$, $y = \dfrac{v}{u^2+v^2}$.

a) Az (r,φ) polárkoordinátákkal $u = \dfrac{1}{r}\cos\varphi$, $v = \dfrac{1}{r}\sin\varphi$.

b) $\Delta := \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ kifejezése (r,φ)-ben ugyanaz, mint

$\dfrac{\partial^2}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial v^2}$ kifejezése $\left(\dfrac{1}{r}, \varphi\right)$-ben.

c) $\Delta = \dfrac{1}{r^4}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial v^2}\right) = (u^2+v^2)^2\left(\dfrac{\partial^2}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial v^2}\right)$.

29) Írjuk fel az $y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2\dfrac{\partial t}{\partial y} = \dfrac{2}{x}$ differenciálegyenletet az

$u := x/y$, $v := x$, $w := zx - y$ relációkkal adott

(u,v) koordinátarendszerben a w transzformált függvénnyel.

[Kidolgozás: $x=v$, $y=\dfrac{v}{u}$, $z=\dfrac{w}{v}+\dfrac{1}{u}$.

$$\frac{\partial f}{\partial(x,y)}=\frac{\partial f}{\partial(u,v)}\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\frac{\partial f}{\partial(u,v)}\Big[\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\Big]^{-1} \;;$$

$$\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\;\frac{\partial f}{\partial y}\Big)=\Big(\frac{\partial f}{\partial u}\;\frac{\partial f}{\partial v}\Big)\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\frac{v}{4^2} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}^{-1}=\Big(\frac{\partial f}{\partial u}\;\frac{\partial f}{\partial v}\Big)\begin{pmatrix}\frac{u}{v} & -\frac{4^2}{v}\\ 1 & 0\end{pmatrix} .$$

Innen $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{u^2}{v}\dfrac{\partial f}{\partial u}$. Ezt z-re alkalmazva kétszer

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{u^2}{v}\frac{\partial(\frac{w}{v}+\frac{1}{4})}{\partial u}=-\frac{e^2}{v^2}\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{1}{v} ,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{u^2}{v}\frac{\partial(-\frac{u^2}{v^2}\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{1}{v})}{\partial u}=\frac{2u^3}{v^3}\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{u^4}{v^3}\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} .$$

Vagyis $y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2}{x}$,

$$\frac{v}{u}\Big(\frac{2u^3}{v^3}\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{u^4}{v^3}\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\Big)+2\Big(-\frac{u^2}{v^2}\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{1}{v}\Big)=\frac{2}{v} .$$

Végeredmény: $\dfrac{u^3}{v^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}=0$, $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}=0$].

30) Az $u:=e^{x+y}$, $v:=e^{x-y}$ új változókkal írjuk fel az

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ egyenletet.

[$\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=0$].

31) Milyen (x,y)-nal kifejezett egyenletnek felelnek meg a

$\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}=0$ ill. $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}=0$

egyenletek, ha $u:=e^{x+y}$, $v:=e^{x-y}$?

32) Fejezzük ki a $\Delta:=\dfrac{\partial}{\partial x^2}+\dfrac{\partial}{\partial y^2}$ Laplace operátort az

$u:=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, $v:=\dfrac{y}{x^2+y^2}$ változókkal.

[Észrevétel: $x:=\dfrac{u}{u^2+v^2}$, $y:=\dfrac{v}{u^2+v^2}$].

33) $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}=0$ milyen differenciálegyenletnek felel meg f,x,y terminusain,

ha $g:=e^f$, $u=e^{x+y}$, $v=e^{x-y}$?

34) Legyen $u:=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, $v:=\dfrac{y}{x^2+y^2}$, továbbá $x:=r\cos\varphi$, $y:=r\sin\varphi$.

Feladat: $\dfrac{\partial}{\partial(u,v)}$ kifejezése $\dfrac{\partial}{\partial(r,\varphi)}$ -vel.

35) $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ az

$u := \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$, $v := \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y$, $g := e^f$ helyettesítésekkel. [$\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0$].

36) Hajtsuk végre az $x = e^t \cos\varphi$, $x = e^t \sin\varphi$ helyettesítést a

$\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y}$ operátoron.

[$e^{-t}(\cos\varphi + \sin\varphi)\dfrac{\partial}{\partial t} + e^{-t}(\cos\varphi - \sin\varphi)\dfrac{\partial}{\partial \varphi}$].

37) N-DIMENZIÓS POLÁRKOORDINÁTÁK.

a) Az $\mathbb{R}^N$-beli pozitív] $(0,\infty)^N$ kúpon van olyan nyitott

$P := (r, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{N-1}) : (0,\infty)^N \to \mathbb{R}^N$ koordinátázás, hogy

$r > 0$, $0 < \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{N-1} < \pi/2$,

$$x_1 = r\cos\vartheta_1$$

$$x_2 = r\sin\vartheta_1\cos\vartheta_2$$

$$x_3 = r\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\cos\vartheta_3$$

$$\vdots \qquad\qquad \ddots$$

$$x_{N-2} = r\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\cdots\sin\vartheta_{N-3}\cos\vartheta_{N-2}$$

$$x_{N-1} = r\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\cdots\sin\vartheta_{N-3}\sin\vartheta_{N-2}\cos\vartheta_{N-1}\ ,$$

és $x_N = r\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\cdots\sin\vartheta_{N-3}\sin\vartheta_{N-2}\sin\vartheta_{N-1}$.

b) Adjuk meg e polárkoordinátákat a Descartes-félékkel.

[$r = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_N^2}$, $\vartheta_1 = \mathrm{sgn}(\arccos(x_1/r)$,

$\vartheta_k = \arccos\big[x_k/(r\sin\vartheta_1\cdots\sin\vartheta_{k-1})\big]$ ($k = 2, \ldots, N-1$ rekurziven)].

38) Az $x_k = r\cos\vartheta_k \prod_{j<k}\sin\vartheta_j$ $(1 \le k < N)$, $x_N = r\prod_{j=1}^N \sin\vartheta_j$

egyenletek az alábbiak közül mely $S \subset \mathbb{R}^N$ tartományon definiálnak implicit

módon koordinátázást?

a) $S := \bigl(x_1 \cdots x_N \neq 0\bigr)$, b) $S := \bigl(x_1 > 1\bigr)$,

c) $S := \bigl(x_1 < x_2 < \cdots < x_N\bigr)$, d) $S := \bigl(x_i + x_j > 0\ (1 \leq i < j \leq N)\bigr)$.

39) Tegyük fel, hogy I indexhalmaz, S_i nyitott $\subset \mathbb{R}^N$ $(i \in I)$,

$x_{ii} = \mathrm{id}_{S_i}$, $x_{ij} : S_j \to S_i$ $\mathcal{C}^\infty$ -síma $(i, j \in I)$,

$x_{ij} \circ x_{jk} = x_{ik}$ $(i, j, k \in I)$. Ekkor

a) $(i, p) \sim (j, q) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} x_{ij}(p) = q$ mellett $\sim$ ekvivalenciareláció,

b) $\sim$ ekvivalenciaoszályaiból képezhető olyan $M, \mathcal{A}$ sokaság, ahol

$\mathcal{A} := \{X_i :\ i \in I\}$ alakú, és $x_{ij} \subset X_i^{-1} \circ X_j$ $(i, j \in I)$.

Definíció. Komplexifikált koordináták $\mathbb{C}$ fölött.

A $\mathbb{C} := \{\xi + i\eta :\ \xi, \eta \in \mathbb{R}\}$ komplex számsíkon

$x, y : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $x : \xi + i\eta \mapsto \xi$, $y : \xi + i\eta \mapsto \eta$ $(\xi, \eta \in \mathbb{R})$

a *valós sík-koordináták*,

$z, \overline{z} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z : \xi + i\eta \mapsto \xi + i\eta$, $\overline{z} : \xi + i\eta \mapsto \overline{\xi + i\eta} = \xi - i\eta$ $(\xi, \eta \in \mathbb{R})$

a *komplexifikált sík-koordináták*.

Az $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvény parciális derivátjai (x, y) szerint az $\alpha \in \mathbb{C}$ helynél

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{z=\alpha} := \lim_{\substack{\zeta \to \alpha \\ y(\zeta) = y(\alpha)}} \frac{f(\zeta) - f(\alpha)}{\zeta - \alpha} \ , quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{z=\alpha} := \lim_{\substack{\zeta \to \alpha \\ x(\zeta) = x(\alpha)}} \frac{f(\zeta) - f(\alpha)}{\zeta - \alpha} \ .$$

f α -nál *komplex értelemben differenciálható* (röviden $\mathbb{C}$ *-differenciálható*), ha

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{z=\alpha} := \lim_{\zeta \to \alpha} \frac{f(\zeta) - f(\alpha)}{\zeta - \alpha} \quad \text{létezik.}$$

40) a) Ha $P : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ (x, y) -polinom, azaz $P = \sum_{k,\ell=0}^N \alpha_{k\ell} x^k y^\ell$ $(\alpha_{k\ell} \in \mathbb{R})$,

akkor P előáll $(z, \overline{z})$ -polinomként (komplex együtthatókkal).

b) $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(z, \overline{z}) = \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(x, y) + i\mathcal{P}_{\mathbb{R}}(x, y)$, ahol

$\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(z, \overline{z}) := \{\ (z, \overline{z})\text{-polinomok}\}$, $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}(x, y) := \{\text{valós } (z, \overline{z})\text{-polinomok}\}$.

c) Ha $0 \neq P \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(x, y)$, akkor P nem polinomja z -nek.

41) Legyen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Az $u := \mathrm{Re}\, f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ ill. $v := \mathrm{Im}\, f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$

valós függvényekkel

$\partial f/\partial x = \partial u/\partial x + i\partial v/\partial x\,, \qquad \partial f/\partial y = \partial u/\partial y + i\partial v/\partial y\,.$

42) a) $\dfrac{\partial}{\partial x}|z|^6 = \,?$ b) $\dfrac{\partial}{\partial y}e^{-z^2} = \,?$ c) $\dfrac{\partial}{\partial y}e^{-|z|^2} = \,?$

[a) $\dfrac{\partial}{\partial x}|z|^6 = \dfrac{\partial}{\partial x}\big(|z|^2\big)^3 = 3\big(|z|^2\big)^2\dfrac{\partial}{\partial x}|z|^2 = 3\big(|z|^2\big)^2\dfrac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2) = 6|z|^4 x$

b) $-2ze^{-z^2}$ c) $-2xe^{-|z|^2}$].

43) Vannak-e olyan $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$ konstansok, hogy $k, \ell = 0, 1, \ldots$ -re

$\left[\alpha_1\dfrac{\partial}{\partial x} + \alpha_2\dfrac{\partial}{\partial x}\right] z^k\overline{z}^\ell = kz^{k-1}\overline{z}^\ell\,, \quad \left[\beta_1\dfrac{\partial}{\partial x} + \beta_2\dfrac{\partial}{\partial x}\right] z^k\overline{z}^\ell = \ell z^k\overline{z}^{\ell-1}$?

[$\alpha_1 = \beta_1 = 1/2\,,\ \ \alpha_2 = -i/2\,,\ \ \beta_2 = i/2$].

44) A $\mathcal{C}^1$ -síma $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvény pontosan akkor $\mathbb{C}$ -differenciálható,

a) ha $\partial f/\partial x = -i\partial f/\partial y$, vagy ami ugyanaz,

b) ha $\partial x(f)/\partial x = \partial y(f)/\partial y$ és $\partial x(f)/\partial y = -\partial y(f)/\partial x\,.$

45) Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvény $\mathcal{C}^2$ -síma.

a) Ha f $\mathbb{C}$ -differenciálható, akkor $\Delta f := \partial^2 f/\partial x^2 + \partial^2 f/\partial y^2 = 0\,.$

b) Igaz-e a fordított implikáció?

[b) NEM. Pl. $\Delta x = 0$, de x nem $\mathbb{C}$ -differenciálható].

46) Ha $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ harmonikus függvény (azaz $\Delta f \equiv 0$),

akkor pontosan egy olyan $v : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ függvény van, amelyre

$v(0) = 0$ és az $f := u + iv$ függvény $\mathbb{C}$ -differenciálható.

[$v(\xi + i\eta) = \int_0^\xi u(t)\ dt + \int_0^\eta u(\xi + it)\ dt$].

47) Mely $\mathbb{C}$ -differenciálható $f : (x > 0) \to \mathbb{C}$ függvény valós része

$\log|z|^2$?

48) Mely $\mathbb{C}$ -differenciálható $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvény valós része

$x^2 - y^2 + y$?

49) Van-e olyan $v : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ függvény, amellyel az

$f := x/(x^2 + y^2) + iv$ függvény $\mathbb{C}$ -differenciálható?

[f $\mathbb{C}$ -differenciálható $\Rightarrow$ $u = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ mellett

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \; , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2} \; .$$

$$v = \int \frac{\partial v}{\partial x}\, dx + C(y) = -\frac{y}{x^2+y^2} + C(y) \; ,$$ amit y szerint differenciálva

$$-\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} + C'(y) = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \; .$$

Innen $C'(y) = 0$, $\Rightarrow C \equiv \text{const.}$ $\Rightarrow v = -y/(x^2+y^2) + \text{const.}$

Tehát $f = 1/z + \text{const.}$].

50) Akármilyen harmonikus $u : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ függvényhez

van-e olyan harmonikus $v : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, hogy

$u + iv$ $\mathbb{C}$ -differenciálható legyen?

[Nem. Ellenpélda $u := \log |z|^2$].

51) Legyen $M := \mathbb{R} \cup \{0'\}$ ellátva a következő $\mathcal{U}$ topológiával:

$$\mathcal{U}_x := \big\{ (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cup S : \varepsilon > 0,\ S \subset M \big\} \qquad (x \in \mathbb{R}) \, ,$$

$$\mathcal{U}_{0'} := \big\{ (-\varepsilon, 0) \cup \{0'\} \cup (0, \varepsilon) \cup S,\ S \subset M \big\} \, .$$

Legyen $X : \mathbb{R} \ni \xi \mapsto \xi$, $X' : (-\infty) \cup \{0'\} \cup (0,\infty) \mapsto [\xi$ ha $x \in \mathbb{R}$, $0'$ ha $\xi = 0']$.

Ekkor X, X' M-et lefedő két lokális koordinátázás, és $X' \circ X^{-1} = X \circ (X')^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

6. MÉRTÉK ÉS INTEGRÁL

1) Az alábbi $\mathcal{T}$ halmazcsaládok közül melyek által generált $\mathbb{R}^2$ -beli σ -algebra egyezik meg $\mathbb{R}^2$ Borel halmazaival?

a) $\mathcal{T} := \{\text{nyitott körlapok}\}$; b) $\mathcal{T} := \{[k,k+1]\times[\ell,\ell+1] :\ k,\ell\in\mathbb{Z}\}$;

c) $\mathcal{T} := \{[p,p+1]\times[q,q+1] :\ p,q\in\mathbb{Q}\}$; d) $\mathcal{T} := \{(0,0)\text{-környezetek}\}$;

e) $\mathcal{T} := \{\big((x-p)^2+(y-q)^2<1\big) :\ p,q\in\mathbb{Q}\}$;

f) $\mathcal{T} := \{[k/2^n,(k+1)/2^n]\times[\ell/2^n,(\ell+1)/2^n] :\ k,\ell,n\in\mathbb{Z},\ n>0\}$;

[a)c)e)f)].

2) Legyen $\Omega,\mathcal{A},\mu$ (pozitív) mértéktér,

$f:\Omega\to\mathbb{R}$ $\mathcal{A}$ -mérhető, μ -integrálható függvény.

a) Ha $f>0$, akkor az

$\widetilde{F}(y) := \mu\big\{\omega :\ f(\omega)\ge y\big\}$ $(y\in\mathbb{R})$ eloszlásfüggvénnyel

$$\int f\,d\mu = \lim_{\infty>y_1>\cdots y_n>0}\sum_{i=1}^{n-1} y_i\big[\widetilde{F}(y_{i+1})-\widetilde{F}(y_i)\big]$$

ahol a határérték a beosztás végtelen finomításával értendő.

b) $\mu(\Omega)<\infty$ esetén minden $\varepsilon>0$ mellett

van olyan $\cdots<y_{-2}<y_{-1}<y_0<y_1<y_2<\cdots$ sorozat, amelyre

bármely $\eta_k\in[y_k,y_{k+1}]$ $(k=0,\pm1,\ldots)$ mellett az

$F(y) := \mu\big\{\omega :\ f(\omega)<y\big\}$ $(y\in\mathbb{R})$ eloszlásfüggvénnyel

$$\Big|\int f\,d\mu - \sum_{k=-\infty}^{\infty}\eta_k[F(y_{k+1})-F(y_k)]\Big| < \varepsilon\,.$$

3) a) $\max\Big\{\sum_{k=1}^N \frac{1}{N}x_k^2 - \big(\sum_{k=1}^N \frac{1}{N}x_k\big)^2 :\ |x_1|,\ldots,|x_N|\le 1\Big\} = ?$

b) Legyen $\mathcal{A}$ σ -algebra egy Ω alaphalmazon.

$\max\big\{\int\big[f-(\int f\,d\mu)\big]^2 :$ μ mérték $\mathcal{A}\to\mathbb{R}_+$, $\mu(\Omega)=1$,

$f:\Omega\to\mathbb{R}$ $\mathcal{A}$-mérhető, $|f|\le 1$ $\Big\} = ?$

c) Vezessük le röviden b) eredményét a) alpján.

4) Hölder-egyenlőtlenség integrálokra.

Legyen $X,\mathcal{A},\mu$ mértéktér, $p,q>1$ pedig olyan számok, hogy $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$.

Ekkor az $\mathcal{A}$-mérhető $f,g\ge 0$ függvényekre

$\int fg\,d\mu \le \big[\int (f)^p\,d\mu\big]^{1/p}\big[\int |g|^q\,d\mu\big]^{1/q}$.

[Kiindulás: a véges-dimenziós $\sum_{k=1}^N u_k v_k \le \Big[\sum_{k=1}^N |u_k|^p\Big]^{1/p}\Big[\sum_{k=1}^N |v_k|^q\Big]^{1/q}$

Hölder-egyenlőtlenség alapján $\int fg\,d\mu \le \big[\int (f)^p\,d\mu\big]^{1/p}\big[\int |g|^q\,d\mu\big]^{1/q}$

valahányszor $f=\sum_{k=1}^N u_k 1_{A_k}$, $g=\sum_{k=1}^N v_k 1_{A_k}$,

$A_1,\ldots,A_N$ diszjunkt $\in\mathcal{A}$ és $\mu(A_1),\ldots,\mu(A_N)$ egész számok

Innen először a $\mu(A_1),\ldots,\mu(A_N)\in\mathbb{Q}$, majd a $\mu(A_1),\ldots,\mu(A_N)\in\mathbb{R}$

esetekre következtetük].

5) Legyen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ folytonos függvény, μ Borel mérték $\mathbb{R}$-en, és

$F(x) := \int f(x+t)\,d\mu(t)$.

a) Ha $\mu(\mathbb{R})=1$, és f korlátosan differenciálható,

akkor F szintén korlátosan differenciálható.

b) Adjunk meg olyan μ Borel mértéket és $\mathcal{C}^1$-síma f függvényt, hogy

F mindenütt jól-definiált, de nem midenütt differenciálható legyen.

c) Ha $\mu\big(|x|\ge 1\big)=0$, $\mu[-1,1]<\infty$ és $f\in\mathcal{C}^\ell(\mathbb{R},\mathbb{R})$,

akkor $F\in\mathcal{C}^\ell(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

d) Ha $\mu[-n,n]<\infty$ $(n=1,2,\ldots)$, $f\in\mathcal{C}^\ell(\mathbb{R},\mathbb{R})$ és $f\big(|x|\ge 1\big)=0$,

akkor $F\in\mathcal{C}^\ell(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

[b) Pl. $\mu(A) := \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} 1_A(n)$, $f(x) := \sin e^x$].

6) Legyen μ Borel mérték $\mathbb{R}^N$-en, $f\in\mathcal{C}^\ell(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$, és

$F(x) := \int f(x+t)\ d\mu(t) \quad (\, x := (x_1,\ldots,x_N)\,)\,.$

a) Ha $\mu\big(\|x\| \ge 1\big) = 0$ és $\mu(\mathbb{R}^N) < \infty\,,$ akkor $F \in \mathcal{C}^\ell(\mathbb{R},\mathbb{R})\,.$

b) Ha $\mu[-n,n]^N < \infty \quad (n = 1,2,\ldots)\,,\ f \in \mathcal{C}^\ell(\mathbb{R},\mathbb{R})$ és $f\big(\|x\| \ge 1\big) = 0\,,$

akkor $F \in \mathcal{C}^\ell(\mathbb{R},\mathbb{R})\,.$

7) Igaz-e, hogy ha $f : \mathbb{R}^2 \to [= 1, 1]$ korlátosan differenciálható, továbbá

μ korlátos Borel mérték $\mathbb{R}^2$-n, akkor az

$F(x) := \int f(x+t)\ d\mu(t)$ függvény differenciálható?

Definíció. Az $f, g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ Lebesgue=integrálható ($\overline{\lambda_N}$ -integrálható)

függvények *konvolucióoccja*

$f{*}g\,(x) := \int f(t)g(x-t)\ dt \quad [= \int fT^tg\ d\overline{\lambda_N}\ ,$ ahol $T^tg(x) := g(x-t)]\,.$

8) a) Mindig $f * g = g * f\,.$

b) Írjuk fel $f * g$-t a szimmetrikus

$f{*}g\,(x) = \gamma_N \int_{\{(u,v)\in\mathbb{R}^{2N}:\ u+v=x\}} f(u)g(v)\ d\mathrm{Vol}_{N-1}$

alakban. Itt $\gamma_N = ?$

9) Ha f, g Lebesgue-integrálhatók, akkor $f * g$ is az, és

$\int |f * g|\ d\overline{\lambda_N} \le\ \int |f|\ d\overline{\lambda_N}\ \int |g|\ d\overline{\lambda_N}\,.$

10) Simítás konvolucióval. Tegyük fel, hogy $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrálható függvény és $\phi \in \mathcal{C}^\ell(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})\,,$ amelyre $\phi\big(\|x\| \ge 1\big) = 0\,.$

a) Ekkor $\mathcal{C}^\ell$-síma a $\phi * f$ konvolució.

b) $[\phi * f]'_u = [\phi'_u] * f$ az irány szerinti deriváltakra.

11) Tegyük fel, hogy $f, \phi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})\,,$ továbbá

$\phi\big(\|x\| \ge 1\big) = 0$ és $\int \phi(x)\ dx = 1\,.$

Ekkor $n^N\phi(nx) * f(x) \to f(x) \quad (n \to \infty)\,.$

7. MÉRTÉK KONSTRUKCIÓJA

1) Legyen $\mathcal{T} := \{[k/2^n, (k+1)/2^n] \times [\ell/2^n, (\ell+1)/2^n] : \ k, \ell, n \in \mathbb{Z}\}$, $\tau :$ $\mathcal{T} \ni [k/2^n, (k+1)/2^n] \times [\ell/2^n, (\ell+1)/2^n] \mapsto 2^{-2n}$.

Állítás: $\overline{\tau} = \overline{\lambda_2}$ a lefedési kiterjesztésére.

2) Legyen $\mathcal{T} := \{[s, s+1] \times [t, t+1] : \ s, t \in \mathbb{R}\}$, $\tau(T) := 1 \quad (T \in \mathcal{T})$.

a) $\overline{\tau}\big(x^2 + y^2 = 1\big) = ?$ b) Melyek a $\overline{\tau}$-mérhető halmazok?

[a) =4. b) $\mathbb{R}^2, \emptyset$].

3) * Legyen $\tau : \{\text{nyitott körlapok}\} \to \mathbb{R}$, $\tau\big(|x-s|^2 + |y-t|^2 < r^2\big) := \pi r^2$ $(r, s, t \in \mathbb{R})$. Igaz-e, hogy $\overline{\tau} = \overline{\lambda_2}$?

[Igen. Használjuk a "sajt" lemmát].

4) Ha S λ_N-mérhető $\subset [0,1]^N$, akkor

$$\overline{\lambda_N}(S) = \sup\{\overline{\lambda_N}(C) : \ C \text{ kompakt} \subset S\} = \inf\{\overline{\lambda_N}(G) : \ G \text{ nyitott} \subset S\}.$$

5) Számítsuk ki az N-dimenziós egységgömb térfogatát, azaz

$\omega_N := \overline{\lambda}_N\big\{x \in \mathbb{R}^N : x_1^2 + \cdots + x_N^2 < 1\big\} = ?$

a) Az r sugarú nyitott M-dimenziós

$B_{M,r} := \{x \in \mathbb{R}^M : \ x_1^2 + \cdots + x_M^2 < r^2\}$ gömbökkel

$$\bigcup_{k=1}^n \big[B_{N-2,k/n} \setminus B_{N-2,(k-1)/n}\big] \times B_{2,\sqrt{1-(k/n)^2}} \subset B_{N,1} \subset$$
$$\subset \bigcup_{k=1}^n \big[B_{N-2,k/n} \setminus B_{N-2,(k-1)/n}\big] \times B_{2,\sqrt{1-((k-1)/n)^2}}.$$

b) $\omega_{N+2} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \omega_N \Big[(\frac{k}{n})^N - (\frac{k-1}{n})^N\Big] \pi \Big[1 - (\frac{k}{n})^2\Big]$.

6) Mutassuk meg, hogy

$$\omega_{2k} = \frac{\pi^k}{k}, \qquad \omega_{2k+1} = \frac{2^{k+1}\pi^k}{(2k+1)!!}.$$

[$\omega_{N+2} = \omega_N \pi \int_0^1 (1 - s^{2/N})\, ds = \omega_N \pi (1 - \frac{1}{(2/N)+1})$].

7) Az eső függőlegesen esik $10\dfrac{\text{m}}{\text{sec}}$ egyenletes sebességgel;

1m^3 esőben 1 liter víz van. Mennyi eső esik 50 sec alatt egy olyan $1 \times 1 \times 1$ m-es kockára, amely vízszintesen halad, súlypontja az x tengelyen van $t(100-t)$ m-re az origótól a t sec időpillanatban, és két oldallapja merőleges az x tengelyre?

8) Mennyi annak a ”rögbilabdának a térfogata, amelynek határa egy 1 magasságú, $\sqrt{3}$ alapú körív megforgatottja az alap egyenese körül?

9) Cavalieri-elv. Ha A, B Borel $\subset \mathbb{R}^3$, és az $A^\zeta := \big((x,y,\zeta) \in A\big)$ ill. $B^\zeta := \big((x,y,\zeta) \in B\big)$ $\mathbb{R}^2$-beli halmazok egybevágók, akkor $\overline{\lambda_3}A = \overline{\lambda_3}B$.

10) Ha S Borel $\subset \mathbb{R}^N$ és $K \in \{1,\ldots,N-1\}$, akkor

$\overline{\lambda_N}S = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,\ldots,x_K)dx_1 \cdots dx_K$, ahol

$f(x_1,\ldots,x_K) := \overline{\lambda_{N-K}}\{(x_{K+1},\ldots,x_N) :\ (x_1,\ldots,x_K,x_{K+1},\ldots,x_N) \in S\}$.

11) Forgástest térfogata. Ha $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ folytonos függvény,

$\overline{\lambda_3}\big(x^2+y^2 < \Psi(z)\big) = \pi \int \Psi(z)dz$.

12) Ha $\Psi : \mathbb{R}^K \to \mathbb{R}_+$ λ_K-mérhető, és $0 < K < N$, akkor

$S := \big(x_{K+1}^2 + \cdots + x_N^2 \le \Psi(x_1,\ldots,x_K)\big)$ λ_N-mérhető $\subset \mathbb{R}^N$, és

$\overline{\lambda_N}S = \omega_{N-K} \int \cdots \int \Psi^{(N-K)/2}(x_1,\ldots,x_K)dx_1 \cdots dx_K$.

13) $\omega_N = \int_0^1 \omega_K \big[1-r^2\big]^{K/2} d\omega_{N-K} r^{N-K} \quad (0 < K < N = 2,3,\ldots)$.

14) Görbe alatti terület.

a) Legyen $f,g : [0,1] \to [0,1]$ két növő C^1-sima függvény. Ekkor a $\big\{\big(f(t),g(t)\big) :\ t \in [0,1]\big\}$ görbe alatti terület $= \int_0^1 g(t)f'(t)\,dt$.

b) Legyen $f,g : [0,1] \to [0,1]$ két növő függvény. Fejezzk ki a $\big\{\big(f(t),g(t)\big) :$

$t \in [0,1]\big\}$ görbe alatti területet f, g terminusaival.

$\big[$ a) A görbe alatti alakzat $\{(f(t),\eta):\ 0 \le t \le 1,\ 0 \le \eta \le g(t)\} = T[0,1]^2$,

ahol $T(t,s) := (f(t), sg(t))$. Használjuk a felszín-formulát.

b) $\mathrm{Vol}_2\{(f(t),\eta):\ 0 \le t \le 1,\ 0 \le \eta \le g(t)\} = \int g(t)\ df(t)\,.\big]$

15) Mennyi egy teljes ciklois-ív alatti terület? (A ciklois egy vízszintesen gördülő, 1 -sugarú kerék kezdetben legalsó pontjának pályája egy teljes fordulat alatt.)

[Az előző feladat alkalmazható $f(t) := 2\pi t - \sin 2\pi t$, $g(t) := 1 - \cos 2\pi t$ mellett. Terület $= 3\pi$.]

16) Tegyük fel, hogy $f : \overbrace{\mathbb{R}^{N-1} \times R}^{\mathbb{R}^N} \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrálható ($\overline{\lambda_N}$ -integrálható) függvény, $\alpha, \beta : \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}$ Borel-mérhető függvények. Ekkor

a) az $A := \{(u,\xi):\ u \in \mathbb{R}^{N-1},\ \alpha(u) \le \xi \le \beta(u)\rangle$ halmaz Borel-mérhető;

b) $\int_A f d\overline{\lambda_N} = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^1 f(u, (1-\xi)\alpha(u) + \xi\beta(u))\ d\xi\ d\overline{\lambda_{N-1}}(u)\,.$

17) Integrálás csillagszerű halmazon. Legyen $\rho : (0,\pi/2)^{N-1} \to [0,\infty)$ Borel-mérhető függvény, $(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{N-1})\ :\ (0,\infty)^N \leftrightarrow (0,\infty) \times (0,\pi/2)^N$ az N -dimenziós polárkoordinátázás. Fejezzük ki az

$\int_C f(r,\varphi_1,\ldots,\varphi_{N-1})\ d\overline{\lambda_N}$ integrált a csillagszerű

$C := (r < \rho(\varphi_1,\ldots,\varphi_{N-1}))$ alakzaton $\int f\psi\ d\overline{\lambda_N}$ formában.

[Az előző feladat alapján és polárkoordinátás helyettesítéssel

$\int_C f(r,\varphi_1,\ldots,\varphi_{N-1}) d\overline{\lambda_N} = \int_{[0,2\pi]^{N-1}} \int_0^1 f(\xi, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{N-1}) \times$

$\times \big[\rho^{N-1}(\vartheta_1,\ldots,\vartheta_{N-1}) \cdot \xi^{N-1} \sin^{N-2}\vartheta_1 \cdots \sin\vartheta_{N-2}\big]\ d\xi\ d\vartheta_1, \cdots, d\vartheta_{N-1}$].

18) a) $\mathrm{Vol}_4 co\{0, e_1, 2e_2, 3e_3, 4e_4\} = ?$ (jelentése: *konvex burok*).

b) $\mathrm{Vol}_N co\{\pm\alpha_k e_k :\ k = 1, \ldots, N\} = ?$

19) Ha $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Borel-mérhető függvény és S Borel $\subset \mathbb{R}^n$, akkor

$$\int_S f \, d\overline{\lambda_n} = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} 1_S(x_1, \dots, x_n) f(x_1, \dots, x_n) \, dx_1 \cdots dx_n =$$

$$= \int_{\{x_n :\ \exists\ x_1,\dots,x_{n-1} \quad (x_1,\dots,x_n)\in S\}} \int_{\{x_{n-1} :\ \exists x_1,\dots,x_{n-2} \quad (x_1,\dots,x_n)\in S\}} \cdots$$

$$\cdots \int_{\{x_2 :\ \exists\ x_1 \quad (x_1,\dots,x_n)\in S} \int_{\{x_1 :\ (x_1,\dots,x_n)\in S\}} f(x_1, \dots, x_n) \, dx_1 dx_2, \dots dx_{n-1} dx_n \,.$$

20) Legyen K konvex $\subset \mathbb{R}^3$, $f : K \to \mathbb{R}$ $\overline{\lambda_3}$-integrálható. Ekkor

$$\int_K f \, d\overline{\lambda_3} = \int_{a_3}^{b_3} \int_{a_2(x_3)}^{b_2(x_3)} \int_{a_1(x_2,x_3)}^{b_1(x_2,x_3)} f(x,y,z) \, dx \, dy \, dz \quad , \quad \text{ahol}$$

$a_3 := \inf z(K)$, $b_3 := \sup z(K)$, $z(K) = \{z(p) :\ p \in K\}$;

$a_2(\zeta) := \inf y(K(\zeta))$, $b_2(\zeta) := \sup y(K(\zeta))$, ahol

$K(\zeta) := \{p \in K :\ z(p) = \zeta\}$, $x_2 K(\xi_n) = \{x_2(p) :\ p \in K(\xi_3)\}$;

$a_1(\eta, \zeta) := \inf x(K(\eta, \zeta)$, $b_1(\eta, \zeta) := \sup x(K(\eta, \zeta))$, ahol

$K(\eta, \zeta) := \{p{\in}K :\ y(p){=}\eta, z(p){=}\zeta\}$, $x(K(\eta, \zeta)){=}\{x(p) :\ p{\in}K(\eta, \zeta)\}$.

21) Általában, ha K konvex $\subset \mathbb{R}^n$ és $f : K \to \mathbb{R}$ $\overline{\lambda_n}$-integrálható, akkor

$$\int_K f \, d\overline{\lambda_n} =$$

$$\int_{a_n}^{b_n} \int_{a_{n-1}(x_n)}^{b_{n-1}(x_n)} \cdots \int_{a_2(x_3,x_4,\dots,x_n)}^{b_2(x_3,x_4,\dots,x_n)} \int_{a_1(x_2,x_3,\dots,x_n)}^{b_1(x_2,x_3,\dots,x_n)} f \, dx_1 dx_2 \cdots dx_{n-1} dx_n \,,$$

ahol $a_n := \inf x_n K$, $b_n := \sup x_n K$, $x_n(K) = \{x_n(p) :\ p \in K\}$;

$a_{n-1}(\xi_n) := \inf x_{n-1} K(\xi_n)$, $b_{n-1}(\xi_n) := \sup x_{n-1} K(\xi_n)$, ahol

$K(\xi_n) := \{p \in K :\ x_n(p) = \xi_n\}$, $x_{n-1} K(\xi_n) = \{x_{n-1}(p) :\ p \in K(\xi_n)\}$;

$\vdots$

$a_{n-k}(\xi_{n-k+1}, \dots, \xi_n) := \inf x_{n-k} K(\xi_{n-k+1}, \dots, \xi_n)$,

$b_{n-k}(\xi_{n-k+1}, \dots, \xi_n) := \sup x_{n-k} K(\xi_{n-k+1}, \dots, \xi_n)$, ahol

$K(\xi_{n-k+1}, \dots, \xi_n) := \{p \in K :\ x_{n-k+1}(p) = \xi_{n-k+1}, \dots, x_n(p) = \xi_n\}$,

$x_{n-k+1} K(\xi_{n-k+1}, \dots, \xi_n) = \{x_{n-1}(p) :\ p \in K(\xi_{n-k+1}, \dots, \xi_n)\}$.

22) Tegyük fel, hogy $f : \mathbb{R}_+^N \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor az

$$F : (\xi_1, \ldots, \xi_N) \mapsto \int_{[0,\xi_1]\times\cdots\times[0,\xi_N]} f \, d\lambda_N$$

"primitív" függvényre $\quad \dfrac{\partial^N F}{\partial x_1 \ldots \partial x_N} = f$.

[Használjuk Fubini tételét és a Newton-Leibniz tételt].

23) Tegyük fel, hogy $F \in \mathcal{C}^N(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, és legyen $f := \frac{\partial^N}{\partial x_1 \ldots \partial x_N} F$.

Fejezzük ki az $\int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_N}^{b_N} f \, dx_N \cdots dx_1$ integrált F értékeinek

véges lineáris kombinációjaként.

[$\int_{[a_1,b_1]\times\ldots\times[a_N,b_N]} f \, d\overline{\lambda_N} = \Delta_{(b_1-a_1)e_1} \cdots \Delta_{(b_N-q_N)e_N} F(a)$,

ahol $\Delta_v F : p \mapsto F(p+v) - F(p)$, $e_i := (\delta_{i1}, \ldots, \delta_{iN})$].

24) Tegyük fel, hogy $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ és $f = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$.

Fejezzük ki az $\int_{x^2+y^2<1} f \, d\overline{\lambda_2}$ integrált $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ terminusain.

[Pl. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \Big[\frac{\partial F}{\partial x}(\xi, \sqrt{1-\xi^2}) - \frac{\partial F}{\partial x}(\xi, -\sqrt{1-\xi^2}) \Big] \, d\xi$].

25) Ha $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrálható (azaz $\overline{\lambda_N}$ -integrálható) függvény, akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ mellett van olyan korlátos halmazon kívül eltűnő $\mathcal{C}^\infty$ -síma $\phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ függvény, hogy $\int |f - \phi| \, d\overline{\lambda_N} < \varepsilon$.

[Tudjuk: van olyan λ_N -egyszerű ψ függvény, hogy $\int |f - \psi| \, d\overline{\lambda_N} < \varepsilon/2$.

Definíció szerint $\psi = \sum_{k=1}^n \alpha_k 1_{I_1^{(k)}\times\cdots\times I_N^{(k)}}$ alakú, ahol mindegyik $I_j^{(k)}$ korlátos intervallum $\mathbb{R}$ -ben. Bármely I korlátos intervallum $\subset \mathbb{R}$ -hez ill. $\eta > 0$ -hoz van olyan végtelenszer differenciálható $\varphi : \mathbb{R} \to [0,1]$ függvény, hogy

$\int |1_I - \varphi| \, d\overline{\lambda_N} < \eta$ és $\varphi(x) = 0 \quad (x \notin (\min I - \eta, \max I + \eta))$].

26) Tegyük fel, hogy $F_n : \mathbb{R} \nearrow \mathbb{R} \quad (n = 1, 2, \ldots)$ balról folytonos függvények, $F_1 \geq F_2 \geq \cdots$, és $\int_0^\infty x \, dF_1(x) \leq \int_0^\infty x \, dF_2(x) \leq \cdots \leq K < \infty$.

Igaz-e, hogy $F_n \searrow F$ esetén $\int_0^\infty x \, dF_n(x) \nearrow \int_0^\infty x \, dF(x)$?

[Ellenpélda: $F_n := \frac{1}{n}1_{(n,\infty)}$, $F \equiv 0$. $1 = \int_0^\infty x\ dF_n(x) \neq 0 = \int_0^\infty x\ dF(x)$].

27) Parciális integrálás Stieltjes mértékkel. Tegyük fel, hogy

$f, g : \mathbb{R} \nearrow \mathbb{R}$ korlátos balról folytonos függvények, és $a, b \in \mathbb{R}$. Ekkor

$f(b)g(b) - f(a)g(a) = \int_{[a,b]} f(x)\ dg(x) + \int_{[a,b]} g(x)\ df(x)$.

28) Tegyük fel, hogy $F_1, F_2, \ldots : [0,1] \nearrow [0,1]$ balról folytonos függvények,

$F_1 \geq F_2 \geq \cdots$, és $\int_0^\infty x\ dF_1(x) \leq \int_0^\infty x\ dF_2(x) \leq \cdots$.

Igaz-e, hogy $F_n \searrow F$ esetén $\int_0^1 x\ dF_n(x) \nearrow \int_0^1 x\ dF(x)$?

[Igaz. Parciális integrálással, és a Beppo Levi tétel szerint

$\int_0^1 x\ dF_n(x) = F_n(1) - \int_0^1 F_n(x)\ dx \nearrow F(1) - \int_0^1 F(x)\ dx$].

8. GEOMETRIAI MÉRTÉK

1) Tetszőleges $\alpha \geq 0$ mellett $\mathrm{vol}_\alpha[0,1] = ?$

2) Legyen X, d metrikus tér, $\gamma : [0,1] \to X$ folytonos injektív leképezés.

Ekkor $\mathrm{vol}_1\{\gamma(t) : 0 \leq t \leq 1\}$ nem más, mint a γ görbe klaszikus hossza

$(= \sup_n \sup_{1<t_0<\cdots<t_n<1} \sum_{k=1}^n d\big(\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k)\big)$).

3) Tegyük fel, hogy X, d metrikus tér, $\subset X$ és $\alpha \in \mathbb{R}$. Ekkor

$\mathrm{vol}_\alpha S \neq 0, \infty$ esetén

a) $\mathrm{vol}_\beta S = 0$ valahányszor $\beta < \alpha$,

b) $\mathrm{vol}_\gamma S = \infty$ valahányszor $\gamma < \alpha$.

4) Mindig $\mathrm{vol}_0 S = \#S$ $(= [\,S$ elemeinek a száma$])$.

Definíció. Az X, d metrikus térben az $S \subset X$ halmaz *fraktál-dimenziója*

$\dim(S) := \inf\{\alpha > 0 : \mathrm{vol}_\alpha S \neq 0\}$, $\quad \dim(\emptyset) := 0$.

5) Mindig $\mathrm{vol}_\alpha S = 0$ $(\alpha < \dim(S))$ és $\mathrm{vol}_\beta S = \infty$ $(\beta > \dim(S))$.

6) A $C := \big\{\sum_{k=1}^\infty \alpha_k/3^k : \alpha_1, \alpha_2, \ldots = 0, 2\big\}$ Cantor-halmazra

$\dim(C) = \log 2/\log 3$.

[Alapgondolat: tetszőleges n-re $C \subset C_n$, ahol C_n 2^n páronként diszjunkt $1/3^n$ hosszú intervallum uniója].

7) * $\mathrm{Vol}_{\log 2/\log 3}(\text{CANTOR HALMAZ}) = ?$

8) A Cantor halmazhoz hasonló fraktál alakban

konstruáljunk tetszőleges $0 < \alpha < 1$ dinenziós halmazt.

9) Ha $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}^N$, akkor $\dim(S \times [0,1]) = \dim(S) + 1$.

10) Legyen $\|.\|$ tetszőleges norma $\mathbb{R}^N$ -en. Igaz-e, hogy a $\|.\|$ -szerinti távolság alapján számított N -dimenziós Hausdorff mérték konstansszorosa az N -dimenziós Lebesgue mértéknek?

[Igen].

11) Mekkora a felülete a kívülről $2(R+r)$ átmérőjű $2r$ vastag autóguminak?

$\mathrm{Vol}_2 T = \,?$ ahol $T := \{p \in \mathbb{R}^3 : \ d(p,K) = r\}$ a

$K := (x^2 + y^2 = R^2, \ x = 0)$ körrel (itt $0 < r < R$).

$\Big[$ $T = F\big([0,2\pi)^2\big)$, és $\mathrm{Vol}_2 T = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Jac} F(\vartheta,\varphi)d\varphi d\vartheta$,

ahol $F : (\vartheta,\varphi) \mapsto R \begin{pmatrix} \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \cos\varphi & \cos\vartheta \\ \cos\varphi & \sin\vartheta \\ \sin\varphi & \end{pmatrix}$,

$$F' = \frac{\partial F}{\partial(\vartheta,\varphi)} = \begin{pmatrix} -\sin\vartheta(R + r\cos\varphi) & -r & \sin\varphi\cos\vartheta \\ \cos\vartheta(R + r\cos\varphi) & -r & \sin\varphi\sin\vartheta \\ 0 & r & \cos\varphi \end{pmatrix} ,$$

$$F'^{*}F' = \begin{pmatrix} (R + r\cos\varphi)^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} , \quad \mathrm{Jac} F = r(R + r\cos\varphi) \ .$$

Végeredmény: $\mathrm{Vol}_2 T = (2\pi r)(2\pi R)$ $\Big]$.

12) A 2-dimenziós polárkoordináták szerinti $K := (r < 1 + \cos\varphi)$ ún. *kardoida* szív területe $\mathrm{Vol}_2 K = \,?$

13) Ha $R : [0,2\pi) \to (0,\infty)$ Borel függvény, akkor

$\mathrm{Vol}_2\{(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi) : \ 0 \leq \varrho < R(\varphi)\} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} R(\varphi)^2 \ d\varphi$.

[Használjunk polárkoordinátás helyettesítést].

14) Tegyük fel, hogy $S \subset \mathbb{R}^2$ olyan vol_2 -mérhető halmaz, amelyet minden origóból kiinduló félegyenes egy pontban metsz. Ekkor $\mathrm{Vol}_2(S) = 0$.

[Alkalmazzuk az előző feladat állítását].

15) Hol van a $\big(0 < y = x(1-x)\big)$ parabolaív súlypontja?

16) $\mathrm{Vol}_3(\text{FORGÁSTEST}) =$

$= 2\pi \cdot d(\text{ALKOTÓ súlypontja}, \text{FORGÁSTENGELY}) \cdot \mathrm{Vol}_2(\text{ALKOTÓ})\,.$

Azaz, ha $\Psi : (a,b) \to \mathrm{I\!R}_+$ folytonos függvény, és

$S := \big(\Psi(x)^2 < y^2 + z^2,\ a < x < b\big) \subset \mathrm{I\!R}^3\,,\quad A := \big(0 < y < \Psi(x),\ a < x < b\big) \subset \mathrm{I\!R}^2\,,$

akkor

$$\mathrm{Vol}_3 S = 2\pi\Big(\textstyle\int_A y\ d\mathrm{Vol}_2\Big) \cdot \mathrm{Vol}_2 A =$$
$$= 2\pi \frac{\int_a^b \Psi(x)^2/2\ dx}{\int_a^b \Psi(x)\ dx} \int_a^b \Psi(x)\ dx = \int_a^b \Psi(x)^2/2\ dx\,.$$

17) $\mathrm{Vol}_2(\text{FORGÁSFELÜLET}) =$

$= 2\pi \cdot d(\text{ALKOTÓ súlypontja}, \text{FORGÁSTENGELY}) \cdot \mathrm{Vol}_1(\text{ALKOTÓ})\,.$

Azaz, ha $\Psi : (a,b) \to \mathrm{I\!R}_+$ $\mathcal{C}^1$-síma függvény, és

$S := \big(\Psi(x)^2 = y^2 + z^2,\ a < x < b\big) \subset \mathrm{I\!R}^3\,,\quad A := \big(y = \Psi(x),\ a < x < b\big) \subset \mathrm{I\!R}^2\,,$

akkor

$$\mathrm{Vol}_2 S = 2\pi\Big(\textstyle\int_A y\ d\mathrm{Vol}_1\Big) \cdot \mathrm{Vol}_1 A =$$
$$= 2\pi \int_a^b \Psi(x)\sqrt{1 + \Psi'(x)^2}\ dx\,.$$

18) $\mathrm{Vol}_n\big(0 \le x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n \le 1\big) = ?$

[A $\tau_k := x_k/x_{k+1}$ $(k = 1, \ldots, n;\ x_{n+1} \equiv 1)$ koordináták tetszőleges $[0,1]$-beli értéket vehetnek fel az mérendő alakzaton (n-dimenziós szimplexen), és

$x_{n-k+1} = \tau_1 \ldots \tau_k \quad (k = 1, \ldots, n)\,.$

$S_n := \big(0 \le x_1 \le \cdots \le x_n \le 1\big) = F[0,1]^n\,,$ ahol

$$F : \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \vdots \\ \tau_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \tau_1 & \cdots & \tau_{n-1} & \tau_n \\ \tau_1 & \cdots & \tau_{n-1} & \\ \vdots & & & \\ \tau_1 & & & \end{pmatrix}.$$

$$\mathrm{Vol}_n S_n = \underbrace{\int_0^1 \ldots \int_0^1}_{n} \mathrm{Jac}\ F\ \ d\tau_1 \cdots d\tau_n = \frac{1}{n!}\ \ ].$$

19) $\mathrm{Vol}_n\big(0 < x_1 < x_1^2 < x_3^3 < \cdots < x_n^n < 1\big) = ?$

20) Legyen $C := \left(|x| - \sqrt{1-x^2} \le y \le |x| + \sqrt{1-x^2}\right)$.

a) $\mathrm{Vol}_2 C = ?$

b) Adjunk meg olyan Vol_2 -tartó $T : \mathbb{R}^2 \leftrightarrow \mathbb{R}^2$ transzformációt,

amely C -t egy körbe viszi.

c) Hol van a C szív súlypontja?

[b) $T : \binom{\xi}{\eta} \mapsto \binom{\xi}{\eta - |\xi|}$.

c) $y(\text{súlypont}) = \frac{1}{\pi} \int -1^1 \int_{|x|-\sqrt{1-x^2}}^{|x|+\sqrt{1-x^2}} y \; dy \; dx = \frac{4}{3\pi}$].

21) Ha $T : \mathbb{R}^N \leftrightarrow \mathbb{R}^N$ $\mathcal{C}^1$ -síma transzformáció, amelyre a

$T(x_1, \ldots, x_K, \xi_{K+1}, \ldots, \xi_N)$ $(\xi_{K+1}, \ldots, \xi_N \in \mathbb{R}$ tetszőlegesen rögzített)

leképezések egybevágóságai $\mathbb{R}^K$ -nak (azaz távolságtartók),

akkor $\mathrm{Jac} T \equiv 1$.

22) Goulding tétele. Ha $\mathbb{R}^3$ -ban úgy mozgatunk egy 2 -dimenziós A alakzatot, hogy a súlypontjának a pályája merőleges a mindenkori helyzetére, akkor

[mozgás által besúrolt térfogat] = [súlypont pályahossza] $\times$ [A területe].

23) Tegyük fel, hogy

$s, e_1, \ldots, e_K : (a,b) \to \mathbb{R}^M$ $\mathcal{C}^1$ -síma vektorfüggvények, amelyekre

$\{e_1(t), \ldots, e_K(t)\}$ ortonormált $\subset \mathbb{R}^N$,

$0 \ne s'(t) \perp e_1(t), \ldots, e_K(t)$ $(a < t < b)$.

Legyen A nyitott $\subset \mathbb{R}^k$, amelynek a súlypontja az origóban van.

Ha az $A^t := \{s(t) + \alpha_1 e_1(t) + \cdots + \alpha_K e_k(t) : (\alpha_1, \ldots, \alpha_K) \in A\}$ $(a < t < b)$

alakzatok páronként diszjunktak, akkor

$\mathrm{Vol}_{K+1}\left(\bigcup_{t \in (a,b)} A^t\right) = \mathrm{Vol}_1 s\left((a,b)\right) \cdot \mathrm{Vol}_K A$.

24) Általánosítsuk az előbbi formulát az

$s : (a,b)^M \to \mathbb{R}^N$, $M \le N - K$ esetre.

Mi a természetes feltevés az s leképezésre?

[$\partial s/\partial t_i \perp e_1(t), \ldots, e_K(t) \qquad (i = 1, \ldots, M)$].

25) $\mathrm{Vol}_2\big\{(x,y): \ (x^2+y^2)^2 \le 2xy\big\} = ?$

[Az $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ polárkoordinátákkal az alakzaton

$r^4 \le r^2 2\sin\varphi\cos\varphi$, $r \le \sqrt{\sin 2\varphi}$. A keresett terület

$$\int\!\!\int_{(r,\varphi):\ r\le\sqrt{\sin 2\varphi}} \mathrm{Jac}\begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi\end{pmatrix} d\varphi\, dr = 2\int_0^{\pi/2}\int_0^{\sqrt{\sin 2\varphi}} r\, dr\, d\varphi = \int_0^{\pi/2} \sin 2\varphi\ d\varphi = 1 \ ].$$

26) $\mathrm{Vol}_2\big(|x|^{2/3} + |y|^{2/3} \le 1\big) = ?$

[$= 4\int_0^1 [1-x^{2/3}]^{3/2}\ dx \overset{u=1-x^{2/3}}{=} 6\int_0^1 u^{3/2}(1-u)^{1/2}\ du \overset{u=\sin t}{=}$

$= 6\int_0^{\pi/2} \sin^3 t \sin t 2\sin t\cos t dt = 3\pi/8$].

27) $\mathrm{Vol}_2\big\{(\xi,\eta): \ \sqrt[3]{|\xi|} + \sqrt[3]{|\eta|} < 1, \ \xi,\eta > 0\big\}$ $\quad$ [$= 1/20$].

28) Mennyi a $C := \big(t^2 = x^2+y^2+z^2 < 1\big)$ fénykúp-palást 3-dimenziós felszíne?

$\big[\mathrm{Vol}_3 C = 2\cdot \frac{1}{3}\mathrm{Vol}_2(x^2+y^2+z^2=1) = 8\pi/3 \ .\big]$

29) $\int_{|x|+|y|+|z|\le 1} (x^2+y^2)\ d\mathrm{Vol}_3 \ = ?$

30) Kocka tehetetlenségi nyomatéka testátlójára.

[A $[0,1]^3$ egységkockát véve,

a $\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ pont távolsága az $\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ testátló-egyenestől az

$\dfrac{1}{\sqrt3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt3}\begin{pmatrix} z-y\\ x-z\\ y-x\end{pmatrix}$ szorzatvektor hossza.

$$\Theta = \frac{1}{3}\int_0^1\int_0^1\int_0^1 [(z-y)^2 + (x-z)^2 + (y-x)^2]\ dx\ dy\ dz = \frac{1}{6} \ ].$$

31) Az N-dimenziós $[0,1]^N$ kocka tehetetlenségi nyomatéka egy testátlója körül

$N^{-1}\int_{[0,1]^N} \sum_{1\le i<j\le N} (x_i - x_j)^2\ d\mathrm{Vol}_N = ?$.

32) Mennyi a 3-dimenziós gömbfelület tehetetlenségi nyomatéka?

(Azaz $\int_{x^2+y^2+z=1}(x^2+y^2)\; d\mathrm{Vol}_2/(4\pi) = ?$)

33) Mennyi egy $\sqrt{2}$ oldalú szabályos teraéder tehetlenségi nyomatéka súlypontján és egy csúcsán átmenő tengelynél?

34) Mennyi a $H := \big(x^2 < 1,\ y^2+z^2 < 1/4\}\big)$ henger tehetetlenségi nyomatéka a z tengelyre vonatkozóan?

$[\ \int_{x=-1}^{1}\int_{r=0}^{1/2}\int_{\varphi=0}^{2\pi}[x^2+(r\cos\varphi)^2]r\,d\varphi\,dr\,dx = \pi/6\ .]$

35) Mennyi a $C := \big(\big|y-|x|\big| < \sqrt{1-x^2}\big)$ szív tehetetlenségi nyomatéka az $\big(ax+by=c\big)$ tengely körül?

36) Mennyi az 1 oldalú szabályos n-dimenziós szimplex minimális tehetetlenségi nyomatéka?

37) Adjuk meg az alábbi $S \subset \mathbb{R}^n$ alakzatok $\Theta_{ij}^{(S)} := \int_S x_i x_j\; d\mathrm{Vol}_n$ tehetetlenségi mátrixait.

a) $S := [0,1]^n$, b) $S := (0 < x_1,\ldots,x_n, x_1+\ldots+x_n < 1)$,

c) $S := (|x_1|+\ldots+|x_n| < 1)$, d) $S := (x_1^2+\ldots+x_n^2 < 1)$.

38) Legyen $u \in \mathbb{R}^n$, $\|u\|_2 = 1$. Fejezzük ki az $S \subset \mathbb{R}^n$ alakzatnak az $\mathbb{R}u$ tengely körüli tehetetlenségi nyomatékát $u, \Theta^{(S)}$ terminusaival.

39) $\mathrm{Vol}_{N-1}\big(x_1^2+\cdots+x_N^2 = 1\big) = ?$

$[\ N\omega_N\ ]$.

40) Steiner tétele. Legyen K síma határú kompakt konvex $\subset \mathbb{R}^N$. Ekkor a $K_\varrho := \{p:\ \exists\, q \in K\ \ \|p-q\| < \varrho\}$ paralleltartományokra

a) $\mathrm{Vol}_{N-1}\partial K_\varrho = \dfrac{d}{dt}\Big|_{t=\varrho} \mathrm{Vol}_N K_t \quad (\varrho > 0)$,

b) a $t \mapsto \mathrm{Vol}_N K_t$ függvény polinom $t > 0$-ra.

[A ∂K felület egy síma $T : [0,1]^{N-1} \to \mathbb{R}^N$ függvény képe. Legyen

$\widehat{T} : (0,1)^{N-1} \times (0,\infty) \to \mathbb{R}^N$ az leképezés, amelynél

$\widehat{T}(q,\varrho) := \big[p \in \mathbb{R}^N : \ \|p-q\| = \varrho < \|p-q'\| \ \ (q' \in K)\big]$.

Észrevételek: 1) $\{\widehat{T}(q,t) > \ t > 0\}$ egy q kezdőpontú félegyenes,

2) $K_t \setminus K = \big(0 < \widehat{T} < t\big)$ és $\partial K_\varrho = \big(\widehat{T} = \varrho\big)$,

3) valamely $E : (0,1)^{N-1} \to \mathbb{R}^N$ egységvektorokat felvevő függvényre

$\widehat{T}(s,t) = T(s) + tE(s)$ és $\dfrac{\partial E}{\partial s_i}, \dfrac{\partial T}{\partial s_i} \perp E(s)$ mindig,

4) $s \in (0,1)^{N-1}$-nél tetszőleges ORTONORMÁLT

$\big\{E^{(1)}(s), \ldots, E^{(N-1)}(s)\big\} \perp E(s)$ rendszerrel

$\mathrm{Jac}\widetilde{T}(s,t) = \Big|\det\Big(\langle \dfrac{\partial T}{\partial s_i} + t\dfrac{\partial E}{\partial s_i}, \ E^{(j)}(s) \ \rangle\Big)_{i,j=1}^{N-1}\Big|$.

Innen a felszín formula adja az állításokat].

41) Hol van annak az $\mathbb{R}^3$-beli ferde kúpnak a súlypontja, amelynek csúcsa $(0,0,1)$, alaplapja $\big(z = 0, \ x^8 + y^10 \le 1\big)$?

42) $\mathrm{Vol}_2\big((x+y)^3 \le xy, \ x,y \ge 0\big) = ?$

[Használjuk az $x = \lambda s$, $y = (1-\lambda)s$ helyettesítést].

43) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+xy+y^2)} dx\ dy = ?$

[$x^2 + xy + y^2 = (x,y)A\binom{x}{y}$, ahol $A := \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$.

A sajátértékei $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}$, sajátvektorai $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ \pm 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Tehát az $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ helyettesítéssel

$x^2 + xy + y^2 = u^2 + \frac{3}{2}v^2$, $\mathrm{Jac}\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = 1$,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+xy+y^2)} dx\ dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\frac{1}{2}u^2 + \frac{3}{2}v^2)} du\ dv =$$

$$= \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(s^2+t^2)} ds\ dt = \frac{2}{\sqrt{3}\pi} \ ].$$

44) * Legyen $Q : x \mapsto \langle x, Ax \rangle$, ahol A pozitív definit $\in \mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{R})$.

$\int_{\mathbb{R}^N} e^{-Q(x_1,\ldots,x_N)} dx_1 \cdots, dx_N = ?$

[Tudjuk: $\exists\, S$ felső trianguláris $\in \mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{R})$ $\quad S^*AS = I =$(egységmátrix).

$x = Su$ helyettesıtéssel $Q(Su) = u_1^2 + \cdots + u_N^2$, és $\int e^{-Q} d\mathrm{Vol}_N =$

$= \int_{\mathbb{R}^N} e^{-(u_1^2+\ldots+u_n^2)} |\mathrm{det}S|\ du_1 \cdots du_N = |\mathrm{det}S| \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du \right)^N =$

$= |\mathrm{det}S| \sqrt{\pi}^N = \dfrac{\sqrt{\pi}^N}{\sqrt{\mathrm{det}A}}$,

mivel $S^*AS = I \ \Rightarrow (\mathrm{det}S^*)(\mathrm{det}A)(\mathrm{det}S) = |\mathrm{det}S|^2 \mathrm{det}A = 1$].

45) $$\int_{x+2y+3z=6} e^{-(x^2+xy+y^+yz+z^2+xz)}\ d\mathrm{Vol}_2 = ?$$

46) $\mathrm{Vol}_2\{v \in \mathbb{R}^3 : \|v\| = 1,\ v_3 \geq h\} = ?$

[A $\quad T : \begin{pmatrix} \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$ transzformációval

$A_h = T\left([0, \arccos h] \times [0, 2\pi]\right)$, ahol $A_h := \{v \in \mathbb{R}^3 : \|v\| = 1,\ v_3 \geq h\}$.

$\mathrm{Vol}_2(A_h) = \displaystyle\int_0^{\arccos h}\int_0^{2\pi} \mathrm{Jac}(T)\ d\varphi\ d\vartheta = \int_0^{\arccos h}\int_0^{2\pi} \sin\vartheta\ d\varphi\ d\vartheta = 2\pi(1-h)$].

47) $\mathrm{Vol}_3\{x \in \mathbb{R}^4 :\ x_1^2 + \cdots + x_4^2 = 1,\ x_4 > \frac{1}{2}\} = ?$

48) a) $\mathrm{Vol}_3\left(\left[\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 2\right]^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\right) = ?$

b) $\mathrm{Vol}_3\left(\left[\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} - 2\right]^2 + x_4^2 = 1\right) = ?$

49) Az $\int_0^{\infty} \cdots \int_0^{\infty} f\ dx_1 \cdots dx_n$ kifejezésen hajtsuk végre az

$$x_1 = r\cos\vartheta_1$$

$$x_2 = r\sin\vartheta_2\cos\vartheta_2$$

$$x_3 = r\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\cos\vartheta_3$$

$$\vdots \qquad\qquad \ddots$$

$$x_{n-1} = r\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\cdots\sin\vartheta_{n-2}\cos\vartheta_{n-1}$$

$x_n = r\sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \cdots \sin\vartheta_{n-2}\sin\vartheta_{n-1}$

polárkoordinátás helyettesítést.

$$[\ \text{Jac}\ \frac{\partial(x_1\dots x_n)}{\partial(r,\vartheta_1,\dots,\vartheta_{n-1})} = \left|\det\begin{pmatrix} \cos\vartheta_1 & r\sin\vartheta_1 & 0 & \cdots \\ \vdots & * & \ddots & \cdots \\ \sin\vartheta_1\cdots\sin\vartheta_{n-1} & * & * & \cdots \end{pmatrix}\right|.$$

A determinánst kiszámolva n-szerinti indukcióval,

$\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty f\ dx_1\cdots dx_n =$

$= \int_0^\infty \int_0^{\pi/2}\cdots\int_0^{\pi/2} f(r\cos\vartheta_1,\dots)r^{n-1}\prod_{k=1}^{n-2}\sin^{n-k-1}\vartheta_k\ d\vartheta_1\cdots d\vartheta_{N-1}\ dr\ \ ].$

50) $\iint\limits_{0\le x\le y\le 1} (\frac{x+y}{2})^2(y-x)^{100}\ dx\ dy = ?$

[Használjuk az $u := (x+y)/2$, $v := y-x$ helyettesítést.

$x = v - \frac{u}{2}$, $y = v + \frac{u}{2}$, $\big(0\le x\le 1\big) = \big(0\le u\le 1,\ \frac{u}{2}\le v\le 1-\frac{u}{2}\big)$;

$\int_0^1\int_{u/2}^{1-u/2} v^2u^{100}\underbrace{\det\begin{pmatrix}1 & -1/2\\ 1 & 1/2\end{pmatrix}}_{=1}\ dv\ du = \int_0^1 \frac{(1-u/2)^3-(u/2)^3}{3}u^{100}\ du =$

$= \frac13\int_0^1[u^{100} - \frac32 u^{101} + \frac34 u^{102}]\ du = \frac13[\frac{1}{101} - \frac32\frac{1}{102} + \frac34\frac{1}{103}]\ \ ].$

51) $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-15x^2} + 6xy + 5y^2)d\lambda_2 = ?$

[$5x^2 6xy + 5y^2 = (x-y)^2 + 4(x+y)^2$. Az

$u = x-y$, $v = x+y$ helyettesítéssel a keresett integrál

$\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty e^{-(u^2 4v^2)}\left|\det\begin{pmatrix}\frac12 & \frac12\\ -\frac12 & -\frac12\end{pmatrix}\right| dudv = \frac12\int_{-\infty}^\infty e^{-u^2}du\int_{-\infty}^\infty e^{-4v^2}dv =$

$= \dfrac12\sqrt{\pi}\dfrac12\sqrt{\pi} = \dfrac{\pi}{4}\ \ ].$

52) $\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty e^{-(x^2+4xy+2y^2+4yz+z^2)}\ dx\ dy\ dz\ = ?$

53) $$\iiint\limits_{\substack{\min\{t_1,t_2\}+t_3<\max\{t_1,t_2\}\\ t_1,t_2,t_3>0}} e^{-(\lambda_1t_1+\lambda_2t_2+\lambda_3t_3)}\ dt_1\ dt_2\ dt_3 = ?$$

54) a) $\displaystyle\int_{x+y+z=0} e^{-(x^2+2y^2+3z^2)}\ d\mathrm{Vol}_2 = ?$

b) $\displaystyle\int_{x+2y+3z=6} \exp\big[-(x^2+xy+y^2+yz+z^2+zx)\big]\ d\mathrm{Vol}_2 = ?$

55) $\mathrm{Vol}_2\{v\in\mathbb{R}^4 :\ \|v\| = 1,\ v_1+v_2 = 1/4,\ |v_3| < 1/2\} = ?$

56) * Tegyük fel, hogy $K \le N$, G nyitott $\subset \mathbb{R}^K$ és $T : G \to \mathbb{R}^N$ $\mathcal{C}^1$-síma leképezés, amelyre $\operatorname{Jac} T > 0$. Ekkor az S Borel $\subset G$ halmazokra

$$\mathrm{Vol}_K T(S) = \int_S \frac{\operatorname{Jac} T(p)}{\#\{s \in S:\ T(s) = p\}}\, d\mathrm{Vol}_K(p)\,.$$

57) * Tegyük fel, hogy M N-dimenziós Riemann sokaság, $X := (x_1, \ldots, x_N)$ olyan koordinátázás rajta, amellyel az elemi ívhossz

$ds = \Big[\sum_{1\le i\le j\le N} q_{ij}\ dx_i dx_j\Big]^{1/2}$ valamilyen $g_{ij} : M \to \mathbb{R}$ függvényekkel.

(M-et metrikus térnek tekintjük, amelyen a távolság

$$d(a,b) := \inf_{\substack{p:[0,1]\to M \\ p(0)=a,\ p(1)=b}} \int_0^1 \Big[\sum_{1\le i\le j\le N} g(i,j)\frac{\partial x_i(p(t))}{\partial t}\frac{\partial x_j(p(t))}{\partial t}\Big]^{1/2} dt\,.$$

Ezzel számoljuk a Hausdorff-térfogatokat). Ekkor S Borel $\subset M$ esetén

$\mathrm{Vol}_N S = \int_{X(S)} \big|\det(g_{ij}) \circ X^{-1}\big|\ d\mathrm{Vol}_N$.

58) A Bolyai sík Poincaré-modellje. Legyen d az

$S := \big(x^2 + y^2\big) \subset \mathbb{R}^2$ körlapon a

$ds = \Big[\dfrac{(dx)^2 + (dy)^2}{1 - (x^2 + y^2)}\Big]$ elemi ívhosszal meghatározott távolság.

a) Mennyi a $\big((x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2\big) \cap S$ körív d-szerinti hossza?

b) A $(0,0)$ és $(0,r)$ pontok közti lerövidebb út d szerint is az egyenes.

c) A $z := x + iy$, $\overline{z} := x - iy$ komplexifikált koordinátákkal a

$\overline{z}, \quad ,\kappa z, \quad \dfrac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z} \qquad (|\kappa| = 1 > |\alpha|)$

képletű $S \to S$ leképezések d-szerinti izometriák.

d) Két S-beli pont között a d-szerinti legrövidebb út olyan *körön vagy egyenesen* van, amely áthalad rajtuk és az $\big(x^2 + y^2\big)$ határkört merőlegesen metszi.

e) $d\big((1/2,0),(0,1/3)\big) = ?$

f) Mennyi a $\big((x-u)^2 + (y-v)^2 < r^2\big) \cap S$ körlap d-szerinti területe?

g) Mennyi az $a, b, c \in S$ pontok közötti d-szerinti legrövidebb ívek által bezárt görbevonalú háronszög d-szerinti területe?

9. Az Euler-féle Gamma és Beta függvények

Definíció. $\Gamma(p) := \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\, dx$, $B(p,q) := \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, dx \quad (p,q>0)$.

1) $\Gamma(n) = (n-1)! \quad (n = 1, 2, \ldots)$.

2) $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

[$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\, dx \int_0^\infty y^{q-1}\, dy$.

A $\quad w = x + y \quad t = x/(x+y) \quad x = wt \quad y = (1-t)w$ helyettesítéssel

$dxdy = \left|\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(w,t)}\right| dtdw = \left|\det \begin{pmatrix} t & w \\ 1-t & -w \end{pmatrix}\right| dtdw = wt(1-t)dtdw$,

$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^\infty \int_0^\infty x^{p-1}y^{q-1}e^{-(x+y)}dxdy =$

$= \int_0^\infty \int_0^1 (wt)^{p-1}[w(1-t)]^{q-1}e^{-w}wt(1-t)dtdw =$

$= \int_0^\infty \left[w^{p-1}w^{q-1}e^{-w} \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt\right]dw =$

$= \int_0^\infty w(p+q) - 1e^{-w}dw \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt = \Gamma(p+q) \cdot B(p,q)$].

3) $\Gamma\left(n + \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{2^n}\sqrt{\pi}$

4) $B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{3}{2}\right) = ?$ 5) $B(n,q) = ?$

6) $pB(2p, 2q+1) = qB(2p+1, q)$

7) $I := \int_{-3}^3 \sqrt[4]{9 - x^2}\, du \; =?$

$\bigl[u := 3x, \quad I = \int_{-1}^1 \sqrt[4]{9(1-u^2)}\, du = 3\sqrt{3}\int_{-1}^1 (1-u)^{1/4}(1+u)^{1/4}\, du =$

$= 3\sqrt{3}B(\frac{5}{4}, \frac{5}{4}) = 3\sqrt{3}\frac{\Gamma(5/4)^2}{\Gamma(10/4)} = 3\sqrt{3}\frac{[(1/4)\Gamma(1/4)]^2}{(3/2)(1/2)\Gamma(1/2)} = \frac{1}{4}\frac{\Gamma(1/4)^2}{\sqrt{\pi}} \approx 3.211.\bigr]$

8) $\int_0^1 \sqrt{x - x^2}\, dx$ 9) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ 10) $\int_0^1 x^{10}(1-x)^{20}\, dx$

11) $\int_0^\infty x^{10}e^{-x}\, dx$ 12) $\int_0^\infty x^{10}e^{-2x}\, dx$ 13) $\int_0^\infty xe^{-x^4}\, dx$

14) $\int_0^1 \sqrt{1 - x^3}\, dx$ 15) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$ 16) $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\, dx$

17) $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos^5 x \; dx$

18) $\int_0^1 \sqrt[\beta]{1-x^\alpha} \; dx$ 19) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[\beta]{1-x^\alpha}}$ 20) $\int_0^1 x^\alpha \sqrt[\beta]{1-x^2} \; dx$

21) $\int_0^{\pi/2} \sin^\alpha x \cos^\beta x \; dx$ 22) $\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^\alpha s \; dx$ 23) $\int_0^\infty x^\alpha e^{-\beta x} \; dx$

24) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \; dx$ 25) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^2}}$ 26) $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} \; dx$

27) $\int_0^2 x^3 \sqrt{4-x^2} \; dx$ 28) $\int_0^{\pi/2} \sin^7 x \; dx$ 29) $\int_0^{\pi/2} \sqrt[3]{\sin x} \; dx$

30) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt[3]{2-x^2}}$ 31) $\displaystyle\int_{-1/2}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-\sqrt{2x+1}}}$ 32) $\displaystyle\int_{-2}^2 \frac{dx}{\sqrt{12-4x-x^2}}$

33) $\displaystyle\int_{-2}^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{12-4x-x^2}}$ 34) $\int_0^\infty \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x^2}} \; dx$ 35) $\int_0^\infty x e^{-x^3} \; dx$

36) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} e^{-\operatorname{tg} x} \; dx$ 37) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{\log x}}{x^2} \; dx$

38) $\int_0^\infty \sqrt{x^{2n+1} e^{-2x}} dx \cdot \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{\sqrt{x}} dx = n! \sqrt{n}$

39) $\int_0^a x^n \sqrt{a^2-x^2} \; dx$ 40) $\displaystyle\int_0^9 \frac{x^n}{\sqrt{a^2-x^2}} \; dx$

41) $F(x) := \int_0^x t^2 e^{-t} \; dt \qquad (x \geq 0)$ GRAFIKONJA.

42) $\int_{-\infty}^\infty e^{-(x-m)^2} \; dx + \sqrt{2} \int_{-\infty}^\infty x e^{-(x-m)^2} \; dx = 1 \qquad m = ?$

43) $\int_{-\infty}^\infty (x+4) e^{-(x-4)^2} \; dx$ 44) $\int_{-\infty}^\infty (x-2)^2 e^{-(x-2)^2/4} \; dx$

45) $\int_{-\infty}^\infty (x-1) e^{-\frac{1}{3}(x^2-6x+10)} \; dx$

46) $\int_{-\infty}^\infty |x| e^{-x^2} \; dx$ 47) $\int_{-\infty}^\infty |x| e^{-x^2/3} \; dx$

48) $\int_{-\infty}^\infty x^{2k} e^{-x^2/2} \; dx$ 49) $\int_{-\infty}^\infty x^{2k+1} e^{-x^2/2} \; dx$

50) $\int_0^\infty x e^{-(\log x - 2)^2} \; dx$ 51) $\int_1^\infty \frac{\log^2 x}{x} e^{-(\log^2 x)/4} \; dx$

52) $\int_1^\infty e^{2+2x-x^2}\ dx$ 53) $\int_{-\infty}^\infty 2^{1-x^2}\ dx$

54) $$\int_{-\infty}^{\infty}(x-1)e^{-\frac{1}{3}(x^2-6x+10)}dx = ?$$

$$[\ \int_{-\infty}^{\infty}(x-1)e^{-\frac{1}{3}(x^2-6x+10)}dx =^{y=x-3}=$$

$$e^{-\frac{1}{3}}\int_{-\infty}^{\infty} y\ \underbrace{e^{-y^{2/3}}}_{\text{páratlan}}\ dy + 2e^{-\frac{1}{3}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^{2/3}}dy\ =^{t=y^{2/3},\ y=\sqrt{3}t^{1/2},\ dy=\frac{\sqrt{3}}{2}t^{-1/2}dt}$$

$$= 0 + 2e^{-\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}2\int_0^\infty t^{-1/2}e^{-t}dt = 2e^{-\frac{1}{3}}\sqrt{3}\Gamma(\frac{1}{2}) = 2e^{-\frac{1}{3}}\sqrt{3\pi}\ \ ].$$

55) $$\Gamma(p) = \int_0^\infty t^{p-1}e^{-t}\ dt = \lim_{m\to\infty}\int_0^m t^{p-1}\left(1-\frac{t}{m}\right)^m\ dt$$

[Hasznájuk Lebesgue konvergencia-tételét].

56) $$\int_0^m t^{p-1}\left(1-\frac{t}{m}\right)^m\ dt = \frac{1}{p}\frac{1}{\left(1+\frac{p}{1}\right)}\frac{1}{\left(1+\frac{p}{2}\right)}\cdots\frac{1}{\left(1+\frac{p}{m}\right)}m^p$$

$$[\ \int_0^m t^{p-1}\left(1-\frac{t}{m}\right)^m\ dt =$$

$$= \frac{t^p}{p}\left(1-\frac{t}{m}\right)^m\Big|_0^m - \int_0^m \frac{t^p}{p}m\left(1-\frac{t}{m}\right)^{m-1}\frac{1}{m}\ dt =$$

$$= -\int_0^m \frac{t^p}{p}\frac{m}{m}\left(1-\frac{t}{m}\right)^{m-1}\ dt =^{\text{PARCIÁLIS INT.}}=$$

$$= | = \int_0^m \frac{t^{p+1}}{p(p+1)}\frac{m(m-1)}{m-m}\left(1-\frac{t}{m}\right)^{m-2}\ dt = \cdots =$$

$$= \int_0^m \frac{t^{p+m-1}}{p(p+1)\cdots(p+m-1)}\frac{m(m-1)\cdots 1}{mm\cdots m}\ dt\,;$$

$$\int_0^m t^{p-1}\left(1-\frac{t}{m}\right)^m\ dt = \frac{m!m^{-m}}{p(p+1)\cdots(p+m)}m^{p+m}\ \ ].$$

57) $$\Gamma(p) = \frac{1}{p}\prod_{m=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{p}{m}\right)^{-1}e^{\frac{p}{m}}\right]\cdot e^{p\cdot c}$$

a $c := \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\ldots+\frac{1}{m}\right)-\log m\right]$ Euler-Mascheroni konstanssal.

$$[\ \frac{1}{p}\frac{1}{\left(1+\frac{p}{1}\right)}\frac{1}{\left(1+\frac{p}{2}\right)}\cdots\frac{1}{\left(1+\frac{p}{m}\right)}m^p =$$

$$= \left[p\left(1+\frac{p}{1}\right)e^{-\frac{p}{1}}\left(1+\frac{p}{2}\right)e^{-\frac{p}{2}}\cdots\left(1+\frac{p}{m}\right)e^{-\frac{p}{m}}\cdot e^{p(\log m-1-\frac{1}{2}-\cdots-\frac{1}{m})}\right]^{-1}\ \ ].$$

10. ELŐJELES MÉRTÉKEK

1) Legyen $\Omega, \mathcal{A}, \mu$ pozitív mértéktér, $f \in L^1(d\mu)$, és $\nu : \mathcal{A} \ni A \mapsto \int_A f\, d\mu$.

a) ν korlátos változású előjeles mérték.

b) Adjuk meg explicite a $|\nu|$ ill. ν_+ mértékeket.

c) Tegyük fel, hogy $mu(\Omega) < \infty$, és legyen $\gamma \in \mathbb{R}$.

Adjunk meg μ, f, γ terminusain egy maximális pozitív halmazát az $A \mapsto \int_A f\, d\mu - \gamma\mu(A)$ előjeles mértéknek.

[b) $|v|(A) = \int_A |f| d\mu)$, $v_+(A) = \int_A f_+ d\mu$; c) $\big(f \geq \gamma\big)$].

2) Legyen ν az a korlátos változású előjeles Borel mérték $\mathbb{R}$-en, amelyre

$\nu([a,b]) := \phi(b) - \phi(a) \quad (a < b)$, ahol $\phi(x) := \arccos\cos x$.

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x}\, d\nu(x) = ?$

3) Tegyük fel, hogy $a_1 < b_1, a_2 < b_2, \ldots$ és $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| < \infty$. Legyen

$$\phi := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k 1_{[a_k, b_k)}, \quad \nu[a,b) := \phi(b) - \phi(a) \quad (a < b),$$

ahol ν korlátos változású előjeles Borel mérték $\mathbb{R}$-en.

a) $\nu\{a_k\} = ?$ b) $\nu\{b_k\} = ?$ c) $c \notin \bigcup_{k=1}^{\infty} \{a_k, b_k\}$-ra $\nu\{c\} = ?$

d) $\int_0^{\infty} e^{-x}\, d\nu(x) = ?$

4) Legyen $L_{a,b}^{c,d} := \Big\{\big(t, c\frac{b-t}{b-a} + d\frac{t-a}{b-a}\big) : \ t \in [a,b]\Big\} \quad (a,b,c,d \in \mathbb{R},\ a < b)$

az a-nál c-t, b-nél d-t felvevő elsőfokú függvény grafikonjának $[a,b]$ feletti része; ν az a véges értékű előjeles mérték, amelynek értelmezési tartománya

$\mathrm{dom}\nu := \Big[\Big\{\bigcup_{k=0}^{\infty} L_{a_k,b_k}^{c_k,d_k} : \sum_{k=1}^{\infty} |d_k - c_k| < \infty\Big\}$ generálta lokális σ-algebra$\Big]$,

ahol $\nu\big(L_{a,b}^{c,d}\big) := d - c \quad (a,b,c,d \in \mathbb{R},\ a < b)$.

A következő $S \subset \mathbb{R}^2$ halmazok közül melyekre áll $S \in \mathrm{dom}\nu$?

a) $S := \big(x^2 + y^2 = 1\big)$; b) $S := \big(y = 3x + 1\big)$; c) $S := \big(y = 2\big)$;

d) $S := \big(x = 1\big)$; e) $S := \big(x^2 + y^2 = 1,\ x \in \mathbb{Q}\ \big)$;

f) $S := \big(y = x \in A\big) \in \mathrm{dom}\nu \iff A$ Borel $\subset \mathbb{R},\ \mathrm{Vol}_1(A) < \infty$.

5) RADON–NIKODÝM TÉTEL. Tegyük fel, hogy

$\mathcal{A}$ σ-algebra az Ω téren, $\mu, \nu : \mathcal{A} \to [0,1]$ korlátos pozitív mértékek.

Tetszőleges $\gamma \in \mathbb{R}$ mellett legyen

$A_\gamma \in \mathcal{A}$ maximális pozitív mértékű halmaza a

$\nu - \gamma{\cdot}\mu$ $(: A \mapsto \nu(A) - \gamma{\cdot}\mu(A))$ korlátos változású előjeles mértéknek.

Legyen $S := \bigcap\limits_{k,n=1}^{\infty} A_{k/2^n}$, és $f_n := \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n} 1_{A_{k/2^n}}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

a) $f_n(S) = \infty$, $f_n\big(\big[\bigcap_{i \le k} A_{i/2^n}\big] \setminus \big[\bigcap_{i<k} A_{i/2^n}\big]\big) = k/2^n$.

b) $\bigcap_{i=1}^{k} A_{i/2^n}$ maximális pozitív mértékű halmaza $\mu - (k/2^n)\mu$ -nek.

c) Ha $A \subset \Omega \setminus S$, akkor $\int_A f_n\, d\mu \le \nu(A) \le \int_A f_n\, d\mu + (1/2^n)$.

d) $f_1 \le f_2 \le \cdots$, és $f := \lim_{n\to\infty} f_n$ mellett

$\int_A f\, d\mu = \nu(A)$ valahányszor $A \subset \Omega \setminus S$.

e) Ha $\mu(S) = 0$, akkor $d\nu = f\, d\mu$ [azaz $\nu(A) = \int_A f\, d\mu$ $(A \in \mathcal{A})$].

f) [Radon–Nikodým tétel].

$\big(\exists\ f : \Omega \to \mathbb{R}\quad d\nu = f\, d\mu\big) \iff \big(\nu(S') = 0 \Rightarrow \mu(S') = 0\quad (S' \in \mathcal{A})\big)$.

11. DIFFERENCIÁLFORMÁK $\mathbb{R}^N$ -EN

Ebben a fejezetben,

ha V véges-dimenziós vektortér, a $\phi_1, \ldots, \psi_k \in V^*$ lineáris funkcionálokra

$\phi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_K : (\underbrace{v_1}_{\in V}, \ldots, \underbrace{v_k}_{\in V}) \mapsto \det\bigl(\psi_i(v_j)/bigr)_{i,j=1}^K$.

$\mathbb{R}^N$ -en $x_1, \ldots, x_N \in (\mathbb{R}^N)^*$ az

$x_i : \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \mapsto \xi_i$ a koordinátafunkcionálok.

$dx_i : \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^N)^*$

$$p \mapsto x_i \ \bigl(= [v \mapsto \underbrace{v_i}_{x_i(v)}]\bigr) ,$$

$dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_K} : p \mapsto \bigl[dx_{i_1}(p)\bigr] \wedge \ldots \wedge \bigl[dx_{i_K}(p)\bigr]$.

[Megjegyzés: $x_{i_1} \wedge \ldots \wedge, x_{i_k}$ konstans $\mathbb{R}^N \to \bigwedge^k (\mathbb{R}^N)^*$ leképezés].

ω $\mathcal{C}^\ell$ -síma k -adrendű differenciálforma $\mathbb{R}^N$ -en $\overset{\text{det}}{\Longleftrightarrow}$

$\omega \in \mathcal{C}^\ell \Bigl(\mathbb{R}^N, \bigwedge^K (\mathbb{R}^N)^*\Bigr)$, azaz

$(*) \quad \omega = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le N} g_{i_1,\ldots,i_K} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_K}$

valamely $\mathcal{C}^\ell$ -síma $g_{i_1,\ldots,i_K} > \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ függvényekkel. Ekkor

$d\omega = \sum_{j=1}^N \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le N} \dfrac{\partial g_{i_1,\ldots,i_K}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_K}$

$(k+1)$ -edrendű $C^{\ell-1}$ -síma differenciálforma $\mathbb{R}^N$ -en.

Az $\mathbb{R} \equiv \bigwedge^0 (\mathbb{R}^N)^*$ azonosítással

a $\mathcal{C}^1$ -síma $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ függvények 0 -formák.

1) Ha $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, $df = ?$

[$df : p \mapsto \sum_{j=1}^N \dfrac{\partial f}{\partial x_j} dx_j(p)$].

2) Ha $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, akkor $df : \mathbb{R}^N \ni p \mapsto [v \mapsto f'_v(p)]$.

3) A $(*)$ differenciálformára $d\omega(p) : (u, v_1, \ldots, v_k) \mapsto ?$

4) Az $x_1, \ldots, x_4 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ koordinátafüggvényeket $\mathbb{R}^4$ fölötti lineáris funkcionáloknak felfogva, mely függvény a következő külső szorzat:

$(x_1+2x_2+3x_3+4x_4)\wedge(5x_1+6x_2+7x_3+8x_4)\wedge(9x_1+10x_2+11x_3+12x_4)$.

[Emlékeztető: $x_i \wedge x_j \wedge x_k : (\mathbb{R}^4)^3 \to \mathbb{R}$,

$x_i \wedge x_j \wedge x_k(u,v,w) = \det \begin{pmatrix} u_i & v_i & w_i \\ u_j & v_j & w_j \\ u_k & v_k & w_k \end{pmatrix}$].

5) $\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix} \right\| = ?$

[$\left[\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix} \right]^{1/2}$].

6) $de^{-(x^2+y^2)} = ?$ [$-2e^{-(x^2+y^2)}(x\,dx + y\,dy)$].

7) Tetszőleges ω $\mathcal{C}^1$-differenciálformára

$d(\omega\ dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}) = (d\omega) \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$.

8) Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^2$-síma függvény.

a) $d^2 f = 0$, b) $d^2[f dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_1}] = (d^2 f) \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_1} = 0$.

c) [a)+b)] $\Rightarrow$ $d^2\omega = 0$ tetszőleges ω differenciálformára.

9) Gradiens, rotáció, divergencia.

Az $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ skalár- ill. $V = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektorfüggvényre a

$\bigtriangledown := \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial x \end{pmatrix}$ formális vektorral

$\bigtriangledown U = \begin{pmatrix} \partial U/\partial x \\ \partial U/\partial y \\ \partial U/\partial x \end{pmatrix}$ az U függvény *gradiens*e,

$\bigtriangledown \times V = \begin{pmatrix} \partial V_z/\partial y - \partial V_y/\partial z \\ \partial V_x/\partial z - \partial V_y/\partial x \\ \partial V_y/\partial x - \partial V_x/\partial y \end{pmatrix}$ a V vektorfüggvény *rotáció*ja,

$\langle \nabla, V\rangle = \partial V_x/\partial x + \partial V_y/\partial y + \partial V_z/\partial z \quad V$ *divergenciá*ja.

Hol jelennek meg ezek komponensei a

$dU\,, \quad d[V_x dy\wedge dz + V_y dz\wedge dx + V_z dx\wedge dy]\,, \quad d[V_x dx + V_y dy + V_z dz]$

külső deriváltakban?

10) A $d^2 \equiv 0$ azonosságból vezessük le a

ROTÁCIÓ $\circ$ GRADIENS $= 0$, DIVERGENCIA $\circ$ ROTÁCIÓ $= 0$ azonosságokat.

11) Tekintsük a fényt leíró töltés- és árammentes Maxwell-egyenleteket:

(1) $\nabla B = 0\,,\ \dot B + \nabla \times E = 0\,,$

(2) $\nabla E = 0\,,\ \dot E - c^2\nabla \times B = 0\,.$

Itt $E = (E_x, E_y, E_z)$, ahol $E_q = E_q(x,y,z,t) : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ $(q = x,y,z)$,

$\dot E = \frac{\partial}{\partial t}E\,, \quad \nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ (és analóg jelölések B-vel).

Adjunk meg olyan 2-rendű ω ill. $\widetilde\omega$ differenciálformákat $\mathbb{R}^4$-en, amelyekkel

$d\omega = 0 \iff (1)$ ill. $d\widetilde\omega = 0 \iff (2)$.

[$\omega := B_x dy\wedge dz + B_y dz\wedge dx + B_z dx\wedge dy + E_x dx\wedge dt + E_y dy\wedge dt + E_z dz\wedge dt\,.$

Ekkor $d\omega = [\nabla B] dx\wedge dy\wedge dz + [\dot B + \nabla E]_z dt\wedge dx\wedge dy +$

$+ [\dot B + \nabla E]_y dt\wedge dz\wedge dx + [\dot B + \nabla E]_x dt\wedge dy\wedge dz\,;$

$\widetilde\omega := E_x dy\wedge dz + E_y dz\wedge dx + E_z dx\wedge dy - c^2 B_x dx\wedge dt - c^2 B_y dy\wedge dt - c^2 B_z dz\wedge dt.$]

12) Ha $x_i = f_i(t_1,\dots,t_n)$ $(i = 1,\dots,n)$, akkor

$dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n = \det\big(\partial f_i/\partial t_j\big)_{i,j=1}^n\, dt_1\wedge\ldots\wedge dt_n\,.$

13) Az $m \neq n$ esetre is adjuk meg $dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n$ kifejezését,

ha $x_i = f_i(t_1,\dots,t_m)$ $(i = 1,\dots,n)$.

14) Az $x_1 = r\cos\vartheta_1$

$x_2 = r\sin\vartheta_1\cos\vartheta_2$

$x_3 = r \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \cos\vartheta_3$

$x_4 = r \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \sin\vartheta_3 \cos\vartheta_4$

$x_5 = r \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \sin\vartheta_3 \sin\vartheta_4$

5 -dimenziós polárkoordinátákkal adjuk meg

$dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k \quad (k = 1, \ldots, 5)$ kifejezéseit.

15) Adjuk meg $\omega \in \mathbb{R}^4 \wedge \mathbb{R}^4$ -et úgy, hogy $\omega \wedge \omega \neq 0$ legyen.

16) Legyen $A = \big(a_{ij}\big)_{i,j=1}^{4} \in \mathrm{Mat}(4, 4, \mathbb{R})$, $A^* = -A$, és

$\omega := \sum_{i,j=1}^{4} a_{i,j}\ x_i \wedge x_j$.

Állítás: $\omega \wedge \omega = 0 \iff \det A = 0$.

17) $\int_Q d\omega = ?$ ahol $\omega := x\,dy + y\,dz + z\,dx$ és

$Q : (0, \pi)^2 \ni (t_1, t)2) \mapsto (\cos t_1 \cos t_2, \cos t_1 \sin t_2, \sin t_1)$.

18) Számítsuk ki az $\int_0^\infty \int_0^\infty (x + y)^n e^{-(x+y)}\ dx\ dy$ integrált $\inf_Q f\ dx \wedge dy$

alakban, az $x = \lambda u$, $y = (1 - \lambda)u$ helyettesítésnek megfelelő

$Q : [0, 1] \times [0, \infty) \to \mathbb{R}^2$, $Q(\lambda, u) := (\lambda u, (1 - \lambda)u)$ felülettel.

[$\int_{\lambda=0}^{1} \int_{u=0}^{\infty} u^{n+1} e^{-u}\ d(\lambda u) \wedge d((1 - \lambda)u)$.]

19) $\int_Q d\omega = ?$ ahol $\omega := x^3 dy + y^3 dz + z^3 dx$,

$Q : (0, \pi/2)^2 \ni (t_1, t_2) \mapsto (\cos t_1 \cos t_2, \cos t_1 \sin t_2, \sin t_1)$.

$\big[\int_Q d\omega = 3 \int_Q (x^2 dx \wedge dy + y^2 dy \wedge dz + z^2 dz \wedge dx) = 3 \cdot 3 \int_Q z^2 dz \wedge dx =$

$= 9 \int_{t_1=0}^{\pi/2} \int_{t_2=0}^{\pi/2} \sin^2 t_1 \cos t_1\, dt_1 \wedge [\cos t_1 (-\sin t_2)\, dt_2 + \ldots dt_1] =$

$= 9 \int_{t_1,t_2=0}^{\pi/2} \sin^2 t_1 \cos^2 t_1 (-\sin t_2)\, dt_1\, dt_2 =$

$= -9 \int_{t_1=0}^{\pi/2} \sin^2 t_1 \cos^2 t_1\, dt_1 \int_{t_2=0}^{\pi/2} \sin t_2 - 9\pi/1\, dt_2 = -9\pi/16$.$\big]$

20) Legyen $Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_K, b_K] \to \mathbb{R}^N$ K -dimenziós $\mathcal{C}^1$ -kocka, és

$\omega := \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_K \le N} f_{i_1,\ldots,i_K}\ dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$ folytonos differenciálforma.

Mutassuk meg: $\int_Q \omega$ kiszámítható $\int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_k}^{b_k} dt_k \cdots dt_1$ integrálással,

amelyet az ω forma $x_1 = Q_1(t_1, \ldots, t_K)$, $\ldots$, $x_N = Q_N(t_1, \ldots, t_K)$

formális helyettesítettjén hajtunk végre:

$$\int_Q \omega = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_K}^{b_K} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_K \le N} f_{i_1,\ldots,i_k}\big(Q_1(t_1, \ldots, t_K), \ldots, Q_N(t_1, \ldots, t_K)\big) \times$$
$$\times\, dQ_1(t_1, \ldots, t_K) \wedge \ldots \wedge dQ_K(t_1, \ldots, t_K) =$$
$$= \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_K}^{b_K} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_K \le N} g_{i_1,\ldots,i_k} dt_{i_1} \wedge \ldots \wedge dt_{i_K} =$$
$$= \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_K}^{b_K} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_K \le N} g_{i_1,\ldots,i_k}\ dt_K \cdots dt_1$$

valamely $g_{i_1,\ldots,i_K} : \mathbb{R}^K \to \mathbb{R}$ függvényekkel.

21) Az előző levezetésnél pontosan

$$g_{i_1,\ldots,i_k} = f_{i_1,\ldots,i_k}\big(Q_1(t_1, \ldots, t_K), \ldots, Q_N(t_1, \ldots, t_K)\big) \det\Big[\frac{\partial Q_{i_k}}{\partial t_\ell}\Big]_{k,\ell=1}^{K}.$$

22) Legyen $\quad Q : [-1,1]^3 \to \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} \mapsto (t_k^3 : k = 1,2,3)$.

$\int_{\partial Q}\big(x^3 dy_1 dz + y^3 dz \wedge dx + z^3 dx \wedge dy\big) = ?$

23) Az 1-dimenziós $\mathbb{R}^2$-beli $Q_{\omega,\varphi} : (0,1) \ni t \mapsto \big(\cos(\omega t + \varphi), \sin(\omega t + \varphi)\big)$

$(\omega, \varphi \in \mathbb{R})$ $\mathcal{C}^\infty$-kockák közül

a) melyek regulárisak,

b) mely párok ekvivalensek,

c) mely párok ellentétes irányításúak,

d) mely párok egyenlők lánc-értelemben, azaz mikor áll $\widetilde{Q_{\omega,\varphi}} = \widetilde{Q_{\overline{\omega},\overline{\varphi}}}$?

[a) $0 < |\omega| < 2\pi$; b) $\omega = \overline{\omega}$ és $\overline{\varphi} - \varphi \in 2\pi\mathbb{Z}$;

c) $\omega = -\overline{\omega}$ és $\overline{\varphi} - \varphi \in 2\pi\mathbb{Z}$;

d) $\omega = \overline{\omega} \in 2\pi\mathbb{Z}$, vagy $\omega = \overline{\omega} \notin 2\pi\mathbb{Z}$ és $\overline{\varphi} - \varphi \in 2\pi\mathbb{Z}$].

24) A K-dimenziós $\mathbb{R}^{2K}$-beli $Q_{\omega_1,\varphi_1,\ldots,\omega_K,\varphi_K} : (0,1)^K \ni (t_1, \ldots, t_K) \mapsto$

$\mapsto \big(\cos(\omega_1 t + \varphi_1), \sin(\omega_1 t + \varphi_1), \ldots, \cos(\omega_K t + \varphi_K), \sin(\omega_K t + \varphi_K)\big)$

$\mathcal{C}^\infty$-kockák közül

a) melyek regulárisak,

b) mely párok ekvivalensek,

c) mely párok ellentétes irányításúak,

d) mely párok egyenlők lánc-értelemben?

25) Van-e olyan (nem-reguláris) 1-dimenziós $Q : (-1,1) \to \mathbb{R}^2$ $\mathcal{C}^\infty$-kocka, amelyre $Q(-1,1) = \big(xy = 0 \le x, y < 1\big)$?

[Van. Pl. véve olyan $\phi : \mathbb{R} \to [0,1]$ $\mathcal{C}^\infty$-síma függvényt, hogy

$\phi\big(x \le 0\big) = \phi\big(x \ge 1\big) = 0$ és $\phi(1/2) = 1$,

$Q(t) := \big(\phi(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}|t|), \phi(-\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}|t|)\big)$ megfelel].

26) Adjunk meg olyan $Q : (0,1)^2 \to \mathbb{R}^3$ $\mathcal{C}^\infty$-kockát, amelyre $Q(-1,1)^2 = \big(z = |x| + |y| < 1\big)$.

27) Legyen $T := \big(\max\{|x|,|y|\} = 2, z = 0\big) + [0,1]^3$.

a) A T szögletes tórusz határát fedjük be úgy reguláris $Q_1, \ldots, Q_M$ 2-dimenziós $\mathcal{C}^\infty$-kockákkal, hogy a $\widetilde{Q_1} + \cdots + \widetilde{Q_M}$ lánc egy $v_1 dx + v_2 dy + v_3 dz$ differenciaformán azt az értéket vegye fel, ami a T-be időegység alatt kívülről befolyó, időben állandó és $(v_1, v_2, v_3)(: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3)$ térbeli sebességeloszlású folyadék térfogata.

b) Az előbbiekben legalább mennyi kell, hogy legyen M ?

c) Adjunk meg olyan 3-dimenziós reguláris $R_1, R_2 : (-1,1)^3 \to \mathbb{R}^3$ $\mathcal{C}^\infty$-kockákat, amelyekkel $\widetilde{\partial} R_1 + \widetilde{\partial} R_2 = \widetilde{Q_1} + \cdots + \widetilde{Q_M}$.

[b) $M \ge 12$. a) Pl. $Q_k : (-1,1)^2 \to \mathbb{R}^3$ $(k = 1, \ldots, 8)$, ahol

$Q_1 := (2t_1, -2t_2, 1)$, $Q_2 := (t_1, t_2, 1)$, $Q_3 := (2t_1, 2t_2, -1)$,

$Q_4 := (t_1, -t_2, -1)\,, \quad Q_5 := (2, 2t_1, -t_2)\,, \quad Q_6 := (1, t_1, t_2)\,,$

$Q_7 := (2t_1, 2, t_2)\,, \quad Q_8 := (t_1, 1, -t_2)\,, \quad Q_9 := (-2, 2t_1, t_2)\,,$

$Q_{10} := (-1, -t_1, t_2)\,, \quad Q_{11} := (= 2t_1, -2, t_2)\,, \quad Q_{12} := (t_1, -1, t_2)\,.$

c) Pl. $R_1, R_2 : (-1,1)^3 \to \mathbb{R}^3$, ahol $R_1 := (2t_1, 2t_2, -t_3)$, $R_2 := (t_1, t_2, t_3)$].

28) Jelölje $N(p)$ a $P := \big(0 < z < 1 - |x| - |y|\big)$ piramis határának p pontjában vett kifelé mutató normális egységvektort.

a) Számítsuk ki a

$\phi := \int_{\partial P} \langle v(p), N(p)\rangle d\mathrm{Vol}_2(p)$

felületi integrálját a

$v := \big([x^2+y^2+(z-1/3)^2]^{-1}, [x^2+y^2+(z-2/3)^2]^{-1}, [x^2+y^2+(z-1/2)^2]^{-1}\big)$

vektormezőnek.

b) Adjunk meg olyan Λ kockaláncot $\mathbb{R}^3$ -ban, amellyel

$\phi = \Lambda\big(x(v)dy \wedge dz + y(v)dz \wedge dx + z(v)dx \wedge dy\big)$.

[b) Pl. $\Lambda = \big[(0,1)^2 \ni (s,t) \mapsto (-1,0,0) + s(1,1,0) + t(1,-1,0)\big]^{\sim} +$

$+\big[(0,1)^2 \ni (s,t) \mapsto (1-t, 0, t) + st(-1,1,0)\big]^{\sim} +$

$+\big[(0,1)^2 \ni (s,t) \mapsto (0, 1-t, t) + st(-1,-1,0)\big]^{\sim} +$

$+\big[(0,1)^2 \ni (s,t) \mapsto (t-1, 0, t) + st(1,-1,0)\big]^{\sim} +$

$+\big[(0,1)^2 \ni (s,t) \mapsto (0, t-1, t) + st(1,1,0)\big]^{\sim}$.]

29) Legyen u az $\mathbb{R}^N$ -beli $p_1, \ldots, p_N$ csúcsokkal rendelkező $(N-1)$ -dimenziós S szimplex azon normális egységvektora, amelynél $\det(p_2 - p_1, \ldots, p_N - p_1, u) = 1$.

a) Adjuk meg u koordinátáit a $v_2 := p_2 - p_1, \ldots, v_N := p_N - p_1$ vektorok elemi kifejezéseként.

b) Legyen $v := (v_1, \ldots, v_N) : S \to \mathbb{R}^N$ egy síma vektormező S -

en. Adjunk meg olyan $Q : (0,1)^{N-1} \leftrightarrow S$ paraméterezését S-nek és adjunk meg olyan $\omega : S \to \sum_{k=1}^{N} \mathbb{R} dx_k$ differenciálformát, amellyel $\int_S \langle v(p), u\rangle \, d\mathrm{Vol}_{N-1} = \int_Q \omega$.

30) A $\mathbf{R}^3 \ni v \mapsto \|v\|^2 v$ vektormező átfolyása kifelé mutató normális szerint a $H := \big(x^2 < 1,\ y^2 + z^2 < 1/4\}\big)$ henger határán.

[$\int_{x=-1}^{1} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1}{2}\big[\frac{1}{4} + x^2\big]\frac{1}{2}\, d\varphi\, dx + 2\int_{r=0}^{1/2}\int_{\varphi=0}^{2\pi} [1 + r^2] r\, dr\, d\varphi = 31\pi/32$.]

Definíció. Legyen M az $\mathcal{A}$ atlasszal $\mathcal{C}^\infty$-differenciálható sokaság,

$Q : [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_k, b_k] \to M$ $\mathcal{C}^1$-síma leképezés,

$\omega : M \to \{\text{alternáló } (TM)^K \to \mathbb{R} \text{ formák}\}$,

azaz $\omega(p) : (T_p M)^K \to \mathbb{R}$ minden $p \in M$ pontnál.

Az ω *forma integrálja a* Q M *-beli kockán*

$$\int_Q \omega := \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_1}^{b_1} \omega(p) \left(\frac{\partial Q}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial Q}{\partial t_k}\right) \, dt_1 \cdots dt_K \, .$$

[Megjegyzés: $\dfrac{\partial Q(k)}{\partial t_i} \in T_{Q(t)} M$, azaz

$\dfrac{\partial Q(t)}{\partial t_i} : X \mapsto \dfrac{\partial X(Q(t))}{\partial t_i}$, ha $X \in \mathcal{A}$ lokális koordinátarendszer .]

31) Legyen $X : S(\subset M) \to \mathbb{R}^N$ lokális koordinátarendszer, $Q : I \to S$ M-beli $\mathcal{C}^1$-kocka, ahol $I := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_K, b_K]$. Ekkor

$$\int_Q \omega = \int_I \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le K} f_{i_1,\ldots,i_k}(Q(t))\, dx_{i_1}(Q(t) \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}(Q(t)) \, .$$

Itt $dx_{i_1}(Q(K)) \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}(Q(t)) = \det\Big(\dfrac{\partial x_{i_r}(Q(t))}{\partial t_j}\Big)_{r,j=1}^{k} dt_1 \cdots dt_k$.

32) Legyen $X := (x_1, \ldots, x_N) \in \mathcal{A}$ lokális koordinátarendszer, $f \in \mathcal{C}^1(M, \mathbb{R})$,

$\omega := f \cdot dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$. $d\omega = ?$

33) $u_1, \ldots, u_K \in \mathbb{R}^N$-re legyen

$$T_{u_1,\ldots,u_k} : [0,1]^K \ni \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_K \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^{K} \lambda_1 u_i \prod_{j<i} (1 - \lambda_j) \, .$$

Fejezzük ki a $\partial T_{u_1,\ldots,u_k}$ határalakzatot $T_{v_1,\ldots,v_{k-1}}$ típusú M-kockák [valójában $(K-2)$-dimenziós M-beli szimplexek] láncaként (összegeként).

34) Tekintsük a $V := \begin{pmatrix} y^2+z^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ vektormezőt $\mathbb{R}^3$-en ill. az $S := \big(x^2+y^2+z^2=1\big)$ gömbfelületen, és legyen $\mathbb{R}^3$ vektoraira $\omega(p)(v_1,v_2) := \big\langle V(p), v_1 \times v_2 \big\rangle$.

a) Fejezzük ki ω-t x,y,z differenciálformájaként.

b) A $z := \cos\vartheta,\ x = \sin\vartheta\cos\varphi,\ y = \sin\vartheta\sin\varphi$ polárkoordinátákkal

adjuk meg ω kifejezését S-en ϑ,φ differenciálformájaként.

c) Legyen $Q : (0,\pi)\times(0,2\pi) \ni \binom{\vartheta}{\varphi} \mapsto \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta \end{pmatrix}$. $\int_Q \omega = ?$

d) Stokes tételével $\int_Q \omega = \int_? d\omega$.

35) $d\big(x_1\, d\big(x_2\, (\cdots(x_{k-1}\, dx_k)\cdots)\big)\big) = ?$

36) Fejezzük ki $dx_1\wedge\ldots\wedge dx_k$-t az $\otimes$ tenzori szorzattal.

[$dx_1\wedge\ldots\wedge dx_k = \sum_{\pi\in\mathbf{S}(k)} (-1)^{\mathrm{par}(\pi)}\, x_{\pi(1)}\otimes\cdots\otimes x_{\pi(k)}$].

37) $\big[dx\wedge dy + dy\otimes dy\big]\left(\begin{bmatrix} 2x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}\right) = ?$

38) $\sum_{\pi\in\mathbf{S}(k)} (-1)^{\mathrm{par}(\pi)}\, dx_{\pi(1)}\wedge\ldots\wedge dx_{\pi(k)} = ?$ $\otimes$ terminusain.

39) Tegyük fel, hogy

$$\sum_{1\le i_1,\ldots,i_k\le N} \alpha_{i_1,\ldots,i_k}\, dx_{i_1}\otimes\cdots\otimes dx_{i_k} = \sum_{1\le i_1,\ldots,i_k\le N} \beta_{i_1,\ldots,i_k} dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k}.$$

Ekkor

$$\sum_{1\le i_1,\ldots,i_k\le N} \alpha_{i_1,\ldots,i_k} dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k} = k! \sum_{1\le i_1,\ldots,i_k\le N} \beta_{i_1,\ldots,i_k}\, dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k}.$$

40) Poincaré lemma. Tegyük fel, hogy

ω n-edrendű differenciálforma ($\mathbb{R}^N$-en), és $d\omega = 0$. Legyen

$\Omega(x)(v_1,\ldots,v_{n-1}) := \int_0^1 \omega(tx)(x, tv_1,\ldots,tv_{n-1})\, dt$.

Állítás: $d\Omega = \omega$.

[Bizonyítás:

$$d\Omega(x)(v_0,\dots,v_{n-1}) = -\sum_{d=0}^{n-1}(-1)^d\Omega'_{v_d}(x)(v_0,\dots,v_{d-1},v_{d+1},\dots,v_{n-1}) =$$

$$=\sum_{d=0}^{n-1}(-1)^d\int_0^1 \lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\Big[t^{n-1}\omega\big(t(x)+\tau v_d)\big)(x+\tau v_d,v_0,\dots,v_{d-1},v_{d+1},\dots,v_{n-1})-$$

$$-t^{n-1}\omega(x)(x,v_0,\dots,v_{d-1},v_{d+1},\dots,v_{n-1})\Big]\;dt =$$

$$=\sum_{d=0}^{n-1}(-1)^d\Big[\int_0^1 t^{n-1}\omega'_{tv_d}(tx)(x,v_0,\dots,v_{d-1},v_{d+1},\dots,v_{n-1})\;dt+$$

$$+\int_0^1 t^{n-1}w(tx)(v_d,v_0,\dots,v_{d-1},v_{d+1},\dots,v_{n-1})\;dt\Big] =$$

$$=\int_0^1 t^n\sum_{d=0}^{n-1}(-1)^d\omega'_{v_d}(tx)(x,v_0,\dots,v_{d-1},v_{d+1},\dots,v_{n-1})dt+$$

$$+n\int_0^1 t^{n-1}\omega(tx)(v_0,\dots,v_{n-1})\;dt\,.$$

Észrevétel:

$$d\omega(y)(v_{-1},v_0,\dots,v_{n-1}) = -\sum_{d=-1}^{n-1}(-1)^d\omega'_{v_d}(y)(v_{-1},\dots,v_{d-1},v_{d+1},\dots,v_{n-1})\,.$$

Innen $\qquad d\Omega(x)(v_0,\dots,v_{n-1}) = |\;v_{-1} := x\;$ mellett$| =$

$$=\int_0^1 t^n\underbrace{d\omega}_{0}(tx)(x,v_0,\dots,v_{n-1}) + \int_0^1 t^n\omega'_x(tx)(v_0,\dots,v_{n-1})\;dt+$$

$$+n\int_0^1 t^{n-1}\omega(tx)(v_0,\dots,v_{n-1})\;dt =$$

$$= |\text{mivel }\;\omega'_x(tx) = \tfrac{d}{dt}\omega(tx)\;| =^{\text{PARCIÁLIS}}\int =$$

$$= t^n\omega(tx)(v_0,\dots,v_{n-1})\Big|_{t=0}^{n-1} - \int_0^1 nt^{n-1}\omega(tx)(v_0,\dots,v_{n-1})\;dt+$$

$$+n\int_0^1 t^{n-1}\omega(tx)(v_0,\dots,v_{n-1})\;dt = \omega(x)(v_0,\dots,v_{n-1})\;\;].$$

41) Általában, $\Omega(x)(v_1,\dots,v_n-1) := \int_0^1\Psi(t)\omega(tx)(x,v_1,\dots,v_{n-1})\;dt$

mellett mi $d\Omega$ kifejezése ω, $d\omega$ terminusaival?

[$d\Omega(x)(v_0,\dots,v_{n-1}) = -\int_0^1 t\Psi(t)d\omega(tx)(v_0,\dots,v_{n-1})+$

$+\Psi(1)\omega(x)(v_0,\dots,v_{n-1}) + \int_0^1\big[(n-1)\psi(t)-\Psi'(x)\big]\omega(tx)(v_0,\dots,v_{n-1})\;dt$].

42) A $\Psi(t)\equiv t^{n-1}$ esetben mi $\int_Q\Omega$ kifejezése ω-val és a

$Q^* : [0,1]\times I \to \mathbb{R}^M$, $\quad Q^*(t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}) := t_0\, Q(t_1, \ldots, t_{n-1})$ felülettel?

[$\int_Q \Omega = \int_{Q^*} \omega$].

43) $f_1 dx_1 + \ldots + f_N dx_N$ mikor $d\Omega$ alakú $\mathbb{R}^N$ -en?

[$\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i} \qquad (i \neq j)$].

44) Melyik $d\Omega$ alakú $\mathbb{R}^3$ -on?

a) $(x^2 + y^2 + z^2)(dx \wedge dy + dy \wedge dz + dz \wedge dx)$,

b) $dx \wedge dy \wedge dz$, c) $e^{-x^2} dy \wedge dz + e^{-y^2} dz \wedge dy + e^{-x^2} dx \wedge dy$

d) $e^{-(x^2+y^2)} dx \wedge dy + e^{(-(y^2+z^2)} dy \wedge dz + e^{-(z^2+x^2)} dz \wedge dx$.

45) Tegyük fel, hogy $d \sum_{1 \leq i_i < \ldots < i_k < N} f_{i_1 \ldots i_k} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} = 0$.

a) Adjunk meg olyan Ω formát, melyre $d\Omega = \sum_I f_I dx_I$.

b) Mi lehet $dx_J := dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_{k-1}} g_J \qquad \big(J = (j_1, \ldots, j_{k-1})\big)$

együtthatója Ω kifejezésében, ha Ω -t

$\Omega = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_{k-1} \leq N} g_J dx_J$ alakban írjuk fel?

46) Legyenek U_1, U_2 nyitott $\subset \mathbb{R}^K$ és $S : U_1 \leftrightarrow U_2$ $\mathcal{C}^\infty$ -diffeomorfizus

(azaz S, S^{-1} folytonosan differenciálhatók). Bizonyítsuk be:

$\nu(Q \circ S) = \nu(Q)$ tetszőleges ν K -adrendű differenciálmérték ill.

$Q : U_1 \to \mathbb{R}^N$ felületdarab esetén.

Definíció. A $\mathbb{C}$ -beli komplexifikált $z := x + iy$, $\overline{z} := x - iy$ koordinátákkal

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2i}\frac{\partial}{\partial y}\,, \qquad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2i}\frac{\partial}{\partial y}\,.$$

Az $\mathbb{C}$ fölötti komplex

$f\, dx + g\, dy$ ill. $h\, dx \wedge dy \qquad (f, g, h : \mathbb{C} \to \mathbb{C})$ differenciálformákra

$\mathbb{C}$ -lineáris komplexifikálással terjesztjük ki a d külső deriválást.

47) a) $dx = \frac{1}{2}dz + \frac{1}{2}d\overline{z}$. b) $dy = \frac{1}{2i}dz - \frac{1}{2i}d\overline{z}$.

c) $df = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy = \dfrac{\partial f}{\partial z}dz + \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}d\overline{z}$, ha $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvény.

48) $dx \wedge dy$ kifejezése $(z, \overline{z})$ -vel.

[$(i/2)\ dz \wedge d\overline{z}$].

49) Az $f, g, h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ fgv ek $(z, \overline{z})$ -szerinti deriváltjaival ill. $dz, d\overline{z}$ -vel

a) $d[f\,dz + g d\overline{z} = ?$ b) $d[h\,dz \wedge \overline{z} = ?$.

50) a) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ pontosan akkor $\mathbb{C}$ -differenciálható, ha $\partial f/\partial \overline{z} = 0$.

b) Ha f $\mathbb{C}$ -differenciálható, akkor $df = (df/dz)dz$.

51) Legyen $K : [0,1] \to \mathbb{C}$ $\mathcal{C}^1$-síma görbe, $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ folytonos függvény.

Mely differenciálforma integrálja $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} f\big(K(\frac{k}{n})\big)\big[K\big(\frac{k}{n}\big) - K\big(\frac{k-1}{n}\big)\big]$?

[$\int_K f\,dz$].

52) Legyen $Q : [0,1]^2 \to \mathbb{C}$ $\mathcal{C}^2$ -kocka, $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\mathcal{C}^1$ -síma függvény.

Mely differenciálforma Q fölötti integrálja $\int_{\partial Q} f\,dz$?

[$\int_{\partial Q} f dz =^{\text{STOKES}}= \int_Q d[f\ dz] = \int_Q df \wedge dz = \int_Q \partial f/\partial \overline{z}\ d\overline{z} \wedge dz$].

53) Legyen $Q : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ regularis 1 -dimenziós $\mathcal{C}^2$ - kocka.

A $p, q \in Q[a,b]$ pontok között definiáljuk a következő relációt

$p \prec q \overset{\text{def}}{\iff} Q^{-1}(p) < Q^{-1}(q)$ (azaz $\exists!\ s < t\ \ p = Q(s),\ q = Q(t)$).

Állítás: $f_1, \ldots, f_N \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, $\omega := f_1 dx_1 + \cdots + f_N dx_N$ esetén

$$\int_Q \omega = \lim_{Q(a)=p^0 \prec p^1 \prec \cdots \prec p^n = Q(b)} \sum_i \Big[\sum_{d=1}^{N} f_d(p^i) x_d\big(p_1^{i+1} - p_1^i\big)\Big]$$

a beosztás végtelen finomításával.

54) $\mathbb{R}^3$ -on $d[(x^2+y^2+z^2) \cdot d(x^2+y^2+z^2)] = ?$ [$= 0$].

55) Ha $\Phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ és $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, akkor $d[\Phi(f)] = \Phi'(f)\ df$.

56) Ha $\Phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ és $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$, akkor $d[\Phi(f)\ df] = 0$.

[Legyen $\Psi := \int \Phi$ primitív függvénye Φ -nek. Ezzel

$\Psi' = \Phi$, $d[\Psi(f)] = \Psi'(f)\ df$, $d[\Phi(f)\ df] = d^2[\Psi(f)] = 0$].

57) $\int_K (x^4 + 2x^2z^2 + z^4)(x\ dx + z\ dz) = ?$ a

$K : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3 \ni \varphi \mapsto (\cos\varphi, \sin\varphi, \sin 2\varphi)$ görbén.

[$f := x^2 + z^2$ mellett $(x^4 + 2x^2z^2 + z^4)(x\ dx + z\ dz) = f^2\, df = \frac{1}{3} df^3$.

A K torzított körvonal pl. a

$[0, 1] \times [0, 2\pi] \ni (r, \varphi) \mapsto (r^2\cos\varphi, r^2\sin\varphi, r^2\sin 2\varphi)$

torzított körlap határa.

$\int_K (x^4 + 2x^2z^2 + z^4)(x\ dx + z\ dz) = \frac{1}{3}\int_{\partial Q} df^3 =^{Stokes}= \frac{1}{3}\int_Q d^2 f^3 = 0$].

58) $\int_Q d[f_1\ d(f_2\ df_3)] = ?$ ahol $f_k := x^k + y^k + z^k$ $(k = 1, 2, 3)$,

$Q : [0, 1]^3 \to \mathbb{R}^3$, $Q(t_1, t_2, t_3) := (t_1,\ t_1t_2,\ t_1t_2t_3)$.

[$df_3 = d(x_1^3 + y^3 + z^3) = 3x^2\, dx + 3y^2\, dy + 3z^2\, dz$

$d[f_2\ df_3] = d\sum_i x_i^2 \cdot 3\sum_j x_j^2\ dx_j =$

$= \sum_{i,j} 3\ d[x_i^2 x_j^2\ dx_j] = \sum_{i,j} 3 \cdot (2x_i x_j^2\ dx_i + 2x_j x_i^2\ dx_j) \wedge dx_j =$

$= \sum_{i,j} 6x_i x_j^2\ dx_i \wedge dx_j = 6\sum_{i<j}[x_i x_j^2 - x_j x_i^2]\ dx_i \wedge dx_j$;

$d[f_1\ d(f_2\ df_3)] = 6\sum_k \sum_{i<j} d\big(x_k[x_i x_j^2 - x_j x_i^2]\ dx_i \wedge dx_j\big) =$

$= 6\sum_{i<j}\ \sum_{k\neq i,j}[x_i x_j^2 - x_j x_i^2]\ dx_k \wedge dx_i \wedge dx_j =$

$= 6[x_1x_2^2 - x_2x_1^2]\ dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 + 6[x_1x_3^2 - x_3x_1^2]\ dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 +$

$+6[x_2x_3^2 - x_3x_2^2]\ dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 =$

$= 6[x_1x_2^2 - x_2x_1^2 - x_2x_1^2 - x_1x_3^2 + x_3x_1^2 + x_2x_3^2 - x_3x_2^2]\ dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$;

$\int_Q d[f_1\ d(f_2\ df_3)] =\ 6\int_0^1\int_0^1\int_0^1 [t_1(t_1t_2)^2 - (t_1t_2)t_1^2 - t_1(t_1t_2t_3)^2 + (t_1t_2t_3)t_1^2 +$

$+ (t_1t_2)(t_1t_2t_3)^2 - (t_1t_2t_3)(t_1t_2)^2]\ dt_1\ dt_2\ dt_3 =$

$= 6\int_0^1\int_0^1\int_0^1 [t_1^3t_2^2 - t_1^3t_2 - t_1^3t_2 + t_1^3t_2^2t_3^2 + t_1^3t_2^3t_3^2 - t_1^3t_2^3t_3]\ dt_1\ dt_2\ dt_3 = \mathbf{3/16}$].

12. KOMPLEX FÜGGVÉNYTAN

1) $i^i = ?$

[$\left(e^{i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}\right)^i = e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)} = \{e^{-\frac{\pi}{2}}e^{2k\pi} : \; k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$].

2) $\log(1+i) = ?$

3) $\cos\varphi + \cos 2\varphi + \cdots + \cos n\varphi$ megadása ZÁRT FORMULA

(n -től független véges tagszámú formula) alakjában.

[$\mathrm{Re}\, \sum_{k=1}^{n} (e^{i\varphi})^k = \mathrm{Re}\, \left[e^{i\varphi}(e^{in\varphi}-1)/(e^{i\varphi}-1)\right]$

4) Komplex zárt formula $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \sin^2(2k+1)x$ -re.

[$$\sum_{k=1}^{N} \sin^2(2k+1)x = \sum_{k=1}^{N} \frac{1-\cos(4k+2)}{2}x =$$
$$= \frac{N}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{N} z^{4k+2}\Big|_{z=e^{ix}} = \frac{N}{2} - \frac{1}{2}z^6\frac{z^{4N-1}}{z^4-1}\Big|_{z=e^{ix}}$$].

5) Adjuk *valós* zárt formulát a kvetkezőkre:

a) $\cos\varphi + \cos 2\varphi + \cdots + \cos n\varphi$,

b) $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sin k\varphi$,

c) $\sum_{k=0}^{N} \cos^2(2k+1)x$.

[c) $\sum_{k=0}^{N} \cos^2(2k+1)x = \sum_{k=0}^{N} \left[(e^{(2k+1)ix} + e^{-(2k+1)ix})/2\right]^2 =$

$$= \tfrac{1}{4}\sum_{k=0}^{N}\left[e^{2(2k+1)ix} + 2 + e^{-2(2k+1)ix}\right] =$$
$$= \frac{N+1}{2} + e^{2ix}\frac{e^{4Nix}-1}{e^{4ix}-1} + e^{-2ix}\frac{e^{-4Nix}-1}{e^{-4ix}-1} =$$
$$= \frac{N+1}{2} + \frac{e^{2ix}(e^{4Nix}-1)(e^{-4ix}-1) + e^{-2ix}(e^{-4Nix}-1)(e^{4ix}-1)}{(e^{4ix}-1)(e^{-4ix}-1)} =$$
$$= \frac{N+1}{2} + \frac{e^{(4N-1)ix} - e^{(4N+2)ix} + e^{(-4N+2)ix} - e^{(-4N-2)ix}}{2 - e^{4ix} - e^{-4ix}} =$$
$$= \frac{N+1}{2} + \frac{2\cos(N-2)x - 2\cos(4N+2)x}{2 - 2\cos 4x} =$$
$$= \frac{N+1}{2} + \frac{\cos(4N-2)x - \cos(4N+2)x}{1-\cos 4x}$$].

6) $u := \log(x^2+y^2)$ mely holomorf $f : \mathbb{C}\setminus(-\infty,0)$ függvény valós része?

[$f = \log_* |z|^2 + Const.$]

7) a) $\dfrac{z^2-z+3}{z^2+3z+2}$ LAURENT SORAI a

$0<|z|<1$, $1<|z|<z$, $z<|z|$ gyűrűk fölött.

b) $\log \dfrac{z-i}{z+i}$ $(1<|z|<2)$ Laurent sora.

c) $\dfrac{1}{z-2}\log_* z\dfrac{z+e}{z-e}$ Laurent sora $\big(|z|>e\big)$ fölött.

d) $\dfrac{1}{z^6+1}\cdot\dfrac{1}{z^6+1}$ Laurent sora $1<|z|<\sqrt[6]{2}$ =re.

[b) $\log_* \dfrac{z-i}{z+i} = \log\dfrac{1-\frac{i}{z}}{1+\frac{i}{z}} = \log_*\left(1-\dfrac{i}{z}\right) - \log_*\left(1+\dfrac{i}{z}\right) =$

$= \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(-\frac{i}{z}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{i}{z}\right)^n =$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1+(-1)^{n-1}}{n}i^n\frac{1}{z^n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k z^k$

c) Induljunk ki $\dfrac{1}{u+1}\cdot\dfrac{1}{u+2} = \dfrac{1}{u+1} - \dfrac{1}{u+2}$ sorfejtéséből].

8) $\dfrac{2z}{z^4+2z^2+1}$ $(|z|>1)$ Laurent sora.

[Egyszerűen $\dfrac{2z}{z^4+2z^2+1} = -\Big[\dfrac{1}{z^2+1}\Big]'$,

és a sorfejtésnél tagonként differenciálunk].

9) $\dfrac{1}{\sin z}$ REZIDUUMAI.

10) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{z^2\sin z}{z^3+1}dz = ?$ ahol $\Gamma : [0,2\pi] \ni t \mapsto 2\sin t + 2i\sin 2t$.

11) $\displaystyle\int_K \frac{dz}{(z^3+1)z} = ?$, ahol $K : [-\pi,\pi] \ni \vartheta \mapsto \dfrac{e^{2\pi\vartheta}}{2}(2+\cos 3\vartheta)$.

12) $\displaystyle\int_K \frac{dz}{z^2(z^4-1)} = ?$ azon a $K : [0,8] \to \mathbb{C}$ görbén,

amely egyenes szakaszokon halad a

$K(0) := K(8) := \frac{3}{2}+\frac{i}{2},\ K(1) := -\frac{3}{2}+\frac{i}{2},\ K(2) := -\frac{3}{2}-\frac{i}{2},\ K(3) := \frac{1}{2}-\frac{i}{2}$,

$K(4) := \frac{1}{2}+\frac{3i}{2},\ K(5) := -\frac{1}{2}+\frac{3i}{2},\ K(6) := -\frac{1}{2}-\frac{3i}{2},\ K(7) := \frac{3}{2}-\frac{3i}{2}$

pontok között.

13) $\displaystyle\int_K \frac{z^3}{z^4+1}\,dz = ?$ ahol $K : [0, 2\pi] \ni t \mapsto \cos 3t + i \sin t\,.$

14) Adjuk meg az $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{e^{i\varphi} - 4\cos\varphi}$ integrált $\int_{|z|=1} f(z)\,dz$ alakban.

[$z = e^{i\varphi}$ helyettesítéssel $d\varphi = \dfrac{dz}{iz}$, $\cos\varphi = \dfrac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2} = \dfrac{z+z^{-1}}{2}$,

$\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{e^{i\varphi} - 4\cos\varphi} = \int \frac{1}{i}\frac{dz}{z\left(z - 4\frac{z+z^{-1}}{z}\right)}$].

15) Jordan lemma. Legyen S véges $\subset \{\zeta : \operatorname{Im}\zeta > 0\}$, $f : \{\zeta : \operatorname{Im}\zeta \geq 0\} \setminus S \to \mathbb{C}$ folytonos függvény, amely holomorf a $\{\zeta : \operatorname{Im}\zeta > 0\} \setminus S$ nyitott halmazon, és $|f(z)z| \to 0 \quad (|z| \to \infty)$.

Ekkor $\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{a\in S} \operatorname{Res}(f, a)$.

[Legyen $F_R(t) := Re^{\pi i t} \quad (t \in [0,1])$,

$K_R(t) := \big[F_R(t)\ (t \geq 0),\ R(2t+1)\ (t \leq 0)\big] \quad (t \in [-1,1])$.

Észrevétel: $\int_{F_R} f(z)\,dz \to 0 \quad (R \to \infty)$.

Ha $R > \max\{|a| : a \in S\}$, akkor

$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx = \int_{K_R} f(z)\,dz - \int_{F_R} f(z)\,dz =$

$= \sum_{a\in S} \operatorname{Res}(f,a) - \int_{F_R} f(z)\,dz \to \sum_{a\in S} \operatorname{Res}(f,a) \quad (R \to \infty)$].

16) Általában is, ha $f : \big(\operatorname{Im} z \geq 0\big) \setminus S \to \mathbb{C}$ folytonos és holomorf $\big(\operatorname{Im} z > 0\big) \setminus S$ felett, ahol S véges $\subset \big(\operatorname{Im} z > 0\big)$, továbbá

$|f(re^{i\varphi}|r \to 0 \quad (r \to \infty,\ \ 0 < \varphi < \pi$ fix$)$ és

$\exists\, R_0 \quad \{f(\zeta)\zeta : |\zeta| \geq R_0,\ \operatorname{Im}\zeta \geq 0\}$ korlátos,

akkor $\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{a:\ \operatorname{Im} a > 0} \operatorname{Res}(f, a)$.

[Használjuk a Lebesgue-féle konvergenciatételt az

$\int_{F_R} f(z)dz = 2\pi i \int_0^1 f(Re^{2\pi i t})R\,dt \to 0 \quad (R \to \infty)$ bizonyításához].

17) II. Jordan lemma. Tegyük fel, hogy S véges $\subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$,

$f : \mathbb{C} \setminus S \to \mathbb{C}$ folytonos és $\mathbb{C} \setminus S$-en holomorf is, továbbá

$|(z)z|\log|z| \to 0 \quad (|z|\to\infty)$. Ekkor

$\lim_{\substack{\varepsilon\downarrow 0\\ R\uparrow\infty}} \int_\varepsilon^R f(x)\,dx = \sum_{a\in S}\mathrm{Res}(f(z)\log_*(-z),a)$.

18) $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+x+1} \;=\; ?$$

[A Jordan lemmával $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+x+1} = \sum_{\substack{a:\mathrm{Im}\,a>0\\ a^2+a+1=0}}\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2+z+1},a\right) =$$
$$= 2\pi i\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2+z+1},e^{i2\pi/3}\right) = 2\pi i\frac{1}{i\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$].

19) $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+x+1)^n} \;=\; ?$$

[$= 2\pi i\mathrm{Res}\Big((z^2+z+1)^{-n},e^{i2\pi/3}\Big)$.

Itt $(z^2+z+1)^{-n}$ sora $\alpha := e^{i2\pi/3}$ körül

$$(z^2+z+1)^{-n} = (z-\alpha)^{-n}(z-\overline{\alpha})^{-n} =$$
$$= (z-\alpha)^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\,\frac{d^k}{dz^k}(z-\overline{\alpha})^{-n}\Big|_{z=\alpha}(z-\alpha)^k .$$

$\mathrm{Res}\big((z^2+z+1)^{-n},\alpha\big) = \big[(z-\alpha)^{n-1}$ együtthatója$\big] =$
$$\frac{1}{(n-1)!}\,\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(z-\overline{\alpha})^{-n}\Big|_{z=\alpha} = \frac{(-n)(-n-1)\cdots(-2n+2)}{(n-1)!}(\alpha-\overline{\alpha})^{2n-1} =$$
$$= (-1)^{n-1}\binom{2n-2}{n-1}\frac{1}{(i\sqrt{3})^{2n-1}} = \frac{1}{i}\binom{2n-2}{n-1}\frac{\sqrt{3}}{3^n}.$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+x+1)^n} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3^n}\binom{2n-2}{n-1}.$$]

20) $$\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^3+1} \;=\; ?$$

[A II. Jordan lemmával $$\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^3+1} = \sum_{a\in\{-1,e^{i\pi/3},e^{i\pi/3}\}}\mathrm{Res}\left(\frac{\log_*/z}{z^3+1},a\right) =$$
$$= 0 + \left[\frac{\log_*(-e^{i\pi/3})}{(e^{i\pi/3}-e^{-i\pi/3})(e^{i\pi/3}+1)}\right] + \Big[\textsc{konjugáltja}\Big]$$].

21) $$\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x^4+1)^2} \;=\; ?$$

[$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x^4+1)^2} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^4+1)^2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}2\pi\ \mathrm{Res}\left(\frac{1}{(z^2+1)^2},\omega_k\right),$$
ahol $\omega_k := e^{i\frac{\pi}{4}}i^{k-1} \quad (k=1,\dots,4)$.
$$\frac{1}{(z^4+1)^2} = \frac{A_k}{(z-\omega_k)^2} + \frac{B_k}{(z-\omega)} + C_k + \cdots,$$

$$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{(z^2+1)^2},\omega_k\right)=B_k=\frac{\partial}{\partial z}\Big|_{z=\omega_k}\frac{(z-\omega_k)^2}{(z^4+1)^2}\,,$$

$$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{(z^4+1)^2}\omega_1\right)=\frac{\partial}{\partial z}\Big|_{z=\omega_1}\frac{1}{(z-\omega_2)^2(z-\omega_3)^2(z-\omega_4)^2}=$$

$(-\frac{3}{32}-\frac{3}{32}i)\sqrt{2}\,.$ Hasonlóan $\mathrm{Res}\left(\frac{1}{(z^4+1)^2},\omega_2\right)=(\frac{3}{32}-\frac{3}{32}i)\sqrt{2}\,.$

$$\int_0^\infty\frac{dx}{(x^4+1)^2}=\pi\big[(-\frac{3}{32}-\frac{3}{32}i)\sqrt{2}+(\frac{3}{32}-\frac{3}{32}i)\sqrt{2}]=\frac{3}{16}\pi\sqrt{2}\ \ ].$$

22) a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^4+2x^2+1)^2}dx=\,?$ [$\pi/16$].

b) $\displaystyle\int_0^\infty\frac{x}{x^3+1}dx]=\,?$ [$2\pi\sqrt{3}/9$].

c) $\int_0^2 x^3\sqrt{4-x^2}\;dx=\,?$ [$64/15$].

23) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+a^2\pi^2}dx=\,?$

[$\displaystyle =2\pi i\mathrm{Res}\Big(\frac{\cos z}{z^2+a^2\pi^2},ia\pi\Big)=2\pi i\frac{\cos ia\pi}{ia\pi+ia\pi}=\frac{\mathrm{ch}(a\pi)}{a}$].