

Részhalmazok, multihalmazok, sorbaállítások

Bizonyítási és problémamegoldási módszerek a kombinatorikában

Pedagógus-továbbképzés
SZTE, 2022. február 4.

Nagy V. Gábor
egyetemi adjunktus
SZTE Bolyai Intézet

SZÉCHENYI 2020



Európai Unió
Európai Szociális
Alap



BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

A **halmaz** (informálisan) **különböző** objektumok összessége, melyek között **nincs sorrendiség**. („Egy zsák, amiben különböző dolgok vannak.”)

A **halmaz** (informálisan) **különböző** objektumok összessége, melyek között **nincs sorrendiség**. („Egy zsák, amiben különböző dolgok vannak.”)

Ha a H halmazból kiválasztunk néhány elemet úgy, hogy az elemek kiválasztásának sorrendje nem számít, akkor a lehetséges kiválasztások éppen az H **részhalmazai**.

A **halmaz** (informálisan) **különböző** objektumok összessége, melyek között **nincs sorrendiség**. („Egy zsák, amiben különböző dolgok vannak.”)

Ha a H halmazból kiválasztunk néhány elemet úgy, hogy az elemek kiválasztásának sorrendje nem számít, akkor a lehetséges kiválasztások éppen az H **részhalmazai**.

Szemléltetés. $H = \{a, b, c\}$ részhalmazai:

			<u>a</u> <u>b</u> <u>c</u>		<u>a</u> <u>b</u> <u>c</u>
$\emptyset$		a b c	○ ○ ○		0 0 0
$\{a\}$		a b c	● ○ ○		1 0 0
$\{b\}$		a b c	○ ● ○		0 1 0
$\{c\}$	$\equiv$	a b c	○ ○ ●	$\equiv$	0 0 1
$\{a, b\}$		a b c	● ● ○		1 1 0
$\{a, c\}$		a b c	● ○ ●		1 0 1
$\{b, c\}$		a b c	○ ● ●		0 1 1
$\{a, b, c\}$		a b c	● ● ●		1 1 1

Tétel. Egy n elemű halmaznak 2^n darab részhalmaza van.

Tétel. Egy n elemű halmaznak 2^n darab részhalmaza van.

Tétel. Egy n elemű halmaznak $\binom{n}{k}$ darab k -elemű részhalmaza van (tetszőleges $0 \leq k \leq n$ esetén), ahol

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Tétel. Egy n elemű halmaznak 2^n darab részhalmaza van.

Tétel. Egy n elemű halmaznak $\binom{n}{k}$ darab k -elemű részhalmaza van (tetszőleges $0 \leq k \leq n$ esetén), ahol

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

A 2. tételt úgy mondjuk középiskolában, hogy n különböző elemből $\binom{n}{k}$ -féleképpen lehet k elemet kiválasztani, ha a kiválasztott elemek között nincs sorrendiség.

Tétel. Egy n elemű halmaznak 2^n darab részhalmaza van.

Tétel. Egy n elemű halmaznak $\binom{n}{k}$ darab k -elemű részhalmaza van (tetszőleges $0 \leq k \leq n$ esetén), ahol

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

A 2. tételt úgy mondjuk középiskolában, hogy n különböző elemből $\binom{n}{k}$ -féleképpen lehet k elemet kiválasztani, ha a kiválasztott elemek között nincs sorrendiség. (n elem k -ad osztályú ismétlés nélküli kombinációiról is szoftunk beszélni, de ezzel csak megijesztjük a diákokat.)

A **multihalmaz** (informálisan) **nem feltétlenül különböző** objektumok összessége, melyek között **nincs sorrendiség**. („Egy zsák, amelyben lehetnek egyforma dolgok is.”)

A **multihalmaz** (informálisan) **nem feltétlenül különböző** objektumok összessége, melyek között **nincs sorrendiség**. („Egy zsák, amelyben lehetnek egyforma dolgok is.”)

Példa. Az $M = \{1, 1, 1, \text{Szeged}, \text{Szeged}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, 2022, 0, 0\}_{\text{multi}}$ egy 11 elemű multihalmaz.

A **multihalmaz** (informálisan) **nem feltétlenül különböző** objektumok összessége, melyek között **nincs sorrendiség**. („Egy zsák, amelyben lehetnek egyforma dolgok is.”)

Példa. Az $M = \{1, 1, 1, \text{Szeged}, \text{Szeged}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, 2022, 0, 0\}_{\text{multi}}$ egy 11 elemű multihalmaz.

Egy M multihalmazt kényelmesebb (és hasznosabb) úgy megadni, hogy először megadjuk az M -ben előforduló különböző elemek (elemfajták) H **halmazát**, majd megmondjuk, hogy melyik elem(fajta) hányszor szerepel M -ben. A H halmazt M **alaphalmazának** nevezzük; azt hogy egy h elem hányszor szerepel M -ben, a h elem (M -beli) **multiplicitásának** nevezzük.

A **multihalmaz** (informálisan) **nem feltétlenül különböző** objektumok összessége, melyek között **nincs sorrendiség**. („Egy zsák, amelyben lehetnek egyforma dolgok is.”)

Példa. Az $M = \{1, 1, 1, \text{Szeged}, \text{Szeged}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, 2022, 0, 0\}_{\text{multi}}$ egy 11 elemű multihalmaz.

Egy M multihalmazt kényelmesebb (és hasznosabb) úgy megadni, hogy először megadjuk az M -ben előforduló különböző elemek (elemfajták) H **halmazát**, majd megmondjuk, hogy melyik elem(fajta) hányszor szerepel M -ben. A H halmazt M **alaphalmazának** nevezzük; azt hogy egy h elem hányszor szerepel M -ben, a h elem (M -beli) **multiplicitásának** nevezzük.

Példa. A fenti példára az alaphalmaz $H = \{1, \text{Szeged}, \sqrt{3}, 2022, 0\}$, a multiplicitások pedig

$$1 \mapsto 3, \quad \text{Szeged} \mapsto 2, \quad \sqrt{3} \mapsto 3, \quad 2022 \mapsto 1, \quad 0 \mapsto 2.$$

A **multihalmaz** (informálisan) **nem feltétlenül különböző** objektumok összessége, melyek között **nincs sorrendiség**. („Egy zsák, amelyben lehetnek egyforma dolgok is.”)

Példa. Az $M = \{1, 1, 1, \text{Szeged}, \text{Szeged}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, 2022, 0, 0\}_{\text{multi}}$ egy 11 elemű multihalmaz.

Egy M multihalmazt kényelmesebb (és hasznosabb) úgy megadni, hogy először megadjuk az M -ben előforduló különböző elemek (elemfajták) H **halmazát**, majd megmondjuk, hogy melyik elem(fajta) hányszor szerepel M -ben. A H halmazt M **alaphalmazának** nevezzük; azt hogy egy h elem hányszor szerepel M -ben, a h elem (M -beli) **multiplicitásának** nevezzük.

Megjegyzés. Technikai okokból a 0 multiplicitást is megengedjük, így a H halmaz nem egyértelmű. Például a fenti M alaphalmazába belevehetjük Budapestet is, azzal, hogy az M -beli multiplicitása 0.

Egy M multihalmaz **részmultihalmazán** egy olyan (ugyanolyan alaphalmazú) N multihalmazt értünk, amelyben minden elem multiplicitása legfeljebb akkora, mint M -ben. (Azaz N -et megkaphatjuk M -ből elemek törlésével.)

Egy M multihalmaz **részmultihalmazán** egy olyan (ugyanolyan alaphalmazú) N multihalmazt értünk, amelyben minden elem multiplicitása legfeljebb akkora, mint M -ben. (Azaz N -et megkaphatjuk M -ből elemek törlésével.)

Tétel. Ha a $H = \{h_1, \dots, h_n\}$ alaphalmaz feletti M multihalmazban a h_i elem multiplicitása m_i ($i = 1, \dots, n$), akkor M részmultihalmazai száma

$$(m_1 + 1)(m_2 + 1) \cdots (m_n + 1).$$

Ez az n elemű halmaz részhalmái számának általánosítása. (Miért?)

Egy M multihalmaz **részmultihalmazán** egy olyan (ugyanolyan alaphalmazú) N multihalmazt értünk, amelyben minden elem multiplicitása legfeljebb akkora, mint M -ben. (Azaz N -et megkaphatjuk M -ből elemek törlésével.)

Tétel. Ha a $H = \{h_1, \dots, h_n\}$ alaphalmaz feletti M multihalmazban a h_i elem multiplicitása m_i ($i = 1, \dots, n$), akkor M részmultihalmazai száma

$$(m_1 + 1)(m_2 + 1) \cdots (m_n + 1).$$

T. Egy rögzített n elemű alaphalmaz feletti k elemű multihalmazok száma

$$\binom{\binom{n}{k}}{k} = \binom{n+k-1}{k}.$$

Egy n elemű H halmaz feletti k elemű multihalmaz tekinthető a H -ból k elem visszatevéses kihúzásával kapott kimenetelnek (ha az elemek kihúzási sorrendje nem számít), azaz az n elem k -ad osztályú ismétléses kombinációjának.

Feladat. Soroljuk fel az összes olyan 3-betűs „szót”, amelynek első betűje A , B vagy C ; második betűje w , x , y vagy z ; a harmadik betűje pedig α vagy β .

Feladat. Soroljuk fel az összes olyan 3-betűs „szót”, amelynek első betűje A , B vagy C ; második betűje w , x , y vagy z ; a harmadik betűje pedig α vagy β .

Kapcsolódik.

$$\begin{aligned}(A + B + C)(w + x + y + z)(\alpha + \beta) = \\ Aw\alpha + Aw\beta + Ax\alpha + Ax\beta + Ay\alpha + Ay\beta + Az\alpha + Az\beta + \\ Bw\alpha + Bw\beta + Bx\alpha + Bx\beta + By\alpha + By\beta + Bz\alpha + Bz\beta + \\ Cw\alpha + Cw\beta + Cx\alpha + Cx\beta + Cy\alpha + Cy\beta + Cz\alpha + Cz\beta.\end{aligned}$$

Feladat. Soroljuk fel az összes olyan 3-betűs „szót”, amelynek első betűje A , B vagy C ; második betűje w , x , y vagy z ; a harmadik betűje pedig α vagy β .

Kapcsolódik.

$$\begin{aligned}(A + B + C)(w + x + y + z)(\alpha + \beta) = \\ Aw\alpha + Aw\beta + Ax\alpha + Ax\beta + Ay\alpha + Ay\beta + Az\alpha + Az\beta + \\ Bw\alpha + Bw\beta + Bx\alpha + Bx\beta + By\alpha + By\beta + Bz\alpha + Bz\beta + \\ Cw\alpha + Cw\beta + Cx\alpha + Cx\beta + Cy\alpha + Cy\beta + Cz\alpha + Cz\beta.\end{aligned}$$

Észrevétel. Amikor egy n -tényezős szorzatban (ahol mindegyik tényező egy összeg) „felbontjuk a zárójeleket”, azaz minden tagot minden taggal összeszorozunk, akkor egy kombinatorika feladatot oldunk meg: Pluszjelekkel elválasztva fel kell írni az összes olyan n -tényezős szorzatot, amelynek első tényezője az 1. zárójel valamelyik tagja, a 2. tényezője a 2. zárójel valamelyik tagja, és így tovább. (Majd utána még összevonjuk, amit lehet.)

Köszönöm a figyelmet!

SZÉCHENYI 



MAGYARORSZÁG
KORMÁNYA

Európai Unió
Európai Szociális
Alap



BEFEKTETÉS A JÖVŐBE