

EFOP-3.4.3-16-2016-00014

# Gráfelmélet

## Bizonyítási és problémamegoldási módszerek a kombinatorikában

Pedagógus-továbbképzés  
SZTE, 2022. február 11-12.

Nagy V. Gábor  
egyetemi adjunktus  
SZTE Bolyai Intézet

SZÉCHENYI 2020



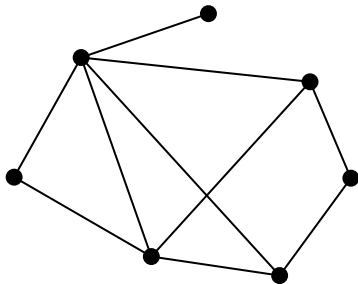
MAGYARORSZÁG  
KORMÁNYA

Európai Unió  
Európai Szociális  
Alap



BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

## Egyszerű gráf.

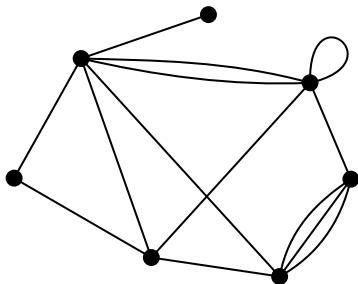


Véges sok csúcs (pont), és bizonyos csúcspárokat éllel kötünk össze.

Formálisan: A csúcshalmaz egy tetszőleges  $V$  véges halmaz, és az élek  $V$  bizonyos kételemű részhalmazai.

Középiskolában általában ezt a struktúrát értjük **gráfnak**.

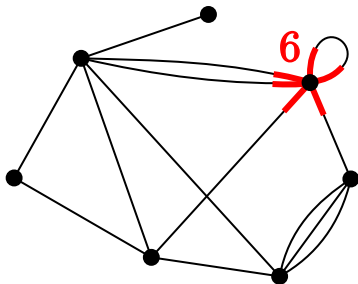
## Általános gráf.



Néha hasznos megengedni, hogy két pont között több él is haladjon (**párhuzamos élek**), illetve hogy egy élnek egybeeshessen a két végpontja (**hurokél**). Ilyenkor **általános gráfról** beszélünk.

Mi a továbbiakban gráfon egyszerű gráfot értünk (ld. előző dia), de kiírjuk az egyszerű jelzőt, ha lényeges a hurokél- és párhuzamos él mentesség.

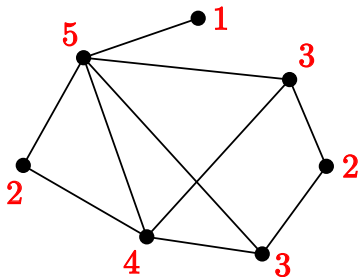
## Fokszám.



Egy csúcs **fokszáma** a csúcsból induló élek száma, ahol a hurokélek kétszer számítanak. (A fokszám a csúcsból induló **élvégek** száma.)

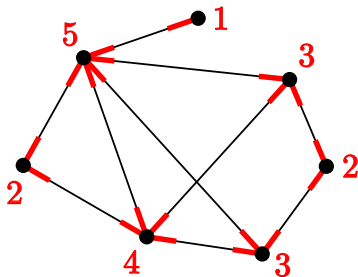
Egyszerű gráf esetén a fokszám a szomszédok száma.

**Fokszámtétel.** Tetszőleges gráfban a csúcsok fokszámainak összege az élek számának kétszeresével egyenlő.



$$1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 5 = 2 \cdot 10$$

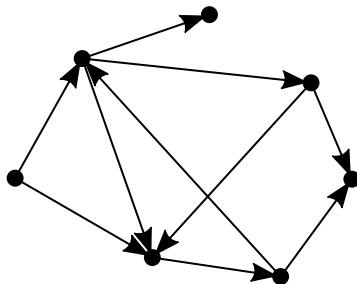
**Fokszámtétel.** Tetszőleges gráfban a csúcsok fokszámainak összege az élek számának kétszeresével egyenlő.



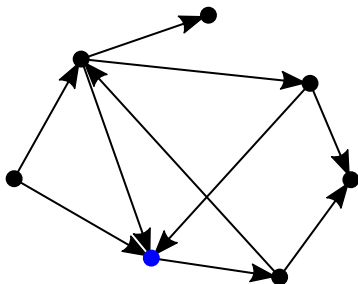
$$1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 5 = 2 \cdot 10$$

**Bizonyítás.** A fokszámösszeg is, és az élszám kétszerese is a gráfban található élvégeket számolja össze. (A fokszámösszeg csúcsonként haladva számol; az élszámösszeg kétszerese pedig abból jön, hogy minden élnek két vége van.)  $\square$

## Írányított gráf.

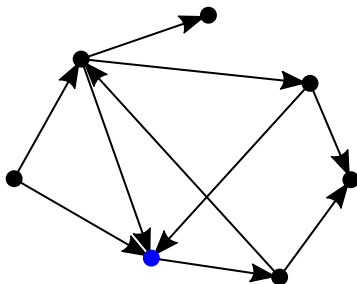


Minden élnek van egy iránya. (Minden él az egyik végpontjából a másik felé mutat.)



Irányított gráfban egy csúcs **kifoka** a csúcsból kiinduló (kifelé mutató) élek száma; egy csúcs **befoka** pedig a csúcsba befutó (befelé mutató) élek száma.

Például a fenti gráfban a kézzel jelölt csúcs befoka 3, a kifoka 1.

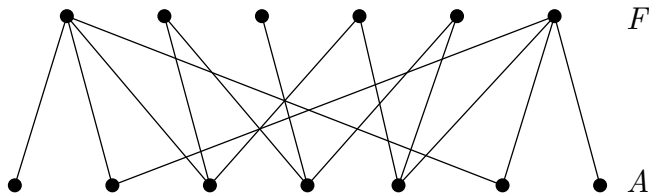


Irányított gráfban egy csúcs **kifoka** a csúcsból kiinduló (kifelé mutató) élek száma; egy csúcs **befoka** pedig a csúcsba befutó (befelé mutató) élek száma.

Például a fenti gráfban a kékkel jelölt csúcs befoka 3, a kifoka 1.

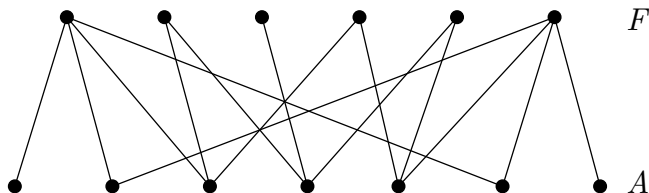
**Tétel.** Tetszőleges irányított gráfban a csúcsok kifokainak összege megegyezik a csúcsok befokainak összegével. Mindkét mennyiség az élek számával egyenlő.

## Páros gráfok.



Egy gráf **páros**, ha csúcsai két osztályba sorolhatók úgy, hogy a gráf minden éle e két osztály között halad (azaz az él egyik végpontja az egyik osztályba, a másik végpontja a másik osztályba esik).

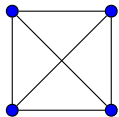
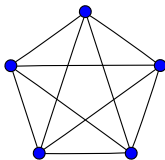
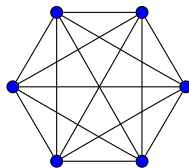
## Páros gráfok.



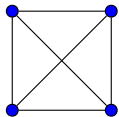
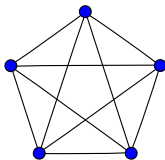
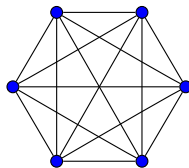
Egy gráf **páros**, ha csúcsai két osztályba sorolhatók úgy, hogy a gráf minden éle e két osztály között halad (azaz az él egyik végpontja az egyik osztályba, a másik végpontja a másik osztályba esik).

**Észrevétel.** Ha  $G$  egy tetszőleges páros gráf  $A$  és  $F$  osztályokkal, akkor az  $A$ -beli csúcsok fokszámainak összege megegyezik az  $F$ -beli csúcsok fokszámaik összegével. És mindkét fokszámösszeg a gráf éleinek számával egyenlő.

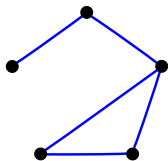
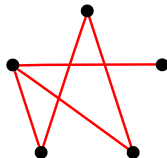
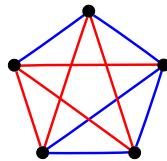
A **teljes gráf** olyan egyszerű gráf, amelyben bármely két különböző csúcs összekötött.

 $K_4$  $K_5$  $K_6$

A **teljes gráf** olyan egyszerű gráf, amelyben bármely két különböző csúcs összekötött.

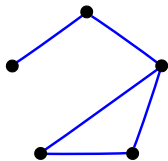
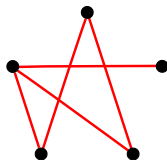
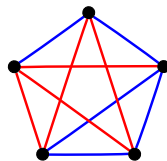
 $K_4$  $K_5$  $K_6$ 

A  $G$  egyszerű gráf **komplementere** az a  $\overline{G}$ -sal jelölt egyszerű gráf, amelynek csúcshalmaza megegyezik  $G$  csúcshalmazával, és két csúcs pontosan akkor összekötött  $\overline{G}$ -ben, ha azok nem összekötöttek  $G$ -ben.

 $G$  $\overline{G}$  $K_n$

A **teljes gráf** olyan egyszerű gráf, amelyben bármely két különböző csúcs összekötött.

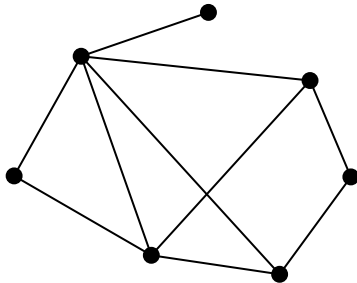
A  $G$  egyszerű gráf **komplementere** az a  $\overline{G}$ -sal jelölt egyszerű gráf, amelynek csúcshalmaza megegyezik  $G$  csúcshalmazával, és két csúcs pontosan akkor összekötött  $\overline{G}$ -ben, ha azok nem összekötöttek  $G$ -ben.

 $G$  $\overline{G}$  $K_n$ 

Tehát ha  $G$  egy  $n$  pontú gráf, akkor  $\overline{G}$ -t úgy kapjuk, hogy az  $n$  pontú teljes gráfból töröljük  $G$  éleit.

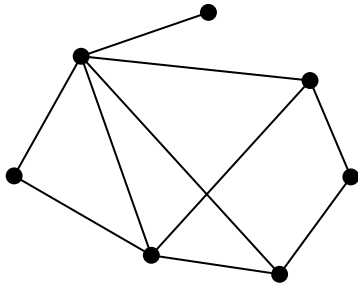
**Definíció.** Egy gráf **összefüggő**, ha bármely csúcsából bármely másikba el lehet jutni a gráf élein haladva.

**Példa összefüggő gráfra.**



**Definíció.** Egy gráf **összefüggő**, ha bármely csúcsából bármely másikba el lehet jutni a gráf élein haladva.

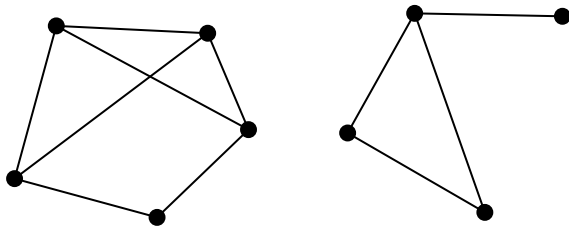
**Példa összefüggő gráfra.**



Könnyű meggondolni, hogy az összefüggőség igazolásához elegendő azt ellenőrizni, hogy egy tetszőleges csúcsból el lehet jutni bármelyik másikba. (Miért?)

**Definíció.** Egy gráf **összefüggő**, ha bármely csúcsából bármely másikba el lehet jutni a gráf élein haladva.

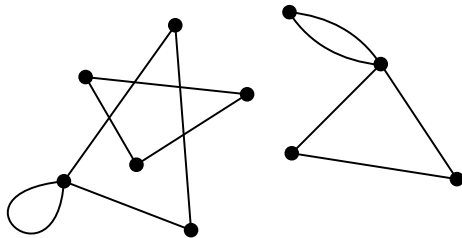
**Példa NEM összefüggő gráfra.**



Ez egy 9 csúcsú gráf.

**Definíció.** Egy gráf **összefüggő**, ha bármely csúcsából bármely másikba el lehet jutni a gráf élein haladva.

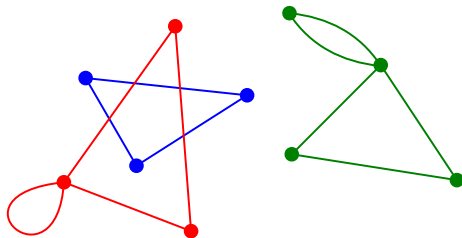
**Példa NEM összefüggő gráfra 2.**



Ez egy 10 csúcsú gráf.

**Definíció.** Egy gráf **összefüggő**, ha bármely csúcsából bármely másikba el lehet jutni a gráf élein haladva.

**Példa NEM összefüggő gráfra 2.**

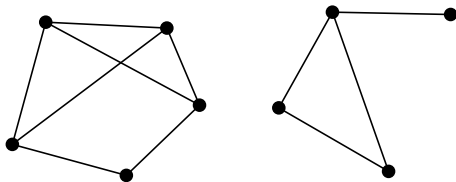


Ez egy 10 csúcsú gráf.

**Tétel + Definíció.** Minden gráf egyértelműen előáll **összefüggő** gráfok csúcs-diszjunkt uniójaként.

A fenti tételben szereplő összefüggő gráfokat hívjuk a gráf **komponenseinek**.

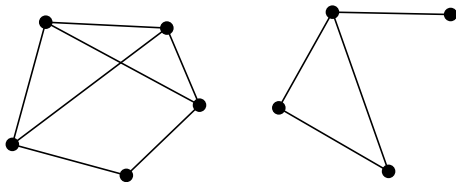
**Gráf 2 komponenssel.**



**Tétel + Definíció.** Minden gráf egyértelműen előáll **összefüggő** gráfok csúcs-diszjunkt uniójaként.

A fenti tételben szereplő összefüggő gráfokat hívjuk a gráf **komponenseinek**.

**Gráf 2 komponenssel.**

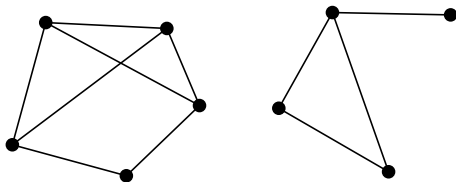


**Megjegyzés.** A gráf komponensei összefüggők (definíció szerint), és két különböző komponens között nem halad él.

**Tétel + Definíció.** Minden gráf egyértelműen előáll **összefüggő** gráfok csúcs-diszjunkt uniójaként.

A fenti tételben szereplő összefüggő gráfokat hívjuk a gráf **komponenseinek**.

**Gráf 2 komponenssel.**



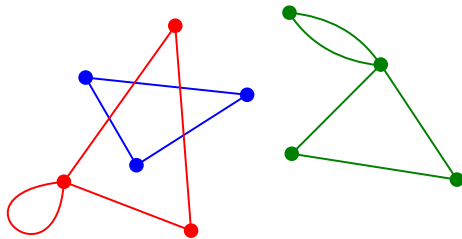
**Megjegyzés.** A gráf komponensei összefüggők (definíció szerint), és két különböző komponens között nem halad él.

**Megjegyzés.** Egy  $v$  csúcs pontosan azon csúcsokkal van egy komponensben, amelyek elérhetők  $v$ -ből éleken haladva. Ezen komponens élei pedig az így megtalált csúcsok között haladó  $G$ -beli élek (az összes).

**Tétel + Definíció.** Minden gráf egyértelműen előáll összefüggő gráfok csúcs-diszjunkt uniójaként.

A fenti tételben szereplő összefüggő gráfokat hívjuk a gráf **komponenseinek**.

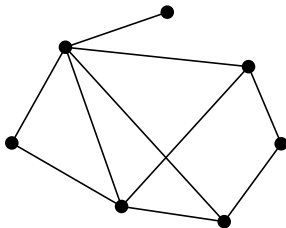
**Gráf 3 komponenssel.**



**Tétel + Definíció.** Minden gráf egyértelműen előáll **összefüggő** gráfok csúcs-diszjunkt uniójaként.

A fenti tételben szereplő összefüggő gráfokat hívjuk a gráf **komponenseinek**.

**Gráf 1 komponenssel.**



**Megjegyzés.**  $G$  összefüggő  $\iff G$ -nek 1 komponense van.

**Definíció.** Egy  $G$  gráfban ( $k$  hosszú) **séta** alatt egy

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k$$

sorozatot értünk, ahol  $v_1, \dots, v_k$  csúcsok  $G$ -ben, az  $e_i$  pedig olyan él  $G$ -ben, amelynek két végpontja  $v_{i-1}$  és  $v_i$ , minden  $i = 1, \dots, k$ -ra.

Azt mondjuk, hogy a séta **zárt**, ha  $v_0 = v_k$ . (Különben a séta **nyílt**.)

**Definíció.** Egy  $G$  gráfban ( $k$  hosszú) **séta** alatt egy

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k$$

sorozatot értünk, ahol  $v_1, \dots, v_k$  csúcsok  $G$ -ben, az  $e_i$  pedig olyan él  $G$ -ben, amelynek két végpontja  $v_{i-1}$  és  $v_i$ , minden  $i = 1, \dots, k$ -ra.

Azt mondjuk, hogy a séta **zárt**, ha  $v_0 = v_k$ . (Különben a séta **nyílt**.)

**Definíció.** A **vonal** éliszmétlés nélküli séta.

**Definíció.** Egy  $G$  gráfban ( $k$  hosszú) **séta** alatt egy

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k$$

sorozatot értünk, ahol  $v_1, \dots, v_k$  csúcsok  $G$ -ben, az  $e_i$  pedig olyan él  $G$ -ben, amelynek két végpontja  $v_{i-1}$  és  $v_i$ , minden  $i = 1, \dots, k$ -ra.

Azt mondjuk, hogy a séta **zárt**, ha  $v_0 = v_k$ . (Különben a séta **nyílt**.)

**Definíció.** A **vonal** éliszmétlés nélküli séta.

**Definíció.** Az **út** csúcsismétlés nélküli séta.

**Definíció.** Egy  $G$  gráfban ( $k$  hosszú) **séta** alatt egy

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k$$

sorozatot értünk, ahol  $v_1, \dots, v_k$  csúcsok  $G$ -ben, az  $e_i$  pedig olyan él  $G$ -ben, amelynek két végpontja  $v_{i-1}$  és  $v_i$ , minden  $i = 1, \dots, k$ -ra.

Azt mondjuk, hogy a séta **zárt**, ha  $v_0 = v_k$ . (Különben a séta **nyílt**.)

**Definíció.** A **von**al éliszmétlés nélküli séta.

**Definíció.** Az **út** csúcsismétlés nélküli séta.

**Definíció.** A **kör** egy olyan zárt séta a gráfban, amelyben a kezdőpont=végpont egyenlőséget leszámítva nincs csúcsismétlés, továbbá nincs éliszmétlés sem, valamint legalább 1 éle van.

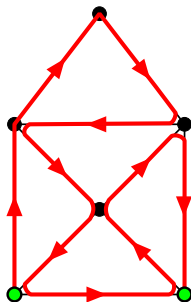
**Definíció.** A  $G$  gráfban a  $\mathcal{V}$  séta **Euler-vonal**,  $G$  minden élén **pontosan egyszer** áthalad, továbbá meglátogatja  $G$  összes csúcsát.

A „meglátogatja  $G$  összes csúcsát” egy technikai feltétel csupán; ez automatikusan következik az élekre vonatkozó feltételből, ha nincs izolált (0 fokú) csúcs  $G$ -ben.

**Definíció.** A  $G$  gráfban a  $\mathcal{V}$  séta **Euler-vonal**,  $G$  minden élén **pontosan egyszer** áthalad, továbbá meglátogatja  $G$  összes csúcsát.

A „meglátogatja  $G$  összes csúcsát” egy technikai feltétel csupán; ez automatikusan következik az élekre vonatkozó feltételből, ha nincs izolált (0 fokú) csúcs  $G$ -ben.

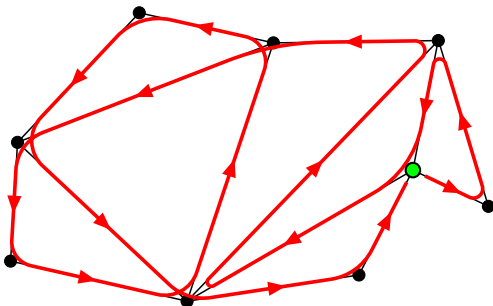
**Példa (nyílt Euler-vonal).**



**Definíció.** A  $G$  gráfban a  $\mathcal{V}$  séta **Euler-vonal**,  $G$  minden élén **pontosan egyszer** áthalad, továbbá meglátogatja  $G$  összes csúcsát.

A „meglátogatja  $G$  összes csúcsát” egy technikai feltétel csupán; ez automatikusan következik az élekre vonatkozó feltételből, ha nincs izolált (0 fokú) csúcs  $G$ -ben.

**Példa (zárt Euler-vonal).**



**Definíció.** A  $G$  gráfban a  $\mathcal{V}$  séta **Euler-vonal**,  $G$  minden élén **pontosan egyszer** áthalad, továbbá meglátogatja  $G$  összes csúcsát.

A „meglátogatja  $G$  összes csúcsát” egy technikai feltétel csupán; ez automatikusan következik az élekre vonatkozó feltételből, ha nincs izolált (0 fokú) csúcs  $G$ -ben.

### Euler-tétel.

- a) Egy  $G$  gráfban akkor és csak akkor van **zárt** Euler-vonal, ha  $G$  összefüggő, és minden csúcsának foka páros.
- b) Egy  $G$  gráfban akkor és csak akkor van **nyílt** Euler-vonal, ha  $G$  összefüggő, és pontosan két páratlan fokú csúcsa van.

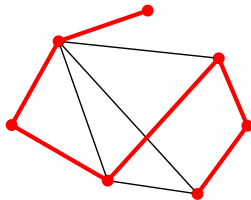
A két állítás együtt a következőt adja:

- c) Egy  $G$  gráfban akkor és csak akkor van Euler-vonal, ha  $G$  összefüggő, és 0 vagy 2 páratlan fokú csúcsa van.

**Definíció.** A  $G$  gráfban egy út **Hamilton-út**, ha  $G$  összes csúcsát tartalmazza.

**Definíció.** A  $G$  gráfban egy kör **Hamilton-kör**, ha  $G$  összes csúcsát tartalmazza.

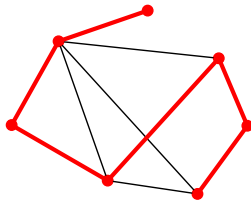
**Példa 1. (Hamilton-út)**



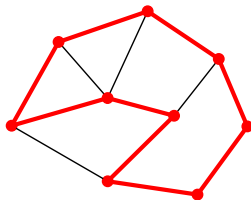
**Definíció.** A  $G$  gráfban egy út **Hamilton-út**, ha  $G$  összes csúcsát tartalmazza.

**Definíció.** A  $G$  gráfban egy kör **Hamilton-kör**, ha  $G$  összes csúcsát tartalmazza.

**Példa 1. (Hamilton-út)**



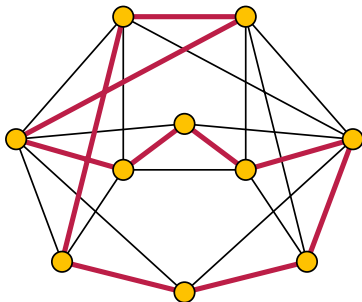
**Példa 2. (Hamilton-kör)**



**Definíció.** A  $G$  gráfban egy út **Hamilton-út**, ha  $G$  összes csúcsát tartalmazza.

**Definíció.** A  $G$  gráfban egy kör **Hamilton-kör**, ha  $G$  összes csúcsát tartalmazza.

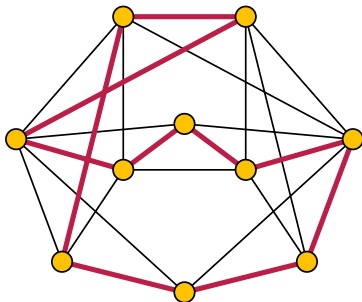
**Példa 3. (Hamilton-kör)**



**Definíció.** A  $G$  gráfban egy út **Hamilton-út**, ha  $G$  összes csúcsát tartalmazza.

**Definíció.** A  $G$  gráfban egy kör **Hamilton-kör**, ha  $G$  összes csúcsát tartalmazza.

### Példa 3. (Hamilton-kör)



Sajnos nem ismert hatékony algoritmus vagy tétel annak eldöntésére, hogy egy gráfban van-e Hamilton-út / Hamilton-kör. (Az a sejtés, hogy ilyen nem is létezik.)

**Definíció.** A  $G$  gráfban egy út **Hamilton-út**, ha  $G$  összes csúcsát tartalmazza.

**Definíció.** A  $G$  gráfban egy kör **Hamilton-kör**, ha  $G$  összes csúcsát tartalmazza.

**Dirac-tétel.** Ha az  $n(\geq 3)$  pontú  $G$  egyszerű gráfban minden pont foka legalább  $n/2$ , akkor  $G$  tartalmaz Hamilton-kört.

**Definíció.** A  $G$  gráfban egy út **Hamilton-út**, ha  $G$  összes csúcsát tartalmazza.

**Definíció.** A  $G$  gráfban egy kör **Hamilton-kör**, ha  $G$  összes csúcsát tartalmazza.

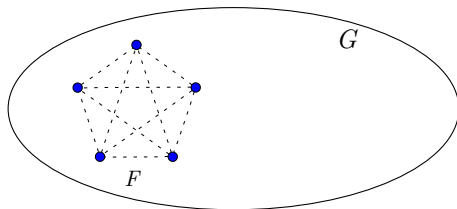
**Dirac-tétel.** Ha az  $n(\geq 3)$  pontú  $G$  egyszerű gráfban minden pont foka legalább  $n/2$ , akkor  $G$  tartalmaz Hamilton-kört.

### Állítás.

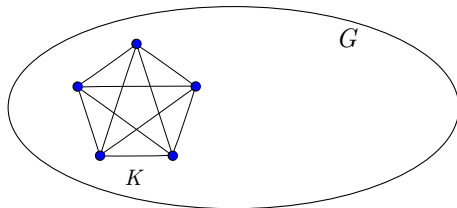
- a) Ha egy  $G$  gráfból valamely  $k$  pont (és a rájuk illeszkedő élek) elhagyása után olyan gráf keletkezik, amelynek legalább  $k + 1$  komponense van, akkor  $G$ -ben nincs Hamilton-kör.
- a) Ha egy  $G$  gráfból valamely  $k$  pont (és a rájuk illeszkedő élek) elhagyása után olyan gráf keletkezik, amelynek legalább  $k + 2$  komponense van, akkor  $G$ -ben nincs Hamilton-út.

Itt  $k$  tetszőleges lehet (akár 0 is). Az állítások megfordítása nem igaz.

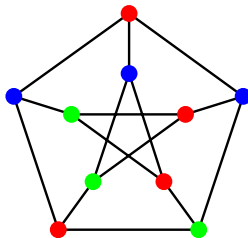
A  $G$  egyszerű gráfban az  $F$  ponthalmaz **független ponthalmaz**, ha  $F$  semelyik két pontja között nem halad él  $G$ -ben.



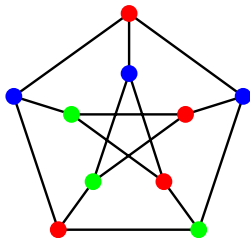
A  $G$  egyszerű gráfban a  $K$  ponthalmaz **klikk**, ha  $K$  bármely két pontja között halad él  $G$ -ben.



A  $G$  gráf **jó színezésén** a csúcsoknak egy olyan színezését értjük, amelyre  $G$  minden élének két végpontja különböző színt kapott.

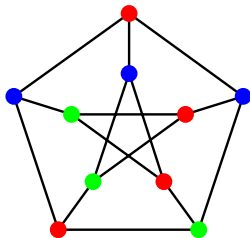


A  $G$  gráf **jó színezésén** a csúcsoknak egy olyan színezését értjük, amelyre  $G$  minden élének két végpontja különböző színt kapott.



**Megjegyzés.** Egyszerű gráfoknak mindig van jó színezése, például színezhetjük az összes csúcsot különböző színűre.

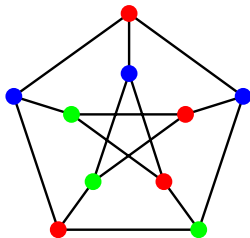
A  $G$  gráf **jó színezésén** a csúcsoknak egy olyan színezését értjük, amelyre  $G$  minden élének két végpontja különböző színt kapott.



**Megjegyzés.** Egyszerű gráfoknak mindig van jó színezése, például színezhetjük az összes csúcsot különböző színűre.

**Megjegyzés.** A jó színezés tulajdonképpen a csúcshalmaz osztályozása független ponthalmazokra.

A  $G$  gráf **jó színezésén** a csúcsoknak egy olyan színezését értjük, amelyre  $G$  minden élének két végpontja különböző színt kapott.



**Megjegyzés.** Egyszerű gráfoknak mindig van jó színezése, például színezhetjük az összes csúcsot különböző színűre.

**Megjegyzés.** A jó színezés tulajdonképpen a csúcshalmaz osztályozása független ponthalmazokra.

**Definíció.** A  $G$  gráf  $\chi(G)$  **kromatikus száma** az a legkisebb színszám, ahány színnel jól színezhető  $G$ .

**Megjegyzés.**  $G$  jól színezhető 2 színnel  $\iff G$  páros gráf.

**Megjegyzés.**  $G$  jól színezhető 2 színnel  $\iff G$  páros gráf.

**Tétel.** A  $G$  gráf pontosan akkor páros, ha  $G$  nem tartalmaz páratlan hosszú kört.

**Megjegyzés.**  $G$  jól színezhető 2 színnel  $\iff G$  páros gráf.

**Tétel.** A  $G$  gráf pontosan akkor páros, ha  $G$  nem tartalmaz páratlan hosszú kört.

Sajnos nem ismert hatékony algoritmus a kromatikus szám meghatározására, sőt annak eldöntésére sem, hogy 3 színnel jól színezhető-e egy gráf. (Az a sejtés, hogy ilyen nem is létezik.)

**Megjegyzés.**  $G$  jól színezhető 2 színnel  $\iff G$  páros gráf.

**Tétel.** A  $G$  gráf pontosan akkor páros, ha  $G$  nem tartalmaz páratlan hosszú kört.

Sajnos nem ismert hatékony algoritmus a kromatikus szám meghatározására, sőt annak eldöntésére sem, hogy 3 színnel jól színezhető-e egy gráf. (Az a sejtés, hogy ilyen nem is létezik.)

**Állítás.** Ha  $K$  egy klikk  $G$ -ben, akkor  $K$  csúcsait különböző színűekre kell színezni  $G$  (minden) jó színezésekor. Tehát

$$\chi(G) \geq \omega(G),$$

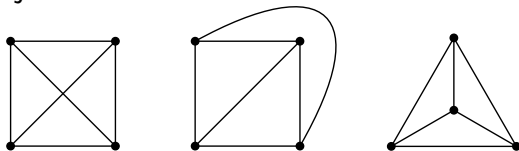
ahol  $\omega(G)$  jelöli a legnagyobb  $G$ -beli klikk pontszámát.

**Definíció.** Egy gráf **síkgráf**, ha lerajzolható úgy a síkra, hogy az élgörbéknek a végpontokon kívül nincs közös pontja.

Ebbe a definícióba az is beleértendő, hogy az élgörbék nem önmetszők, és egy élgörbe a végpontjain kívül más csúcsponton nem halad át.

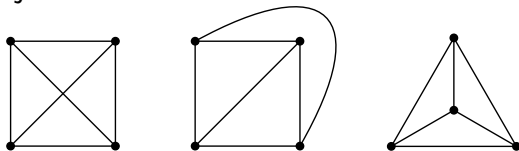
**Definíció.** Egy gráf **síkgráf**, ha lerajzolható úgy a síkra, hogy az élgörbéknek a végpontokon kívül nincs közös pontja.

**Példa.** A 4 pontú teljes gráf síkgráf. Ezt például az ábrán látható 2. és 3. lerajzolás is bizonyítja:

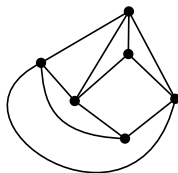


**Definíció.** Egy gráf **síkgráf**, ha lerajzolható úgy a síkra, hogy az élgörbéknek a végpontokon kívül nincs közös pontja.

**Példa.** A 4 pontú teljes gráf síkgráf. Ezt például az ábrán látható 2. és 3. lerajzolás is bizonyítja:



**Egy másik példa síkgráfra.**



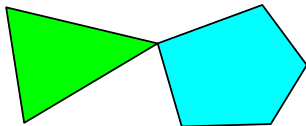
Adott egy térkép, amelynek országai „összefüggők” (azaz egy ország bármely pontjából el lehet jutni bármely másik pontjába határátlépés nélkül). Két országot szomszédosnak nevezünk, ha van közös határ~~szakaszuk~~. Feltesszük továbbá, hogy nincs önmagával szomszédos ország. (Miért is lenne egy országon belül egy „felesleges” határ?)



Adott egy térkép, amelynek országai „összefüggők” (azaz egy ország bármely pontjából el lehet jutni bármely másik pontjába határátlépés nélkül). Két országot szomszédosnak nevezünk, ha van közös határszakaszuk. Feltesszük továbbá, hogy nincs önmagával szomszédos ország. (Miért is lenne egy országon belül egy „felesleges” határ?)

### A feltételekről:

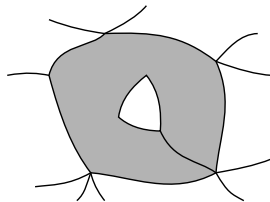
1. Az ábrán látható háromszög és ötszög alakú országok nem szomszédosak, mert nincs közös (pozitív hosszúságú) határszakaszuk; egy közös pont nem határszakasz.



Adott egy térkép, amelynek országai „összefüggők” (azaz egy ország bármely pontjából el lehet jutni bármely másik pontjába határátlépés nélkül). Két országot szomszédosnak nevezünk, ha van közös határ~~szakaszuk~~. Feltesszük továbbá, hogy nincs önmagával szomszédos ország. (Miért is lenne egy országon belül egy „felesleges” határ?)

### A feltételekről:

2. Ezen az ábrán egy önmagával szomszédos ország látható (ami tiltott), szürkével jelölve:



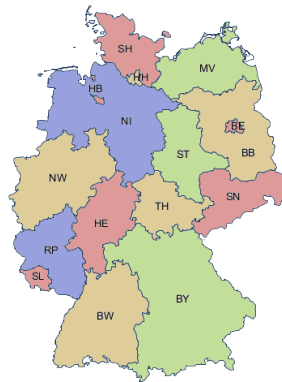
Adott egy térkép, amelynek országai „összefüggők” (azaz egy ország bármely pontjából el lehet jutni bármely másik pontjába határátlépés nélkül). Két országot szomszédosnak nevezünk, ha van közös határ~~szakasz~~uk. Feltesszük továbbá, hogy nincs önmagával szomszédos ország. (Miért is lenne egy országon belül egy „felesleges” határ?)

**Térképszínezési probléma (1852).** Igaz-e, hogy a fenti feltételeket teljesítő térkép országait mindig ki lehet színezni (legfeljebb) 4 szín felhasználásával úgy, hogy a szomszédos országok különböző színt kapjanak?

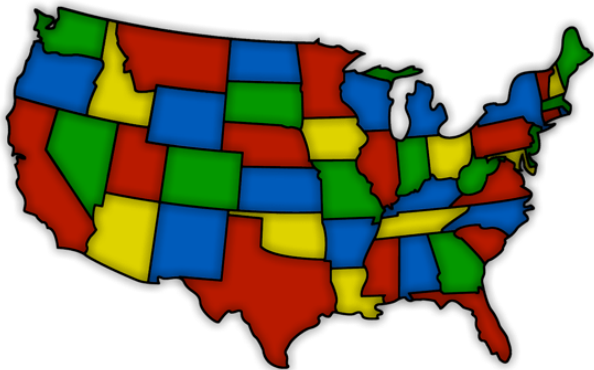
**Térképszínezési probléma (1852).** Igaz-e, hogy a fenti feltételeket teljesítő térkép országait mindig ki lehet színezni (legfeljebb) 4 szín felhasználásával úgy, hogy a szomszédos országok különböző színt kapjanak?



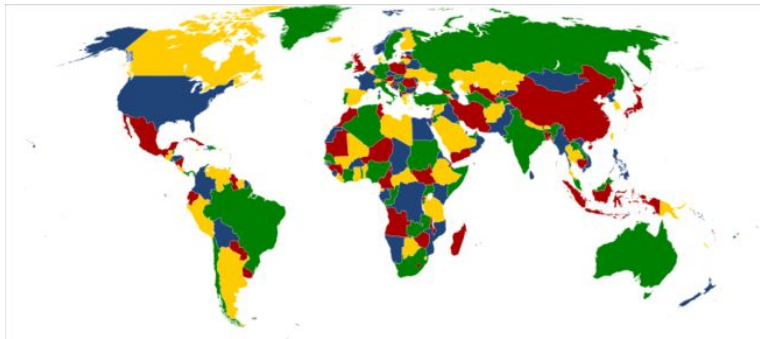
**Térképszínezési probléma (1852).** Igaz-e, hogy a fenti feltételeket teljesítő térkép országait mindig ki lehet színezni (legfeljebb) 4 szín felhasználásával úgy, hogy a szomszédos országok különböző színt kapjanak?



**Térképszínezési probléma (1852).** Igaz-e, hogy a fenti feltételeket teljesítő térkép országait mindig ki lehet színezni (legfeljebb) 4 szín felhasználásával úgy, hogy a szomszédos országok különböző színt kapjanak?



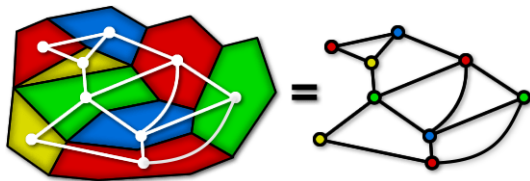
**Térképszínezési probléma (1852).** Igaz-e, hogy a fenti feltételeket teljesítő térkép országait mindig ki lehet színezni (legfeljebb) 4 szín felhasználásával úgy, hogy a szomszédos országok különböző színt kapjanak?



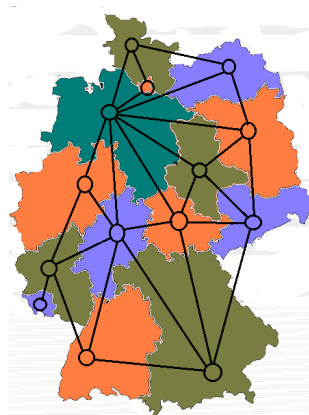
A matematikusok azt sejtették, hogy a térképszínezési problémára igen a válasz. Ennek bizonyítására több mint 100 évet kellett várni.

**Térképszínezési probléma (1852).** Igaz-e, hogy a fenti feltételeket teljesítő térkép országait mindig ki lehet színezni (legfeljebb) 4 szín felhasználásával úgy, hogy a szomszédos országok különböző színt kapjanak?

Ez a probléma megfogalmazható a gráfelmélet nyelvén. Tekintsük azt a  $G$  gráfot, amelynek csúcsai az adott országok, és két csúcs (ország) pontosan akkor összekötött, ha szomszédosak a térképen, és annyi éllel, ahány közös határszakaszuk van. A térképszínezési probléma azt kérdezi, hogy igaz-e, hogy  $\chi(G) \leq 4$ .

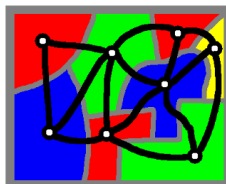
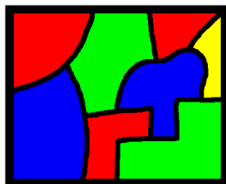


**Térképszínezési probléma (1852).** Igaz-e, hogy a fenti feltételeket teljesítő térkép országait mindig ki lehet színezni (legfeljebb) 4 szín felhasználásával úgy, hogy a szomszédos országok különböző színt kapjanak?



Az így megkonstruált  $G$  gráf síkgráf!

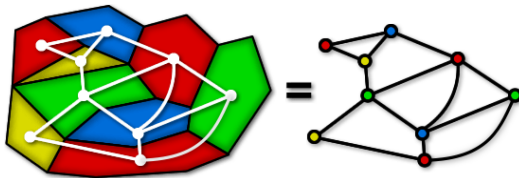
Indoklás: Minden ország belsejében vegyünk fel egy „fővárost” (pontot), ezek lesznek a csúcsok lerajzolásai. Minden határszakaszon „nyissunk egy határátkelőt”, és a fővárosból csillagszerűen, átmetszés nélkül vezessenek „autópályák” a határátkelőkhöz<sup>†</sup>. Így a szomszédos országok autópályái a határátkelőknél élgörbéké olvadnak össze, ezek épp az élek lerajzolásai lesznek. Az autópályákat úgy építettük, hogy nem jön létre élmetszés, ezzel  $G$ -t szépen rajzoltuk le. (Megjegyezzük, hogy  $G$ -ben nincs hurokél, mert egy határszakasz két oldalán két különböző ország fekszik a feltételeink szerint.)



<sup>†</sup> Ismét a szemléletünkre hagyatkozunk: Nem bizonyítjuk precízen, hogy ez a csillagszerű úthálózat mindig megvalósítható összefüggő országokban; de igaz.

Az így megkonstruált  $G$  gráf síkgráf!

Indoklás: Minden ország belsejében vegyünk fel egy „fővárost” (pontot), ezek lesznek a csúcsok lerajzolásai. Minden határszakaszon „nyissunk egy határátkelőt”, és a fővárosból csillagszerűen, átmetszés nélkül vezessenek „autópályák” a határátkelőkhöz<sup>†</sup>. Így a szomszédos országok autópályái a határátkelőknél élgörbékké olvadnak össze, ezek épp az élek lerajzolásai lesznek. Az autópályákat úgy építettük, hogy nem jön létre élmetszés, ezzel  $G$ -t szépen rajzoltuk le. (Megjegyezzük, hogy  $G$ -ben nincs hurokél, mert egy határszakasz két oldalán két különböző ország fekszik a feltételeink szerint.)



<sup>†</sup> Ismét a szemléletünkre hagyatkozunk: Nem bizonyítjuk precízen, hogy ez a csillagszerű úthálózat mindig megvalósítható összefüggő országokban; de igaz.

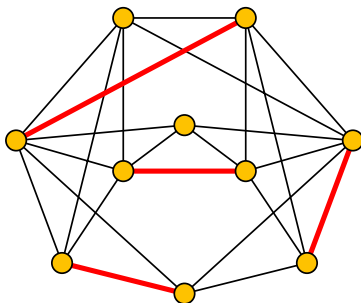
Az így megkonstruált  $G$  gráf síkgráf!

Indoklás: Minden ország belsejében vegyünk fel egy „fővárost” (pontot), ezek lesznek a csúcsok lerajzolásai. Minden határszakaszon „nyissunk egy határátkelőt”, és a fővárosból csilagszerűen, átmetszés nélkül vezessenek „autópályák” a határátkelőkhöz<sup>†</sup>. Így a szomszédos országok autópályái a határátkelőknél élgörbékké olvadnak össze, ezek épp az élek lerajzolásai lesznek. Az autópályákat úgy építettük, hogy nem jön létre élmetszés, ezzel  $G$ -t szépen rajzoltuk le. (Megjegyezzük, hogy  $G$ -ben nincs hurokél, mert egy határszakasz két oldalán két különböző ország fekszik a feltételeink szerint.)

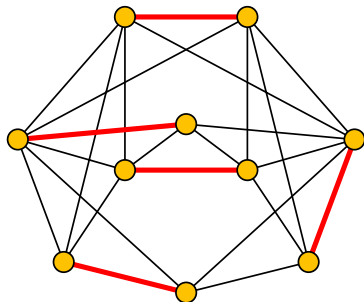
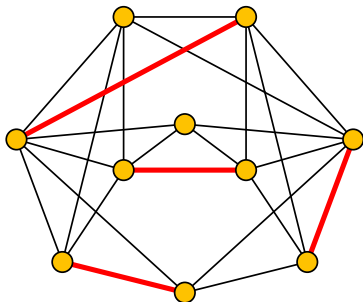
A térképszínezési problémára tehát igenlő választ ad a következő mély tétel (belátható, hogy valójában ekvivalens vele):

**Négyszín-tétel.** Minden hurokélmentes **síkgráf** csúcsai jól színezhetők 4 színnel. Másszóval, ha  $G$  hurokélmentes **síkgráf**, akkor  $\chi(G) \leq 4$ .

A  $G$  egyszerű gráfban egy  $M$  élhalmazt **párosításnak** nevezünk, ha semelyik két  $M$ -beli élnek nincs közös végpontja. Ekkor  $M$  végpontjaira azt mondjuk, hogy ezek az  $M$  által párosított pontok.



A  $G$  egyszerű gráfban egy  $M$  élhalmazt **párosításnak** nevezünk, ha semelyik két  $M$ -beli élnek nincs közös végpontja. Ekkor  $M$  végpontjaira azt mondjuk, hogy ezek az  $M$  által párosított pontok.



A  $G$  gráf egy párosítása **teljes**, ha  $G$  összes pontját párosítja. (A bal oldali ábrán látható párosítás nem teljes, a jobb oldali ábrán látható párosítás teljes.)

**Középiskolás feladat.** Bizonyítsuk be, hogy hat ember között mindig van három, akik páronként ismerik egymást vagy páronként nem ismerik egymást. (Az ismeretségek kölcsönösek.)

**Középiskolás feladat.** Bizonyítsuk be, hogy hat ember között mindig van három, akik páronként ismerik egymást vagy páronként nem ismerik egymást. (Az ismeretségek kölcsönösek.)

**Középiskolás feladat'.** Bizonyítsuk be, hogy a 6 pontú teljes gráf összes piros-kék élszínezésében megjelenik olyan háromszög, amelynek mindegyik éle ugyanolyan színű.

**Középiskolás feladat.** Bizonyítsuk be, hogy hat ember között mindig van három, akik páronként ismerik egymást vagy páronként nem ismerik egymást. (Az ismeretségek kölcsönösek.)

**Középiskolás feladat'.** Bizonyítsuk be, hogy a 6 pontú teljes gráf összes piros-kék élszínezésében megjelenik olyan háromszög, amelynek mindegyik éle ugyanolyan színű.

**Ramsey-tétel.** A  $4^k$  pontú teljes gráf összes piros-kék élszínezésében található  $k$  olyan pont, hogy a köztük haladó élek mind ugyanolyan színűek.

**Középiskolás feladat.** Bizonyítsuk be, hogy hat ember között mindig van három, akik páronként ismerik egymást vagy páronként nem ismerik egymást. (Az ismeretségek kölcsönösek.)

**Középiskolás feladat'.** Bizonyítsuk be, hogy a 6 pontú teljes gráf összes piros-kék élszínezésében megjelenik olyan háromszög, amelynek mindegyik éle ugyanolyan színű.

**Ramsey-tétel.** A  $4^k$  pontú teljes gráf összes piros-kék élszínezésében található  $k$  olyan pont, hogy a köztük haladó élek mind ugyanolyan színűek.

**Erdős Pál tétele.** A  $\lfloor \sqrt{2}^k \rfloor$  pontú teljes gráfnak van olyan piros-kék élszínezése, amelyben nem található  $k$  ilyen pont ( $k \geq 3$  esetén).

Köszönöm a figyelmet!

**SZÉCHENYI**  2020



MAGYARORSZÁG  
KORMÁNYA

**Európai Unió**  
Európai Szociális  
Alap



**BEFEKTETÉS A JÖVŐBE**