

EFOP-3.4.3-16-2016-00014

A kombinatorika alapelvei

Bizonyítási és problémamegoldási módszerek a kombinatorikában

Pedagógus-továbbképzés
SZTE, 2022. február 4.

Nagy V. Gábor
egyetemi adjunktus
SZTE Bolyai Intézet

SZÉCHENYI 2020



MAGYARORSZÁG
KORMÁNYA

Európai Unió
Európai Szociális
Alap



BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

Egy tipikus kombinatorika feladat.

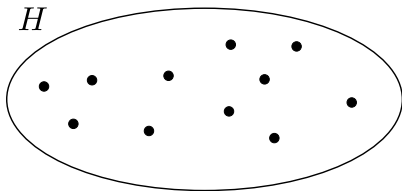
Hány 5-tel osztható hétjegyű palindrom szám van?

Egy tipikus kombinatorika feladat.

Hány 5-tel osztható hétjegyű palindrom szám van?

A kombinatorika alapproblémája.

Egy **összeszámlálási feladat** egy adott H halmaz elemszámának meghatározását kéri.



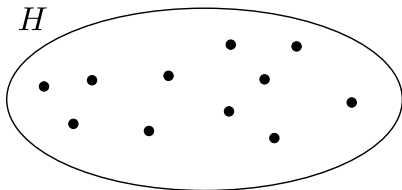
$$|H| = ?$$

Egy tipikus kombinatorika feladat.

Hány 5-tel osztható hétjegyű palindrom szám van?

A kombinatorika alapproblémája.

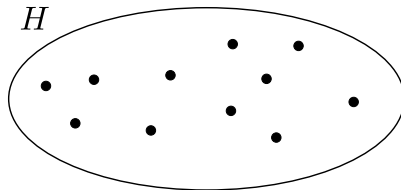
Egy **összeszámlálási feladat** egy adott H halmaz elemszámának meghatározását kéri.



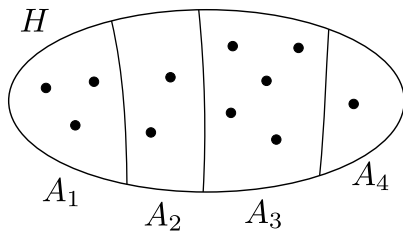
$$|H| = ?$$

A megszámlolandó objektumokat ugyanis belerakhatjuk egy halmazba. Például a fenti feladatban az **5-tel osztható hétjegyű palindrom számok halmazának** elemszámát kell meghatározni.

Mikor adunk össze?

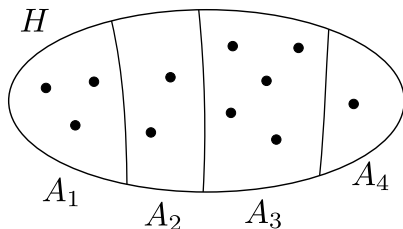


Mikor adunk össze? Amikor osztályozunk (= csoportosítunk).



$$|H| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| = 3 + 2 + 5 + 1 = 11.$$

Mikor adunk össze? Amikor osztályozunk (= csoportosítunk).



$$|H| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| = 3 + 2 + 5 + 1 = 11.$$

Összeadási alapelv. Ha a H véges halmaz elemeit osztályozzuk az

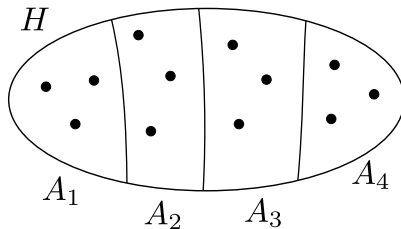
$$A_1, A_2, \dots, A_k \subseteq H$$

halmazokba (tehát H minden eleme pontosan egy A_i halmazban szerepel), akkor

$$|H| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_k|.$$

Mikor szorzunk?

Mikor szorzunk? 1. Egyrészt akkor, amikor több egyforma méretű osztályt is kialakítunk, és az összeadási alapelv alkalmazásakor ezen osztályok elemszámának összege szorzással adódik. (Általános iskola: A szorzás ismételt összeadás.)



$$|H| = 3 + 3 + 3 + 3 = 4 \cdot 3.$$

Mikor szorzunk? 2. Másrészt akkor, ha egy összeszámlálási problémánál efféle szituációba kerülünk: „... Ennek a valaminek a megválasztására 3 lehetőség van, a tőle független *másik* valaminek a megválasztására pedig 5 lehetőség van, további megkötések nélkül.”

Majd ebből arra a következtetünk, hogy „Ez összesen $3 \cdot 5 = 15$ lehetőség.”

Mikor szorzunk? 2. Másrészt akkor, ha egy összeszámlálási problémánál efféle szituációba kerülünk: „... Ennek a valaminek a megválasztására 3 lehetőség van, a tőle független *másik* valaminek a megválasztására pedig 5 lehetőség van, további megkötések nélkül.”

Majd ebből arra a következtetünk, hogy „Ez összesen $3 \cdot 5 = 15$ lehetőség.”

Szorzási alapelv. Tetszőleges $A_1, \dots, A_k$ véges halmazokra

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_k|.$$

Mikor szorzunk? 2. Másrészt akkor, ha egy összeszámlálási problémánál efféle szituációba kerülünk: „... Ennek a valaminek a megválasztására 3 lehetőség van, a tőle független *másik* valaminek a megválasztására pedig 5 lehetőség van, további megkötések nélkül.”

Majd ebből arra a következtetünk, hogy „Ez összesen $3 \cdot 5 = 15$ lehetőség.”

Szorzási alapelv. Tetszőleges $A_1, \dots, A_k$ véges halmazokra

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_k|.$$

Emlékeztető. Az $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$ azon k -asok ($\approx k$ hosszú sorozatok) halmazát jelöli, amelyek első eleme A_1 -ből, második eleme A_2 -ből, ..., k -adik eleme A_k -ből kerül ki. Formálisan,

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k = \{(a_1, a_2, \dots, a_k) : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_k \in A_k\}.$$

Mikor szorzunk? 2. Másrészt akkor, ha egy összeszámlálási problémánál efféle szituációba kerülünk: „... Ennek a valaminek a megválasztására 3 lehetőség van, a tőle független *másik* valaminek a megválasztására pedig 5 lehetőség van, további megkötések nélkül.”

Majd ebből arra a következtetünk, hogy „Ez összesen $3 \cdot 5 = 15$ lehetőség.”

Szorzási alapelv. Tetszőleges $A_1, \dots, A_k$ véges halmazokra

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_k|.$$

A fenti példában ha A_1 jelöli az „egyik valami”-re vonatkozó választási lehetőségek halmazát, A_2 jelöli a „másik valami”-re vonatkozó választási lehetőségek halmazát, akkor az $A_1 \times A_2$ halmaz elemeire (a rendezett párokra) tekinthetünk úgy, hogy egy rendezett pár a két választás eredménye **együtt**.

Egy összeszámlálási feladat megoldásában az a nehéz (nem mechanikus) rész, hogy megtaláljuk, hogy **hogyan** kell az összeszámolandó dolgokat úgy osztályozni, hogy az osztályok elemszámát már könnyen meg tudjuk határozni (például a szorzási alapelvvel, vagy a „kombinációk képletével” stb.).

Egy összeszámlálási feladat megoldásában az a nehéz (nem mechanikus) rész, hogy megtaláljuk, hogy **hogyan** kell az összeszámolandó dolgokat úgy osztályozni, hogy az osztályok elemszámát már könnyen meg tudjuk határozni (például a szorzási alapelvvel, vagy a „kombinációk képletével” stb.).

Egy ilyen osztályozást szerintem úgy lehet megtalálni, hogy megpróbáljuk képzeletben legenerálni (szisztematikusan felsorolni) az összeszámolandó objektumokat. Ha van egy olyan egyszerű szisztémánk, amivel kimaradás és ismétlődés nélkül le tudjuk gyártani az összes objektumot, akkor ezzel sokszor meg is találtuk a természetes osztályozást.

Egy összeszámlálási feladat megoldásában az a nehéz (nem mechanikus) rész, hogy megtaláljuk, hogy **hogyan** kell az összeszámolandó dolgokat úgy osztályozni, hogy az osztályok elemszámát már könnyen meg tudjuk határozni (például a szorzási alapelvvel, vagy a „kombinációk képletével” stb.).

Egy ilyen osztályozást szerintem úgy lehet megtalálni, hogy megpróbáljuk képzeletben legenerálni (szisztematikusan felsorolni) az összeszámolandó objektumokat. Ha van egy olyan egyszerű szisztémánk, amivel kimaradás és ismétlődés nélkül le tudjuk gyártani az összes objektumot, akkor ezzel sokszor meg is találtuk a természetes osztályozást.

Ezért segít, ha a diákokkal megpróbáljuk felsoroltatni az összes lehetőséget. Kérdezzük meg, hogy meg tudja-e indokolni, hogy valóban megadta az összeset. (Ha meg tudja, akkor jó eséllyel félig már meg is oldotta a feladatot.)

Egy összeszámlálási feladat megoldásában az a nehéz (nem mechanikus) rész, hogy megtaláljuk, hogy **hogyan** kell az összeszámlolandó dolgokat úgy osztályozni, hogy az osztályok elemszámát már könnyen meg tudjuk határozni (például a szorzási alapelvvel, vagy a „kombinációk képletével” stb.).

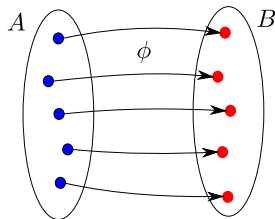
Egy ilyen osztályozást szerintem úgy lehet megtalálni, hogy megpróbáljuk képzeletben legenerálni (szisztematikusan felsorolni) az összeszámlolandó objektumokat. Ha van egy olyan egyszerű szisztémánk, amivel kimaradás és ismétlődés nélkül le tudjuk gyártani az összes objektumot, akkor ezzel sokszor meg is találtuk a természetes osztályozást.

Ezért segít, ha a diákokkal megpróbáljuk felsoroltatni az összes lehetőséget. Kérdezzük meg, hogy meg tudja-e indokolni, hogy valóban megadta az összeset. **(Ha meg tudja, akkor jó eséllyel félig már meg is oldotta a feladatot.)**

Sokszor nem közvetlenül az objektumokat számoljuk meg, hanem „elkódoljuk” őket valahogy, és a kódokat számoljuk össze. **(Erről lesz szó a következő dián.)**

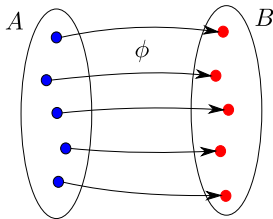
Definíció. A $\phi: A \rightarrow B$ leképezés **bijekció** (vagy **párbaállító leképezés**), ha

- **injektív**, azaz különböző A -beli elemek képe különböző (tehát $a_1 \neq a_2$ esetén $\phi(a_1) \neq \phi(a_2)$), **ÉS**
- **szürjektív**, azaz minden B -beli elem előáll képként (tehát tetszőleges $b \in B$ elemhez található olyan $a \in A$ elem, amelyre $\phi(a) = b$).



Definíció. A $\phi: A \rightarrow B$ leképezés **bijekció** (vagy **párbaállító leképezés**), ha

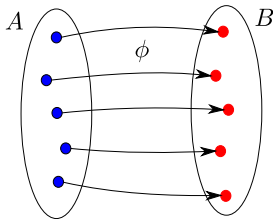
- **injektív**, azaz különböző A -beli elemek képe különböző (tehát $a_1 \neq a_2$ esetén $\phi(a_1) \neq \phi(a_2)$), **ÉS**
- **szürjektív**, azaz minden B -beli elem előáll képként (tehát tetszőleges $b \in B$ elemhez található olyan $a \in A$ elem, amelyre $\phi(a) = b$).



Kombinatorikusabb (ekvivalens) definíció. A $\phi: A \rightarrow B$ leképezés **bijekció**, ha minden B -beli elemnek **pontosan egy** őse van A -ban.

Definíció. A $\phi: A \rightarrow B$ leképezés **bijekció** (vagy **párbaállító leképezés**), ha

- **injektív**, azaz különböző A -beli elemek képe különböző (tehát $a_1 \neq a_2$ esetén $\phi(a_1) \neq \phi(a_2)$), **ÉS**
- **szürjektív**, azaz minden B -beli elem előáll képként (tehát tetszőleges $b \in B$ elemhez található olyan $a \in A$ elem, amelyre $\phi(a) = b$).



Bijekciós alapelv. Ha A, B véges halmazok között létezik $A \rightarrow B$ bijekció, akkor a két halmaznak ugyanannyi eleme van.

Ekkor A elemszámának meghatározásához elég B elemszámát meghatározni.

Kettős leszámolás. Ha egy összeszámlálási problémát kétféleképpen is megoldunk (helyesen), akkor a két válasz egyenlő.

Kettős leszámolás. Ha egy összeszámlálási problémát kétféleképpen is megoldunk (helyesen), akkor a két válasz egyenlő.

Ez teljesen nyilvánvaló. Mégis, néha két mennyiség egyenlőségét a legegyszerűbb úgy bizonyítani, hogy találunk egy olyan összeszámlálási problémát, amelyről be tudjuk látni, hogy mindkét mennyiség az erre adott válasz.

Kettős leszámolás. Ha egy összeszámlálási problémát kétféleképpen is megoldunk (helyesen), akkor a két válasz egyenlő.

Ez teljesen nyilvánvaló. Mégis, néha két mennyiség egyenlőségét a legegyszerűbb úgy bizonyítani, hogy találunk egy olyan összeszámlálási problémát, amelyről be tudjuk látni, hogy mindkét mennyiség az erre adott válasz.

Példa.

$$\sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} = 2^n,$$

mert mindkét oldal $\{1, 2, \dots, n\}$ részhalmazait számolja meg. Pusztán algebrai eszközökkel még az sem világos első látásra, hogy a bal oldal egész szám.

Skatulyaelv. Ha $m + 1$ tárgyat szétosztunk m skatulyába, akkor lesz olyan skatulya, amelybe legalább 2 tárgy kerül.

Skatulyaelv. Ha $m + 1$ tárgyat szétsztunk m skatulyába, akkor lesz olyan skatulya, amelybe legalább 2 tárgy kerül.

Bizonyítás. (Indirekt.) Ha minden skatulyába legfeljebb 1 tárgy kerülne, akkor a skatulyákban összesen legfeljebb $\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{m\text{-szer}} = m$ tárgy lenne, ami ellentmondás, mert $m + 1$ tárgyat osztottunk szét. $\square$

Csak arról van szó, hogy ha s_i -vel jelöljük az i -edik skatulyába kerülő tárgyak számát, akkor

$$s_1 \leq 1, s_2 \leq 1, \dots, s_m \leq 1 \implies s_1 + s_2 + \dots + s_m \leq \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{m\text{-szer}} = m.$$

Skatulyaelv. Ha $m + 1$ tárgyat szétosztunk m skatulyába, akkor lesz olyan skatulya, amelybe legalább 2 tárgy kerül.

Bizonyítás. (Indirekt.) Ha minden skatulyába legfeljebb 1 tárgy kerülne, akkor a skatulyákban összesen legfeljebb $\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{m\text{-szer}} = m$ tárgy lenne, ami ellentmondás, mert $m + 1$ tárgyat osztottunk szét. $\square$

Általánosított skatulyaelv. Ha n tárgyat szétosztunk m skatulyába, akkor

- Lesz olyan skatulya, amelybe legalább n/m (tehát legalább $\lceil n/m \rceil$) tárgy kerül.
- Lesz olyan skatulya, amelybe legfeljebb n/m (tehát legfeljebb $\lfloor n/m \rfloor$) tárgy kerül.

Skatulyaelv. Ha $m + 1$ tárgyat szétosztunk m skatulyába, akkor lesz olyan skatulya, amelybe legalább 2 tárgy kerül.

Bizonyítás. (Indirekt.) Ha minden skatulyába legfeljebb 1 tárgy kerülne, akkor a skatulyákban összesen legfeljebb $\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{m\text{-szer}} = m$ tárgy lenne, ami ellentmondás, mert $m + 1$ tárgyat osztottunk szét. $\square$

Általánosított skatulyaelv. Ha n tárgyat szétosztunk m skatulyába, akkor

- Lesz olyan skatulya, amelybe legalább n/m (tehát legalább $\lceil n/m \rceil$) tárgy kerül.
- Lesz olyan skatulya, amelybe legfeljebb n/m (tehát legfeljebb $\lfloor n/m \rfloor$) tárgy kerül.

Bizonyítás. Hasonlóan. $\square$

Köszönöm a figyelmet!

SZÉCHENYI  2020



MAGYARORSZÁG
KORMÁNYA

Európai Unió
Európai Szociális
Alap



BEFEKTETÉS A JÖVŐBE