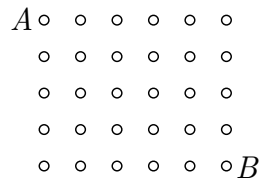


10. SZÍNEZÉSEK

1. Az ábrán látható karikák egy telken lévő gyümölcsfákat jelölik.



Az A -val jelölt fán egy cinke, a B -vel jelölt fán egy rigó ül. Időegységenként mindkét madár a tőle északi, déli, keleti vagy nyugati irányban álló legközelebbi fák egyikére repül. Lehetséges-e, hogy valamikor mindketten ugyanazon a fán ülnek?

2. Mutassuk meg, hogy tetszőleges hurokélmentes gráfból páros gráfot kaphatunk legfeljebb az élek felének elhagyásával.

3. A síkon adott 2021 pont, amelyeket kiszínezzünk piros, fekete és zöld színekkel (mindegyik színt felhasználjuk). A különböző színű pontpárok némelyikét összekötjük egy szakasszal úgy, hogy minden pontból ugyanannyi szakasz induljon ki. Bizonyítsuk be, hogy van olyan piros pont, amely fekete és zöld ponttal is össze van kötve.

4. A sík pontjait kiszínezzük három színnel. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges színezés esetén lesz két pont, amelyek távolsága egységnyi, és amelyek azonos színűek.

5. Definiáljuk a következő egyszerű gráfot: A gráf csúcsai egy sakktábla mezői, és két csúcs (mező) pontosan akkor összekötött, ha egy király egyikről a másikra léphet szabályos lépéssel. Mennyi a kapott gráf kromatikus száma?

6. Az $1, 2, \dots, 100$ számokat úgy akarjuk kiszínezni, hogy a relatív prímek különböző színt kapjanak. Igazoljuk, hogy legalább $\pi(100) + 1$ színre van szükségünk, és ennyi elég is, ahol $\pi(100)$ azt jelöli, hogy hány prímszám van 1-től 100-ig.

7. Legalább hány csoportba kell beosztanunk az első száz pozitív egész számot, ha azt akarjuk, hogy egyetlen csoportban se legyen két olyan szám, amelyek egyike többszöröse a másiknak?

8. Egy országban kör alakú autópályákat építettek úgy, hogy semelyik két kör nem érinti egymást. Bizonyítsuk be, hogy az autópályák kereszteződéseiben létesíthetők kétszintű csomópontok úgy, hogy tetszőleges autópályán körbehaladva a felső illetve alsó szintek váltakozzanak. (Egy kereszteződésben pontosan két autópálya találkozik.)

9. Adott a síkon néhány egyenes úgy, hogy semelyik három nem halad át közös ponton. Igazoljuk, hogy a keletkezett metszéspontokat ki lehet színezni úgy 3 színnel, hogy mindegyik egyenesen a szomszédos csúcsok különböző színűek legyenek.

- 10.⁺ Mi az a minimális színszám, ahány színnel ki lehet színezni a (végtelen) négyzetrács mezőit úgy, hogy bárhogy rakunk le „L-alakot” (lásd ábra), az négy különböző színű mezőt takarjon le?

