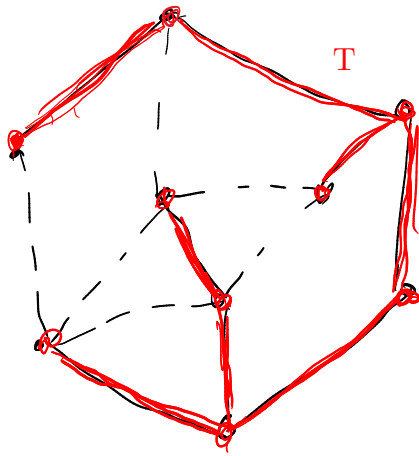




feszítőfa

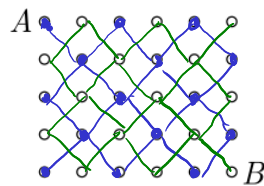
Def: Egy G gráf bizonyos éleiből és csúcsaiból álló (rész)gráf feszítőfa, ha a G összes csúcsát tartalmazza.

Áll: Minden összefüggő gráfnak van feszítőfája.

Köv: Minden n pontú összefüggő gráfnak legalább $n-1$ éle van. (Már a feszítőfának van ennyi.)

Áll: Ha egy n pontú gráfnak legalább n éle van, akkor a gráfban van kör.

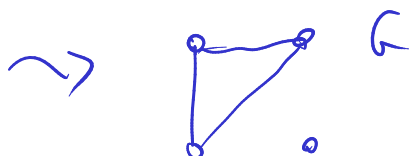
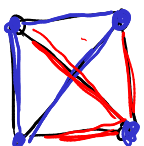
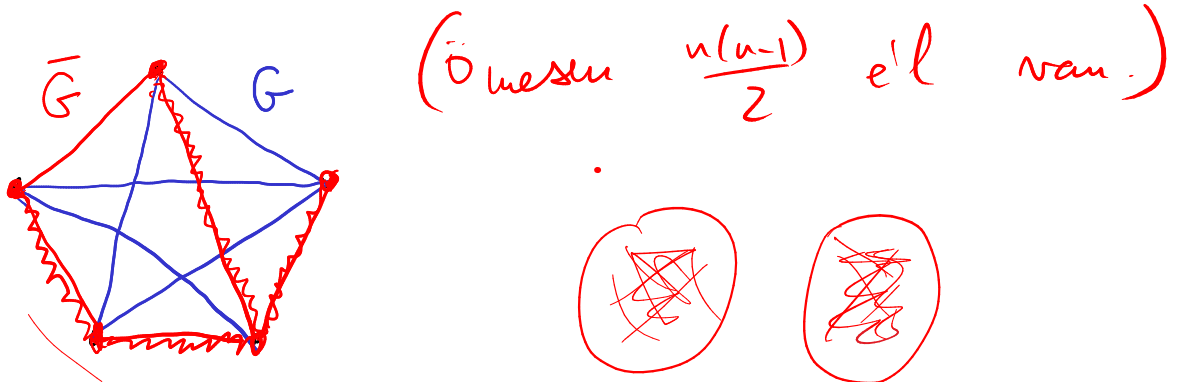
1.- Az ábrán látható karikák egy telken lévő gyümölcsfákat jelölik.



Az A -val jelölt fán egy cinke, a B -vel jelölt fán egy rigó ül. Mindkét madár az egyik fáról csak a legközelebbi ÉNy-i, ÉK-i, DNy-i vagy DK-i irányban lévő fák egyikére repül. Lehetséges-e, hogy valamikor mindkettő ugyanazon a fán ül?

Sakktáblaszerűen színezve a csúcsokat látszik, hogy az A -val jelölt madár mindig kék, a B -vel jelölt madár mindig fehér fán lesz, így nem lehetnek ugyanazon a fán soha.

10. Igazoljuk, hogy ha egy (legalább 2 pontú) teljes gráf éleit pirosra és kékre színezzük, akkor kialakul olyan feszítőfa, melynek minden éle ugyanolyan színű.

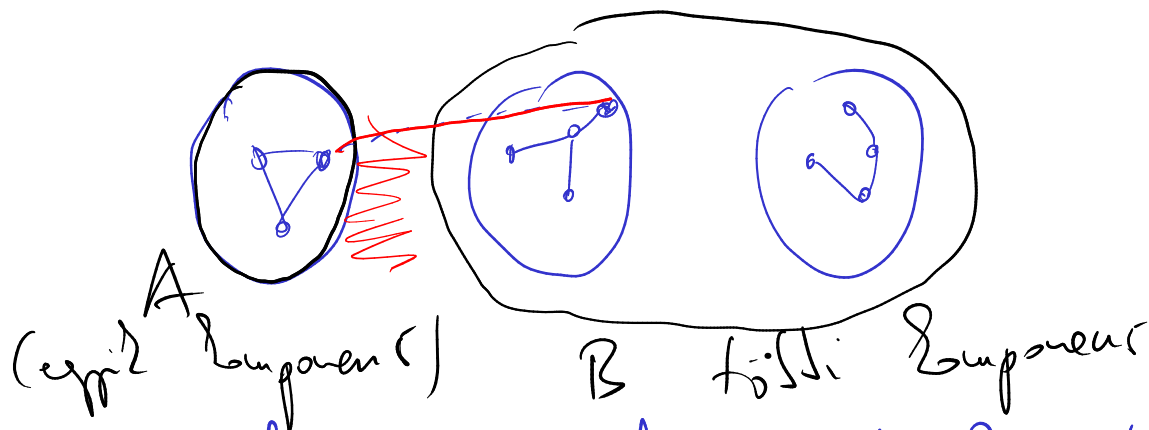
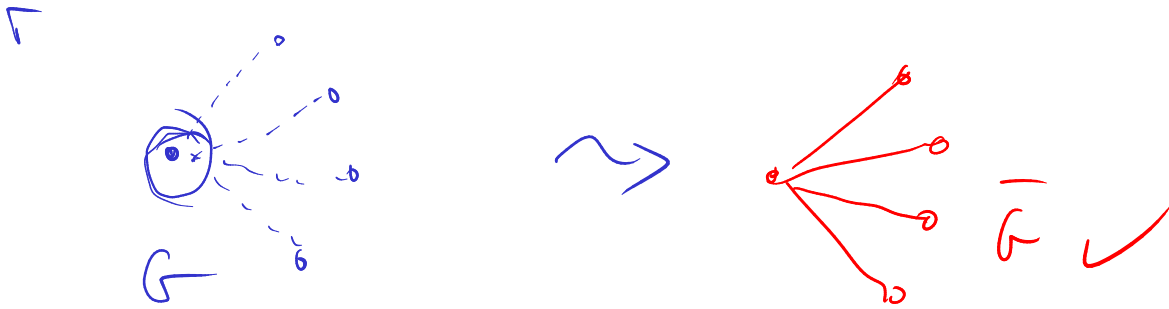


G öf. $\Leftrightarrow G$ -nek van feszítőfája

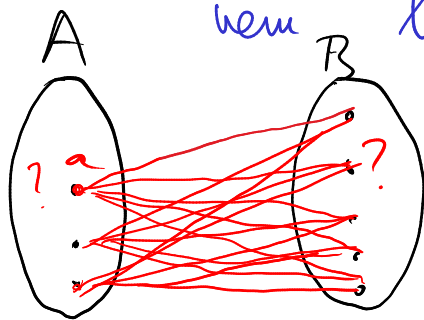
Kell: G vagy $\bar{G}$ (G komplementere) öf.
 totus. G esetén.

Biz: Ha G öf. ✓

Kell: Ha G nem öf., akkor $\bar{G}$ az.



G nem öf. $\Rightarrow$ Van olyan $A \cup B$ osztályozás
 a csúcsokhoz, hogy A és B között
 nem létezik él (G -ben), azaz

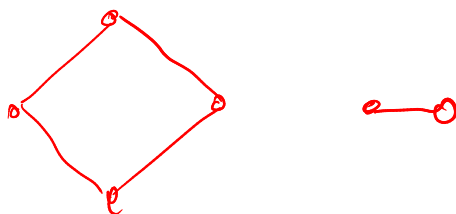


$\bar{G}$ -ben az ömcs lehet
 seges el $\&$ van
 között A és B között.

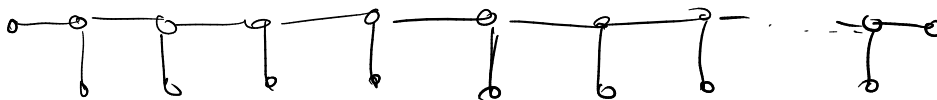
$\Rightarrow \bar{G}$ öf. (Egy csúcsból, pl. $a \in A$ -ból
 el lehet jutni az ömcs csúcsokhoz:
 a B -beli csúcsokhoz közvetlenül, a többi
 A -beli csúcsba egy B -beli közbejáraton keresztül).

□

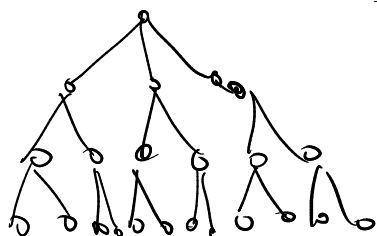
$$n=8$$



6. Egy 2022 pontú fában minden csúcs foka 1 vagy 3. Hány levele van a fának?



Tudjuk: 2021 éle van a fának.



Hé x db 1 fokú csúcs van, akkor $2022-x$ db 3 fokú csúcs van.

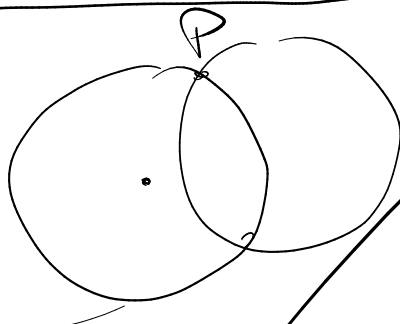
Fokszám-tétel: fokszámok összege = $2 \cdot$ él szám

$$x \cdot 1 + (2022 - x) \cdot 3 = 2 \cdot 2021$$

$$3 \cdot 2022 - 2x = 2 \cdot 2021$$

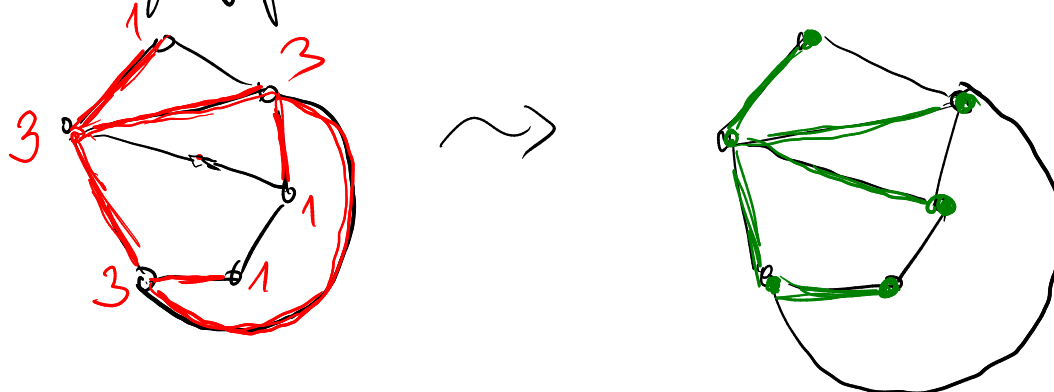
$$2x = 3 \cdot 2022 - 2 \cdot 2021$$

$$x = \underline{\underline{1012}} \text{ levele van. } \square$$

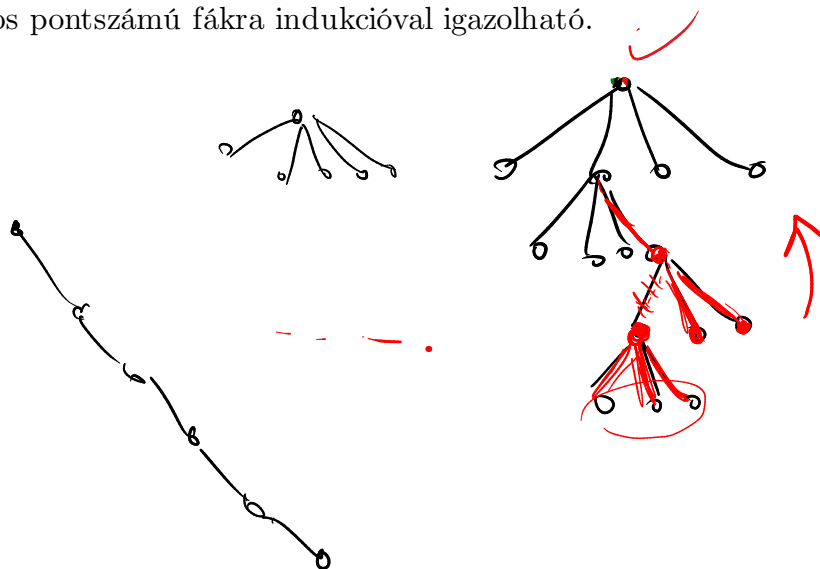


16.+ Egy középkori országban 1000 város van, és bizonyos városok közvetlen földúttal vannak összekötve (csak városokban van útkereszteződés). Ezen az úthálózaton bármelyik városból bármelyik másikba el lehet jutni. Az uralkodó szeretne bizonyos földutakat leköveztetni úgy, hogy minden városból páratlan sok kövesút induljon ki. Mutassuk meg, hogy ez megtehető.

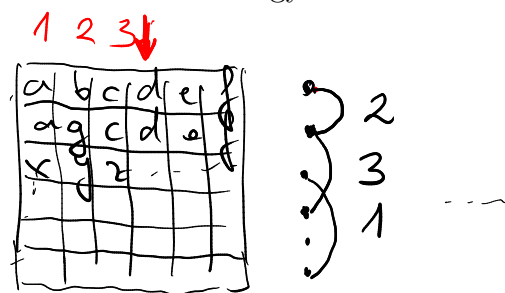
G öf. graffal írható le az úthálózat.



Elég 1000 pontú fákra igazolni, mert tekinthetjük az úthálózat feszítőfáját mindig. Páros pontszámú fákra indukcióval igazolható.



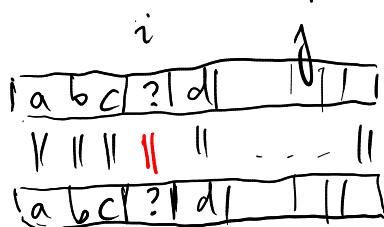
17.+ Egy $n \times n$ -es táblázat minden mezőjében egy-egy betű van. A táblázat bármely két sora különböző. Bizonyítsuk be, hogy a táblázatnak van olyan oszlopa, amelyet elhagyva a megmaradó táblázatnak sincs két egyező sora.



Indirekt bizonyítunk: Tfh. bárhogy hagyunk el egy oszlopot, lesz két egyforma sor.

Ezt szemléltetjük egy gráffal. Minden sorra felvesszünk egy csúcsot, és minden oszlopra felvesszünk egy élt, amely azt a két sort köti össze, amely az oszlop elhagyása után egyforma lesz. (Ha több ilyen sor is van, akkor 2-t tekintünk csak.)

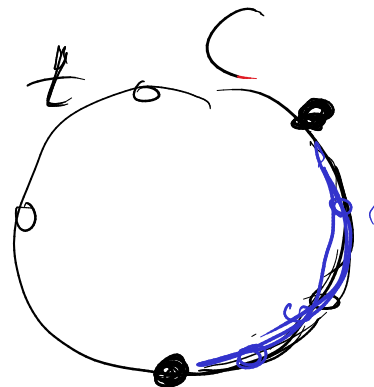
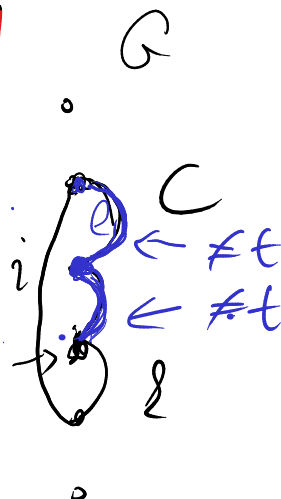
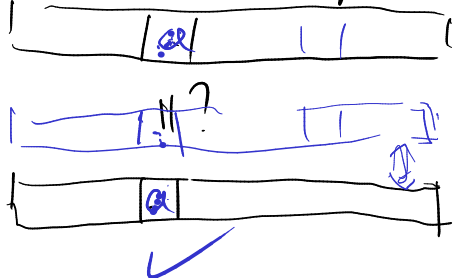
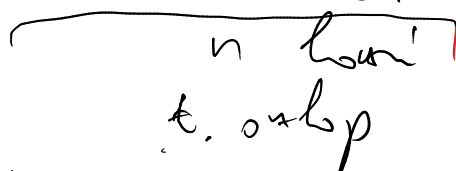
1. észrevétel: Ez egy egyszerű gráf lesz, ebben a segédgráfban két csúcs között max 1 él lesz.



NEM LEHET

Ekkor a két sor eredetileg is megegyezett volna!

G egy n pontú gráf, amelynek n éle van. Ha egy n pontú gráfnak legalább n éle van, akkor tartalmaz kört. $\Rightarrow G$ -ben van kör.

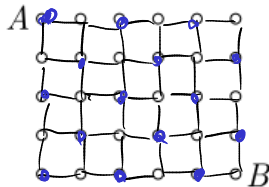
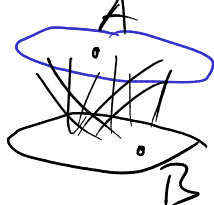


Nem nehéz látni, hogy a C csúcsainak megfelelő sorok az eredeti gráfban megegyeztek. Ami ellentmondás, készen vagyunk.

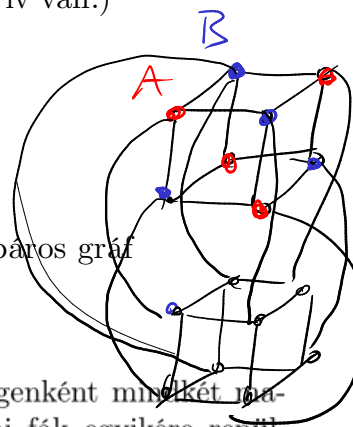
Tekintsünk két tetszőleges sort, amelyek C -beli csúcsoknak felelnek meg, és ennek a két sornak tekintsük a t -edik elemeit. Azt kell belátni, hogy ezek az elemek egyenlők.

Nézzük C -nek azt az ívét, amelyiken nincs t -nek megfelelő él. (Ilyen ív van.)

1. Az ábrán látható karikák egy telken lévő gyümölcsfákat jelölik.

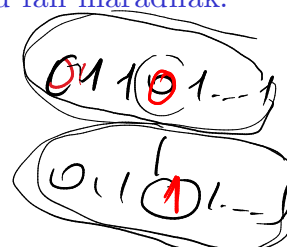
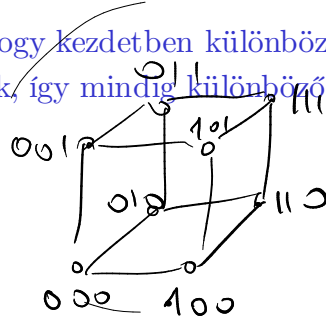
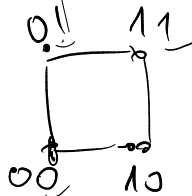


Ez egy páros gráf



Az A -val jelölt fán egy cinke, a B -vel jelölt fán egy rigó ül. Időegységenként mindkét madár a tőle északi, déli, keleti vagy nyugati irányban álló legközelebbi fák egyikére repül. Lehetséges-e, hogy valamikor mindketten ugyanazon a fán ülnek?

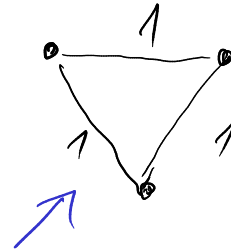
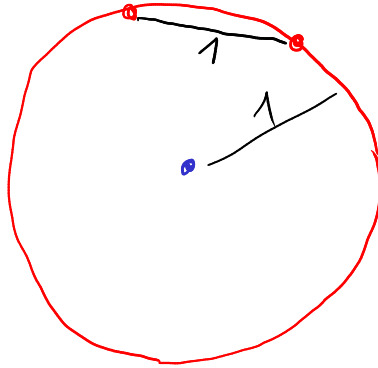
Ismét sakktáblaszerűen színezve a fákat látjuk, hogy kezdetben különböző színű fán vannak, és minden időegységben színt váltanak a madarak, így mindig különböző színű fán maradnak. A válasz: NEM.



Az n -dimenziós kockagráf páros: A páros bitösszegű csúcsokat pirosra, a páratlan bitösszegű csúcsokat kékre színezve egy jó színezést kapunk.

4. A sík pontjait kiszínezzük három színnel. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges színezés esetén lesz két pont, amelyek távolsága egységnyi, és amelyek azonos színűek.

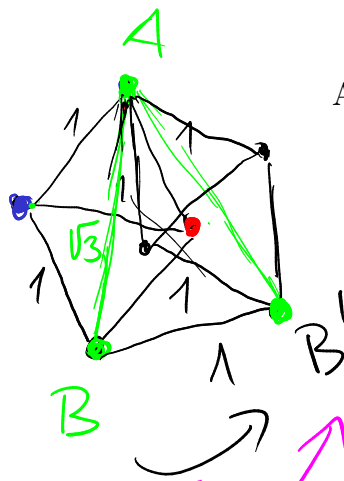
2 szín esetén:



Már ezen 3 csúcs
színezésénél (2 színnel)
szálszál 1-távolságra
lévó egyenlő pontok.

Indirekt tfh úgy van színezve a sík 3 színnel, hogy nem jön létre...

Há 3 színnel van, akkor minden egység oldalú szabályos háromszög csúcsait 3 különböző színnel kell színezni.



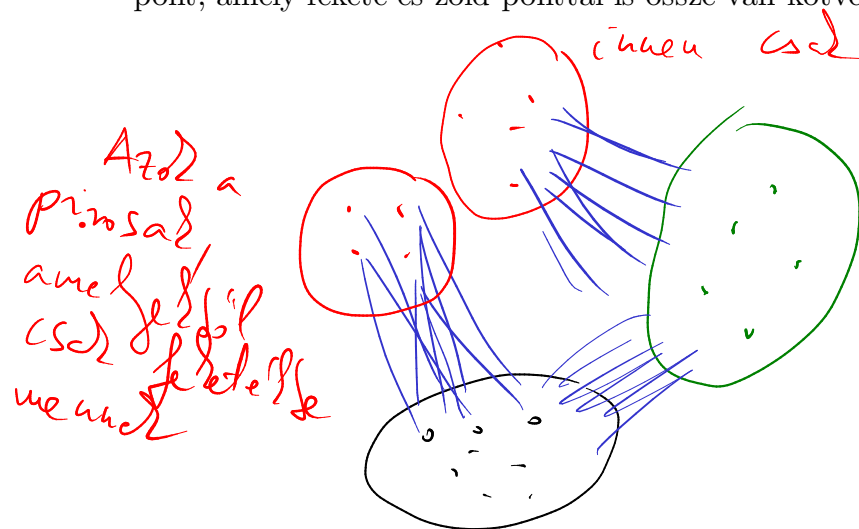
Az A és B csúcsok színe ugyanaz kell legyen!

KÉRTEN VAGYUNK. □

Hadwiger-Nelson probléma

3. A síkon adott 2021 pont, amelyeket kiszínezünk piros, fekete és zöld színekkel (mindegyik színt felhasználjuk). A különböző színű pontpárok némelyikét összekötjük egy szakasszal úgy, hogy minden pontból ugyanannyi szakasz induljon ki. Bizonyítsuk be, hogy van olyan piros pont, amely fekete és zöld ponttal is össze van kötve.

$\deg(v) \geq 1$



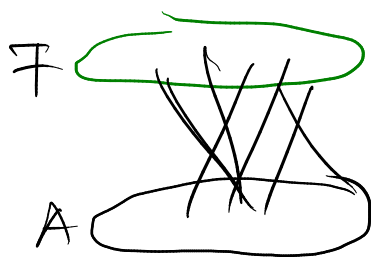
Az a piros pont, amelyhez csak fekete és zöld pontok vannak kötve.

Egy krumplin belül nincs él.
Minden pontból ugyanannyi él indul ki.

legyen ez als
(fokszám meg páros $\Rightarrow d$ páros)

Indirekt tfh, hogy minden piros pont vagy csak fekete pontokkal, vagy csak zöld pontokkal van összekötve.

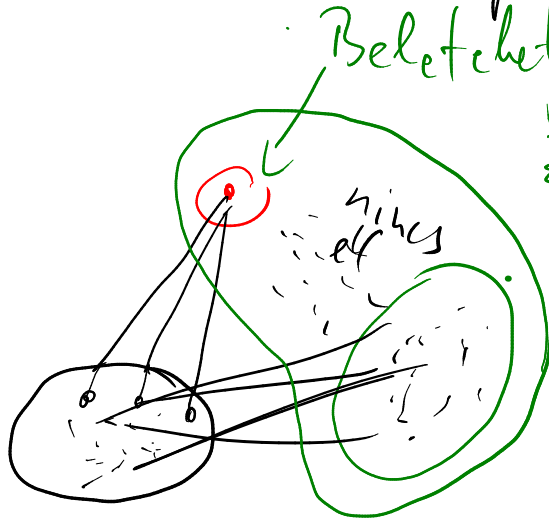
Ha csak 2 krumpli lenne, akkor nem állhatna fenn ez.



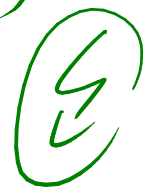
Nincs olyan páros gráf, amelynek 2021 csúcsa van, és minden csúcs foka ugyanaz a $d \geq 1$ szám.

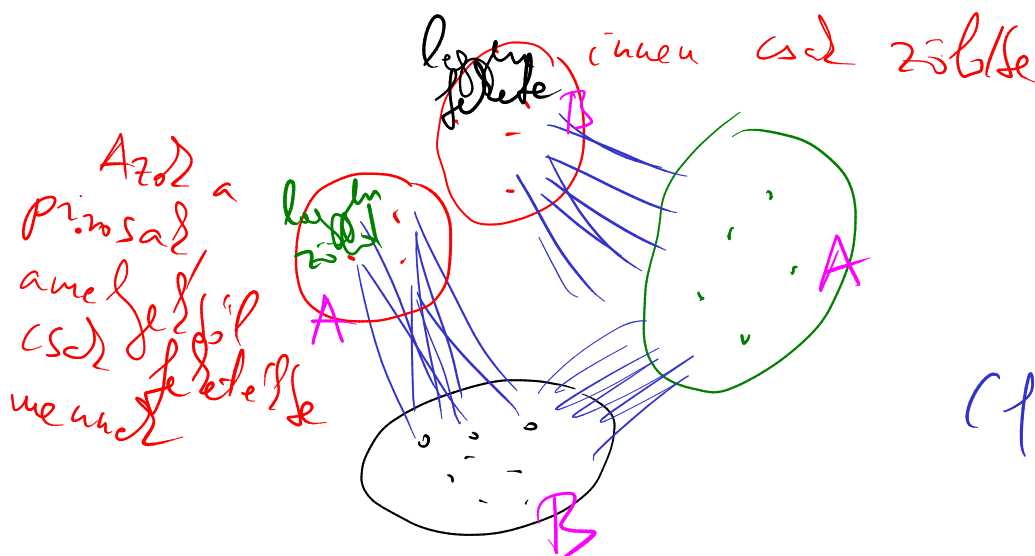
alsó fokszám = felső fokszám
 $|A| \cdot d = |F| \cdot d$
 $|A| = |F|$ $\because d \neq 0$
 2021 ptkan.

Spec. eset: 1 als



Bele lehet jutni a piros csúcsot a zöld krumpliába.
 (Attól mintha lehet a piros csúcsot zöldbe, nem jön létre "egyszerű" él.)

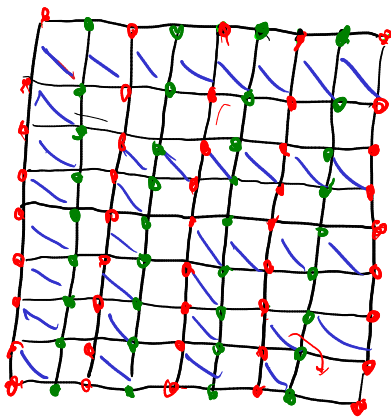




Ez egy páros gráf, egyik osztály az A -val jelölt krumplik uniója, a másik osztály a B -vel jelölt krumplik uniója. És láttuk, hogy olyan páratlan (2021) pontszámú páros gráf nem létezik, amelyben minden csúcs foka ugyanaz a nemnulla d szám.

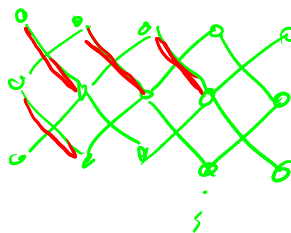
$$3:15 \quad 4 + \frac{1}{3} \text{ óra} \quad \square$$

1. A 8×8 -as sakktáblán minél több kiségyzet-átlót szeretnénk behúzni úgy, hogy semelyik kettőnek ne legyen közös pontja (közös végpont se). Legfeljebb hány átló húzható be?



$$3 + 7 + 11 + 15 = 36$$

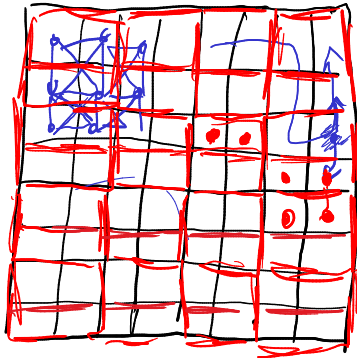
megvalósítható.



Színezzük az ábrán látható módon a kiségyzetek csúcsait. Így 36 zöld, 45 piros csúcsot kapunk. Minden kisátló 1 piros és 1 zöld pontot foglal el (különböző átlók esetén ezek különböző pontok), ezért nem lehet 36-nál több átlót lerakni. QED.

Megjegyzés: Azt sem használtuk, hogy az X alakú metszések is tiltottak; akkor sem lehetne többet lerakni, ha azokat megengedjük.

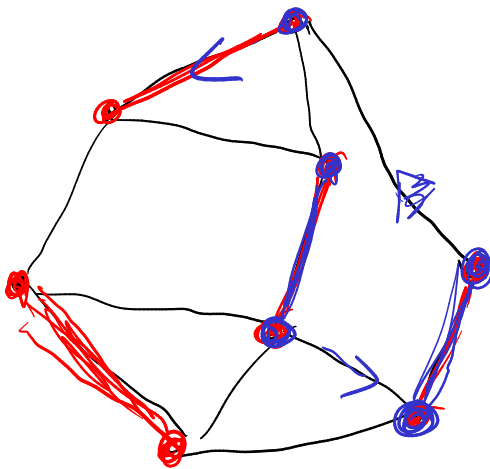
2. Ketten a következő játékot játsszák: Az 1. játékos a sakktábla valamelyik mezőre leteszi a királyt, majd a következő játékkal folytatva felváltva lépnek a királlyal úgy, hogy nem szabad olyan mezőre lépni, ahol a király már járt. Az veszít, aki nem tud lépni. Melyik játékosnak van nyerő stratégiája?



A 2. játékosnak van nyerő stratégiája.

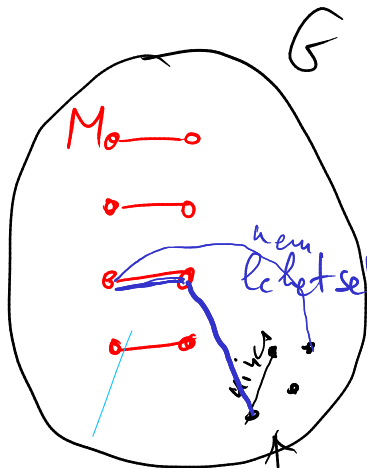
Parkettázzuk 2x1-es dominókkal a táblát az ábrán látható módon. A 2. játékos mindig lépjen az 1. játékos által megkezdett dominó másik mezőjére. Így amikor az 1. játékos jön, akkor mindig valahány dominó teljesen el van foglalva, a többi érintetlen, és kénytelen egy érintetlen dominó egyik mezőjére lépni. A 2. játékos tudja folytatni a stratégiáját, és ezzel az előbb leírt állapotba kényszeríteni az 1. játékost. Ezzel a 2. játékos biztosan nem fog elakadni, a megkezdett dominó másik mezőjére mindig tud lépni.

3. Két játékos egy adott G egyszerű gráf csúcsain lépked egy bábuval. Mindig az aktuális csúcs valamelyik szomszédjára léphet lépni, de tilos olyan csúcsra lépni, ahol korábban már járt a bábu. A játék kezdőlépése az, hogy az első játékos egy tetszőleges csúcsra leteszi a bábút, majd a második játékos következik, és a fenti szabály szerint felváltva lépnek. Az veszít, aki nem tud lépni. Jellemezzük azokat a gráfokat (gráfelméleti módon), amelyeknél a második játékosnak van nyerő stratégiája.



Ha van teljes párosítás G -ben (vagyis olyan párosítás, amely G minden pontját párosítja), akkor az előző feladat analógiájára nyer a 2. játékos. (A párosításbeli élek játsszák a dominók szerepét.)

Ha nincs teljes párosítás G -ben, akkor az 1. játékos nyer. Tekintsünk egy legnagyobb (lehető legtöbb élt tartalmazó) párosítást G -ben; ez nem teljes.



Legyen H a párosítatlan pontok halmaza.

Az 1. játékos tegye a bábut valamelyik H -beli csúcsba.

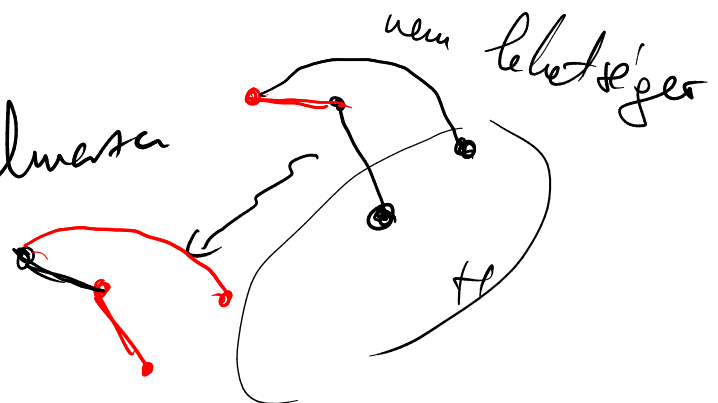
A 2. játékos kénytelen párosított pontra lépni (különben lenne olyan él G -ben, amit hozzáadhatnánk M -hez úgy, hogy párosítás maradjon).

Az 1. játékos léphet a pont M -beli párjára.

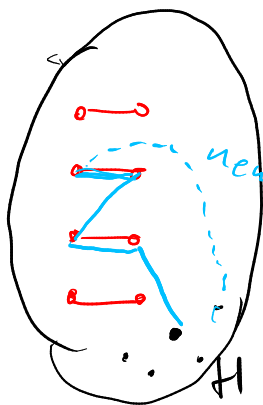
A 2. játékos most sem tud "kilépni" H -beli csúcsba.

Ugyanis, ha pl. a "nem lehetséges" él létezne, akkor

H : párosítatlan pontok halmaza



Ezen a 3 élből álló után megcserélve a piros-fekete éleket, egy nagyobb párosítást kapnánk.



nem lehetséges:



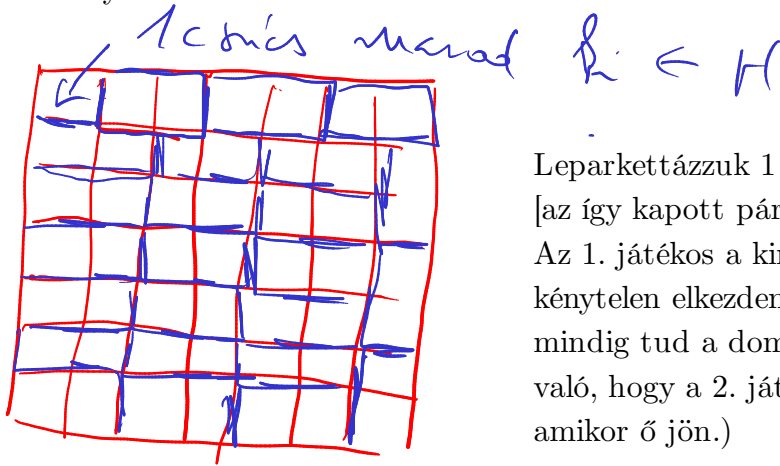
} növelhető lenne M .



A 2. játékos kénytelen mindig új dominót megkezdeni, amikor lép. Ugyanis ha ki tudna lépni H -ba, akkor egy fekete-piros-fekete-piros-...-piros-fekete utat írna le a bábu útja egy H -beli pontból indulva, egy másik H -beli pontba végződve. Ekkor fekete - piros éleket megcserélve egy M -nél (1 élel) nagyobb párosítást kapnánk, ami ellentmond M maximalitásának.

Az 1. játékos mindig tud a megkezdett pár párjára lépni, a 2. játékos mindig kénytelen új párt megkezdeni. Csak a 2. játékos akadhat el, az 1. játékos győz.

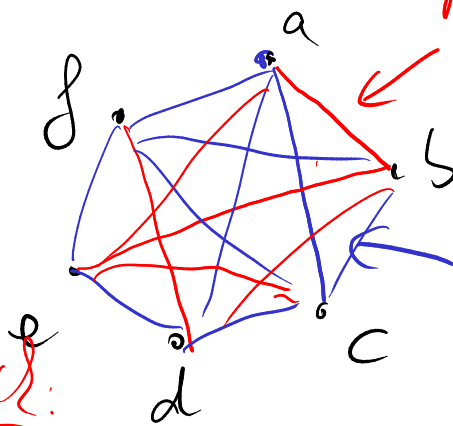
=> Királyos feladat 7x7-es táblára:



Leparkettázzuk 1 mező kivételével a táblát (ez megtehető).
[az így kapott párosítás maximális méretű lesz].

Az 1. játékos a kimaradt a mezőre teszi a bábút, a 2. játékos kénytelen elkezdni egy dominót, és innentől az 1. játékos mindig tud a domino másik mezőjére lépni. (Az most nyilvánvaló, hogy a 2. játékosnak muszáj új dominót megkezdeni, amikor ő jön.)

8. Igaz-e, hogy hat irracionális szám között mindig van három olyan, hogy bármely kettő összege irracionális? IGAZ.



$p_i + s \equiv a + s$ irrac.

$s + c \equiv a + c$ racionális

Projekttemák:

1.) Bolgár Pasziánsz = Bulgarian Solitaire

0.) Szakcsoha valószínűség

2.) Szakcsoha

3.) Logikai hite

4.) Polinomok a kombinatorikában* (?)

5.) Fibonacci-számok

6.) Gráfelmélet (fordítottan is)

7.) Extremális gráfelmélet / kombinatorika
"Legfeljebb hány él lehet egy gráfban, ha ..."

8.) Ramsey-típusú!
piros-kék színezés és
diagrammal való munka