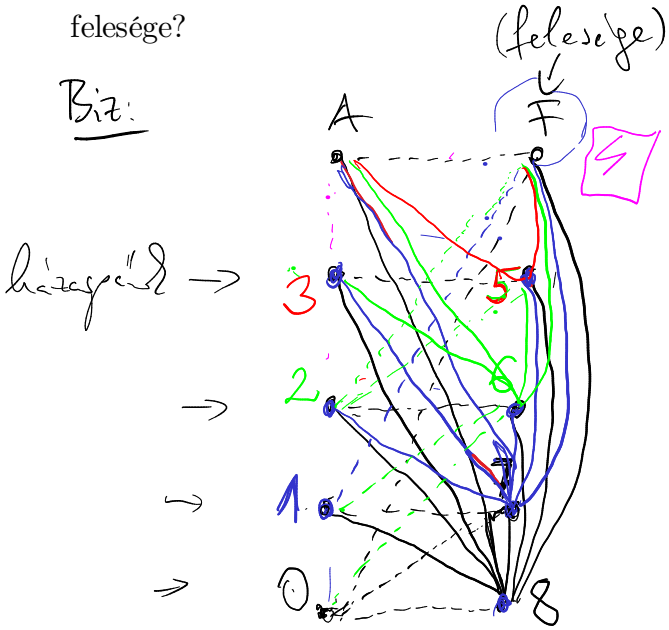
12. Egy partin öt házaspár vett részt. A parti elején elején látszólag véletlenszerűen néhányan kézfogással üdvözölték egymást (senki nem fogott kezet a házastársával). Az egyik férj A kíváncsi lett, és mindenkitől megtudakolta a kézfogásai számát (a feleségétől is). Meglepetten vette tudomásul, hogy kilenc különböző választ kapott. Hány emberrel fogott kezet a felesége?

Biz:



Mindenkinél a kézfogások száma egy 0 és 8 közötti szám. 9 embertől csak úgy kaphatunk 9 különböző választ a a {0,1,...,8} halmazból, ha a válaszok éppen 0,1,2,...,8 számok (mindegyik egyszer) valamilyen sorrendben.

F-nek a fokszáma nem lehet 8, mert akkor minden A-F-en kívüli emberrel össze lenne kötve, és így nem jelenne meg ott 0 fokszám. Tehát a 8-as fokszám A-F-en kívül megjelenik valahol, és az is világos, hogy az ő házastársa 0 fokú.

F fokszáma nem lehet 7 sem, mert akkor össze lenne kötve az összes kékkel jelölt csúccsal (a 0 fokúval és a saját házastársával nem lehet); és ekkor nem lenne a kékek között 1 fokú csúcs. => A 7-es fokszám is megjelenik A-F-en kívül. A 7 fokú csúcs össze van kötve mindenkivel, kivéve a 0 fokúval és a házastársával, így a 9 ember között csak a felesége lehet az 1 fokú.

...

És így tovább, F foka nem lehet 6, mert akkor az A-F páron kívüli csúcsokon minden fokszám legalább 3 lenne.

Hasonlóan a negyedik A-F-en kívüli pár fokszámai 3 és 5 lesznek. Így F-nek a fokszáma a hiányzó 4-es. (De valójában a kézfogások teljes rendszerét megkaptuk, és látjuk, hogy A-nak és F-nek is 4 a foka.) Tehát a válasz: 4.

1. Egy 8 fős társaságban mindenki felírta, hogy hány barátja van a társaságban. (A barátságok kölcsönösek.) A következő számokat kaptuk: $3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5$. Mutassuk meg, hogy legalább egy ember téves számot írt.

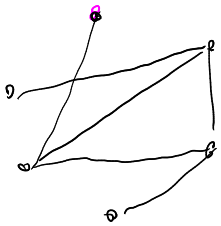
2. Bizonyítsuk be, hogy minden társaságban azoknak a száma, akik páratlan sok embert ismernek, páros szám. (Az ismeretségek kölcsönösek.)

3. Bizonyítsuk be, hogy minden legalább két főből álló társaságban található két olyan ember, akinek ugyanannyi ismerőse van.

1. A társaság, illetve a tagok közötti barátságok egy gráffal szemléltethetők. A megadott számok a fokszámok. De ez nem lehetséges, mert a fokszámösszeg minden gráfban páros, ez pedig itt nem teljesül.

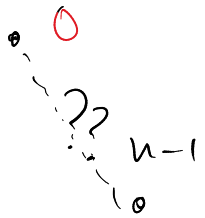
2. Fokszámösszeg páros <=> Páros sok páratlan fokszám van.

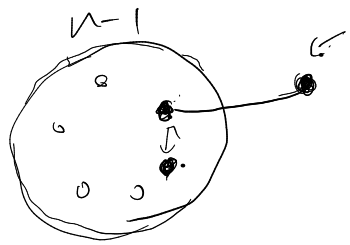
3.



Legyen n a csúcsok száma, n>=2.
Minden csúcsnak a fokszáma egy 0 és n-1 közötti szám.
INDIREKT tfh különbözőek a fokszámok. Ez azt jelenti, hogy n db különböző fokszámunk van a {0,1,...,n-1} halmazból. Mivel ez egy n elemű halmaz, ezért ez csak úgy lehet, ha a fokszámaink éppen a 0,1,...,n-1 számok (mindegyik egyszer).

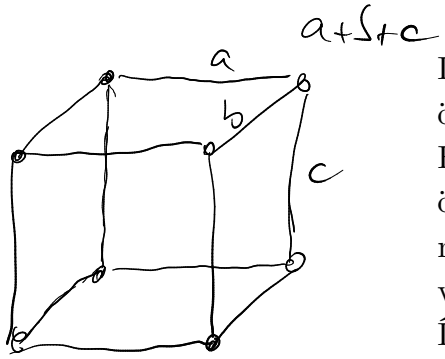
De ez nem lehetséges, mert a 0 fokú csúcs nincs senkivel összekötve, az n-1 fokúval sem, de az n-1 fokú össze van kötve mindenkivel, a 0 fokúval is. Ez az ellentmondás bizonyítja az állítást.





5. Egy kocka éleit tetszőleges módon megszámoztuk az 1-től 12-ig terjedő egész számokkal. Ezek után a kocka mindegyik csúcsához felírtuk azt a számot, amelyik egyenlő a belőle kiinduló élekhez írt számok összegével.

a) Bizonyítsuk be, hogy ezek az összegek nem lehetnek mind egyenlők.



INDIREKT tfh. minden csúcsnál ugyanaz az S összeg adódik.
Ha minden csúcsra felírjuk a 3 tagú összeget, és ezeket az összegeket összeadjuk, akkor mindegyik élre írt számot kétszer vettük bele a végső összegbe (a két végpontjához tartozó összegnél). Így ha az éleken az 1,...,12 számok vannak szétosztva, akkor az összegre 2*(1+2+...+12) = 12*13 adódik.

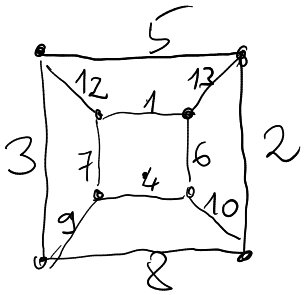
Másrészt ez az összeg 8S, mert minden csúcsnál S a háromtagú összeg.
Azaz 12*13 = 8S, de ez nem lehetséges, mert a 12*13 nem osztható 8-cal.

b) Vajon egyenlők lehetnek-e valamennyien abban az esetben, ha az egyik élhez írt számot 13-ra változtatjuk?

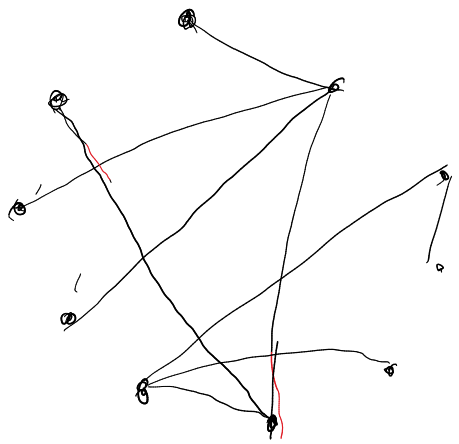
Az előző gondolatmenet érvelése alapján a számok összege * 2 -nek 8-cal oszthatónak kell lennie.

Ez teljesül például, ha a 11-et 13-ra cseréljük, azaz a számaink az 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,12,13.

(S=20)

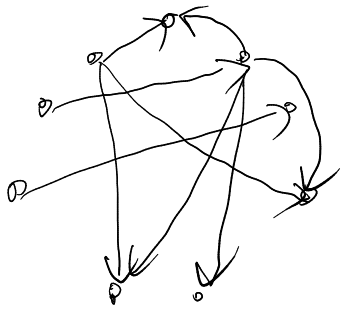


6. Egy körmérkőzéses sakktornán 10 résztvevő van. 11 partit már lejátszottak. Bizonyítsuk be, hogy van olyan versenyző, aki már legalább 3 partit játszott.



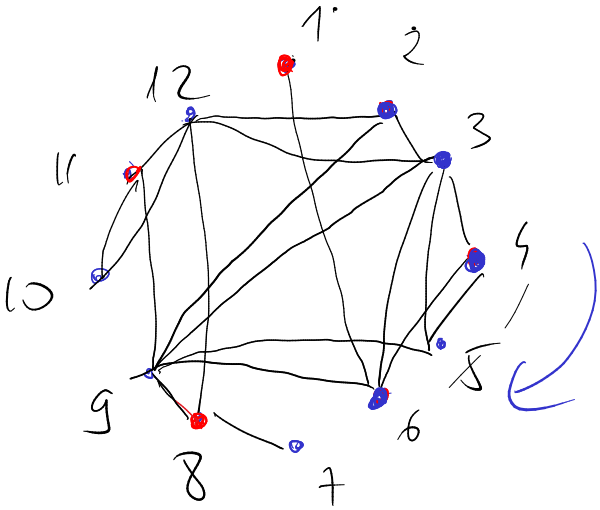
INDIREKT tfh minden fokszám legfeljebb 2.
Ekkor a fokszámösszeg legfeljebb 2+2+...+2 = 2*10 = 20.
Fokszámtétel szerint az élszám = fokszámösszeg/2 $\leq$ 10.
De ez ellentmondás, mert az élszám 11.

9. Egy 9 tagú társaságban mindenki pontosan öt másik embernek átad 100 Ft-ot. Bizonyítsuk be, hogy az ajándékozások után van két olyan ember, akinek ugyanannyi forinttal változott a pénze (a változás előjelét is figyelembe véve).

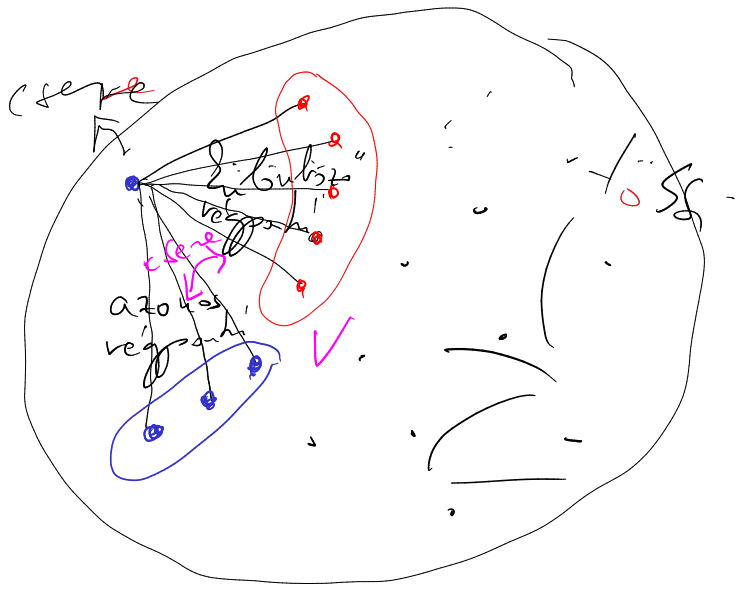


Az ajándékozást egy irányított gráffal lehet modellezni.
Tudjuk, hogy minden csúcs kifoka 5.
Az "irányított gráfok fokszámtétele" szerint a kifokok összege (9*5) egyenlő a befokok összegével. Tehát a befokok összege = 45.
Azt kell belátnunk, hogy lesz két olyan csúcs, melyeknek megegyezik a befoka. Minden befok egy 0 és 8 közötti szám. Ha 9 különböző befok lenne, akkor a befokok éppen a 0,...,8 számok lennének.
De 0+1+...+8 = 36, ami nem 45. Tehát ez nem lehetséges.
Készen vagyunk.

14. Az erdőben 12 törpe él piros vagy kék házikóban. Az év i-edik hónapjában az i-edik törpe felkeresi összes barátját, hogy eldöntse, átfesse-e a saját házát. Akkor és csak akkor fogja átfesteni (pirosról kékre vagy fordítva), ha a barátai (szigorú) többsége más színű házban lakik, mint ő. Ez évről évre így történik. Bizonyítsuk be, hogy egy idő után már senki nem festi át a házikóját! (A barátságok kölcsönösek és nem változnak az idő múlásával, és természetesen nem feltétlenül barátja mindenki mindenkinek.)

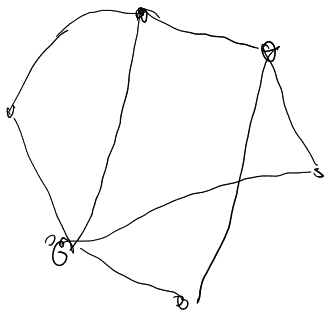


11:10



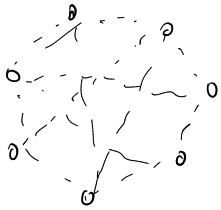
A lényeg: Amikor házátfestés történik, akkor az egyszínű élek (= azonos színű a két végpont) száma nő ebben a gráfban. Mivel az egyszínű élek száma legfeljebb annyi lehet, mint a gráf élszáma, ezért csak véges sok átszínezés történhet. Azaz lesz olyan év, amikor nem történik átszínezés, és onnantól kezdve nyilván a későbbi években sem, a folyamat megáll. $\square$

11. Egy üdülő bármely három lakója között van kettő, aki nem ismeri egymást, de bármely hét között van legalább kettő, aki ismeri egymást. Az üdülés befejeztével mindenki megajándékozza minden ismerősét egy-egy ajándéktárggyal. Bizonyítsuk be, hogy n lakó esetén legfeljebb 6n ajándéktárgyat adtak át.



Fa.: Fokszámösszeg $\leq 6n$, ha

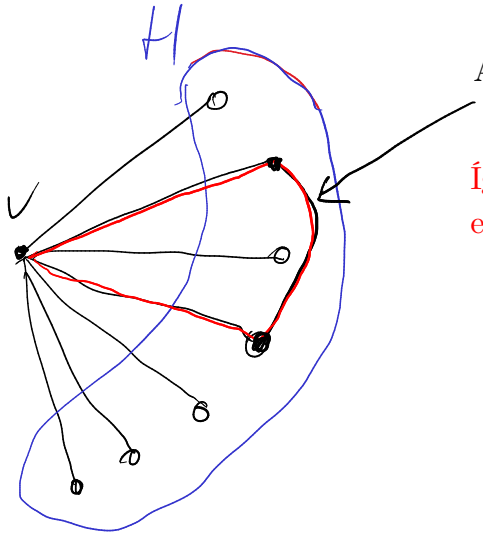
(1) ← nincs a gráfban háromszög

(2)  ← nincs 7 pontú független pont-halmaz.

(Független ponthalmaz: Olyan ponthalmaz a gráfban, hogy semelyik kettő közöttük nincs él.)

Belátjuk, hogy a feltételekből következik, hogy minden pont fokszáma legfeljebb 6, és így a fokszámösszeg nyilván legfeljebb 6n lesz.

Indirekt tfh. van legalább 7 fokú csúcs, és tekintsük 7 szomszédját.



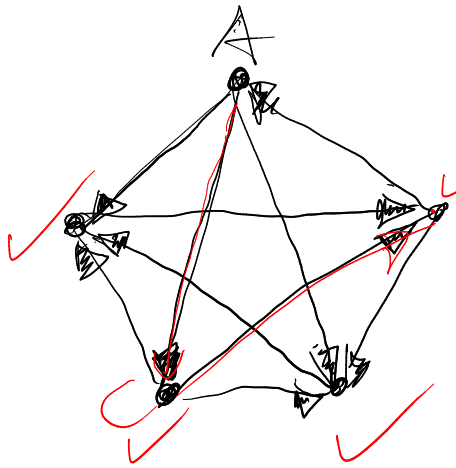
A (2) feltétel szerint van él H valamely két pont között.

Így kialakul egy háromszög a gráfban (v a 3. csúcs), ami ellentmondás, mert nincs háromszög a gráfban.

$\square$

13. Egy pingpongbajnokságon mindenki egyszer játszott mindenkivel. Azt mondjuk, hogy az A játékos közvetett módon legyőzte a B játékost, ha van olyan A által megvert C játékos, aki B-t megverte. Igazoljuk, hogy van olyan játékos, aki minden más játékost legyőzött közvetlenül vagy közvetett módon.

pszeudogyőztes.



A bajnokság mérkőzéseinek eredményeit egy irányított gráffal szemléltethetjük: Bármely két csúcs közé felveszünk egy élt, az élnek megfelelő megkérkőzés eredményétől függően irányítva: Győztes felé mutasson a nyíl.

(C „közbeiktatásával" legyőzte A)

$A \to B \equiv$ A legyőzte B-t.

Feladat:

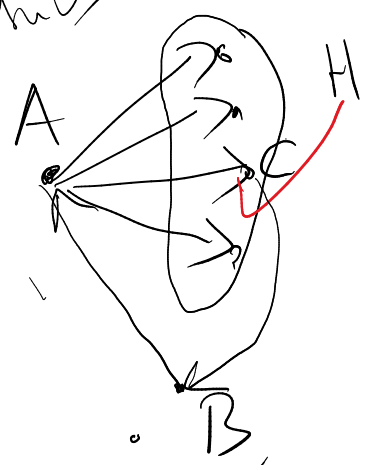
Ebben az irányított gráfban mindig van olyan csúcs, amelyből mindegyik másik játékos elérhető egy vagy két lépésben (a nyíl irányába haladva): Minden csúcsba vezet A-ból irányított él, vagy egy másik csúcs közbeiktatásával két irányított él.

.

Belátjuk, hogy egy olyan csúcs, amelynek maximális a kifoka (több ilyen is lehet), az pszeudogyőztes.

Legyen A egy maximális kifokú csúcs.

max-i csúcs



H: Azon csúcsok, amelyekbe A-ból vezet él, azok le vannak győzve közvetlenül

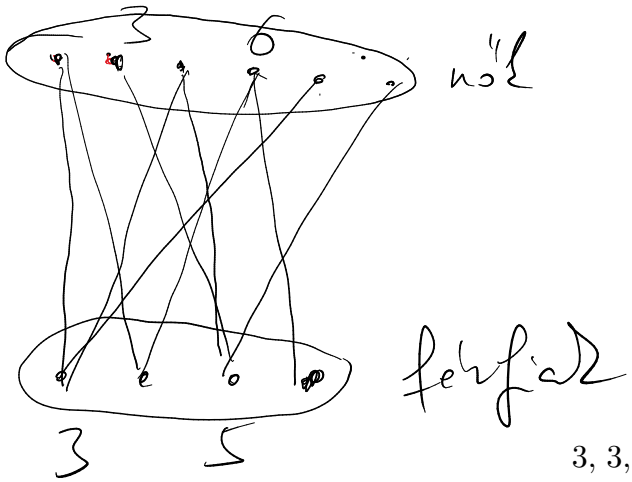
cél: él közvetetten vanak legyőzve A által

Legyen B egy tetszőleges olyan csúcs, amely legyőzte A-t.

Van olyan C játékos H-ban (A "kifok"-szomszédai között), aki legyőzte B-t. Ellenkező esetben ugyanis az összes B-ből H-ba vezető él a H felé lenne irányítva, ami azt jelentené, hogy B-nek nagyobb lenne a kifoka, mint A-nak (ami nem lehet, mert A kifoka maximális): Ugyanis B-ből vezetne él kifelé H összes csúcsához, és az A csúcshoz is, és |H| az A kifoka.
Ezen a C játékoson keresztül A közvetett módon legyőzte B-t. És mivel B tetszőleges nem közvetlenül legyőzött játékos volt, készen vagyunk. □

8. Egy klubesten tizennégy fő vett részt. Egy játék során mindenki felírta egy cédulára, hogy az est folyamán hány különböző (ellenkező nemű) partnerrel táncolt. A cédulákon rendre a
3, 3, 3, 3, 3, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6
számok szerepeltek. Bizonyítsuk be, hogy valaki tévedett.

páros gráf

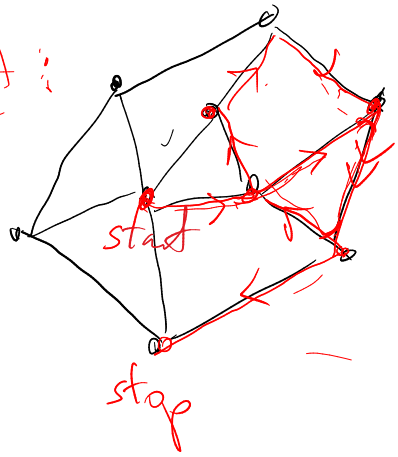


3, 3, 3, 3, 3, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6

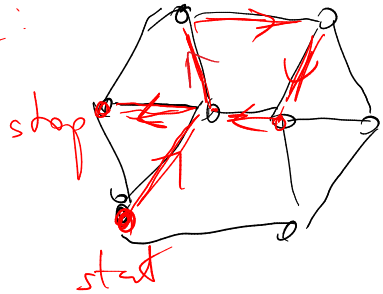
Feladat = Lehetséges-e, hogy egy páros gráfnak a megadott számok a fokszámai?

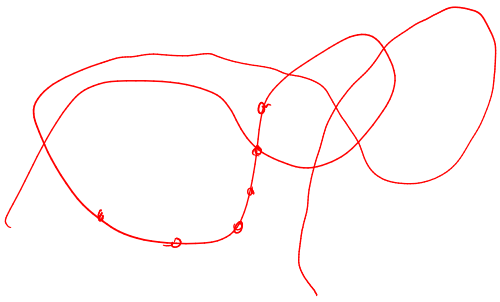
Páros gráf esetén igaz, hogy a két osztályra megegyezik a bennük szereplő csúcsok fokszámösszege. (Mindkét fokszámösszeg az éleket számolja meg). =>
Ha van ilyen fokszámsorozatú páros gráf, akkor a megadott fokszámok két csoportra oszthatók úgy, hogy az egyik csoportba (az egyik osztályra) került fokszámok összege megegyezik a másik csoportba került fokszámok összegével.
De ilyen csoportosítása nincs a megadott számoknak: Ha két csoportra osztom a számokat, akkor az '5' csoportjában 3k+2 alakú lesz az összeg, a másik csoportban 3-mal osztható az összeg, azaz nem lesznek egyenlők az összegek. □

SÉTA:

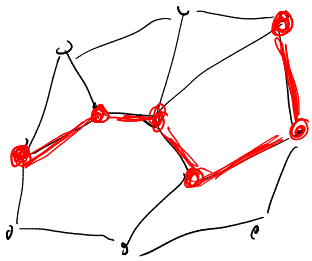


VONAL:

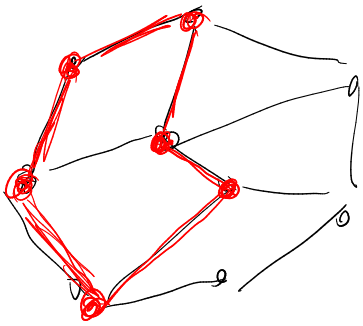


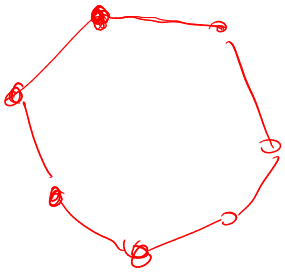


ÚT:



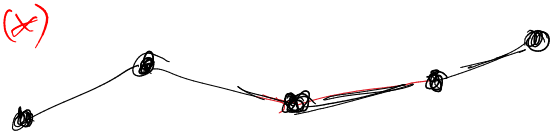
KÖR

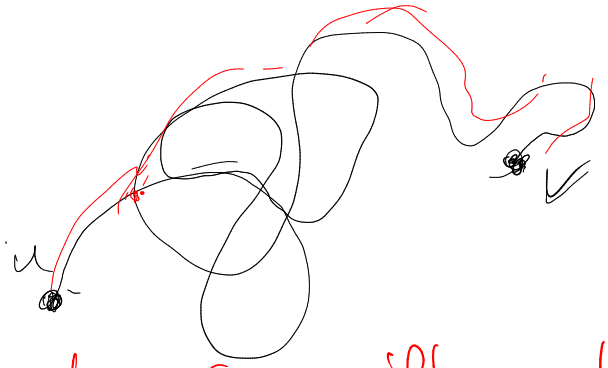


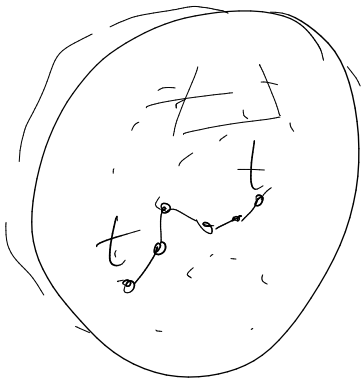


1. Mutassuk meg, hogy ha egy gráfban pontosan két páratlan fokú csúcs van, akkor vezet köztük út.

Séta (*)



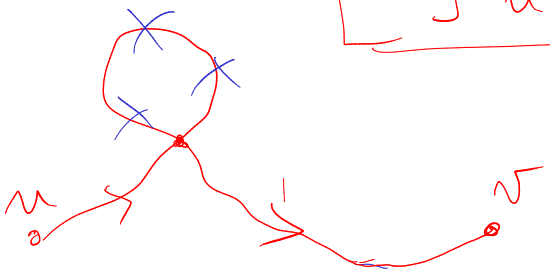




(*) Egy tetsz. G gráfban, tetsz. u, v csúcsokra igaz, hogy:

$$\boxed{\begin{array}{c}\exists\ u \rightsquigarrow v \text{ séta } G\text{-ben} \\ \Updownarrow \\ \exists\ u \rightsquigarrow v \text{ út } G\text{-ben}\end{array}}$$

$\Uparrow$ tudni:

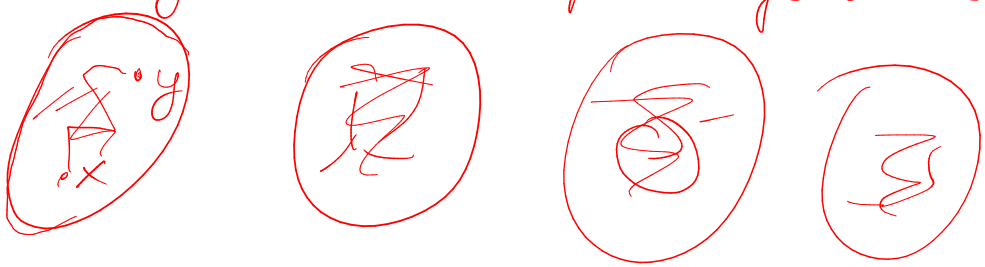


$\Downarrow$ bizonyítása:

Vegyünk egy legrövidebb u->v sétát. Ebben nem lehet csúcsismétlés, mert ha pl. a w csúcs (legalább) kétszer előfordulna, akkor két ilyen előfordulás közötti sétaszakaszt kivágva rövidebb sétát kapnánk, ld. ábra.

Vissza a feladathoz:

Legyen x és y a két páratlan fokú csúcs.



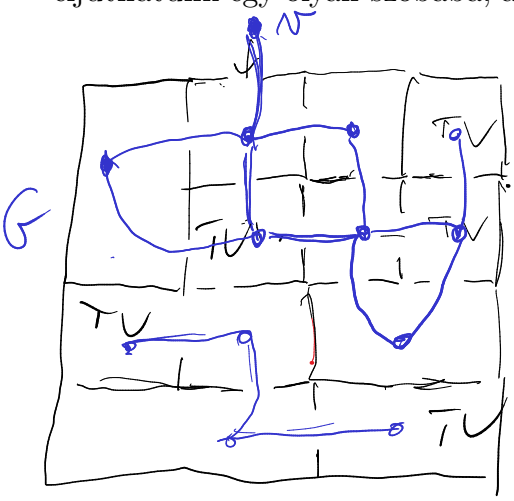
G gráf komponensei.

Cél: x és y egy komponensben vannak.

Ha külön komponensben lennének, akkor ez a két komponens egy-egy olyan gráfot adna, amiben a fokszámösszeg páratlan. De ez nem lehetséges.

Cél => Kétten vagyunk, egy komponensen belül bármely 2 csúcs közt van út. □

2. Egy nagy ház minden olyan szobájában van TV-készülék, amelyiknek páratlan sok ajtaja van. Csak egy bejárata van a háznak. Mutassuk meg, hogy ezen a bejáraton bemenve mindig eljuthatunk egy olyan szobába, amelyikben van TV.

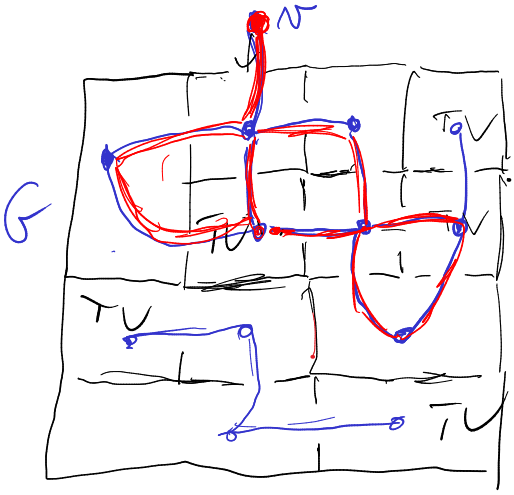


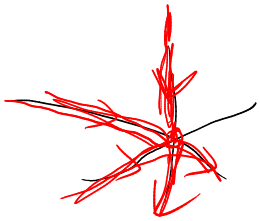
Vegyünk fel egy gráfot, amelynek csúcsai a szobáknak (+ a külvilágnak) felelnek meg, és minden ajtónak egy él felel meg (ld. ábra).

Kell: A külvilágnak megfelelő (elsőfokú) csúcsból el lehet jutni egy páratlan fokú csúcsba sétával.

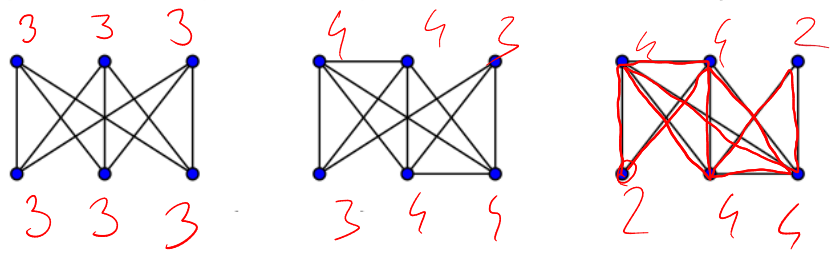
Cél: Egy v páratlan fokú csúcsból el lehet jutni sétával valamelyik másik páratlan fokú csúcsba. Ezt alkalmazva a külvilágnak megfelelő csúcsra, készen vagyunk.

Cél bizonyítása: v komponensében kell még lennie páratlan fokú csúcsnak (indoklás ugyanaz, mint fent).





8. Az alábbi gráfok közül melyekben van nyílt, illetve zárt Euler-vonal? (Ha van, akkor adjuk is meg.)



6 (>2) páratlan fokú csúcs ⇓ nincs Euler-vonal

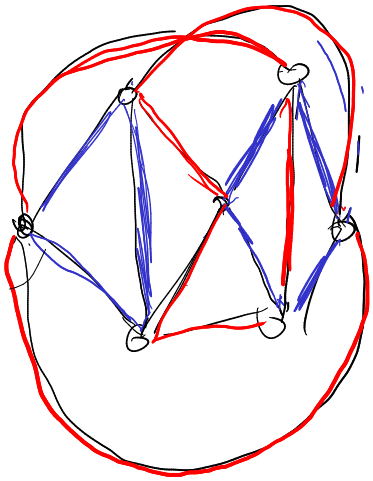
2 páratlan fokú csúcs + összefüggő a gráf ⇓ van nyílt Euler-vonal (Euler-tétel)

∀ csúcs foka páros + öf. a gráf ⇓ ∃ zárt Euler-vonal

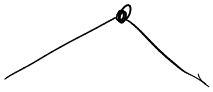
13. Igazoljuk, hogy egy 4-reguláris egyszerű gráf éleit kiszínezhetjük pirossal és kékkel úgy, hogy minden csúcsra két piros és két kék illeszkedjen.

Reguláris gráf = minden csúcs foka ugyanannyi.
4-reguláris gráf = minden csúcs foka 4.

Feltehető, hogy a gráf összefüggő.
(Ha nem az, akkor komponensenként csináljuk.)



Egy 4-reguláris összefüggő gráfban van zárt Euler-vonal (4-reguláris => minden csúcs foka páros).



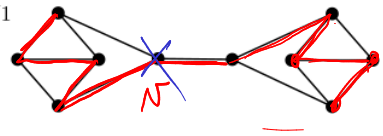
Járjuk be az Euler-vonal vonal mentén a gráfot, és színezzük felváltva az éleket pirossal és kékkel. Egy csúcsot tekintve minden áthaladással egy illeszkedő élt pirosra, egy másikat kékre színezünk. Két áthaladás után 2 kék és 2 piros élünk lesz a csúcs körül.
Mivel az élek száma páros (4*csúcsszám)/ 2, ezért az Euler-vonal legutolsó éle más színű lesz, mint a kiinduló él, ezért a kezdő(=vég)pont is jól lesz színezve.

$\square$

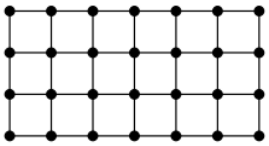
15:20

15. Döntsük el, hogy az alábbi gráfokban van-e Hamilton-út, Hamilton-kör:

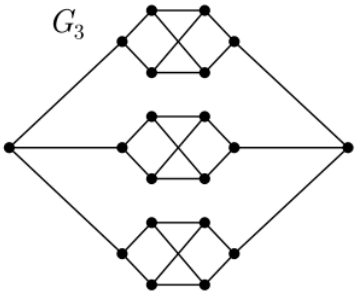
G_1

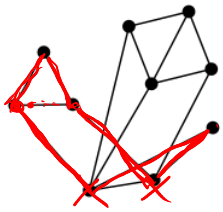


G_2



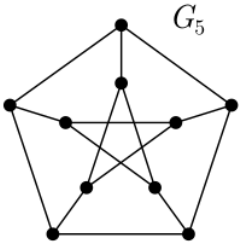
G_3



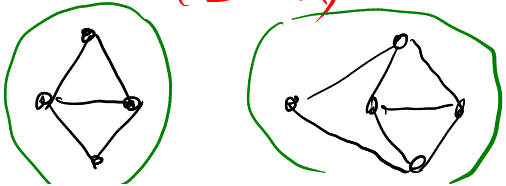


G_4

G_5

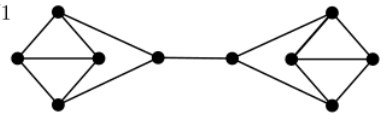


G_1-ben van Hamilton-út, ld. a'fe.
G_1-ben nincs Hamilton-kör, mert a v csúcsot ($k=1$ csúcsot) elhagyva $2 (\geq k+1)$ komponensre esik szét: $G_1 - v$:

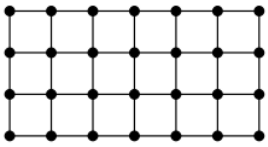


15. Döntsük el, hogy az alábbi gráfokban van-e Hamilton-út, Hamilton-kör:

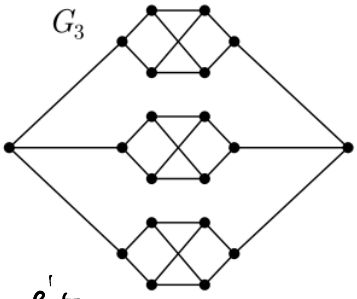
G_1

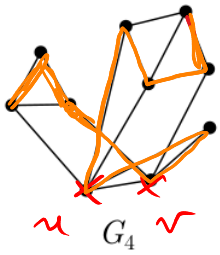


G_2



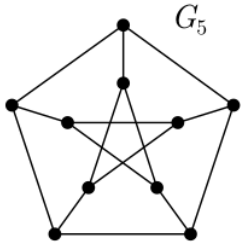
G_3





G_4

G_5

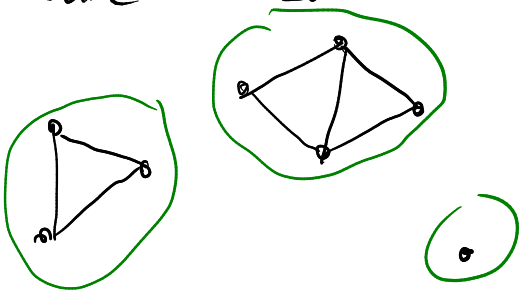


az u és v

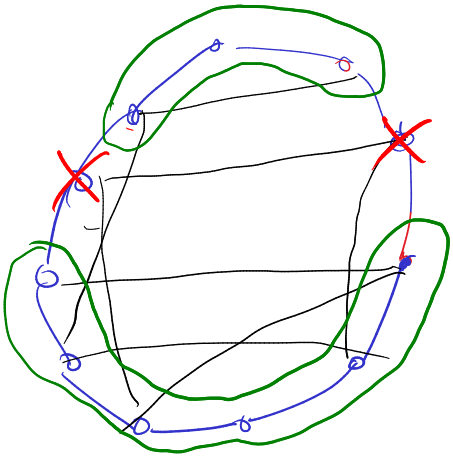
G_4-ből 2 csúcsot elhagyva 3 komponense

esik $\Rightarrow$ Nincs benne Ham.-út.

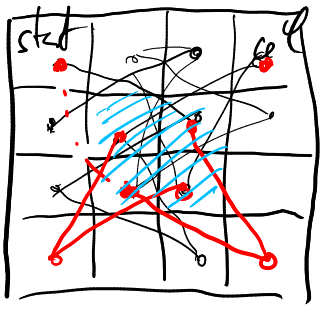
$G_4 - \{u,v\}$:



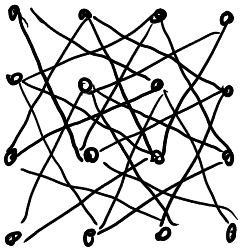
G_4-ben van Hamilton-út, lásd ábra.



19. Bejárható-e a 4×4-es sakktábla lóugrásokkal úgy, hogy minden mezőre egyszer lépünk?



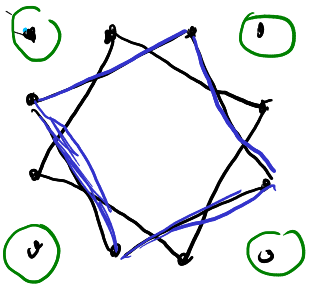
Tekintsük azt a gráfot, amelynek csúcsai a mezők, és két mező között pontosan akkor van él, ha a huszár egyikről a másikra léphet.

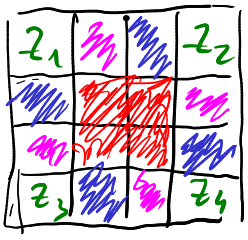


Kérdés: Van-e a gráfban Hamilton-út?

Hagyjuk el a 4 középső csúcsot:

6 (>= 4+2) komponenst kapunk, így a tétel szerint nincs benne Hamilton-út. □





A1, B3, ...

Z1, ... □