

11. PÁROSÍTÁSOK, EXTREMÁLIS GRÁFELMÉLET, RAMSEY-ELMÉLET KÖZÉPISKOLÁS FELADATOKBAN

1. A 8×8 -as sakktáblán minél több kisenyget-átlót szeretnénk behúzni úgy, hogy semelyik kettőnek ne legyen közös pontja (közös végpont se). Legfeljebb hány átló húzható be?
2. Ketten a következő játékot játsszák: Az 1. játékos a sakktábla valamelyik mezőre leteszi a királyt, majd a következő játékoskal folytatva felváltva lépnek a királlyal úgy, hogy nem szabad olyan mezőre lépni, ahol a király már járt. Az veszít, aki nem tud lépni. Melyik játékosnak van nyerő stratégiája?
3. Két játékos egy adott G egyszerű gráf csúcsain lépked egy bábuval. Mindig az aktuális csúcs valamelyik szomszédjára léphet lépni, de tilos olyan csúcsra lépni, ahol korábban már járt a bábu. A játék kezdőlépése az, hogy az első játékos egy tetszőleges csúcsra leteszi a bábút, majd a második játékos következik, és a fenti szabály szerint felváltva lépnek. Az veszít, aki nem tud lépni. Jellemezzük azokat a gráfokat (gráfelméleti módon), amelyeknél a második játékosnak van nyerő stratégiája.
4. a) Egy versenyen $(m - 1)n + 1$ ember szerepel. Bizonyítsuk be, hogy van közöttük m ember, akik páronként nem ismerik egymást, vagy van egy ember, aki legalább n másikat ismer.
b) Igaz marad-e az állítás, ha eggyel kevesebb ember vesz részt a versenyen?
5. Egy n pontú teljes gráf ($n \geq 3$) éleit kiszínezzük két színnel. Bizonyítsuk be, hogy lesz olyan Hamilton-kör, amely teljesen egyszínű, vagy két egyszínű ívből áll.
Következmény: Bárhogy színezzük két színnel az n pontú teljes gráf éleit, mindig kialakul legalább $n/2$ hosszú egyszínű út.
6. Bizonyítsuk be, hogy hat ember között mindig van három, akik páronként ismerik egymást vagy páronként nem ismerik egymást (Az ismeretségek kölcsönösek.)
7. 17 ember vesz részt egy partin. Közülük bármelyik kettő vagy nem ismeri egymást, vagy jó barátok, vagy utálják egymást. Igazoljuk, hogy van közöttük 3 olyan ember, akik mind idegenek egymás számára, mind jó barátok, vagy mind utálják egymást.
8. Igaz-e, hogy hat irracionális szám között mindig van három olyan, hogy bármely kettő összege irracionális?
9. Az n pontú teljes gráf éleit kiszíneztük n színnel, mindegyik színt felhasználva ($n \geq 3$). Mutassuk meg, hogy kialakul „tarka” háromszög, azaz olyan három pontú kör, amelynek 3 éle 3 különböző színt kapott.
10. Mutassuk meg, hogy ha egy n pontú egyszerű gráfban ($n \geq 4$) nincs két független él (azaz nincs 2 élű párosítás), akkor a gráfnak legfeljebb $n - 1$ éle lehet.
- 11.⁺ Három iskola mindegyikében n tanuló van. Minden tanuló a másik két iskolából együttvéve $n + 1$ tanulót ismer. Bizonyítsuk be, hogy választható a három iskola mindegyikéből egy-egy tanuló úgy, hogy mindegyikük ismeri a másik kettőt. (Az ismeretségek kölcsönösek.)